

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Curso de Pós-Graduação em Matemática

**UM EXEMPLO DE BILHAR POLIGONAL
HIPERBÓLICO COM TRAJETÓRIAS DENSAS**

por

ÍTALO MODESTO DUTRA

Porto Alegre, outubro de 1998

Dissertação submetida por ÍTALO MODESTO DUTRA * como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

Banca Examinadora:

Dr. Albert Meads Fischer

Dr. Artur Oscar Lopes

Dr. Claus Ivo Doering

Data de Defesa: 23 de outubro de 1998

18137

DISSERTACAO/MAT
D978U
1998
E.2

MAT
1999/229902-1
1999/03/30
8352

* Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, Edson e Marta, e meus familiares pela torcida à distância.

À família Oliveira Gibbon, pelo apoio e ajuda.

Aos amigos Andréia, Simone, Leivas, Edson, Giovanni e Ivan.

De forma especial agradeço ao Luiz Fernando, pelo apoio, pelas excelentes conversas e pelos muitos momentos em que me ouviu.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o modelo do semi-plano superior de Poincarè da Geometria não-Euclidiana de Bolyai-Lobachevsky e mostramos que o bilhar hiperbólico no triângulo de ângulos 0 , $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$ tem trajetórias densas, isto é, trajetórias que se aproximam com precisão arbitrária de qualquer ponto e direção dados.

ABSTRACT

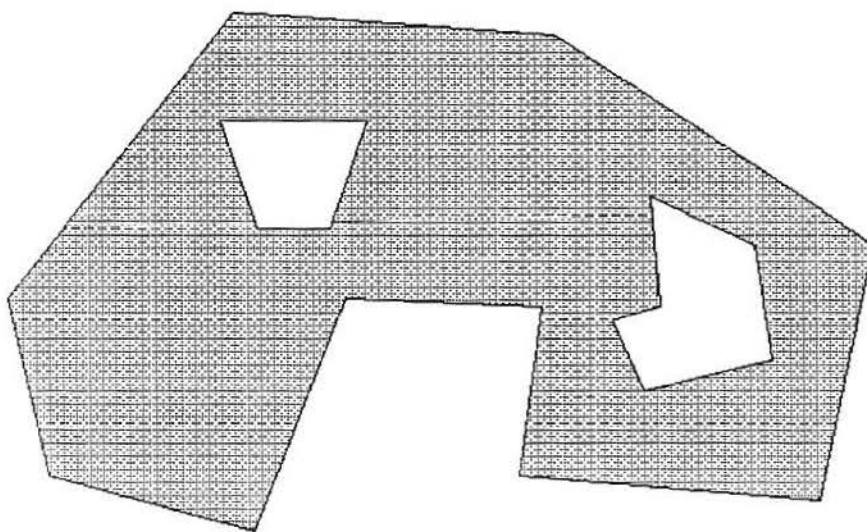
In this work we present Poincarè's upper half-plane model of the non-Euclidean Geometry of Bolyai-Lobachevsky and show that the hyperbolic billiard on the triangle of angles 0 , $\frac{\pi}{3}$ and $\frac{\pi}{2}$ has dense orbits, i.e. trajectories coming arbitrarily close to any given point and direction.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	01
1. TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS.....	07
2. O MODELO DO SEMI-PLANO DE POINCARÉ.....	23
3. O BILHAR TRIANGULAR HIPERBÓLICO.....	35
BIBLIOGRAFIA.....	50

INTRODUÇÃO

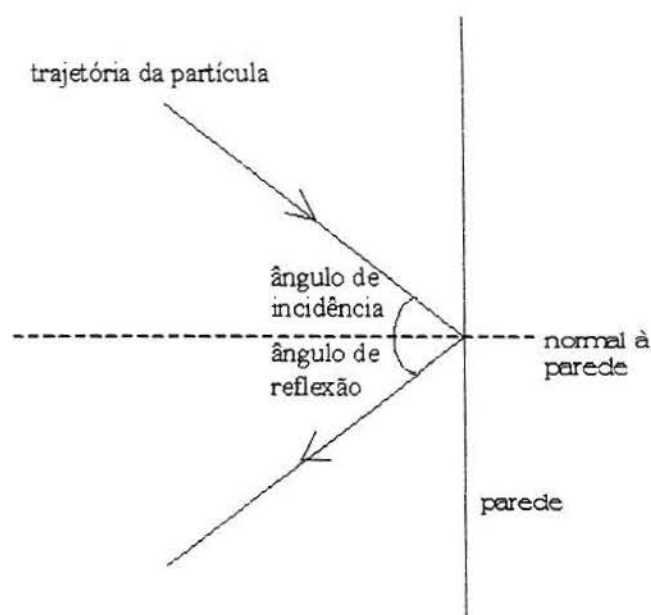
Um *bilhar poligonal plano* é um sistema dinâmico que consiste numa partícula movendo-se livremente sem atrito numa mesa poligonal plana e refletindo-se elasticamente nas paredes da mesa. Mais precisamente, por uma mesa poligonal plana, queremos dizer uma região do plano que é fechada e limitada e cujo bordo é a união de um conjunto finito de segmentos de reta, as paredes da mesa.



Mesa poligonal plana

Dizer que o ponto move-se livremente e sem atrito quer dizer que o ponto,

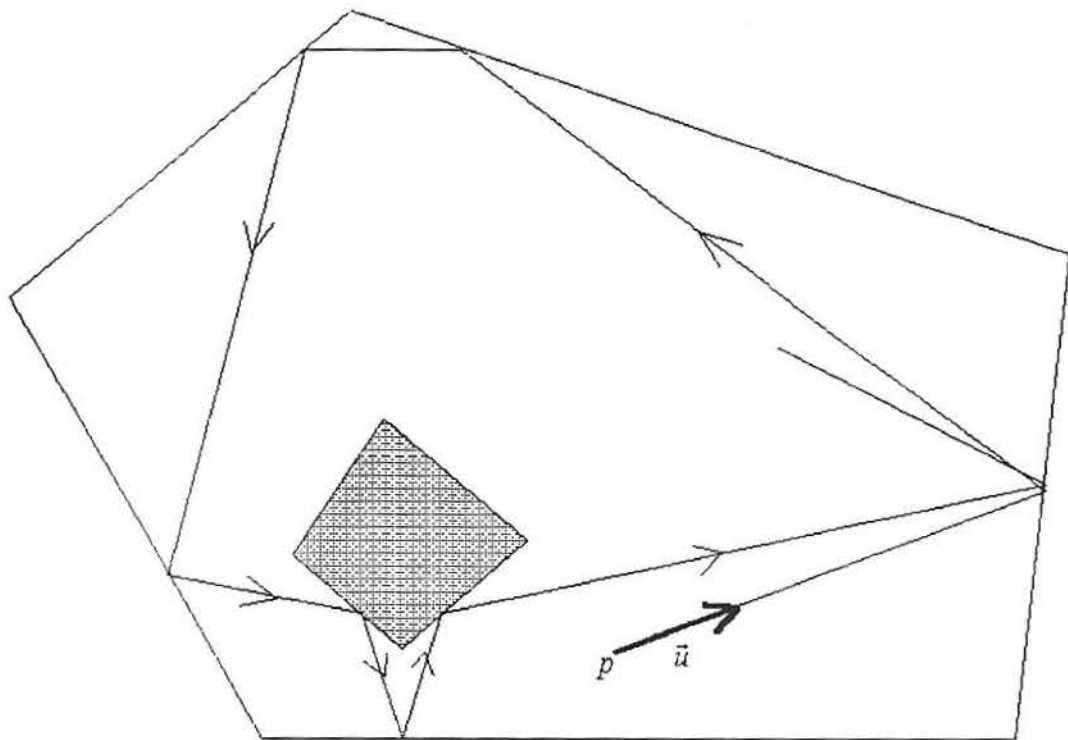
nos intervalos de tempo entre os choques com as paredes, move-se em movimento retilíneo uniforme, isto é, a trajetória da partícula entre duas colisões é um segmento de reta e a partícula percorre distâncias iguais em tempos iguais. Finalmente, dizer que a reflexão com as paredes é elástica, quer dizer que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.



Colisão elástica

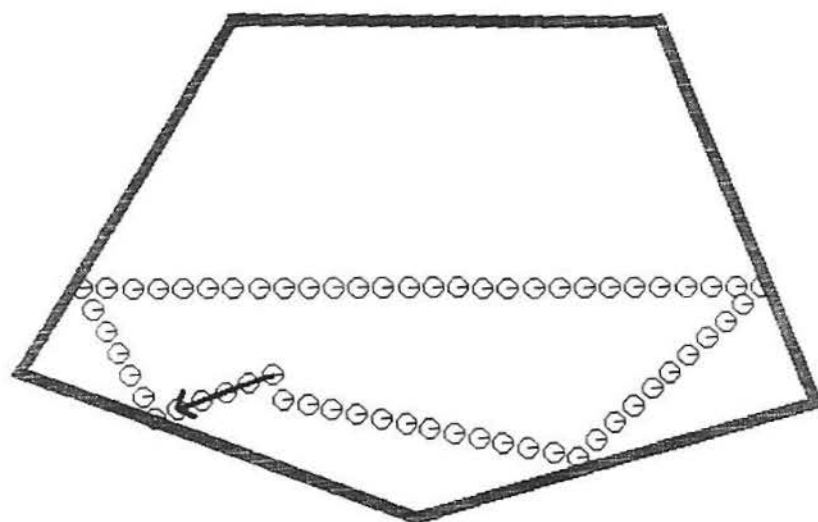
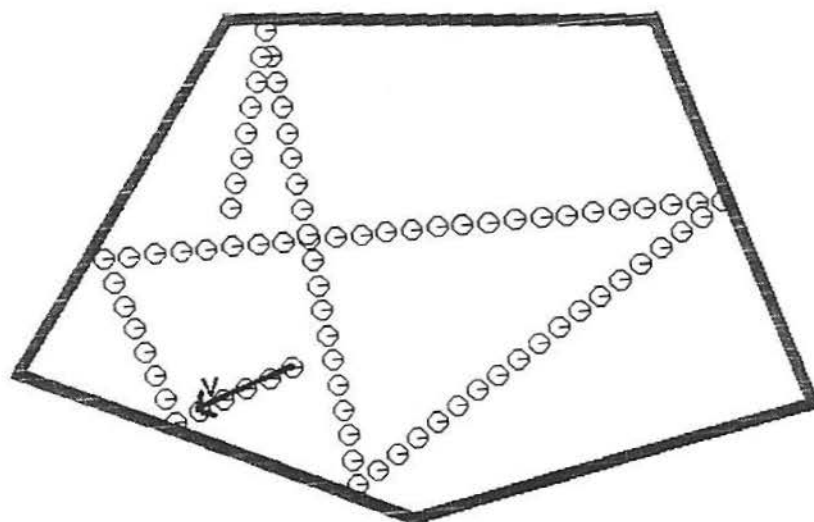
Com estas especificações fica claro que, dado um ponto p da mesa e uma direção indicada por um vetor unitário $\vec{u}$ aplicado em p , a trajetória da partícula fica completamente determinada pelo par $(p, \vec{u})$ a menos da eventual possibilidade da

partícula vir a atingir uma esquina da mesa, o que vamos ignorar por representar um evento pouco provável. Ademais, é claro do que acabamos de dizer que o sistema dinâmico definido pelo bilhar é um *affair* puramente geométrico, podendo ser descrito por uma sucessão de segmentos de reta e reflexões, o que leva à possibilidade de tratar de bilhares em outras geometrias como a geometria não-euclidiana de Lobatchevsky.



Trajетórias da partícula

O estudo dinâmico das trajetórias dos bilhares poligonais planos euclidianos como descrito acima é tópico corrente de pesquisa e é um tema complexo porque pequenas alterações no ponto p ou em $\overrightarrow{u}$ provocam alterações dramáticas nas trajetórias do bilhar.



Sensibilidade das trajetórias no bilhar

Pode-se provar que, para a maioria das mesas, os bilhares euclidianos exibem trajetórias densas que se aproximam com a precisão que se quer de qualquer ponto e qualquer direção (ver [4]).

No entanto, exemplos de bilhares com trajetórias densas podem ser encontrados com relativa facilidade no caso da geometria hiperbólica e este é o objetivo deste trabalho.

Teorema. O bilhar no triângulo com ângulos de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ e 0 do plano de Poincarè tem trajetórias densas.

Para provar este teorema organizamos esta dissertação da seguinte forma: no primeiro capítulo recordamos a definição e propriedades das transformações de Möbius em $\overline{\mathbb{C}}$. No segundo usamos estas transformações para definir e estudar o modelo de Poincarè do plano hiperbólico e no capítulo final mostramos o teorema acima.

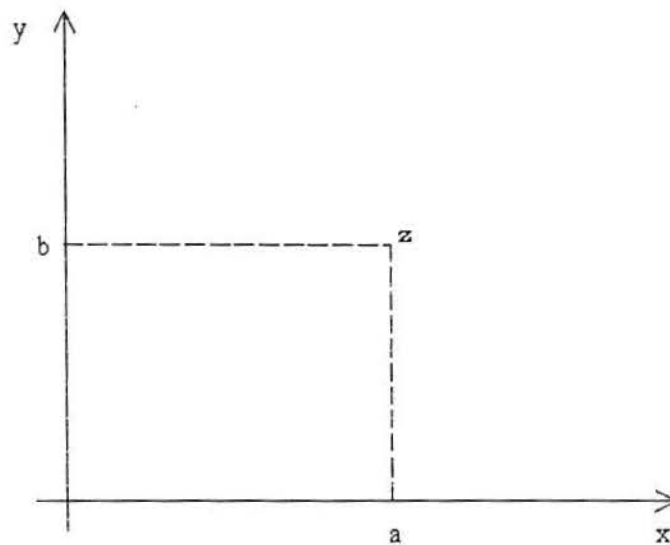
1. TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, ou seja, o conjunto dos números da forma

$$z = a + bi, a \text{ e } b \in \mathbb{R},$$

onde i é a unidade imaginária, $i^2 = -1$.

Os números complexos são geometricamente representados num plano euclidiano no qual fixamos um sistema de coordenadas cartesianas xy



Números Complexos no plano de Argand-Gauss

de modo que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ fica representado pelo eixo dos x ou eixo real e o eixo dos y representa o eixo imaginário $i\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ é um corpo com as operações:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2); \\ z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \end{aligned}$$

com $z_j = a_j + ib_j, j = 1, 2$.

Se $z = a + bi$, a é chamada parte real de z e b sua parte imaginária. $\bar{z} = a - bi$ é chamado conjugado de z . Geometricamente a conjugação, que é a aplicação $z \mapsto \bar{z}$, é a reflexão no eixo real.

Algebricamente a conjugação é um automorfismo do corpo $\mathbb{C}$ ou seja

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{aligned}$$

Além disso $\bar{\bar{z}} = z$.

É fácil ver que $z\bar{z} \geq 0$ (a notação $z_1 < z_2$ para números complexos significa que z_1 e z_2 são números reais e $z_1 < z_2$ na ordem usual da reta) de modo que a quantidade $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, chamada módulo de z , é um número real não negativo

bem definido. Geometricamente $|z|$ é o comprimento euclidiano do vetor z . Daí

$$|z| = 0 \quad \Leftrightarrow z = 0;$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ (desigualdade triangular complexa);}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

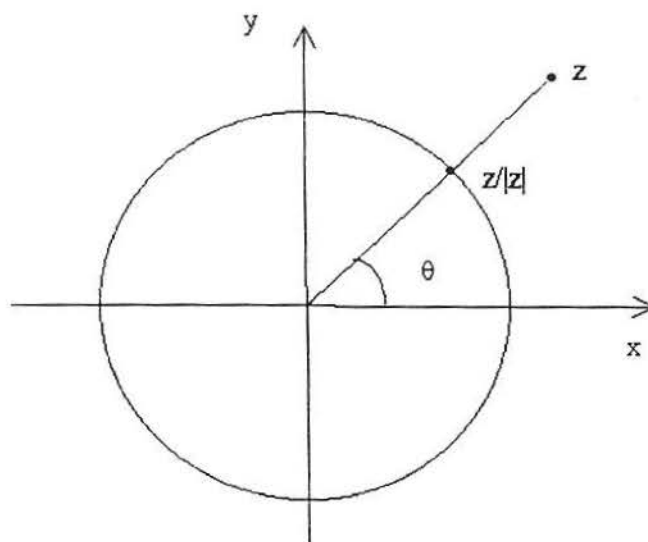
Deste modo podemos expressar a distância euclidiana entre dois números complexos z_1 e z_2 por $|z_1 - z_2|$.

O conjunto dos números complexos de módulo um é chamado *círculo unitário* e denotado por

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

$\mathbb{S}^1$ é um subgrupo do grupo multiplicativo dos números complexos e isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ via o isomorfismo induzido pela passagem ao quociente do homomorfismo

$$\mathbb{R} \ni \theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \in \mathbb{S}^1$$



Forma Polar

Todo número complexo pode ser escrito na forma polar

$$z = |z| e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Qualquer número real θ satisfazendo a condição acima é chamada argumento de z . Note que os argumentos de um número estão definidos módulo múltiplos inteiros de 2π .

Com isto podemos entender geometricamente as operações de soma e produto de números complexos. A soma é dada pela soma usual de vetores usando a

regra do paralelogramo e no produto seus argumentos são somados e os módulos multiplicados.

Estamos interessados em aplicações do plano complexo chamadas transformações de Möbius ou transformações fracionárias.

Uma transformação de Möbius é uma aplicação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ para a qual existem a, b, c e $d \in \mathbb{C}$ tais que $ac - bd \neq 0$ e $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. É claro que as constantes a, b, c e d acima definindo T não são únicas. Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ e λd definem igualmente a mesma T . Outro problema é que, na verdade, T não está definida para $z = -\frac{d}{c}$. Para facilitar nosso trabalho e resolver este problema adicionamos um ponto a $\mathbb{C}$, denotado ∞ e chamado ponto no infinito, e fazemos $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$.

Para definirmos a transformação neste conjunto maior, fazemos $T(\infty) = \frac{a}{c}$. Com isto T torna-se uma bijeção do plano complexo estendido $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. De fato T possui uma inversa dada por $T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}$ e, uma vez que os problemas dos pontos $-\frac{d}{c}$ e $\frac{a}{c}$ foram resolvidos com a introdução do elemento ∞ em $\mathbb{C}$, temos então a bijeção $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Usando a projeção estereográfica podemos obter uma bijeção entre $\overline{\mathbb{C}}$ e a esfera unitária do espaço, motivo porque $\overline{\mathbb{C}}$ é também chamada *esfera de Riemann*.

Denotamos por $M\ddot{o}b(\mathbb{C})$ o conjunto das aplicações de Möbius de $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Seja $Gl(2, \mathbb{C})$ o grupo das matrizes inversíveis complexas 2×2 . A aplicação h dada por

$$Gl(2, \mathbb{C}) \ni M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{h} T_M \in Möb(\mathbb{C}),$$

sendo $T_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é um homomorfismo sobrejetor cujo kernel é o conjunto das matrizes de $Gl(2, \mathbb{C})$ múltiplas da identidade.

De fato, se $T_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ e $T_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ é fácil verificar que

$$T_2T_1(z) = \frac{(a_1a_2 + b_2c_1)z + a_2b_1 + b_2d_1}{(a_1c_2 + c_1d_2)z + b_1c_2 + d_1d_2}.$$

Por outro lado, dadas $M_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$, $j = 1, 2$, matrizes de $Gl(2, \mathbb{C})$ temos que

$$M_2M_1 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Daí, $h(M_2M_1) = h(M_2)h(M_1)$ de onde concluímos que h é homomorfismo. A sobrejetividade também é clara uma vez que para $T \in Möb(\mathbb{C})$ a condição $ad-bc \neq 0$ é justamente a condição $\det M \neq 0$. O conjunto $\{M \in Gl(2, \mathbb{C}) / \forall z T_M(z) = z\}$ é o kernel de h . Ora, se $T_M(z) = z$ para todo z , então $T_M = id$, onde id indica a

função identidade em $\overline{\mathbb{C}}$. Logo $T_M = id$ devemos ter $b = c = 0$ e $a = d = k \neq 0$

$$\text{de onde } M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k.id.$$

Dizemos que $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ é ponto fixo de $T \in Möb(\overline{\mathbb{C}})$ se $T(z_0) = z_0$.

Proposição. Seja $T \in Möb(\mathbb{C})$. Se $T \neq id$ então T possui um ou dois pontos fixos.

Demonstração. De fato, seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc \neq 0$ e consideremos dois casos:

1º caso: Se $c = 0$ devemos ter $a, d \neq 0$ e portanto $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Observe que $T(\infty) = \infty$, logo, o ∞ é um ponto fixo de T . Os pontos fixos finitos de T são dados pela equação $\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$. Se $\frac{a}{d} \neq 1$, esta equação possui uma única solução $z = \frac{\frac{b}{d}}{\left(1 - \frac{a}{d}\right)}$, logo, neste caso, T possui dois pontos fixos. Por outro lado, se $\frac{a}{d} = 1$, devemos ter $\frac{b}{d} \neq 0$, já que $T \neq id$. Neste caso, a equação $T(z) = z$ tem como única solução $z = \infty$.

2º caso : Se $c \neq 0$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$, o que significa que ∞ não é ponto fixo de T . Daí, $z = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Esta equação possui uma solução se

$(d - a)^2 + 4bc = 0$ ou duas se $(d - a)^2 + 4bc \neq 0$. $\square$

É fácil ver que dadas duas triplas de pontos distintos de $\mathbb{C}$, (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) , existe e é única a transformação fracionária T tal que $T(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$. Para provarmos esta afirmação tomemos $T_1(z) = \frac{\lambda_1(z - z_1)}{z - z_2}$ e onde $\lambda_1 = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$. Vemos facilmente que $T_1(z_1) = 0$, $T_1(z_2) = \infty$, $T_1(z_3) = 1$. Identicamente, $T_2(w) = \frac{\lambda_2(w - w_2)}{w - w_1}$ com $\lambda_2 = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$ é tal que $T_2(w_1) = 0$, $T_2(w_2) = \infty$, $T_2(w_3) = 1$. Fazendo $T = T_2^{-1}T_1$ temos $T(z_i) = w_i$, $j = 1, 2, 3$. Sejam as duas transformações fracionárias S e T tais que $S(z_j) = T(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$. Fazendo $L = S^{-1}T$, encontramos uma transformação de Möbius com três pontos fixos, a saber, z_1, z_2 e z_3 . Mas, pela proposição anterior, se L tem mais de dois pontos fixos então $L = id$ e portanto $S = T$.

No entanto, o mesmo não vale para duas quádruplas de pontos distintos de $\mathbb{C}$. Isto nos permite definir um invariante de quádruplas distintas de $\mathbb{C}$ associado ao grupo $Möb(\mathbb{C})$ chamada *razão dupla* da quádrupla (z_1, z_2, z_3, z_4) , denotada por $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ e dada por $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \in \overline{\mathbb{C}}$.

Teorema.[5] Valem as seguintes propriedades:

(a) Sejam $T \in Möb(\mathbb{C})$, (z_1, z_2, z_3, z_4) e (w_1, w_2, w_3, w_4) quádruplas de pon-

tos distintos de $\mathbb{C}$ tais que $w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Então $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, ou seja, a razão dupla é invariante por $Möb(\mathbb{C})$.

(b) $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ se, e somente se, os pontos da quádrupla estão numa reta ou círculo euclidiano.

Demonstração. (a) Tomemos T_1 e T_2 tais que $T_1(z_2) = T_2(w_2) = 0$, $T_1(z_3) = T_2(w_3) = \infty$, $T_1(z_4) = T_2(w_4) = 1$, como na construção acima. Usando a definição da razão dupla temos $T_1(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$ e $T_2(w) = [w, w_2, w_3, w_4]$. Falta-nos apenas provar que $T_2T = T_1$. De fato, $T_1(z_2) = T_2T(z_2) = 0$, $T_1(z_3) = T_2T(z_3) = \infty$, $T_1(z_4) = T_2T(z_4) = 1$ e, uma vez que z_2, z_3 e z_4 são distintos e é única a transformação de $Möb(\mathbb{C})$ que leva três pontos distintos em três pontos distintos, $T_1 = T_2T$. Assim, $[z_1, z_2, z_3, z_4] = T_1(z_1) = T_2(w_1) = [w_1, w_2, w_3, w_4]$.

(b) Seja T a transformação fracionária tal que $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$ e $T(z_4) = \infty$. Suponhamos ainda que $T = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad-bc \neq 0$. Da definição de razão dupla vem que:

$$\begin{aligned} [z, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow T(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T(z) = \overline{T(z)} \Leftrightarrow (az+b)(\overline{cz+d}) = (\overline{az+b})(cz+d) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ac - \overline{a}\overline{c})|z|^2 + a\overline{d}z - \overline{a}d\overline{z} + b\overline{c}z - \overline{b}cz + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0. \end{aligned}$$

Observemos agora que $a\bar{c} - \bar{a}c = i\alpha$, $b\bar{d} - \bar{b}d = i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Além disto, se colocarmos $a\bar{d} = \gamma + i\delta$, $b\bar{c} = \varepsilon + i\varphi$, então $a\bar{d}z - \bar{a}d\bar{z} + b\bar{c}z - \bar{b}cz = 2i(\delta + \gamma)x + 2i(\gamma - \varepsilon)y = 2imx + 2iny$, onde $z = x + iy$. A última equação acima é então equivalente a :

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2mx + 2ny + \beta = 0. \quad (*)$$

Observemos ainda que α, m e n não podem ser todos nulos. De fato, se $\alpha = m = n = 0$, então $a\bar{c} = \bar{a}c$, $\delta + \varphi = \gamma - \varepsilon = 0$, ou ainda $b\bar{c} = \varepsilon + i\varphi = \gamma - i\delta = \bar{a}d$. Por outro lado, não é difícil ver que as relações $ac = \bar{a}c$ e $bc = \bar{a}d$ implicam $ad - bc = 0$.

Temos agora dois casos a considerar:

1º caso: $\alpha \neq 0$. Se colocarmos $x_0 = -\frac{m}{\alpha}$, $y_0 = -\frac{n}{\alpha}$, $r^2 = x_0^2 + y_0^2 - \frac{\beta}{\alpha}$, obtemos que a equação (*) é equivalente a:

$$|z - z_0|^2 = r^2, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

O argumento acima prova que

$$T^{-1}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0|^2 = r^2\} - \{T^{-1}(\infty)\}.$$

Como $T^{-1}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{C}$ é um conjunto infinito, obtemos que $r^2 > 0$. Portanto

$$\{z \in \overline{\mathbb{C}}; [z, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\} = T^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \{z \in \mathbb{C}; z - z_0 = r\},$$

onde $r > 0$.

2º caso: $\alpha = 0$. Temos então que $(*)$ é equivalente a:

$$2mx + 2ny + \beta = 0 \text{ onde } m \neq 0 \text{ ou } n \neq 0.$$

Isto implica que

$$\{z \in \mathbb{C}; [z, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}\} = T^{-1}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{C} = l - T^{-1}(\infty),$$

onde l é a reta definida pela equação acima. Obtemos então que

$$l \cup \{\infty\} = \{z \in \overline{\mathbb{C}}; [z, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}.$$

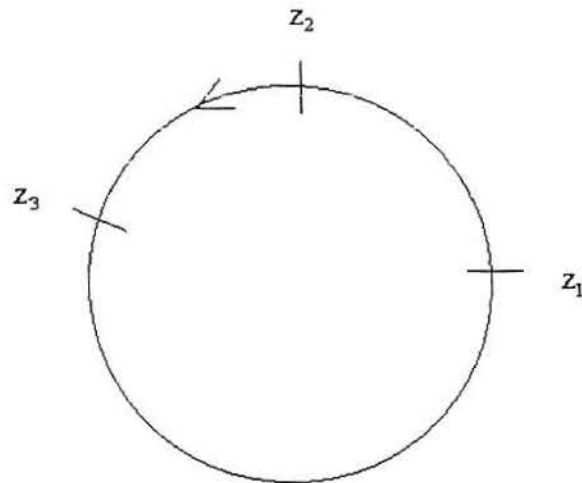
Em qualquer um dos casos, os conjuntos obtidos ou são círculos ou retas euclidianas unidas com o ponto ∞ .

Deste modo, transformações de Möbius levam círculos ou retas em círculos ou retas. $\square$

Por simplicidade de linguagem, vamos designar por círculo tanto um círculo euclidiano em $\mathbb{C}$ como a união de uma reta com o ponto no ∞ de $\overline{\mathbb{C}}$. Daí, podemos dizer que as transformações fracionárias levam, no conjunto $\overline{\mathbb{C}}$, círculos em círculos. Além disto, os círculos que passam no ∞ são retas.

Um círculo orientado é um círculo C no qual se escolhe uma orientação, ou seja, um sentido de percurso. Tecnicamente isto é feito pela escolha de uma tripla de pontos distintos em C : (z_1, z_2, z_3) denota a orientação de C de z_1 para z_3

passando por z_2 .

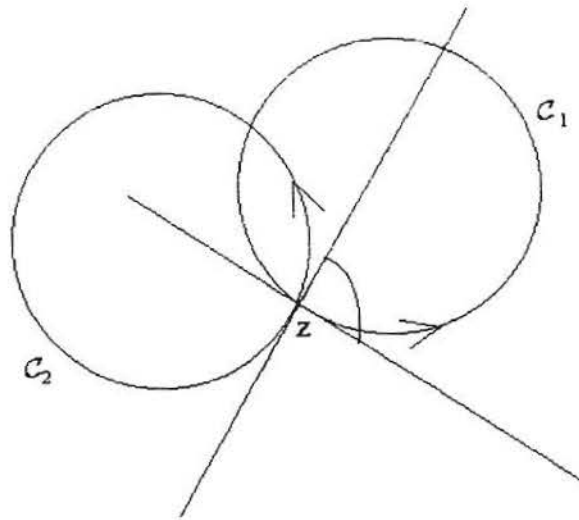


Orientação

Um círculo em $\overline{\mathbb{C}}$ tem exatamente duas orientações.

O ângulo que dois círculos orientados $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ fazem em um ponto $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ é, por definição, o ângulo que as tangentes orientadas a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em z

fazem.

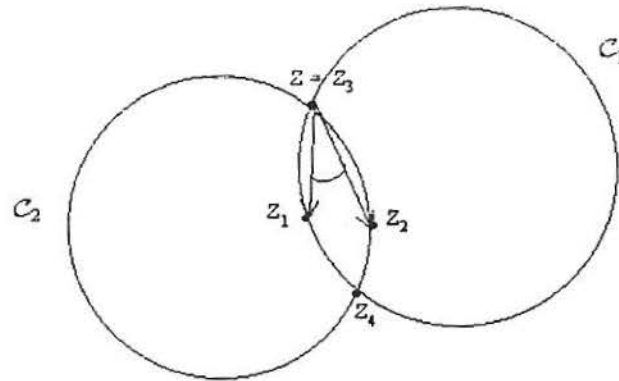


Ângulo entre círculos orientados

Teorema. Sejam $T \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ e C_1 e $C_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ círculos orientados que se cortam em $z \in \mathbb{C}$. Se $T(z) \in \mathbb{C}$ então o ângulo entre C_1 e C_2 em z é o mesmo que o ângulo entre $T(C_1)$ e $T(C_2)$ em $T(z)$. Assim as aplicações de Möbius são conformes, isto é, preservam ângulos.

Demonstração. De fato, tomemos os pontos $z_1, z_2, z_3 = z$ e z_4 em C_1 e C_2

conforme a figura abaixo.



Seja $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ a razão dupla dos pontos marcados. Tomando o limite da razão dupla para $z_1, z_2 \rightarrow z = z_3$, sobre C_1 e C_2 , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z = z_3} [z_1, z_2, z_3, z_4] &= \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \frac{(z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3)} \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \frac{(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)} \\ &= \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \frac{(z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3)}, \end{aligned}$$

já que $\lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \frac{(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)} = 1$. Agora o argumento de $\lim_{z_1, z_2 \rightarrow z} \frac{(z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3)}$ é justamente o ângulo formado por C_1 e C_2 em z . Uma vez que a razão dupla é invariante por transformações de Möbius, o ângulo formado por $T(C_1)$ e $T(C_2)$ em $T(z)$ é o mesmo.

Observe que, como já vimos anteriormente, T leva círculos de $\overline{\mathbb{C}}$ em círculos

de $\overline{\mathbb{C}}$ e, portanto, como z é o ponto de interseção de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ então $T(z)$ é o ponto de interseção de $T(\mathcal{C}_1)$ e $T(\mathcal{C}_2)$. $\square$

2.O MODELO DO SEMI-PLANO DE POINCARÈ

Usando as transformações de Möbius podemos construir facilmente um modelo para a geometria hiperbólica plana ou geometria de Bolyai-Lobatchevsky, que é a geometria que satisfaz todos os axiomas da geometria euclidiana à exceção do axioma das paralelas. Este, como se sabe, requer que por um ponto exterior a uma reta r exista no máximo uma reta que não intercepta r .

Um círculo em $\overline{\mathbb{C}}$ decompõe este espaço em dois discos abertos. O modelo de Poincarè consiste em fixar um destes discos como o *plano hiperbólico*, denotado por $\mathbb{H}^2$, cujos pontos são chamados *pontos hiperbólicos*. As retas deste modelo são os arcos de círculo de $\overline{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{H}^2$ que são ortogonais ao círculo escolhido. Para facilitar algumas contas, é conveniente tomar este círculo como $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Este círculo é chamado *círculo absoluto* ou *círculo no infinito* e denotado por $\mathbb{S}_{\infty}^1$. Os pontos deste círculo são chamados *pontos no infinito*.

Como $\mathbb{H}^2$ tomamos o semiplano superior

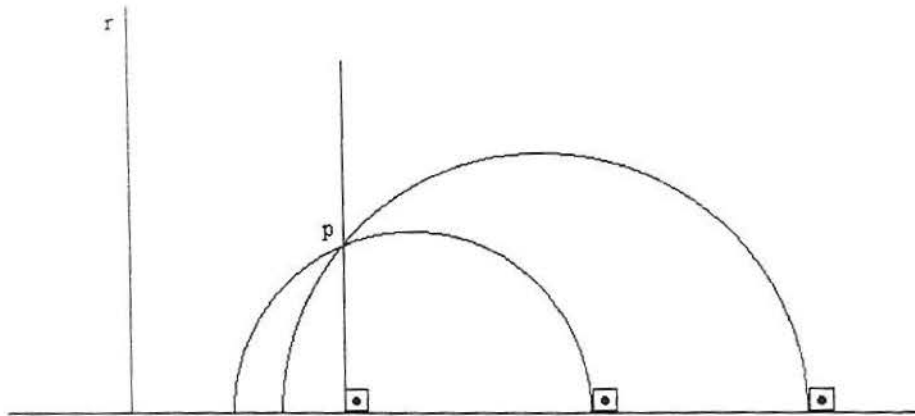
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}.$$

Com esta convenção, é fácil ver que as retas hiperbólicas são as semi-retas

euclidianas ortogonais a $\mathbb{S}_\infty^1$ ou os semicírculos euclidianos com extremidades em $\mathbb{S}_\infty^1$ e, portanto, ortogonais a este. Os pontos de interseção destas retas com $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ são chamados pontos no infinito da reta hiperbólica e, é claro, não são pontos hiperbólicos. Assim é que as retas hiperbólicas estão em correspondência biunívoca com pares não ordenados de pontos distintos de $\mathbb{S}_\infty^1$. De fato, se a reta em questão é uma reta euclidiana l unida com ∞ , o par de pontos de $\mathbb{S}_\infty^1$ é dado pela interseção de l com $\mathbb{S}_\infty^1$ e pelo ∞ . É claro, neste caso, que a correspondência é um a um, uma vez que retas ortogonais distintas determinam pontos distintos em $\mathbb{S}_\infty^1$. Da mesma forma, as extremidades dos semicírculos euclidianos determinam pares de pontos únicos no círculo no infinito.

Daí, se este modelo é de fato coerente o axioma das paralelas de Euclides não é verificado pois, por um ponto p exterior a uma reta r passam infinitas retas que

não cortam r .



Retas por p que não cortam r

A chave para entender esta coerência do ponto de vista que estamos adotando é entender o subgrupo das transformações de Möbius que preservam os pontos hiperbólicos, denotado por $Iso^+(\mathbb{H}^2)$. No caso de $\mathbb{H}^2$, o semiplano superior, este grupo é o grupo das transformações de Möbius com coeficientes reais. Denotamos por $Gl(2, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes inversíveis reais 2×2

Teorema. A aplicação

$$M \mapsto T_M \in Möb(\mathbb{C})$$

dada por

$$T_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{R})$, com $ad - bc > 0$, é um homomorfismo sobre $Iso^+(\mathbb{H}^2)$, isto é, $T_M(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$, cujo kernel é o subgrupo das matrizes múltiplas da identidade.

Demonstração. A prova deste teorema decorre do homomorfismo entre $Gl(2, \mathbb{C})$ e $Möb(\mathbb{C})$, faltando-nos apenas demonstrar que as transformações de Möbius que preservam os pontos hiperbólicos são aquelas de coeficientes reais. De fato, é fácil ver que se T possui coeficientes reais, T preserva $\mathbb{H}^2$ pelo simples fato de que, se fizermos $z = x + iy$, temos que

$$T(z) = (acx^2 + dax + bcx + bd + acy) + (ad - bc)yi$$

e é claro que $\text{Im}(T(z)) > 0$. Por outro lado, se T preserva $\mathbb{H}^2$, T leva $\mathbb{S}_\infty^1$ em si mesmo. Daí tomemos três pontos de $\mathbb{S}_\infty^1$, z_1 , z_2 e z_3 tais que $T(z_j) = w_j$, para $j = 1, 2, 3$. Podemos, como na Proposição 2 acima, construir uma transformação S que leva z_j em w_j e possui coeficientes reais pois só dependem, pela construção,

dos próprios z_j e w_j . Como tal transformação é única, $S = T$, a menos de um fator $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

O grupo $Iso^+(\mathbb{H}^2)$ é o grupo das isometrias hiperbólicas que preservam orientação. Para justificar este nome vamos mostrar que se $T \in Iso^+(\mathbb{H}^2)$ então T preserva o elemento de comprimento hiperbólico que é, por definição,

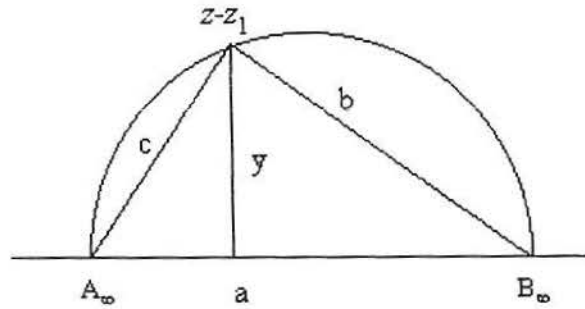
$$ds = \frac{|dz|}{y}, \quad z = x + iy,$$

o que é uma decorrência do fato das transformações de Möbius preservarem a razão dupla. De fato, se tomarmos, na reta hiperbólica $A_\infty B_\infty$ que contém z , um ponto z_1 temos que:

$$[z, A_\infty, z_1, B_\infty] = \frac{(z - z_1)(A_\infty - B_\infty)}{(z - B_\infty)(A_\infty - z_1)}.$$

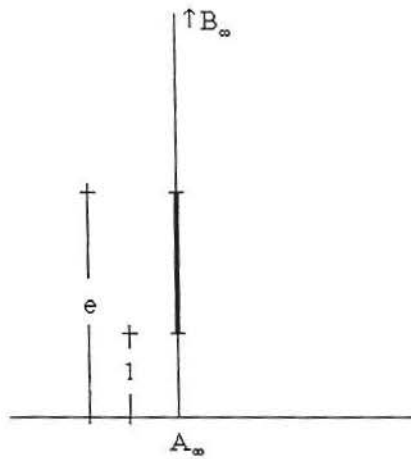
Se fizermos $z_1 \rightarrow z$ e tomarmos o módulo temos que a razão dupla acima resulta, pela relação métrica $ay = bc$, em:

$$|[z, A_\infty, z_1, B_\infty]| = \left| \frac{dz \cdot a}{b \cdot c} \right| = \frac{|dz|}{y} = \frac{|dz|}{\text{Im } z}.$$



Já que a razão dupla é invariante por $Möb(\mathbb{C})$ temos que o elemento de comprimento também o é, e portanto os elementos de $Iso^+(\mathbb{H}^2)$ são as isometrias hiperbólicas.

Pela definição acima, o elemento unitário de comprimento hiperbólico pode ser representado como um segmento que está numa semi-reta euclidiana cujos extremos têm altura 1 e e .



Segmento unitário

De fato o segmento acima pode ser parametrizado por $z = ti$, com $1 \leq t \leq e$.

Daí

$$dz = dti \Rightarrow |dz| = |dt|.$$

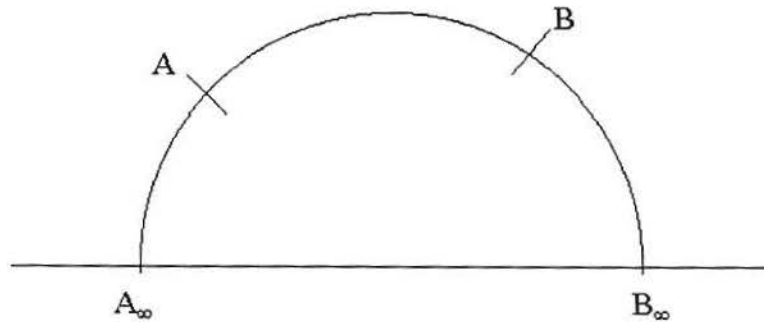
Portanto, o comprimento do segmento acima será:

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^e = 1.$$

Um cálculo semelhante mostra que a medida do segmento hiperbólico AB em uma semi-reta euclidiana é $\log \left(\frac{b}{a} \right)$ onde a é a distância euclidiana do ponto A ao círculo no infinito e b a distância do ponto B ao mesmo. Em geral, usando a ação de $Iso^+(\mathbb{H}^2)$, vemos que o comprimento do segmento AB é dado por

$$AB = |\log [A, B, A_\infty, B_\infty]|,$$

onde A_∞ e B_∞ são os pontos no ∞ da reta AB na ordem óbvia.

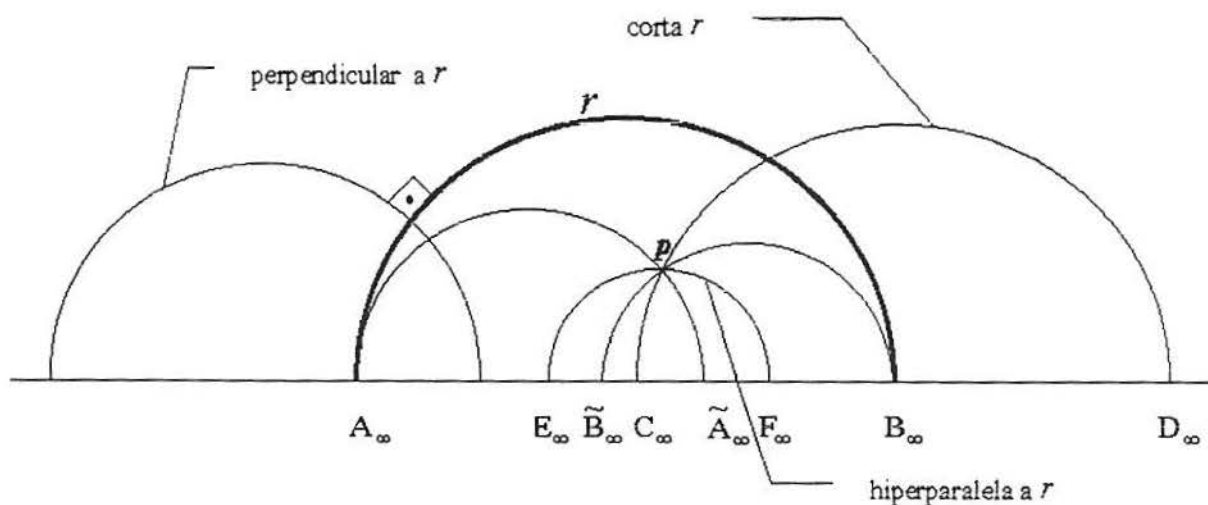


Segmento AB

Como dois arcos de círculo ortogonais formam ângulos adjacentes congruentes

por $Iso^+(\mathbb{H}^2)$, uma vez que, como vimos, as transformações de Möbius são conformes, temos que a noção de ângulo hiperbólico coincide com a noção euclidiana, ou seja, o modelo de Poincaré é um modelo conforme.

Dada uma reta hiperbólica r com pontos no infinito A_∞ e B_∞ , e $p \notin r$, as retas pA_∞ e pB_∞ são chamadas retas paralelas a r por p .

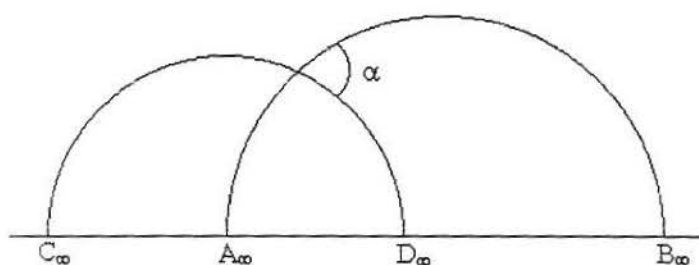


Posições relativas

Estas duas retas limitam dois ângulos complementares de vértice p . Num destes ângulos estão as retas que cortam r e, no outro, as retas que não cortam r ou *hiperparalelas* a r .

Se $C_\infty D_\infty$ corta $A_\infty B_\infty$ então estas retas formam um ângulo α dado por

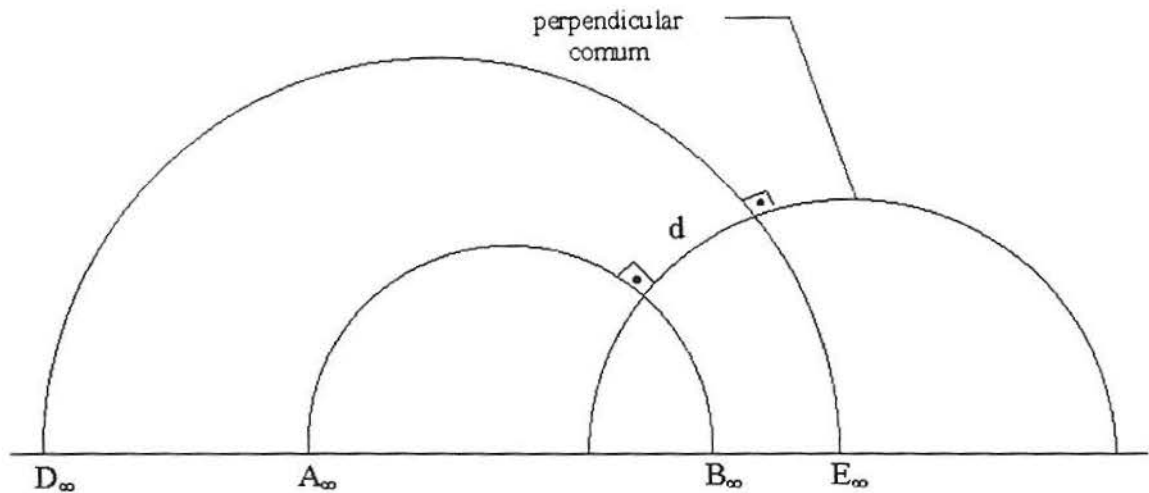
$$\tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = [A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty]$$



Ângulo entre retas hiperbólicas

e se $A_\infty B_\infty$ e $D_\infty E_\infty$ são hiperparalelas então elas tem uma perpendicular comum e nesta determinam um segmento que realiza a menor distância entre elas, de comprimento d , dado por

$$\tanh^2 \left(\frac{d}{2} \right) = [A_\infty, B_\infty, D_\infty, E_\infty].$$



Distância entre hiperparalelas

A distância entre retas paralelas decresce exponencialmente.

As demonstrações de todas estas afirmações estão em [6].

O grupo $Iso^+(\mathbb{H}^2)$ contudo, não é o grupo completo das isometrias hiperbólicas.

De fato, a transformação

$$\mathbb{H}^2 \ni z, z \mapsto -\bar{z}$$

é uma isometria hiperbólica. De fato, se fizermos $z = x + iy$ temos $\rho(z) = -x + iy$ e portanto ρ é a reflexão na reta hiperbólica $x = 0$.

Tomando o grupo gerado por $Iso^+(\mathbb{H}^2) \cup \{\rho\}$ temos o grupo completo das

isometrias de $\mathbb{H}^2$, denotado $Is(\mathbb{H}^2)$. Em particular, a reflexão na reta $r = A_\infty B_\infty$, com $A_\infty = -1$ e $B_\infty = 1$ é dada por

$$S(z) = -\frac{1}{z},$$

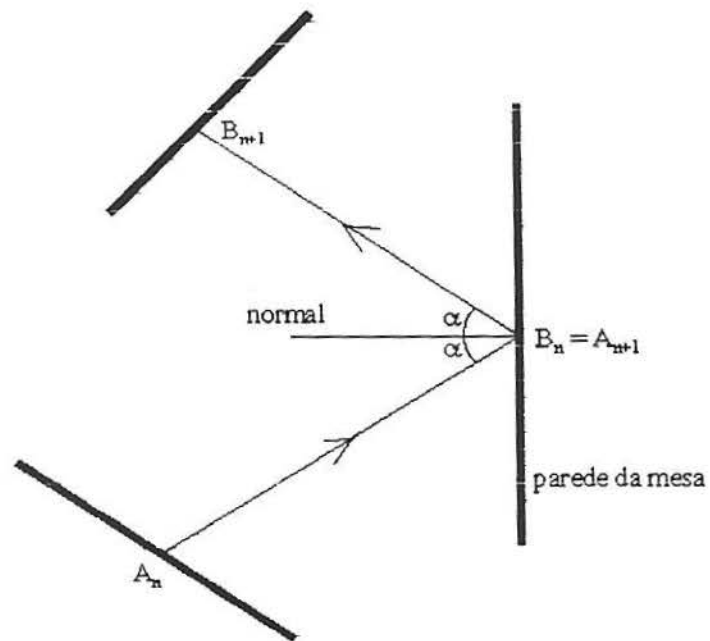
que vamos necessitar no capítulo seguinte para definir bilhares hiperbólicos.

3. O BILHAR TRIANGULAR HIPERBÓLICO

Neste capítulo vamos exibir um exemplo de bilhar poligonal hiperbólico plano com trajetórias densas.

Como dissemos anteriormente, podemos pensar na trajetória do bilhar como uma seqüência de segmentos orientados $A_n B_n$, indexados por inteiros $n \in \mathbb{Z}$, contidos na mesa $\mathcal{M}$ e com extremidades no interior dos segmentos que limitam a mesa, já que estamos ignorando as trajetórias que passam pelos vértices. Assim, $(A_n B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é trajetória do bilhar quando, para cada $n \in \mathbb{Z}$:

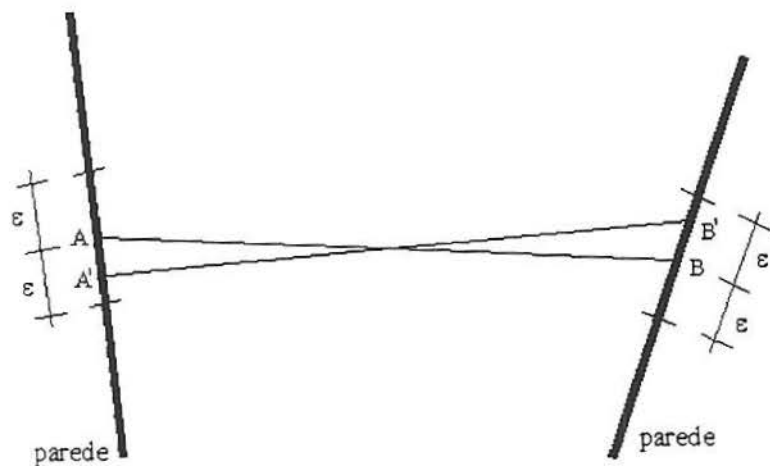
1. $B_n = A_{n+1}$,
2. *O ângulo de $B_n A_n$ com a normal à parede em B_n é igual ao ângulo entre $A_{n+1} B_{n+1}$ com a mesma normal.*



Condição de trajetória

Dados um segmento orientado AB contido no interior da mesa $\mathcal{M}$ com extremos no bordo da mesma e $\varepsilon > 0$ definimos a vizinhança $\mathcal{V}(AB, \varepsilon)$ deste segmento como o conjunto dos segmentos orientados $A'B'$ de $\mathcal{M}$ com extremos no

bordo e que distam menos que ε de A e B respectivamente.



$$\mathcal{V}(AB, \varepsilon)$$

Assim, uma mesa $\mathcal{M}$ tem trajetórias densas quando existe uma trajetória $A_n B_n$ do bilhar em $\mathcal{M}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ e $A'B'$ segmento em $\mathcal{M}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

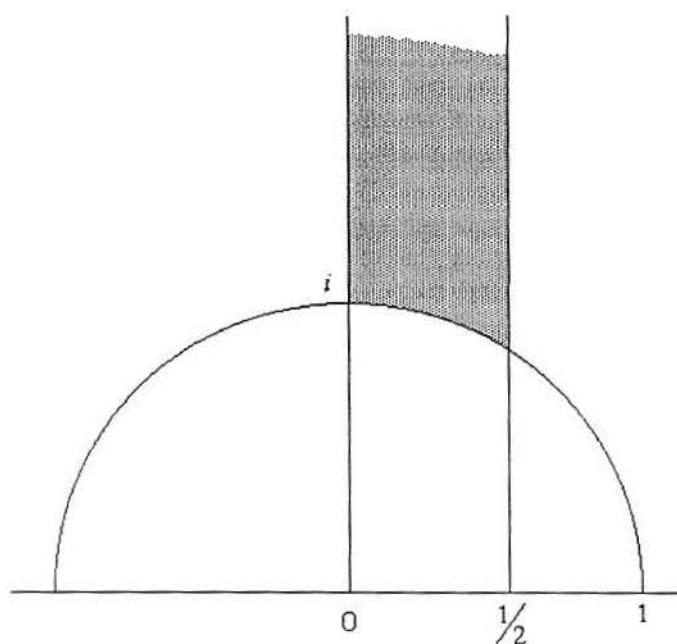
$$A_n B_n \in \mathcal{V}(AB, \varepsilon).$$

Teorema. O bilhar no triângulo com ângulos de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ e 0 do plano hiperbólico de Poincarè tem trajetórias densas.

Para provar este teorema tomamos o triângulo

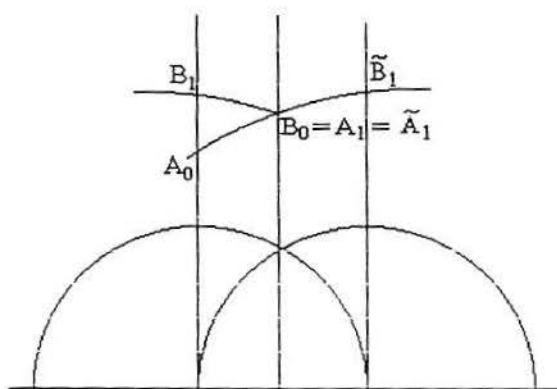
$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{H}^2 / 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \text{ e } |z| \geq 1\};$$

podemos observar que o ângulo entre as retas hiperbólicas $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ é igual a zero, e os formados por estas retas e a reta $A_\infty B_\infty$, onde $A_\infty = -1$ e $B_\infty = 1$, são respectivamente $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}$.



O triângulo $\mathcal{M}$

Para construir a trajetória do bilhar tomamos um segmento inicial A_0B_0 e vamos refletindo a reta A_0B_0 nas paredes da mesa. Com isto, obtemos a seqüência de segmentos A_nB_n em $\mathcal{M}$ que constituem a trajetória do bilhar por A_0B_0 . Pois bem, em vez de refletir a reta A_0B_0 , podemos acompanhar trajetória do bilhar refletindo a mesa $\mathcal{M}$ nas retas euclidianas ao longo da reta A_0B_0 , conforme a figura abaixo. Com isto obtemos uma seqüência $\tilde{A}_n\tilde{B}_n$ de segmentos consecutivos ao longo da reta A_0B_0 tais que $\tilde{A}_n\tilde{B}_n$ é congruente a A_nB_n . Para reconstruir a trajetória do bilhar temos que, sucessivamente, refletir de volta para $\mathcal{M}$ os segmentos $\tilde{A}_n\tilde{B}_n$ à maneira de uma dobradura em papel.

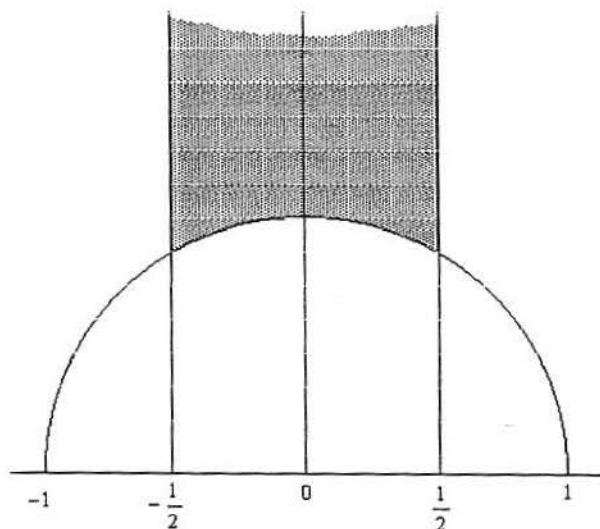


Reflexão de A_1B_1

No nosso caso este procedimento é o seguinte:

Seja $\mathcal{D}$ o triângulo obtido pela união da mesa com sua reflexão na reta $\operatorname{Re} z = 0$.

O triângulo $\mathcal{D}$, chamado triângulo modular, tem um ângulo zero e dois ângulos iguais a $\frac{\pi}{3}$.



Triângulo Modular

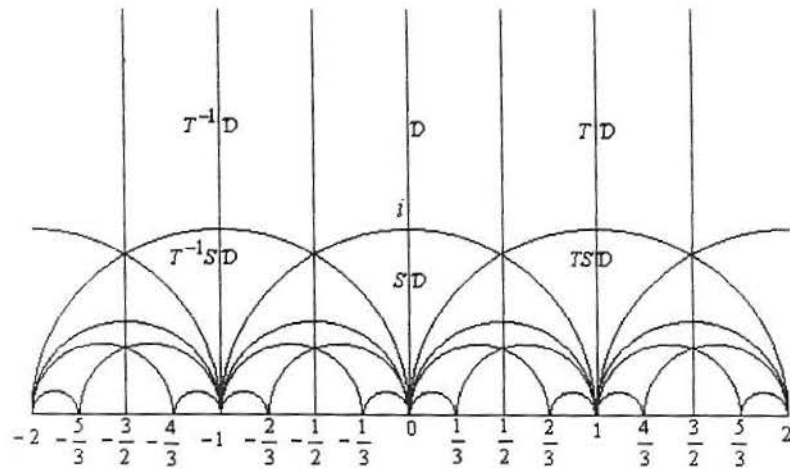
Aplicando a $\mathcal{D}$ elementos do grupo gerado pelas transformações

$$T : z \mapsto z + 1,$$

que é uma translação parabólica com centro ∞ e

$$S : z \mapsto -\frac{1}{z},$$

que é uma rotação de π no ponto médio do lado oposto ao vértice no ∞ de $\mathcal{D}$, obtemos uma decomposição de $\mathbb{H}^2$ por triângulos congruentes a $\mathcal{D}$ que não se interceptam a não ser em vértices ou lados.



Triangulação de $\mathbb{H}^2$

Além do mais, podemos ver que o grupo gerado por T e S é o chamado grupo modular, denotado por $PSl(2, \mathbb{Z})$, que é o grupo das transformações de Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

em que a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ e $ad - bc = 1$.

Este grupo é isomorfo ao quociente do grupo das matrizes 2×2 com coeficientes

inteiros e determinante igual a um módulo o grupo gerado por

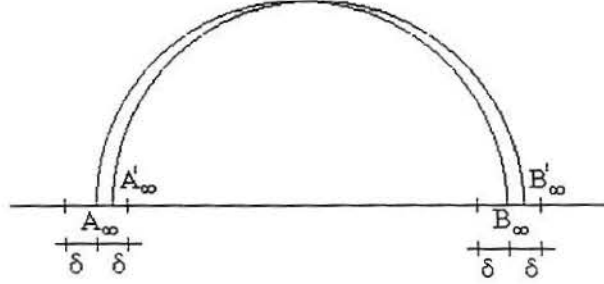
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Todos esses resultados são demonstrados em [3].

Vimos antes que pelo processo da dobradura podíamos acompanhar uma trajetória do bilhar refletindo os segmentos determinados na reta A_0B_0 pelos refletidos de $\mathcal{M}$. Agora vemos que, na verdade, por essas dobraduras, qualquer reta de $\mathbb{H}^2$ define uma trajetória do bilhar em $\mathcal{M}$ bastando, para tanto, por reflexões sucessivas, levar a reta a interceptar $\mathcal{M}$. É claro que, desta maneira, infinitas retas correspondem a uma mesma trajetória.

Para especificar quando uma trajetória passa perto de um ponto e uma direção usamos os conjuntos $\mathcal{V}(AB, \varepsilon)$. Neste novo contexto é conveniente usar conjuntos equivalentes em que A e B agora são os pontos no infinito da reta AB dados por

$$\mathcal{W}(A_\infty B_\infty, \delta) = \{(A'_\infty, B'_\infty) / |A'_\infty - A_\infty| \text{ e } |B'_\infty - B_\infty| < \delta\}.$$



Dada a reta AB com pontos no infinito A_∞ e B_∞ e dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{W}(A_\infty B_\infty, \delta) \subseteq \mathcal{V}(AB, \varepsilon)$$

e vice e versa (ver [3]).

Deste modo, para provar o teorema proposto, basta provar o lema abaixo, uma vez que os elementos de $PSl(2, \mathbb{R})$ que levam uma reta $A_0 B_0$, definida por um segmento $A_0 B_0$ de $\mathcal{M}$, a interceptar novamente $\mathcal{M}$ estão unicamente determinados pela trajetória $A_n B_n$, a saber, são os produtos das reflexões que levam $\tilde{A}_n \tilde{B}_n$ em $A_n B_n$, como fizemos anteriormente.

Lema 1. [3] Existe uma reta hiperbólica $A_\infty B_\infty$ tal que dados $\varepsilon > 0$ e uma reta hiperbólica $A'_\infty B'_\infty$ arbitrários, existe $T \in PSl(2, \mathbb{Z})$ tal que $T(A_\infty B_\infty) \in$

$\mathcal{W}(A'_\infty B'_\infty, \varepsilon)$.

Por simplicidade de notação vamos omitir a partir de agora o subscrito ∞ . Salvo menção contrária, as retas hiperbólicas vão ser especificadas por seus pontos no infinito.

Na verdade, para provar o lema, basta prová-lo num caso particular.

Lema 2. Existe AB reta hiperbólica com $-1 < A < 0 < 1 < B$ tal que para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $A'B'$ reta hiperbólica com $-1 < A' < 0 < 1 < B'$ existe $T \in PSl(2, \mathbb{Z})$ tal que $T(AB) \in \mathcal{W}(A'B', \varepsilon)$.

Para provar que o Lema 2 implica o Lema 1 basta provar que qualquer reta AB pode ser levada pela ação do grupo modular a satisfazer a condição $-1 < A < 0 < 1 < B$. Aplicando as translações por inteiros é fácil fazer com que as condições sejam satisfeitas se $B - A > 2$. Por outro lado, toda reta AB , pela ação de $PSl(2, \mathbb{Z})$ pode ser levada a cortar $\mathcal{D}$. Se AB não intercepta o lado oposto a ∞ de $\mathcal{D}$ então $B - A > 2$ e as condições exigidas estão satisfeitas. Caso contrário, uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ em torno de um dos outros vértices faz o serviço.

Para provar o Lema 2 expandimos A e B em frações contínuas

$$B = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

e

$$- A = \frac{1}{a_{-1} + \frac{1}{a_{-2} + \dots}},$$

onde os a_n são inteiros positivos. Sabemos, das propriedades características das frações contínuas (ver [2]), que truncando a expansão de B no nível n temos o aproximante racional de B dado por

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}},$$

que satisfaz $\left| B - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$, $\forall n$ e $q_n \rightarrow \infty$, se $n \rightarrow \infty$.

Analogamente para A temos

$$\frac{r_n}{s_n} = \frac{1}{a_{-1} + \frac{1}{a_{-2} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{-n}}}}},$$

com $\left| A - \frac{r_n}{s_n} \right| < \frac{1}{s_n^2}$, $\forall n$ e $s_n \rightarrow \infty$, se $n \rightarrow \infty$.

Com isto, da unicidade da expansão em frações contínuas temos uma bijeção entre as retas hiperbólicas AB , $-1 < A < 0 < 1 < B$ e um subconjunto das sequências finitas ou infinitas de naturais indexada pelos inteiros

$$AB \longleftrightarrow \dots a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2\dots .$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$ definimos

$$B_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \dots}}$$

e

$$- A_n = \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots}}.$$

Um cálculo fácil mostra que

$$A = \frac{P_n A_n + P_{n-1}}{Q_n A_n + Q_{n-1}}$$

e

$$B = \frac{P_n B_n + P_{n-1}}{Q_n B_n + Q_{n-1}},$$

UFPA
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

onde

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} \in PSl(2, \mathbb{Z}).$$

Por exemplo, no caso $n = 2$ temos:

$$-A_2 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0 - A}}$$

e

$$B = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{B_2}},$$

de onde temos que:

$$B = \frac{(a_1 a_0 + 1)B_2 + a_0}{a_1 B_2 + 1}$$

e

$$A = \frac{(a_1 a_0 + 1)A_2 + a_0}{a_1 A_2 + 1}.$$

Note que, como foi definido, os coeficientes da transformação que leva A_n e B_n a A e B são os mesmos.

Se tomarmos a sequência $\dots a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2\dots$ que define a reta AB e aplicarmos

um *shift* de n posições a esta sequência, ficando com a sequência

$$\dots a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1}a_{n+2}\dots,$$

esta nova sequência define uma reta A_nB_n que difere de AB pela ação de um elemento do grupo modular.

Com estas observações estamos em condições de provar o Lema 2.

De fato, tome-se a reta AB definida por uma sequência bi-infinita de naturais $\dots a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2\dots$ que contém todas as sequências finitas de naturais. Uma tal sequência existe porque o conjunto das sequências finitas de números naturais é enumerável. AB satisfaz as condições do nosso Lema. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $A'B'$ reta hiperbólica dada pela sequência $\dots b_{-2}b_{-1}b_0b_1b_2\dots$. Tomamos $N > 0$ suficientemente grande de modo que $\frac{1}{q_N^2}$ e $\frac{1}{s_N^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como a sequência dos a_n contém todas as sequências finitas de naturais, deve portanto conter a sequência finita $b_{-N}\dots b_{-1}b_0b_1\dots b_N$.

Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $b_i = a_{n+i}$ com $|i| \leq N$.

Como vimos, a reta A_nB_n dada pela sequência $\dots a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1}a_{n+2}\dots$ está na órbita de AB pela ação do grupo modular. Assim, basta provar que $A_nB_n \in \mathcal{W}(A'B', \varepsilon)$.

Mas, a expansão de A_n coincide com A' até a ordem N e o mesmo vale para B_n e B' , de modo que estes números têm os mesmos aproximantes racionais até a ordem N . Por simples aplicação da desigualdade triangular segue o Lema 2.

É claro da prova do Lema 2 que qualquer reta codificada por uma seqüência de naturais que contenha todas as seqüências finitas de naturais define uma trajetória do bilhar que é densa.

Podemos ainda afirmar que as retas, assim definidas, formam um conjunto denso de retas, ou seja, na verdade podemos concluir que existe um conjunto denso de trajetórias densas no bilhar.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Artin, E., Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen,
Mathematisches Seminar, 1924.
- [2] Beskin, N., Fracções Contínuas, Mir Moscovo, 1980.
- [3] Gunning, R.C., Lectures on Modular Forms, Princeton, 1962.
- [4] Kerckhoff, S., Masur, H., Smillie, J., Annals of Mathematics, 124(1986),
p.293-311.
- [5] Lins Neto, A., Funções de uma Variável Complexa, Impa, 1993.
- [6] Rocha, L. F. C. da, Introdução à Geometria Hiperbólica Plana, Impa, 1987.

UFPA
SISTEMAS DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA