

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Estrutura Nuclear de Estrelas Compactas. *

Guilherme Frederico Marranghello

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. César Augusto Zen Vasconcelos e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
2000

* Trabalho parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pela Pró-reitoria de Pesquisa da Universidade Federal do Rio grande do Sul (Propesq-UFRGS).

à minha família

Agradecimentos

ao professor César Vasconcellos,
pela amizade, oportunidade e
por uma excelente orientação;

à professora Victória Herscovitz,
por suas listas, seus incentivos e
por seu exemplo;

à meus pais
Fidelis e Regina Marranghello,
por sempre iluminar meu caminho;

ao meu irmão
Marcelo Marranghello,
meu exemplo de força e
de inteligência;

à minhas avós
Maria e Adília,
pelo carinho;

à minha namorada
Márcia Maria Lucchese,
por seu amor;

à toda minha família,
a base de tudo para mim;

aos colegas do grupo de hádrons,
por valiosos conselhos e auxílio;

e a todos amigos,
que me ajudam e alegram
a qualquer momento.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo da matéria nuclear a altas densidades considerando-se as fases hadrônica e de quarks à temperatura nula e finita, com vistas a aplicações no estudo de propriedades estáticas globais de estrelas compactas. Parte dos cálculos apresentados nesta dissertação foram realizados por diferentes autores. Entretanto, em geral, estes trabalhos limitaram-se ao estudo da matéria nuclear em regiões de densidades e temperaturas específicas. Este estudo visa, por sua vez, o desenvolvimento de um tratamento amplo e consistente para estes sistemas, considerando-se diferentes regimes de densidade e temperatura para ambas as fases, hadrônica e de quarks. Buscamos com isso adquirir conhecimento suficiente que possibilite, não somente a ampliação do escopo dos modelos considerados, como também o desenvolvimento, no futuro, de um modelo mais apropriado à descrição de propriedades estáticas e dinâmicas de estrelas compactas. Ainda assim, este trabalho apresenta novos aspectos e resultados inéditos referentes ao estudo da matéria nuclear, como descrevemos a seguir.

No estudo da matéria nuclear na fase hadrônica, consideramos os modelos da teoria quântica de campos nucleares desenvolvidos por J. D. Walecka, J. Zimanyi e S. A. Moszkowski, e por J. Boguta e A. R. Bodmer, e conhecidos, respectivamente, como Hadrodinâmica Quântica, ZM e Não-Linear. Nestes modelos a matéria nuclear é descrita a partir de uma formulação lagrangeana com os campos efetivos dos bárions acoplados aos campos dos mésons, responsáveis pela interação nuclear.

Neste estudo consideramos inicialmente a descrição de propriedades estáticas globais de sistemas nucleares de muitos corpos à temperatura nula, como por exemplo, a massa efetiva do núcleon na matéria nuclear simétrica e de nêutrons. A equação de estado da matéria de nêutrons possibilita a descrição de propriedades estáticas globais de estrelas compactas, como sua massa e raio, através da sua incorporação nas equações de Tolman, Oppenheimer e Volkoff (TOV). Os resultados obtidos nestes cálculos estão em plena concordância com os resultados apresentados por outros autores.

Consideramos posteriormente o estudo da matéria nuclear com graus de liberdade de bárions e mésons à temperatura finita, com particular atenção na região de transição de fase. Para este estudo, incorporamos aos modelos considerados, o formalismo da mecânica estatística à temperatura finita. Os resultados obtidos, para as propriedades da matéria nuclear à temperatura finita, concordam também com os resultados obtidos por outros autores. Um aspecto inédito apresentado neste trabalho refere-se à incorporação de valores para os pontos críticos da transição de fase, ainda não determinados por outros autores. O comportamento do calor específico também é analisado de forma inédita nesta dissertação

no tratamento utilizado com os modelos Não-Linear e ZM. Utilizamos a equação de estado da matéria de nêutrons à temperatura finita nas equações TOV, determinando propriedades globais de uma estrela protoneutrônica. Observamos neste trabalho que ocorre um aumento da massa máxima da estrela com o aumento da temperatura, comportamento este já previsto por outros autores em diferentes modelos.

Posteriormente incorporamos ao formalismo à temperatura finita, o equilíbrio químico, a presença de graus de liberdade leptônicos para elétrons e múons e a neutralidade de carga. Apresentamos nesta etapa do trabalho, uma forma alternativa para a incorporação destes ingredientes, baseada na determinação de uma fração relativa entre os potenciais químicos de prótons e nêutrons, à temperatura nula, extendendo este resultado à temperatura finita. Este procedimento permite a determinação da distribuição de núcleons e léptons no interior de uma estrela protoneutrônica, onde incluímos ainda a presença de neutrinos confinados.

No estudo da matéria de quarks, consideramos o modelo de sacola do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). Incorporando as equações TOV neste estudo, determinamos propriedades globais de estrelas de quarks, bem como a distribuição dos diferentes sabores de quarks no interior estelar. Como principal resultado, obtivemos uma equação de estado geral para a matéria hadrônica e de quarks, introduzida nas equações TOV, e analisamos a existência de estrelas híbridas. Os resultados obtidos nesta etapa do trabalho são totalmente coerentes com aqueles obtidos por outros autores.

Abstract

The purpose of this work is the study of nuclear matter at high densities considering the hadronic and quark phases at zero and finite temperatures, with the perspective of applying our formalism to the analysis of global static properties of compact stars. Part of the calculations performed in this work have been done by different authors. However, an important part of these works were limited to the nuclear matter studies at specific density and temperature regions. The aim of the present study is the development of a more complete and consistent treatment for these systems, considering different regions of density and temperature for both, the hadronic and the quark phases. Our purpose is to make it possible not only a better theoretical description of the considered systems but also the future development of a more appropriate model for describing static and dynamic properties of compact stars. Furthermore, this work presents new aspects and results referring to the nuclear matter studies, as described below.

In the nuclear matter studies for the hadronic phase, we have considered the nuclear quantum field theory developed by J. D. Walecka, J. Zimanyi and S. A. Moszkowski, and by J. Boguta and A. R. Bodmer, also known, respectively, as Quantum Hadrodynamics, ZM and Non-linear models. In these models the nuclear matter is described by a strong interaction lagrangian formulation with baryon effective fields coupled to scalar, vector and iso-vector mesons.

In this study we consider initially the description of global static properties of many-body nuclear systems at zero temperature, as for instance, the nucleon effective mass for symmetric nuclear and neutron matter. Knowledge of the neutron matter equation of state makes it possible the description of global static properties of a compact star, such as its mass and radius, through the Tolman, Oppenheimer and Volkoff equations (TOV). The results we have obtained are in complete agreement with the corresponding ones presented by other authors.

We have also considered in the nuclear matter studies the behavior of baryon and meson degrees of freedom at finite temperature, giving particular attention to the phase transition region. For these studies, we have considered the quantum statistical mechanics framework at finite temperature. Our results also exhibit a good agreement with the corresponding ones obtained by other authors. One new aspect presented in this work refers to the analysis of the critical points for the phase transition, which were not determined by other authors. The behavior of the specific heat is also analysed for the Non-Linear and ZM models for the first time in this work. Using the neutron matter equation of state at finite temperature and the TOV equations, we have determined global static properties of a protoneutron star. We

have observed in this work an increase of the star mass with the increase of the temperature, behavior which has already been predicted by other authors using different models.

We have further included into the finite temperature formalism, the chemical equilibrium equations, lepton degrees of freedom for electrons and muons and the charge neutrality condition. We have introduced in this work an alternative way for the inclusion of these ingredients, based on the determination of a relative fraction of the proton and the neutron chemical potentials at zero temperature, extending it to the finite temperature domain. This formalism allows the determination of the nucleon and lepton density distributions inside the protoneutron star, where we have included the presence of trapped neutrinos.

In the quark matter study, we have considered the bag model developed in the Massachusetts Institute of Technology (MIT). From this study, and including the TOV equations, we are able to determine global properties of quark stars, and the distribution of the different quark flavours in its interior. As a principal result, we have determined a general equation of state for hadronic and quark matter, and we have analysed the existence of hybrid stars. The predictions of our work are in complete agreement with the corresponding ones obtained by other authors.

Índice

1. Introdução	1
2. Evolução Estelar	6
2.1 Formação Estelar	6
2.2 Anãs-Branças	9
2.3 Buracos Negros	11
2.4 Estrelas de Nêutrons	14
2.4.1 Supernova	14
2.4.2 Estrutura Interna	17
2.4.3 Neutralidade de Carga	21
2.4.4 Equilíbrio Químico	21
2.4.5 Estabilidade	25
3. Modelos da Hadrodinâmica Quântica	28
3.1 Modelo de Walecka	29
3.1.1 Aproximação de Campo Médio	33
3.1.2 Quantização Canônica	35
3.1.3 Equação de Estado da Matéria Nuclear	37
3.2 Modificações ao Modelo de Walecka	39
3.2.1 Modelo Não-Linear de Boguta-Bodmer	43
3.2.2 Modelos ZM	45
3.3 Limite de Baixas Densidades	48
3.4 Soluções das Equações TOV	51

4. Modelos da Hadrodinâmica à Temperatura Finita	56
4.1 Introdução	57
4.2 Consistência Termodinâmica	58
4.3 Equação de Estado	62
4.4 Vácuo Térmico	65
4.5 Propriedades Termodinâmicas	66
4.6 Soluções das Equações TOV	73
5. Extensões aos Modelos da Hadrodinâmica	75
5.1 Densidade Lagrangeana do Méson- π	75
5.2 Densidade Lagrangeana do Méson- ρ	77
5.3 Modelos da Hadrodinâmica-II (σ , ω , π e ρ)	77
5.3.1 Determinação da Constante C_ρ^2	79
5.3.2 Léptons	80
5.3.3 Neutrinos Confinados	83
5.4 Soluções das Equações TOV	84
6. Matéria de Quarks	90
6.1 Introdução	90
6.2 Modelos da QCD	91
6.3 Equação de Estado	93
6.3.1 Temperatura Nula	94
6.3.2 Temperatura Finita	94
6.3.3 Conservação de Número Bariônico e Critério de Gibbs	95
6.4 Soluções das Equações TOV	96
7. Conclusões e Perspectivas	106
7.1 Temperatura Finita	106
7.2 Assimetria de Isospin	107
7.3 Quarks e Glúons	107
7.4 Perspectivas	108

A. Notação e Fatores de Conversão	109
B. Aproximação de Sommerfeld	112
C. Teorema de Noether	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

Capítulo 1

Introdução

Durante muitos anos os cientistas acreditaram que o átomo seria a estrutura mais fundamental existente na natureza; o próprio nome deste sistema sugeria a sua indivisibilidade. Com isso também se acreditava que, descrevendo-se o átomo, o mundo que nos cerca poderia ser descrito a partir desta teoria fundamental. Constatou-se, entretanto, que o átomo possui uma estrutura microscópica, modificando com isso a idéia de indivisibilidade e fundamentalidade da matéria. O núcleo apresentaria uma estrutura ainda mais fundamental, sendo constituído por prótons e nêutrons. Todas estas mudanças ocorreram paralelamente ao aumento de energia utilizada nos experimentos sobre reações nucleares. Posteriormente, com a construção de grandes aceleradores de partículas, capazes de gerar feixes de partículas com energia muito altas, os quarks foram descobertos. Sendo os quarks as partículas mais fundamentais da natureza, também apareceram teorias capazes de descrevê-los. A cromodinâmica quântica (QCD) engloba os aspectos mais fundamentais da interação dos quarks e constitui-se na teoria fundamental da interação forte. Entretanto, esta é uma teoria cujos cálculos, na prática, são muito complexos, envolvendo o uso de supercomputadores, principalmente para o estudo de QCD na rede.

Apesar das dificuldades, é fácil perceber que não é necessário analisar um problema qualquer como, por exemplo, sobre o movimento da terra ao redor do Sol, utilizando-se uma teoria tão fundamental quanto a QCD. Partindo deste ponto de vista, podemos determinar o comportamento de alguns sistemas conhecidos, simplesmente esquecendo-se dos graus de liberdade associados a teorias mais fundamentais, que não interfiram em seus resultados. Utilizando exemplos mais realistas, podemos citar estudos sobre moléculas ou átomos, onde a estrutura do núcleo atômico não possui nenhuma relevância, nem mesmo a inclusão dos elétrons, que orbitam fora da camada de valência deste átomo, é necessária no estudo teórico destes sistemas.

Uma alternativa à cromodinâmica fazia-se então necessária, e muitos caminhos foram traçados. Modelos denominados de teorias efetivas foram propostos, capazes de descrever de forma aceitável a estrutura da matéria em uma determinada região do espectro de energias. Em 1974, John Dirk Walecka propôs uma teoria efetiva de campos nucleares [1], capaz de descrever a matéria nuclear em uma região do espectro de energias onde os graus de liberdade dos quarks não apresentam uma contribuição significativa. Esta teoria baseia-se em uma formulação de Yukawa [2], onde mésons escalares são responsáveis pela atração a longa distância e mésons vetoriais responsáveis pela repulsão a curto alcance, descrevendo assim o comportamento observado da força forte.

Nas teorias efetivas para a matéria nuclear que consideramos neste trabalho, o termo

efetivo é utilizado com o significado de que os campos dos bárions e dos mésons são tratados como campos fundamentais sem levar-se em conta a presença dos campos dos quarks no seu interior. Estes campos são então denominados efetivos. Ademais, a interação é mediada, nessas teorias, pelos campos dos mésons efetivos, sem levar em conta a presença de glúons, sendo portanto uma interação efetiva caracterizada por constantes de acoplamento efetivas. No caso do modelo de Walecka, utiliza-se uma teoria onde incluem-se as componentes conhecidas de teorias relativísticas, como as equações de Dirac, Klein-Gordon e Proca, adicionando-se potenciais atrativos e repulsivos do tipo de Yukawa para descrever a interação forte, e ajustando-se as constantes desta teoria, de forma a reproduzir-se os resultados observados da matéria nuclear.

Com um importante valor científico, o estudo da matéria nuclear constitui, a partir de modelos do tipo de Walecka, uma área de pesquisa muito abrangente. Com a construção de colisionadores de altas energias como o RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) [3], somos capazes de comprovar algumas previsões destes modelos. Com uma vastidão de aplicações, estes modelos geram trabalhos importantes, cujos temas variam desde as minúsculas estruturas nucleares até as gigantescas e complexas estruturas de estrelas de nêutrons e pulsares.

Os modelos baseados em uma densidade lagrangeana efetiva descrevem o comportamento da matéria nuclear através da dinâmica de bárions e mésons e de seus acoplamentos. A utilização das equações de Euler-Lagrange e do tensor de energia-momento torna as teorias capazes de descrever, na aproximação de campo médio, a equação de estado da matéria nuclear, além de outras propriedades. A teoria de campo médio[4] é aplicada com a finalidade de eliminar a não linearidade das equações de campo obtidas através das equações de Euler-Lagrange.

Dentre as aplicações destes modelos destacamos, nesta dissertação, o estudo sobre estrelas de nêutrons. Utilizando a equação de estado da matéria nuclear, podemos determinar algumas propriedades de uma estrela de nêutrons, através de equações da relatividade geral, desenvolvidas por Einstein, e apresentadas de forma simplificada por Tolman-Oppenheimer-Volkoff para uma métrica onde a estrela é tratada considerando-se uma simetria esférica, estática e isotrópica.

Estrelas de nêutrons são objetos extremamente densos, 10^{15} g/cm³, compostas por um total de 10^{55} partículas daquele tipo que lhe dá o nome: o nêutron (80% de sua composição). Desta forma, a matéria nuclear contida na estrela adapta-se de forma admirável ao estudo proposto pelas teorias efetivas, onde a definição formal de matéria nuclear pressupõe uma quantidade *infinita* de núcleons.

Neste trabalho realizamos uma análise sobre os modelos da hadrodinâmica quântica, partindo do modelo de Walecka e rerepresentando os modelos de Boguta e Bodmer[5] e Zimanyi e Moszkowski[6]. Ainda desenvolvemos o estudo destes modelos em diferentes abordagens: à temperatura finita, para matéria nuclear assimétrica e na transição para uma fase formada por um plasma de quarks e glúons.

A inclusão da temperatura no formalismo é de fundamental importância no estudo das transições de fase da matéria nuclear. Como aplicação direta escolhemos o estudo de estrelas protoneutrônicas[7], as quais se formam no colapso de uma estrela massiva durante o fenômeno da formação de supernovas e que transformam-se em estrelas de nêutrons através de processos de conversão de prótons em nêutrons, com a emissão de neutrinos. Ainda no estudo da matéria nuclear, introduzimos uma alternativa ao estudo da matéria nuclear

assimétrica quente, definindo uma razão entre os potenciais químicos de prótons e nêutrons. Estudamos também a possibilidade da existência de um plasma de quarks e glúons no interior de uma estrela protoneutrônica ou de nêutrons, ou a possível existência de estrelas compostas unicamente por quarks. Para isto, utilizamos o lagrangeano da QCD, incluído no modelo de sacola do MIT[8], definindo uma transição de fase entre a matéria nuclear e a matéria de quarks.

O estudo da matéria nuclear contempla uma ampla variedade de caminhos a serem seguidos. Neste trabalho escolhemos duas linhas principais: o estudo do papel da temperatura na matéria nuclear simétrica e assimétrica e no plasma de quarks e glúons, aplicando seus resultados ao estudo de estrelas compactas. Sendo assim este trabalho é desenvolvido da seguinte forma:

- No primeiro capítulo descrevemos a **Evolução Estelar**. Apresentamos neste capítulo algumas propriedades e características físicas de estrelas de nêutrons, de estrelas protoneutrônicas e de pulsares. Estes objetos estelares servem como um laboratório para o estudo da física nuclear, em condições extremas de densidade e pressão. Apresentamos neste capítulo as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [9][10] afim de descrevermos estes objetos de interesse astrofísico, a partir de suas massas, raios, densidades, equação de estado, transição de fase e temperatura.
- No capítulo seguinte, apresentamos os **Modelos da Hadrodinâmica Quântica**, onde desenvolvemos o estudo da matéria nuclear. Os modelos de Walecka, Zimanyi-Moszkowski e não-linear de Boguta-Bodmer são analisados quanto à sua validade e precisão. Um estudo sobre as suas fundamentações, formas de acoplamento, resultados para a massa efetiva do núcleon e o módulo de compressibilidade da matéria nuclear são discutidos.
- Os **Modelos da Hadrodinâmica à Temperatura Finita** estão descritos no quarto capítulo como uma primeira aplicação deste trabalho. Desenvolvidos sob o formalismo estatístico de Fermi-Dirac, através de um potencial termodinâmico[11], os resultados deste capítulo ainda serão estendidos aos capítulos restantes. Os resultados descrevem o comportamento da matéria nuclear durante a transição de fase, de onde retiramos os resultados que devem ser aplicados a estrelas protoneutrônicas.
- O capítulo cinco, sobre as **Extensões aos Modelos da Hadrodinâmica**, tem por finalidade discutir uma forma alternativa para a realização do equilíbrio químico no estudo à temperatura finita. Outra forma para este estudo está descrita no apêndice B, com um regime de validade para altas densidades e baixas temperaturas.
- Também estudamos, no capítulo seguinte, as implicações da possível existência da **Matéria de Quarks** no interior de estrelas de nêutrons e protoneutrônicas a partir da construção de uma equação de estado deduzida a partir dos modelos da hadrodinâmica quântica, incorporando-se a ela uma contribuição proveniente do lagrangeano da cromodinâmica quântica (QCD). Consideramos também a possibilidade da existência de uma estrela composta apenas por quarks.

- Apresentamos no último capítulo as nossas **Conclusões e Perspectivas** quanto ao estudo da matéria nuclear e de estrelas relativísticas.
- Ainda foram incluídos três apêndices para o maior esclarecimento sobre tópicos específicos deste trabalho.

Capítulo 2

Evolução Estelar

Uma estrela é formada a partir de uma gigantesca nuvem de gás. Durante sua *vida*, transforma, através de reações de fusão termonuclear, elementos mais leves, como o hidrogênio, em elementos mais pesados, como o hélio, o carbono ou o oxigênio. Ao final de um longo período, de 10^6 a 10^{12} anos¹, esta estrela *morre*, transformando-se em uma Anã-Branca, uma Estrela de Nêutrons ou um Buraco Negro. Neste capítulo descrevemos as diferentes etapas desta evolução, dando uma atenção especial ao estágio de estrelas de nêutrons, onde aplica-se esta dissertação.

2.1 Formação Estelar

O nascimento de uma estrela ocorre quando uma gigantesca nuvem, composta basicamente por hidrogênio molecular, começa a colapsar em direção a uma região mais densa, devido à ação da gravidade. Esta nuvem pode atingir dimensões da ordem de centenas de anos luz e massas de até $10^7 M_{\odot}$, com temperaturas muito baixas (10K), podendo haver regiões de maior temperatura (2000K). Esta nuvem de gás não irá, necessariamente, formar apenas uma estrela. Quando uma ou mais regiões atingirem a chamada *Massa de Jeans*², a nuvem deve colapsar em direção às regiões mais densas.

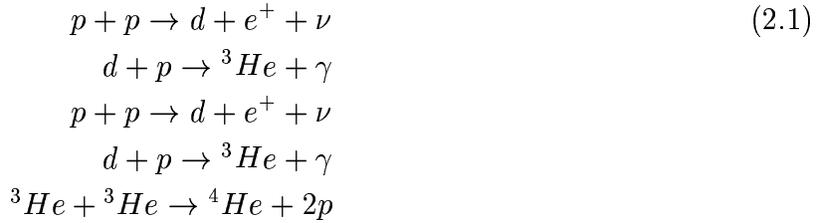
Quando a energia gravitacional, gerada através do colapso estelar, for suficientemente alta para criar um núcleo denso no interior desta proto-estrela, um processo conhecido por **fusão termonuclear** terá início. O processo de fusão termonuclear consiste em um processo “tradicional” de fusão, onde dois núcleos mais leves transformam-se em outro mais massivo, com uma energia inferior à da barreira de potencial entre os núcleos, mas suficientemente grande para que haja um processo de tunelamento, dando início ao processo de fusão.

O processo de fusão termonuclear deve gerar uma quantidade de energia no interior de uma estrela, grande o suficiente para evitar o colapso total da estrela, equilibrando sua força com a pressão gravitacional exercida pelas camadas mais externas desta estrela. Algumas das reações que determinam o equilíbrio hidrostático de uma estrela são as cadeias pp, o ciclo 3α e o ciclo CNO, descritas abaixo.

¹ O tempo de evolução de uma estrela depende de uma potência inversa de sua massa ($t \propto M^{-2,5}$), ou seja, as estrelas mais massivas evoluem mais rapidamente.

² A Massa de Jeans constitui-se na relação massa-raio de uma nuvem de gás onde seu colapso gravitacional deve ocorrer.

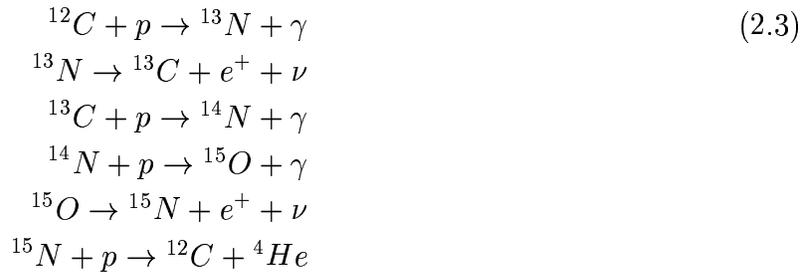
Cadeias pp ($T \sim 10^7 K$):



Ciclo 3α ($T \sim 10^8 K$):



Ciclo CNO ($T \sim 1,5 \times 10^7 K$):



A evolução de uma estrela depende fundamentalmente de sua massa inicial, isto porque, quanto maior esta massa, maior será a sua energia gravitacional, acelerando os processos de fusão, devido à maior compressão gravitacional, e determinando com isto uma vida mais curta para as estrelas mais massivas. No ano de 1911, Hertzsprung e Russel criaram uma forma de se classificar as estrelas a partir de sua temperatura, luminosidade ou magnitude espectral. Esta classificação ficou conhecida como Diagrama-HR, que está ilustrado na figura 2.1. A evolução estelar começa através da sequência principal, onde estrelas como o Sol transformam o hidrogênio em hélio. O ramo das gigantes indica a região onde o processo de fusão do hidrogênio cessou, dando início à fusão do hélio. O ramo das supergigantes somente é alcançado por estrelas muito massivas, tornando-se o último estágio da *vida* luminosa de uma estrela.

2.2 Anãs-Branças

Quando o hidrogênio contido no núcleo da estrela começa a se tornar escasso e os processos de fusão nuclear não geram energia suficiente para suportar o peso da estrela, esta sofre um novo colapso. O hélio passa a formar o seu núcleo, enquanto o hidrogênio remanescente compõe as camadas mais externas. Novamente este colapso não será total, exatamente

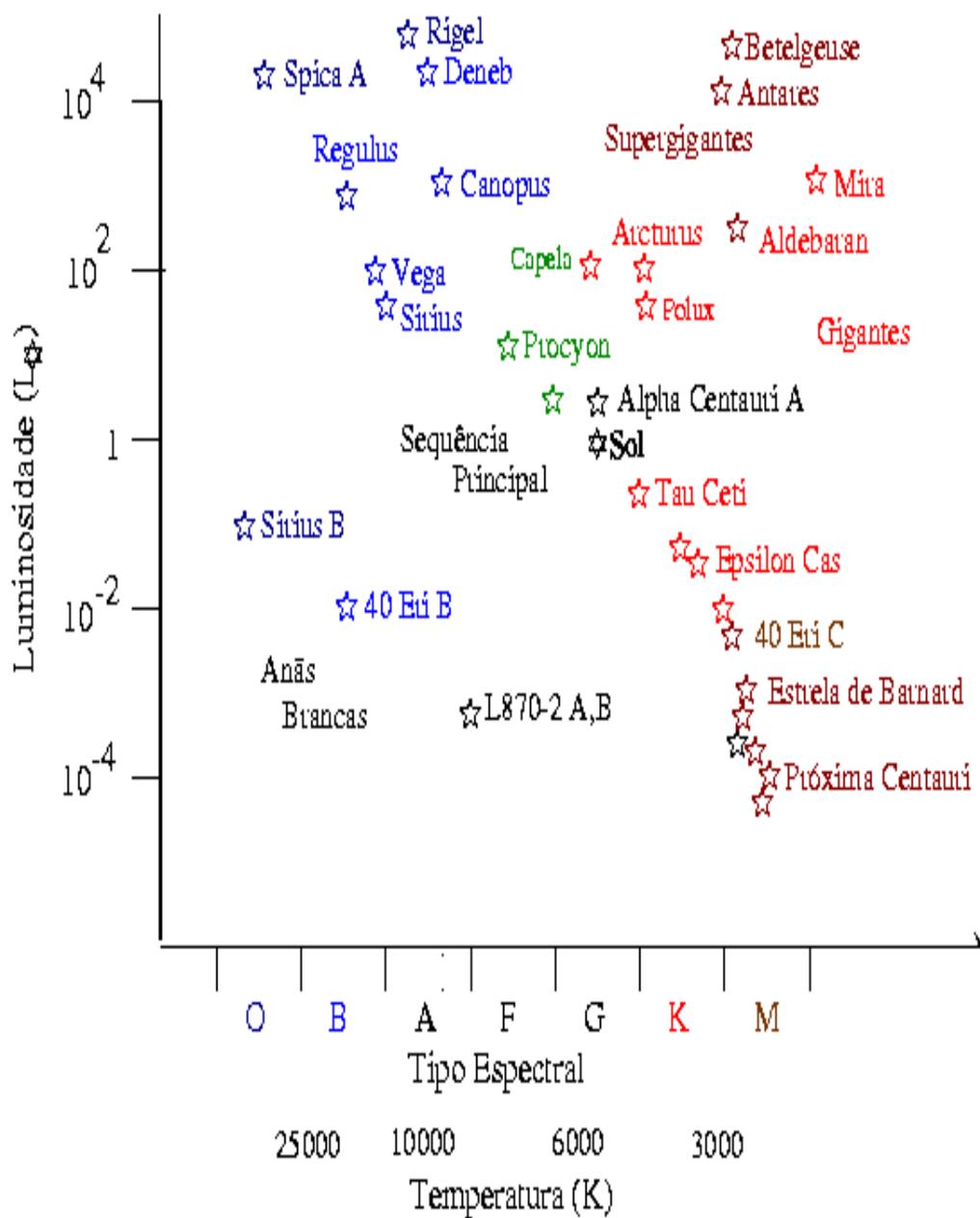


Fig. 2.1: Diagrama de Hertzsprung-Russel da nossa galáxia [12].

como aconteceu no caso anterior e um novo processo de fusão terá início. Desta vez, o hélio será transformado em elementos mais pesados, gerando a energia necessária para contrabalançar a energia de colapso gravitacional. Este processo pode se repetir para vários outros elementos, dependendo da massa da estrela.

Em estrelas com pouca massa ($M < 8M_{\odot}$), formam-se, além do hidrogênio e hélio, carbono, oxigênio e silício. Esta estrela irá colapsar pela última vez; entretanto, ela não irá colapsar totalmente. O final da evolução desta estrela ocorre quando, antes de atingir a energia necessária para formar novos núcleos em seu interior, ela atinge uma região onde a pressão de degenerescência dos elétrons contidos em seu interior impede o final deste colapso. Formam-se então as Anãs-Branças, cuja estrutura final está representada na figura 2.2. Estas estrelas possuem um raio aproximadamente igual ao da Terra (6000 Km), com massa da ordem de $1 M_{\odot}$. Com uma temperatura superficial aproximada de 8000 K, estas estrelas fazem-se parecer brancas, originando seu nome. Dentre estas estrelas as massas conhecidas variam entre 0.33 e $1.54 M_{\odot}$. As anãs brancas ainda são visíveis no Diagrama-HR, devido a uma pequena emissão de fótons em sua superfície. Quando esta emissão cessar, a estrela deve desaparecer sob a forma de uma anã preta.

Cada processo de fusão termonuclear necessita de uma energia de ignição, gerada a partir da energia gravitacional. Em 1931, Chandrasekhar [13] determinou as massas necessárias para que uma estrela desse início a estes processos. Cita-se na equação abaixo alguns destes valores.

$$\begin{aligned} H &\rightarrow 0.08M_{\odot} \\ He &\rightarrow 0.25M_{\odot} \\ C &\rightarrow 1.06M_{\odot} \\ Ne &\rightarrow 1.37M_{\odot} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Uma anã branca é composta, basicamente, pelos núcleos indicados acima, determinando então a massa máxima para uma estrela deste caráter como $1.47M_{\odot}$ [13], onde forma-se o oxigênio. A partir deste ponto, a pressão dos elétrons degenerados não será mais capaz de sustentar a pressão gravitacional, determinando uma região de instabilidade entre as fases de anãs brancas e estrelas de nêutrons.

2.3 Buracos Negros

Contrariamente ao processo que leva à formação de uma anã branca, um buraco negro é formado a partir de um objeto muito massivo ($M > 20M_{\odot}$). Buracos negros são estruturas das quais nem mesmo a luz pode escapar, matematicamente considerados como uma singularidade nas equações de Einstein da relatividade geral. Esta singularidade corresponde ao raio de Schwarzschild³, $R = 2M$ [14]. Como podemos observar, no balanço entre a energia

³ Nesta expressão, R corresponde ao raio do objeto com massa M.

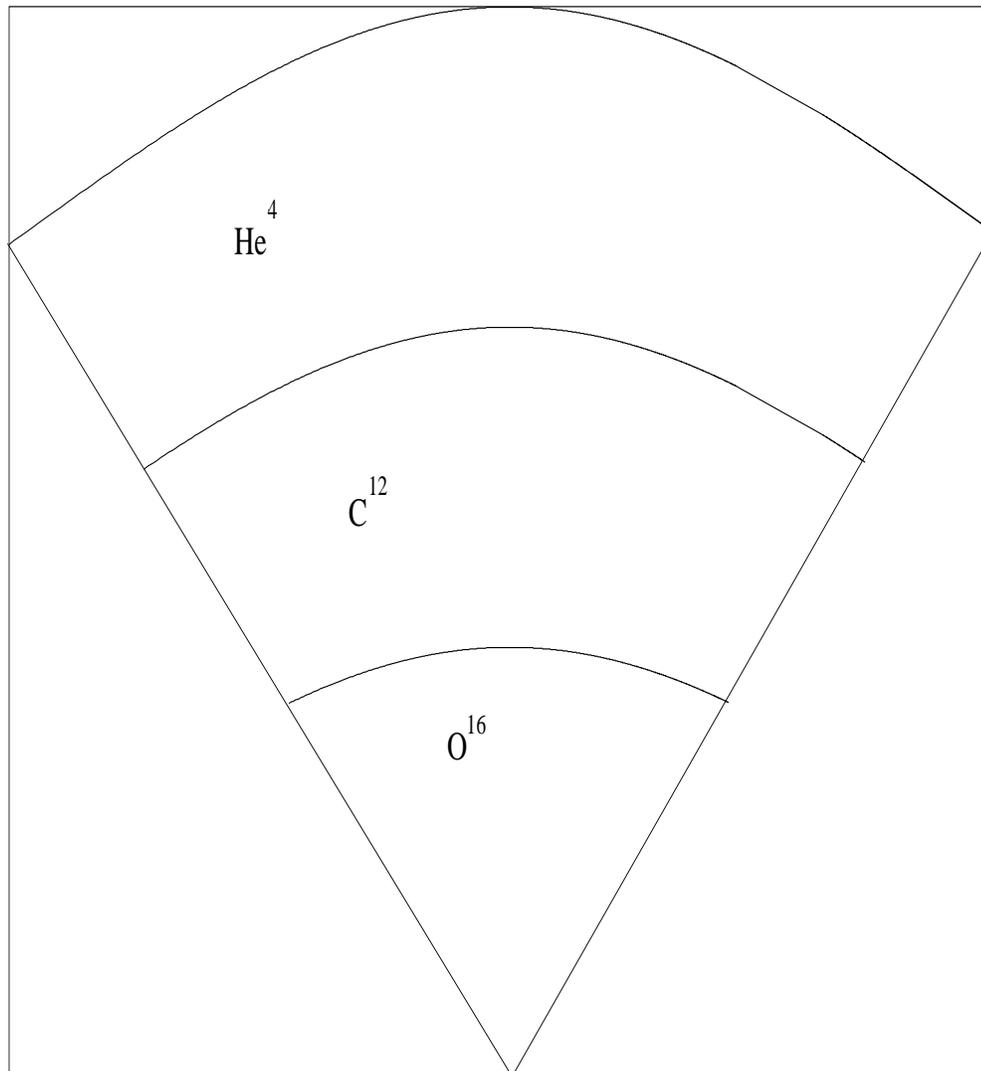


Fig. 2.2: *Representação da estrutura de uma Anã-Branca.*

cinética de uma partícula de massa m com velocidade quase igual à da luz e a energia gravitacional que ela sofre ao interagir com um objeto cosmológico de raio R e massa M ,

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{GmM}{R}; \quad (2.5)$$

utilizando-se nesta expressão unidades $G=c=1$, obtemos o raio de Schwarschild, $R=2M$ [14].

Quando um objeto cosmológico atinge este limite, ele e toda matéria nele contida colapsam. Devido à forte atração gravitacional, nada consegue escapar de sua atração, e a captura da luz impede a sua detecção visual. Evidências de sua existência podem ser encontradas na observação do movimento de estrelas encontradas nas extremidades de galáxias, alterando seu movimento devido à presença de um objeto tão massivo nas suas proximidades.

Estes objetos não possuem um limite para a sua massa, que pode variar tanto quanto o seu raio. Sua formação pode ocorrer tanto a partir do colapso estelar, como através do colapso de uma galáxia inteira, desde que o limite de Schwarschild seja respeitado.

Buracos negros são geralmente descritos como estruturas extremamente densas; isto não é, entretanto, uma verdade absoluta. Um buraco negro deve apenas respeitar a condição deduzida anteriormente, determinando-se com isto a sua densidade

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} > \frac{3}{32\pi M^2}. \quad (2.6)$$

Esta condição leva a uma dependência da densidade do buraco negro em função da massa do objeto colapsado

$$\rho > \frac{1,8 \times 10^{16}}{(M/M_{\odot})^2} g/cm^3. \quad (2.7)$$

Desta forma, se a Via-láctea colapsasse, agregando uma massa equivalente a $10^{12}M_{\odot}$, geraria um buraco negro com densidade e raio dados por

$$\begin{aligned} \rho &> 1,8 \cdot 10^{-8} g/cm^3, \\ R &= 3 \cdot 10^2 Km. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.4 Estrelas de Nêutrons

Consideramos agora os objetos de interesse desta dissertação, as estrelas de nêutrons, formadas a partir de estrelas com massas entre $8M_{sol}$ e $20M_{sol}$. Estrelas que possuem uma massa entre estes limites continuam o processo de evolução interrompido no caso das anãs brancas. Devido a sua maior massa, há um novo processo de fusão de elementos existentes no interior da estrela, o que não ocorre no caso das anãs-brancas. Novamente porém, este processo terá seu fim, o qual será determinado desta vez através de uma propriedade fundamental da matéria nuclear, a sua energia de ligação. A energia de ligação de cada

núcleo isolado não determina o final da evolução; o que determina este final é a relação entre a energia de ligação de dois núcleos diferentes, e assim o estado mais favorável ao sistema. Conforme podemos observar na figura 2.3, o elemento ferro marca um limite onde o processo de fusão nuclear deixa de ser exotérmico, tornando-se endotérmico. Desta forma, a fusão do elemento ferro em elementos mais pesados não é mais favorável para o sistema. Na figura 2.3 distinguimos as duas regiões distintas favoráveis aos processos de fusão e fissão, separadas pelo ponto onde u.m.a.=56.

2.4.1 Supernova

A estrela anteriormente considerada deve então colapsar, e devido a sua massa elevada, a pressão de degenerescência dos elétrons não será suficiente para evitar o seu colapso. O sistema irá buscar novos estados que minimizem a sua energia, sendo o primeiro conhecido como neutronização, onde os núcleos capturam elétrons transformando prótons em nêutrons, com a emissão de neutrinos



Alguns nêutrons também são liberados do núcleo, ficando livres no interior desta estrela. Outro processo que retarda o colapso estelar é conhecido como hiperonização, onde os prótons são transformados em híperons⁴. Devido à alta densidade em que o núcleo estelar se encontra, os neutrinos originados nos processos de neutronização e hiperonização, devem escapar apenas através de um lento processo de difusão e convecção⁵. Com isso, as temperaturas que descrevem o interior desta estrela são da ordem de $10^{11}K$.

Ondas de choque são originadas no interior do núcleo estelar e dissipadas por fotodesintegração de núcleos



processo este que ocorre até algumas centenas de quilômetros do centro da estrela. O núcleo não suporta mais a pressão gravitacional e ondas de descompressão, originadas no caroço, viajam à velocidade do som; o material mais externo então “cai” em direção à onda de choque, formando uma bolha composta pelas mesmas partículas nucleares em uma densidade mais rarefeita, que por sua vez, divide a estrela entre o seu caroço e envelope. Esta bolha é aquecida através dos neutrinos que escapam do interior do núcleo estelar. Finalmente, através da expansão desta bolha, o processo de supernova[15] tem início, ejetando o envelope e comprimindo o caroço da estrela (núcleo de ferro).

⁴ Híperons são partículas bariônicas que possuem o número quântico *estranheza*, s , diferente de zero. Por exemplo, Λ e Σ , ambos com $s=-1$.

⁵ O neutrino é uma partícula com seção de choque quase nula. Esta partícula é capaz de atravessar a Terra sem sofrer quase nenhuma colisão, dificultando a sua detecção. O neutrino é caracterizado por ser um lépton, ou seja, estar sujeito à ação da força fraca, além da força gravitacional.

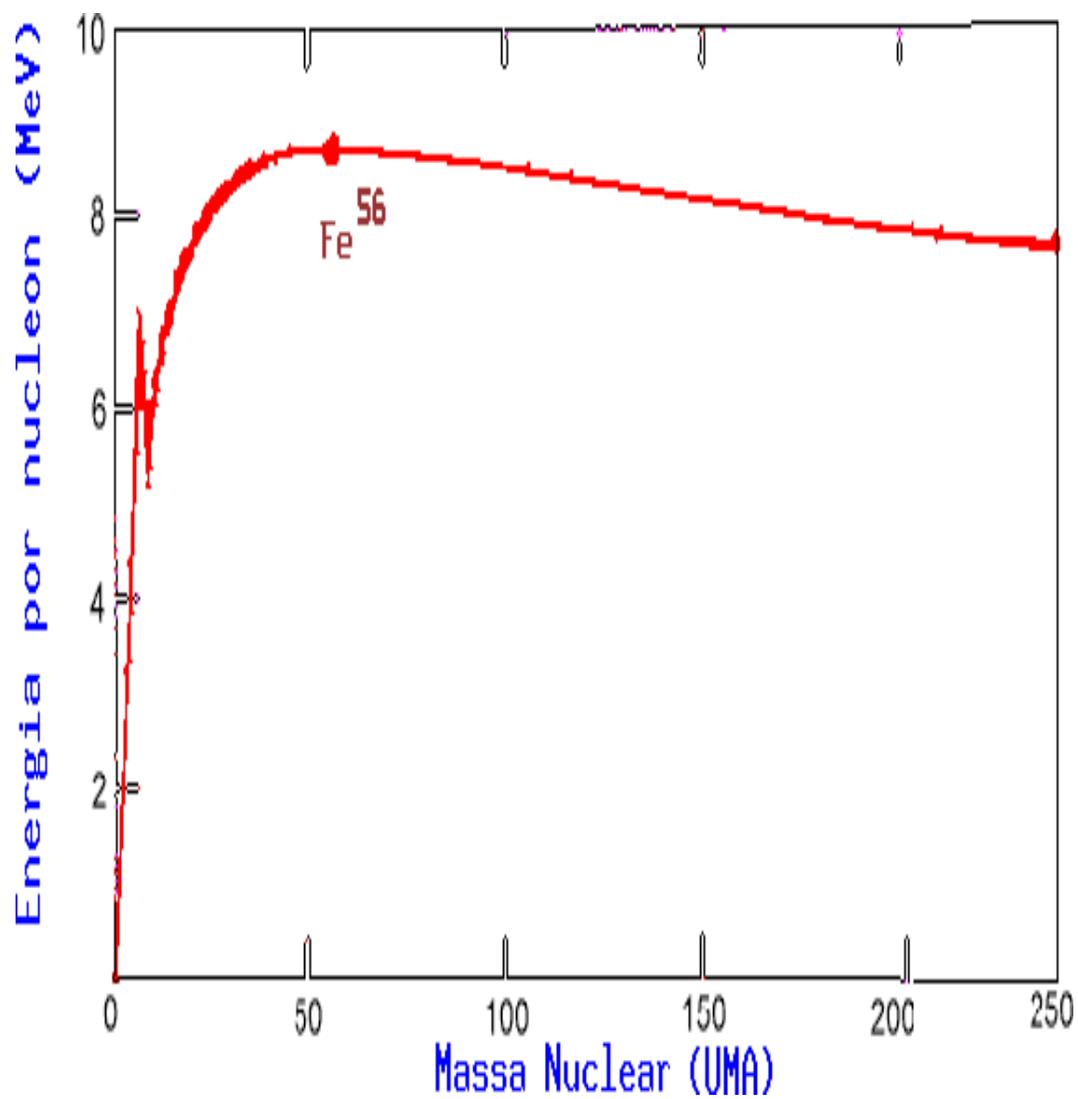


Fig. 2.3: Energia de ligação por núcleon, caracterizando os processos de fusão e fissão nuclear. O elemento ferro ($u.m.a.=56$) é destacado como fronteira destes processos [12].

Neste estágio forma-se uma estrela protoneutrônica, com densidade e temperatura muito elevadas, que resfriará, principalmente, através da emissão de neutrinos contidos em seu interior. Em poucos segundos esta estrela pode ser considerada fria e com uma estrutura definida, sob a forma de uma estrela de nêutrons. Esta estrela de nêutrons ainda irá resfriar por milhares de anos apesar de não possuir mais nenhuma atividade nuclear em seu interior e sua estrutura estará condensada sob uma forma que somente poderá ser alterada por fatores externos, como por exemplo a colisão com outras estrelas.

2.4.2 Estrutura Interna

Chadwick[16], em 1932, descobriu uma partícula, que por não possuir carga elétrica, foi denominada de nêutron. As estrelas de nêutrons foram descobertas, por acaso, durante uma pesquisa realizada por Hewish e Bell[17] apenas em 1967, confirmando as previsões de Baade e Zwicky (1934). A detecção de estrelas de nêutrons é feita através de radiotelescópios [18], onde pulsos de raio-X atingem suas antenas. Uma estrela de nêutrons em rotação é detectada através de pulsos de energia, dando-lhe o nome de pulsar. Estes pulsares possuem altas velocidades de rotação, fortes campos magnéticos e uma direção de emissão destes raios bem definida.

Estrelas de nêutrons e protoneutrônicas são sustentadas contra a pressão gravitacional através da pressão de degenerescência dos nêutrons contidos no seu interior. Para descrever a estrutura destas estrelas podemos utilizar as equações da relatividade geral conhecidas como equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [9][10]. Estas equações são deduzidas a partir do formalismo da relatividade geral e estão contidas nas equações de Einstein. As equações TOV possuem a seguinte forma:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[p(r) + \epsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r(r - 2M(r))}, \quad (2.11)$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \epsilon(r)r^2 dr, \quad (2.12)$$

onde p corresponde à pressão, ϵ à densidade de energia, r corresponde à distância entre o centro da estrela e uma camada em seu interior e $M(r)$ à massa contida na região interior a este raio. O lado direito da equação 2.11 pode ser interpretado como a equação de Newton, que descreve a força gravitacional atuando em uma camada de matéria, tendo ademais correções relativísticas exatas. Com isso, interpretamos o lado esquerdo desta equação como sendo a força atuando no sentido radial e em direção ao interior estelar, na superfície de uma camada de matéria, devido à diferença de pressão $dp(r)$. Estas equações determinam a estrutura de uma estrela em equilíbrio hidrostático. Uma estrela de nêutrons também possui uma distribuição da temperatura em seu interior determinada a partir de sua temperatura superficial. Esta distribuição é descrita por uma equação expressa em termos da temperatura com dependência local $T(r)$ e de $e^{\nu(r)} = (1 - \frac{M(r)}{r})^{1/2}$, que representa os efeitos da métrica sobre a temperatura, como:

$$T(r)e^{\nu(r)} = \text{constante}, \quad (2.13)$$

e representada na figura 2.4.

O nome *Estrela de Nêutrons* nos dá uma idéia sobre a constituição destes objetos estelares. Entretanto, não é esta a única partícula constituinte desta estrela. Uma estrela de nêutrons pode ser composta por outros bárions (n, p, Σ , Ω ,...), léptons (e, μ , ν ,...) e mésons (ω , π , K,...). Algumas teorias ainda prevêm a existência de condensados de píons e káons ou até a existência de uma região conhecida por plasma de quarks e glúons, onde os quarks se apresentam livres no seu núcleo.

Neste trabalho desenvolvemos o estudo destas estrelas, inicialmente compostas simplesmente por nêutrons, adicionando-se a seguir a presença de prótons, elétrons e múons. A presença de neutrinos confinados no interior de uma estrela protoneutrônica também é analisada, tendo em vista que sua difusão constitui a principal forma de resfriamento da estrela após a sua formação. Incluímos ainda neste trabalho a presença de quarks no interior estelar.

Neste trabalho adotamos o nome *Estrela de Nêutrons* para a solução das equações TOV aplicadas à equação de estado da matéria de nêutrons à $T=0$, e *Estrela Protoneutrônica* para as soluções da equação de estado da matéria nuclear ou de nêutrons à temperatura finita.

As estrelas de nêutrons possuem uma densidade elevada de aproximadamente 10^{15} g/cm³, um raio muito inferior ao de uma estrela luminosa e até mesmo comparativamente ao da Terra, $R \sim 10$ km, e uma massa aproximada de $1.5 M_{\odot}$. Algumas estrelas de nêutrons, os pulsares, podem rotar em alta velocidade devido à conservação de momento angular durante a sua gênese. Estas estrelas tem um período médio de 1.5 ms [18] e um campo magnético próximo a 10^{12} - 10^{13} Gauss [19]. Estrelas de nêutrons ainda são impostas ao equilíbrio químico e à neutralidade de cargas; estes aspectos serão explicados nas sub-seções a seguir. Na figura 2.5 observamos a distribuição de massas de algumas estrelas de nêutrons conhecidas.

Existem muitos modelos sobre a composição das estrelas de nêutrons. Na região mais superficial da estrela encontram-se núcleos de ferro, formados no final da vida da estrela luminosa que lhe deu origem. A região mais interior contém as partículas que compõem o assim denominado octeto bariônico fundamental. Léptons, como o elétron e o múon, encontram-se tanto na região interior como na superfície da estrela [20]. No núcleo de uma estrela de nêutrons podemos encontrar, além das partículas do octeto bariônico, condensados de Píons e Káons [21], formados devido à alta densidade deste núcleo. Outra composição prevista para o núcleo contempla um plasma de quarks e glúons, conforme mostra a figura 2.6. Este plasma possui a capacidade de, a altas temperaturas e densidades, libertar os quarks e os glúons do interior dos hádrons [22].

Constituintes fundamentais da matéria hadrônica, os quarks interagem entre si através da troca de glúons. Os quarks são partículas encontradas apenas sob a forma qqq , ou $q\bar{q}$, podendo, teoricamente, tornarem-se livres a altas densidades e temperaturas, em condições similares àquelas impostas em uma estrela de nêutrons ou em aceleradores⁶.

⁶ qqq corresponde a três quarks e $q\bar{q}$ a um par de quark e anti-quark.

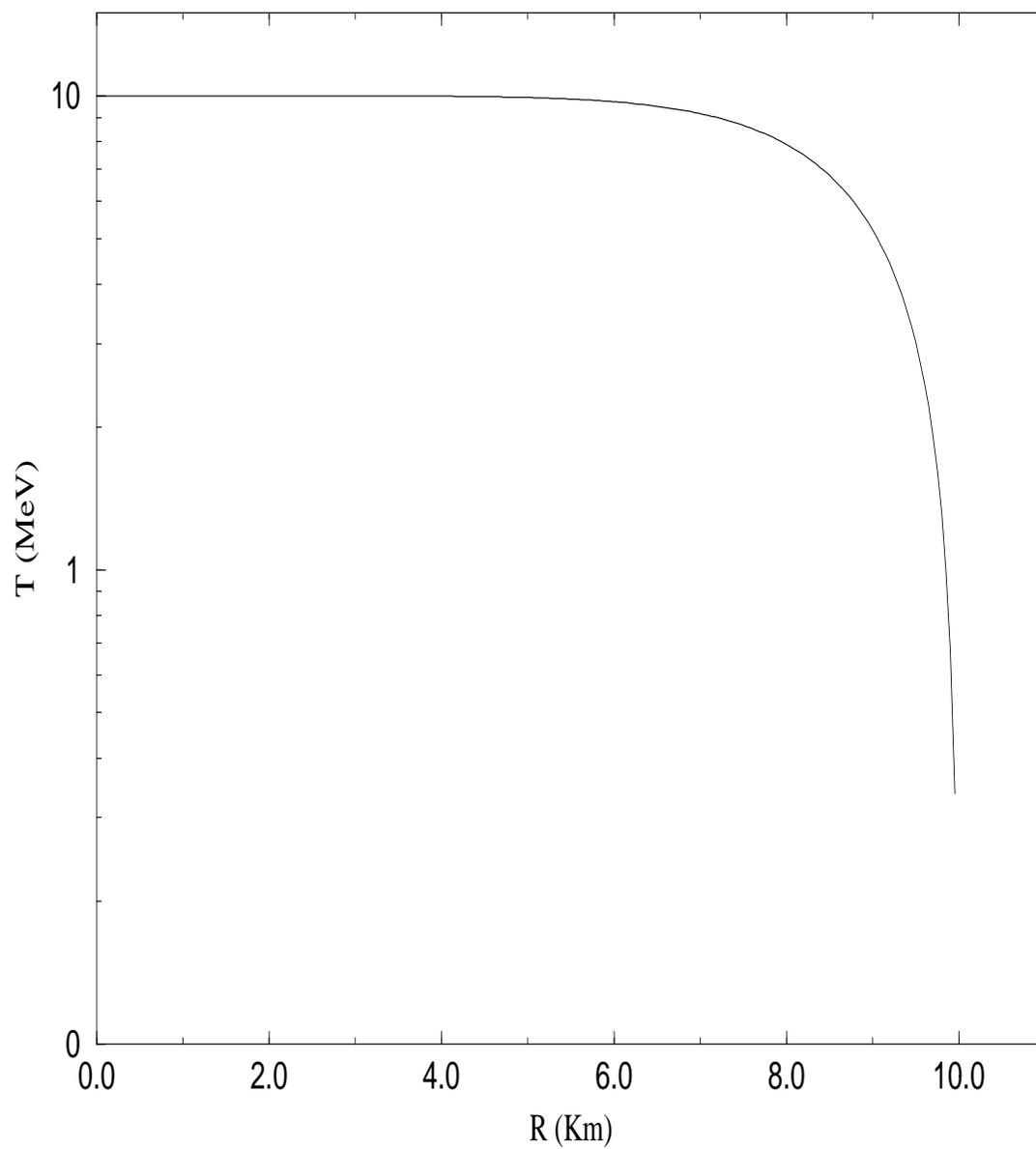


Fig. 2.4: *Comportamento da temperatura no interior de uma estrela de nêutrons, apresentado de forma esquemática.*

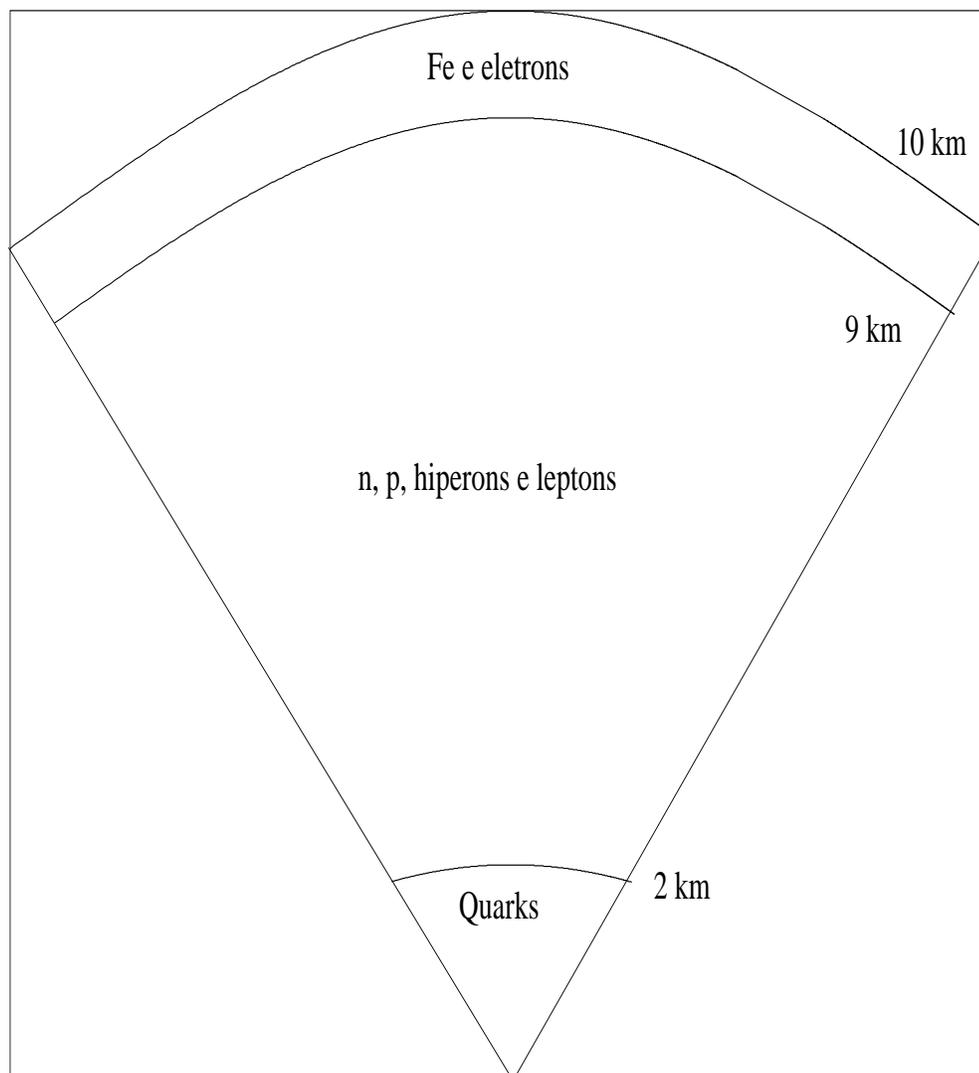


Fig. 2.6: *Estrutura interna de uma estrela de nêutrons.*

2.4.3 Neutralidade de Carga

Estrelas de nêutrons são eletricamente neutras. Isto significa que uma carga elétrica não será expelida da estrela devido à repulsão coulombiana, por esta ser inferior à atração gravitacional. Existe um valor máximo de carga elétrica para a estrela, determinado ao considerarmos um próton na superfície de uma estrela e utilizando-se a seguinte expressão

$$\frac{(Z_{total}e)e}{R^2} < \frac{GMm}{R^2} < \frac{G(Am)m}{R^2}, \quad (2.14)$$

onde Z_{total} , R e M correspondem respectivamente à carga total, ao raio e à massa da estrela e m e e à massa e à carga do próton. Como a massa gravitacional da estrela é menor do que a sua massa bariônica, podemos usar a aproximação $M < Am$, resultando em um valor para o limite da carga total da estrela igual a

$$Z_{total} < 10^{-36} A; \quad (2.15)$$

com uma quantidade de partículas da ordem de 10^{55} , obtemos a carga elétrica limite de uma estrela como sendo $10^{19}e$. Com isso, a carga elétrica por bárion é praticamente nula (10^{-36}). O cálculo realizado leva em consideração uma estrela sem elétrons que, ao serem incluídos nesta conta, deve reduzir o valor da carga por um fator de m_e/m .

2.4.4 Equilíbrio Químico

Uma estrela de nêutrons também deve respeitar as condições de equilíbrio químico. Esta condição é determinada através da minimização da densidade de energia das partículas envolvidas, determinando-se, com isso, a fração de cada partícula existente em densidades bariônicas fixas.

Escrevemos uma densidade de energia genérica onde incluímos, por simplicidade, apenas prótons (p), nêutrons (n) e elétrons (e)

$$\epsilon(\rho_n, \rho_p, \rho_e) = \epsilon(\rho_n) + \epsilon(\rho_p) + \epsilon(\rho_e). \quad (2.16)$$

Para uma densidade bariônica fixa, $\rho_B = \rho_n + \rho_p$, devemos respeitar a condição de neutralidade de cargas e, portanto, $\rho_p = \rho_e$.

Através do método de multiplicadores de Lagrange construímos uma nova função, que incorpora estas condições, e que desejamos extremizar:

$$F(\rho_n, \rho_p, \rho_e) = \epsilon(\rho_n, \rho_p, \rho_e) + \alpha(\rho_B - \rho_n - \rho_p) + \beta(\rho_e - \rho_p). \quad (2.17)$$

A função F deve ser invariante frente a variações da densidade das partículas:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_n} = \frac{\partial F}{\partial \rho_p} = \frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 0 \quad (2.18)$$

Para um gás de partículas livres obtemos que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \epsilon}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \rho_i} = \sqrt{k_i^2 + M_i^2}, \quad (2.19)$$

onde $i = n, p, e$. Utilizando as condições acima, temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{k_n^2 + M_n^2} = \mu_n, \\ \alpha + \beta &= \sqrt{k_p^2 + M_p^2} = \mu_p, \\ -\beta &= \sqrt{k_e^2 + M_e^2} = \mu_e, \end{aligned} \quad (2.20)$$

e eliminando os multiplicadores de Lagrange destas expressões, obtemos a condição de equilíbrio químico

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e. \quad (2.21)$$

Esta expressão indica, indiretamente, a fração de cada tipo de partícula existente neste gás de Fermi, em uma determinada densidade bariônica.

2.4.5 Estabilidade

Através da integração das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, determinam-se configurações de equilíbrio hidrostático. Entretanto, demonstramos a seguir que equilíbrio hidrostático não significa estabilidade estelar. Na figura 2.7 apresentamos um quadro hipotético de resultados para a integração das equações TOV, onde todas as regiões estão determinadas em equilíbrio hidrostático.

Observamos na região de mais baixa densidade, o regime estável da equação, separado da região de instabilidade no ponto onde a massa é máxima ($\frac{\partial M}{\partial \epsilon_c} = 0$) [24]. Esta diferença pode ser explicada ao aplicarmos uma perturbação onde a densidade central de uma estrela é aumentada por uma pequena quantidade. Na região estável, esta estrela deveria aumentar sua massa, ou diminuir a sua densidade, para retornar ao equilíbrio. Como a estrela não irá aumentar sua massa espontaneamente, ela deve retornar ao mesmo ponto. Já em uma estrela situada na região de instabilidade, uma perda de massa pode ocorrer, e repetir-se infinitamente até que a estrela esteja totalmente dissipada.

Com isso, encontramos uma região de equilíbrio estável para anãs brancas, no regime de mais baixas densidades, seguida de uma região de equilíbrio instável, onde os objetos nela contidos devem expandir-se em anãs brancas, ou colapsar, indo em direção a uma nova região onde encontram-se as estrelas de nêutrons. Regiões de densidades mais baixas que as apresentadas na figura 2.8, correspondem à formação de anãs marrons e planetas.

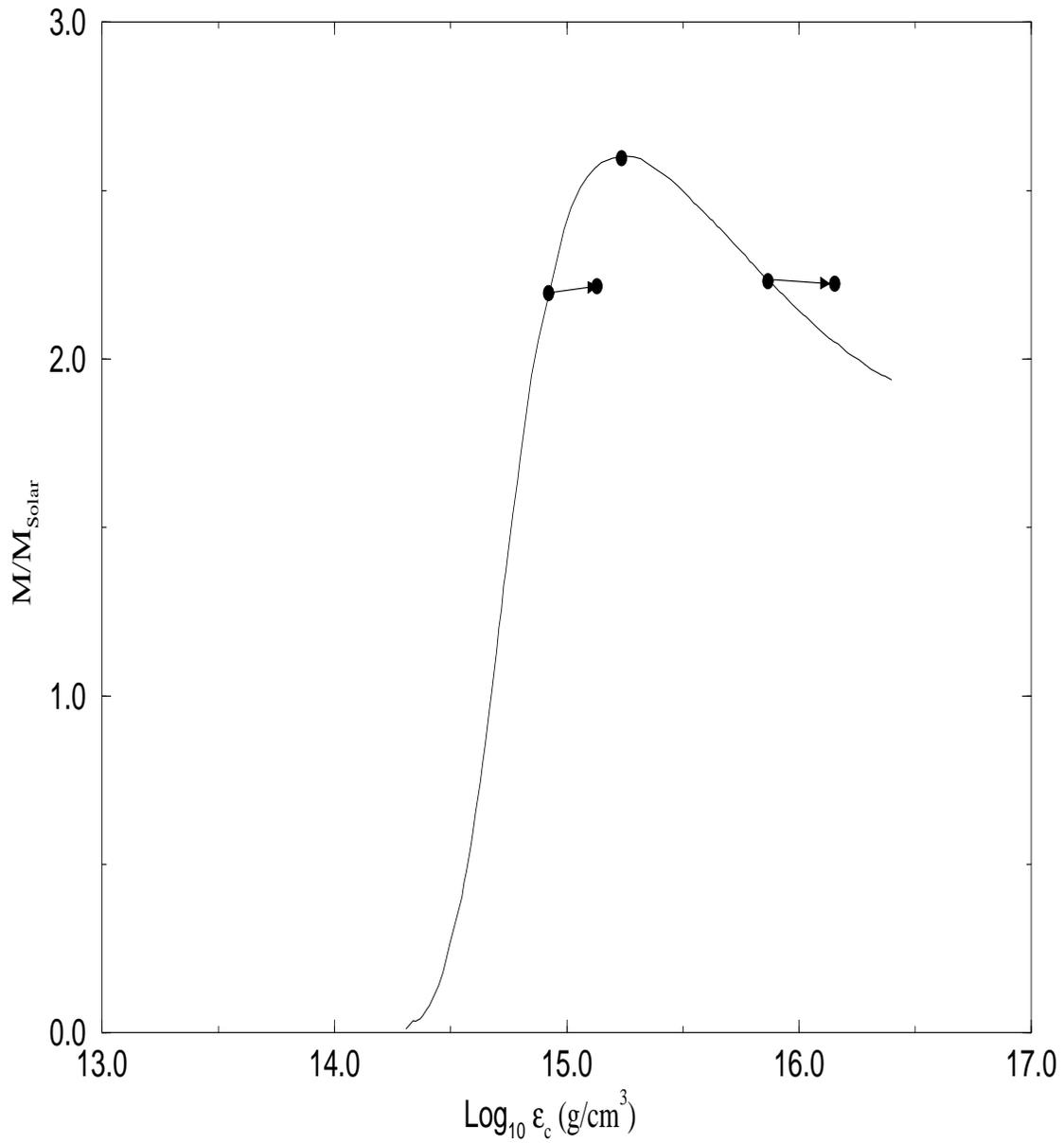


Fig. 2.7: Resultado das equações TOV mostrando a relação entre as massas de estrelas de nêutrons e suas densidades centrais ϵ_c .

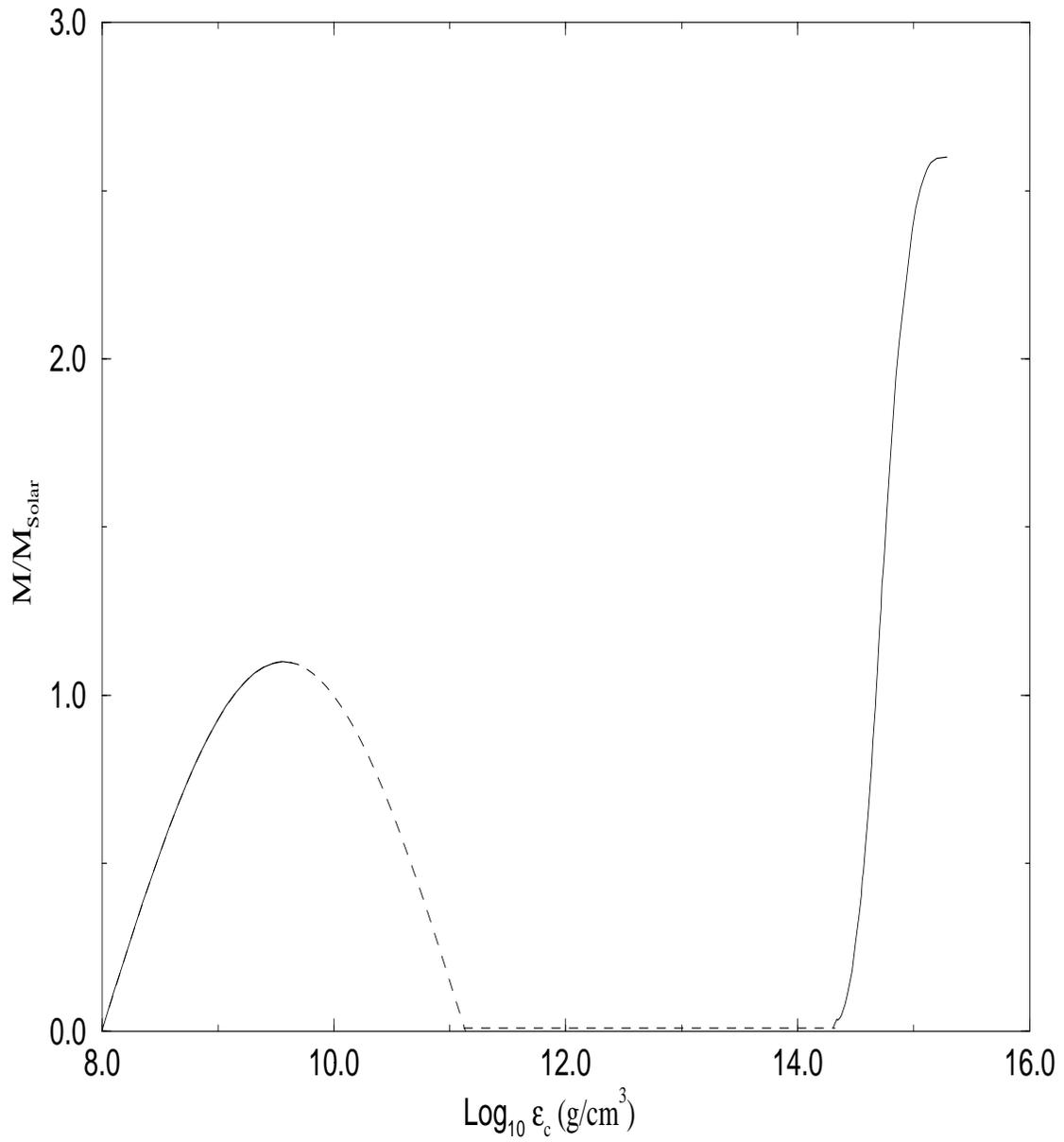


Fig. 2.8: *Estrutura teórica de regiões de estabilidade.*

Capítulo 3

Modelos da Hadrodinâmica Quântica

Neste capítulo descrevemos o formalismo relativístico da teoria quântica de campos desenvolvido por J. D. Walecka [1], em 1974. Na seção 3.1 apresentamos uma breve descrição dos campos e da densidade lagrangeana utilizada neste formalismo. Através da aplicação das equações de Euler-Lagrange obtemos as equações de campo e do tensor de energia-momento. Utilizamos em 3.1.1 a aproximação de campo médio, válida no regime de altas densidades para solucionar as equações de campo. Apresentamos em 3.1.2 uma descrição sobre os procedimentos para a quantização canônica dos campos nucleares, afim de apresentarmos em 3.1.3, a equação de estado da matéria nuclear.

Na seção 3.2 apresentamos modelos efetivos alternativos ao de Walecka. Primeiramente, em 3.2.1 apresentamos o modelo não-linear de Boguta e Bodmer [5], com termos de auto-acoplamento de ordem cúbica e quártica no campo do méson escalar. Os modelos de Zimanyi e Moszkowski [6], com acoplamento derivativo dos mésons, são introduzidos em 3.2.2 de forma análoga.

Sendo os modelos apresentados válidos no regime de altas densidades da matéria nuclear, apresentamos em 3.3 uma discussão sobre o limite de baixas densidades, onde diferentes graus de liberdade devem ser considerados.

Ao final, em 3.4, aplicamos às equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff as equações de estado da matéria de nêutrons, determinando algumas propriedades estáticas globais destas estrelas como massa, raio e distribuição interna de densidades [25].

3.1 Modelo de Walecka

John Dirk Walecka propôs uma densidade lagrangeana relativística que incorpora os campos dos núcleons livres (ψ), os campos dos mésons escalares (ϕ) e vetoriais livres (V^μ) e termos de acoplamento entre os campos dos núcleons e dos mésons, *ver tabelas ?? e 3.2 para mais detalhes*. Os campos pertencentes a tal formalismo são caracterizados a partir de seu comportamento sob as transformações de Lorentz. Uma abordagem clara sobre o assunto encontra-se na referência [26], classificando os campos de acordo com a sua estrutura.

O modelo de Walecka baseia-se em uma teoria quântica de campos relativísticos que descreve um sistema nuclear de muitos corpos. Baseado empiricamente no comportamento das interações N-N, o potencial nuclear é descrito, neste modelo, através da troca de mésons escalares, responsáveis pela atração nuclear de longo alcance, e vetoriais, responsáveis pela repulsão nuclear de curto alcance. Este potencial está representado, na formulação de

$\psi'(x')\psi'(x') = \psi(x)\psi(x)$	Escalar
$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det(a)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$	Pseudo-escalar
$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = a^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$	Vetorial
$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') = \det(a)a^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x)$	Vetorial-Axial
$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta\bar{\psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(x)$	Tensorial

Tab. 3.1: Descrição dos campos de acordo com as transformações de Lorentz.

Yukawa, no limite não relativístico, por:

$$V_{eff}(r) = \frac{g_v^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v r}}{r} - \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{e^{-m_s r}}{r}, \quad (3.1)$$

onde g_v e g_s representam as constantes de acoplamento dos campos dos mésons vetorial e escalar ao campo dos núcleons. As massas dos mésons vetorial e escalar estão representadas por m_v e m_s . O potencial de Yukawa está representado na figura 3.1

Campo	Descrição	Partículas	Massa
ψ	Bárion	p, n,...	M
ϕ	Méson escalar nêutro	σ	m_s
V_μ	Méson vetorial nêutro	ω	m_v
b_μ	Méson vetorial carregado	ρ	m_ρ
π	Méson pseudo-escalar carregado	π	m_π

Tab. 3.2: Partículas consideradas neste trabalho.

A densidade lagrangeana da teoria de Walecka é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (M - g_s\phi)]\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2V_\mu V^\mu + \delta\mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde o tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ caracteriza a energia livre do méson vetorial e $\delta\mathcal{L}$ contém os contratermos de renormalização do sistema.

A primeira pergunta que surge diante deste formalismo se refere à ausência dos píons, nesta primeira abordagem, uma vez que estes representam, no regime de longo alcance, as partículas de troca da interação nuclear. A resposta está relacionada à presença do campo ϕ , que representa um méson fictício e que caracteriza de forma paramétrica os efeitos de longo alcance das diferentes contribuições da interação do méson- π com os núcleons. Esta

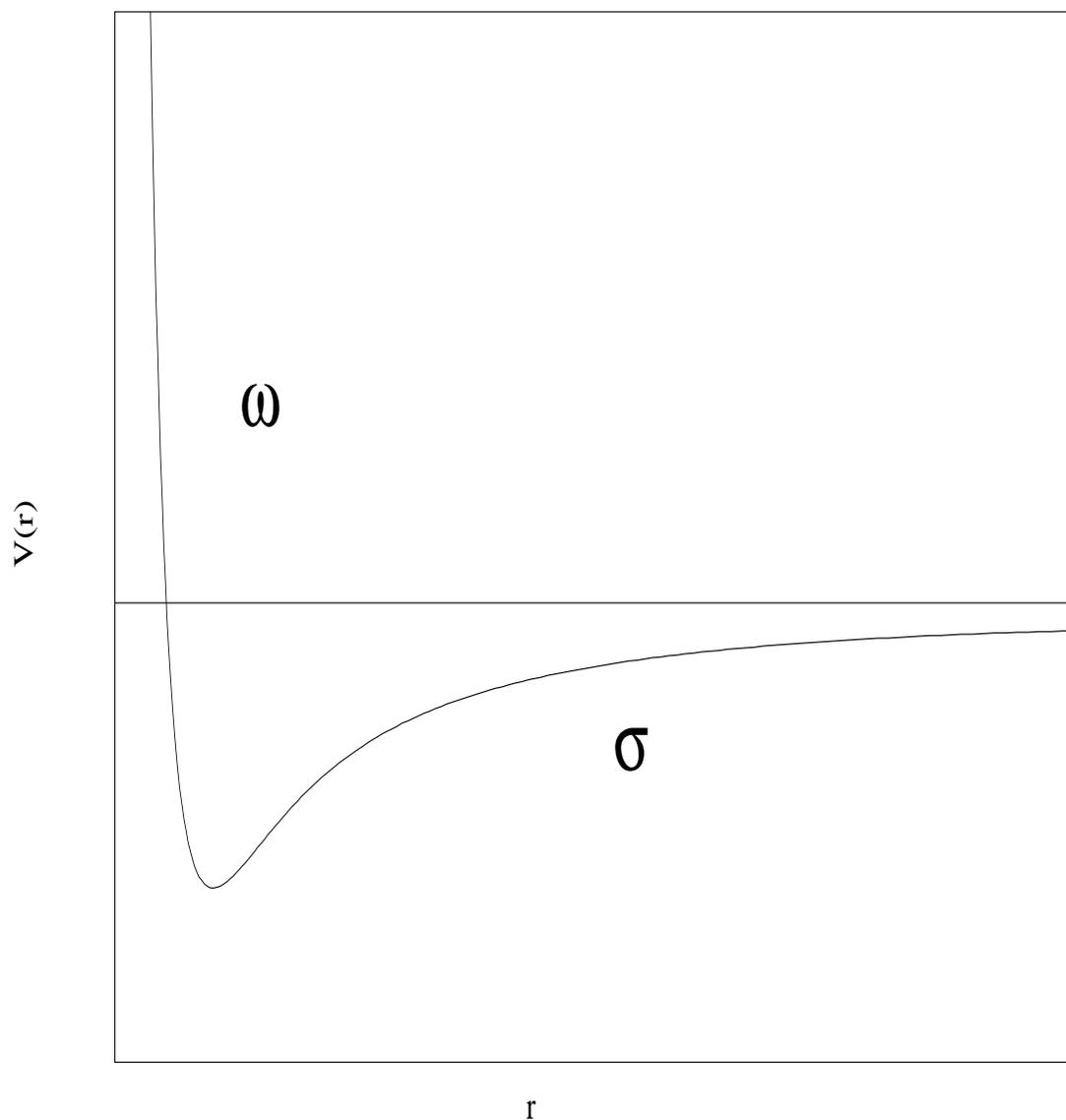


Fig. 3.1: A figura representa, de forma esquemática, o comportamento do potencial nuclear de Yukawa em função da distância de separação em relação à origem, indicando a região de domínio dos mésons apresentados no modelo de Walecka na sua formulação original.

parametrização das contribuições do méson- π à interação nuclear através do méson- σ se deve ao fato do campo do pión acoplar-se ao do núcleon de diferentes formas, conforme o alcance destas interações (πN , $\pi\pi N$, $\pi\pi\pi N$). Além disso, os pions não contribuem de forma significativa na determinação de propriedades intrínsecas da matéria nuclear, como veremos em 5.3. Neste capítulo apresentamos os modelos que incluem apenas as contribuições dos campos ϕ e V_μ , desenvolvendo no capítulo 5 um estudo sobre o modelo conhecido como QHD-II, que incorpora a presença dos pions e do méson- ρ na densidade lagrangeana.

Aplicando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (3.3)$$

à densidade lagrangeana de Walecka (3.2) obtemos a equação de campo para o méson escalar (σ) descrita como a equação de Klein-Gordon com uma fonte escalar, a densidade bariônica, $\bar{\psi}\psi$:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2)\phi = g_s \bar{\psi}\psi. \quad (3.4)$$

Obtemos ademais uma equação para o méson vetorial (ω), que aparece como a equação de Proca (QED) com massa, m_v , e uma corrente vetorial conservada, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu = g_v \bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (3.5)$$

Por fim, com este procedimento obtemos a equação de Dirac para o campo dos núcleons (p e n), com os campos dos mésons escalares e vetoriais introduzidos na forma de um acoplamento mínimo

$$\bar{\psi}[\gamma^\mu(i\partial_\mu + g_v V_\mu) + (M - g_s\phi)]\psi = 0. \quad (3.6)$$

Utilizando as ferramentas, descritas abaixo, desenvolvidas a partir do estudo da mecânica do contínuo, o tensor energia-momento do modelo, definido como

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x_\mu)}, \quad (3.7)$$

é dado no modelo de Walecka por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[-\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + m_s^2 \phi^2 + \frac{1}{2} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} - m_v^2 V_\lambda V^\lambda] g_{\mu\nu} \\ &+ i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\nu \psi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\nu V^\lambda F_{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para um sistema uniforme e estático, podemos identificar

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\epsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

como sendo a estrutura do tensor energia-momento e onde a quadri-velocidade, para um fluido em repouso, é descrita por $u^\mu = (1, \mathbf{0})$, e satisfaz $u_\mu^2 = 1$. Determinamos assim a

densidade de energia ϵ e pressão p do sistema através do valor esperado do tensor energia-momento, para o estado fundamental da matéria nuclear

$$\epsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (3.10)$$

$$p = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle, \quad (3.11)$$

onde o tensor energia-momento assume a forma simétrica

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

3.1.1 Aproximação de Campo Médio

As equações de campo apresentadas anteriormente assumem uma forma não linear, dificultando a obtenção de soluções exatas. Esta não linearidade apresenta-se nas derivadas dos campos mesônicos ($\partial_\mu \partial^\mu \phi$ e $\partial_\mu F^{\mu\nu}$), relacionadas com as fontes associadas aos campos bariônicos ($g_s \bar{\psi} \psi$ e $g_v \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$), equações (3.4) e (3.5) respectivamente.

Devemos procurar soluções através de aproximações, onde a primeira hipótese seria a utilização de uma teoria de perturbações. Entretanto, este tipo de tratamento se torna inviável, devido ao forte acoplamento entre os campos, representado em suas constantes de acoplamento, g_s e g_v . Em uma expansão em série destas expressões, em termos das constantes de acoplamento da teoria, cada novo termo de mais alta ordem seria mais importante que os demais precedentes:

$$F(g_i) \sim a g_i + \frac{b}{2} g_i^2 + \frac{c}{3!} g_i^3 + \dots \quad (3.13)$$

onde $g_i > 1$ e $i = s, v$.

Procuramos então uma nova forma de aproximação. Esta nova forma constitui-se em uma teoria muito conhecida, a *Aproximação de Campo Médio (ACM)*. Esta teoria consiste na substituição dos campos dos mésons por seus valores esperados:

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle = \phi_0, \quad (3.14)$$

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle = \delta_{\mu 0} V_0. \quad (3.15)$$

Esta aproximação é válida no regime de altas densidades, onde as derivadas dos campos mesônicos representam pequenas flutuações em torno de seu valor médio, na comparação com os valores esperados das fontes. Visualizamos melhor este regime de validade através das condições:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi \ll g_s \bar{\psi} \psi; \quad (3.16)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \ll g_v \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.17)$$

Utilizando as equações de campo e as condições acima descritas, obtemos, na aproximação de campo médio, de 3.4 e 3.5:

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s, \quad (3.18)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \psi^\dagger\psi \rangle = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B. \quad (3.19)$$

Define-se a massa efetiva do núcleon como $M^* = M - g_s\phi_0$, resultando na aproximação de campo médio, na densidade lagrangeana

$$\mathcal{L}_{ACM} = \bar{\psi}[i\gamma_\mu\partial^\mu - g_v\gamma^0V_0 - M^*]\psi - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2V_0^2, \quad (3.20)$$

e no tensor energia-momento

$$(T_{\mu\nu})_{ACM} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi - \left(\frac{1}{2}m_v^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2\right)g_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

Outras aproximações são utilizadas de acordo com a necessidade ou interesse do problema. A *Aproximação de Thomas-Fermi* é utilizada no estudo sobre núcleos. Neste caso, os campos das partículas envolvidas apresentam uma dependência puramente radial ($\psi \rightarrow \psi(r)$). Também são incluídos os efeitos de superfície, mais importantes em um sistema microscópico [27] do que no estudo de estrelas de nêutrons. As *Aproximações Relativísticas de Hartree* e de *Hartree-Fock* também são bastante utilizadas e baseiam-se em uma teoria de perturbação aplicada à estrutura diagramática de Feynman [28] [29] [30]. Através destes estudos é possível incluir a dependência do vácuo no sistema.

3.1.2 Quantização Canônica

Reescrevemos a densidade lagrangeana referente à equação de Dirac como um primeiro passo em direção à quantização do campo nuclear [31]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi. \quad (3.22)$$

Determinamos o momento conjugado ao campo ψ como sendo

$$\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^\dagger, \quad (3.23)$$

e com isso obtemos a densidade hamiltoniana para a equação de Dirac

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger(-i\alpha\cdot\nabla + \beta M)\psi = \psi^\dagger i\frac{\partial}{\partial t}\psi. \quad (3.24)$$

Impõe-se, devido ao seu caráter fermiônico, uma relação de anti-comutação entre o campo ψ e seu momento conjugado $i\psi^\dagger$,

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde os índices da matriz de Pauli estão indicados explicitamente.

Expandimos as soluções da equação de Dirac em modos normais. Consideramos o sistema contido em uma caixa com volume $V = L^3$, e impomos condições de contorno periódicas

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{2\pi n_i}{L}, \\ i &= x, y, z \\ n_i &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \end{aligned} \quad (3.26)$$

a covariância de Lorentz é então retomada no limite $V \rightarrow \infty$.

Obtemos a seguir as soluções para os campos nucleares:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} [a_{\mathbf{k}s} u(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}s}^\dagger v(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \\ \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} [a_{\mathbf{k}s}^\dagger \bar{u}(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}s} \bar{v}(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $k^0 = E(k) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}$.

Com isso, restam-nos apenas duas relações de anticomutação

$$\{a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} \quad (3.28)$$

e

$$\{b_{\mathbf{k}s}, b_{\mathbf{k}'s'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (3.29)$$

Identificamos os operadores $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}s}$ como os operadores de criação e destruição de bárions, bem como os operadores $b_{\mathbf{k}s}^\dagger$ e $b_{\mathbf{k}s}$ como os operadores de criação e destruição de anti-bárions, onde os índices k e s representam o momento e spin das partículas. Atingimos assim o formalismo apropriado da segunda quantização e da teoria quântica de campos relativísticos.

3.1.3 Equação de Estado da Matéria Nuclear

A equação de estado constitui-se em uma ferramenta muito importante no estudo de transições de fases da matéria nuclear e de nêutrons. Seus resultados são também de particular importância para a computação das equações TOV, com vistas à descrição de propriedades globais de estrelas de nêutrons. Para caracterizarmos a equação de estado, definimos a densidade bariônica no modelo de gás de Fermi na forma

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k, \quad (3.30)$$

onde γ representa a degenerescência de spin e isospin do sistema, com o valor 4 para a matéria nuclear e 2 para a matéria de nêutrons.

A densidade de energia do sistema é obtida ao determinarmos o valor esperado, referente ao estado fundamental do gás de Fermi, da componente temporal do tensor energia-momento

$$T_{00} = \psi^\dagger[-i\alpha.\nabla + \beta M^* + g_v V_0]\psi - \frac{1}{2}m_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2}m_s^2 \phi_0^2, \quad (3.31)$$

obtendo-se

$$\epsilon = \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 + \frac{m_s^2}{2g_s^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (k^2 + M^{*2})^{1/2}. \quad (3.32)$$

A pressão, sendo determinada pelo valor esperado de

$$T_{ii} = \frac{1}{3} \psi^\dagger (-i\alpha.\nabla) \psi + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2, \quad (3.33)$$

resultando em

$$p = \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 - \frac{m_s^2}{2g_s^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}}. \quad (3.34)$$

Para determinarmos a massa efetiva do núcleon, devemos minimizar a densidade de energia com respeito à massa efetiva, levando-nos à equação auto-consistente

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{M^*}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}}, \quad (3.35)$$

onde determina-se de forma clara que a massa efetiva do núcleon é representada como um deslocamento da massa *nua*, devido à presença do campo ϕ no meio, conforme mostra a figura 3.2.

Resta-nos agora determinar os valores adequados para as constantes de acoplamento. Para isto, utiliza-se como referência os valores da energia de saturação, que corresponde a um mínimo na curva de energia, onde o núcleon encontra-se altamente ligado à matéria nuclear

$$\frac{\epsilon}{\rho_B} - M = -15,75 \text{ MeV} \quad (3.36)$$

na correspondente densidade de saturação

$$\rho_0 = 0,19 \text{ fm}^{-3}, \quad (3.37)$$

ambos determinados experimentalmente e representados na figura 3.3. Através da primeira lei da termodinâmica, obtemos que a determinação de um mínimo para a energia de ligação,

$\frac{\partial(\epsilon/\rho)}{\partial\rho} = 0$, significa dizer que neste ponto a pressão deve se anular, $p = 0$. Com isso, obtemos duas equações capazes de determinar as duas constantes de acoplamento

$$\begin{aligned} C_s^2 &\equiv g_s^2(M^2/m_s^2) = 267, 1, \\ C_v^2 &\equiv g_v^2(M^2/m_v^2) = 195, 9. \end{aligned} \quad (3.38)$$

É importante salientar que utilizamos apenas duas condições para determinar as razões entre as constantes de acoplamento g_i e suas massas m_i . Como consequência direta obtemos a curva que determina a energia de ligação por núcleon. O ponto de saturação desta curva representa a região de densidades encontradas no interior de núcleos pesados. Este ponto indica a região onde, como o próprio nome sugere, a força nuclear satura, ou seja, se um novo núcleon for adicionado ao sistema, apenas os núcleons mais próximos sentiriam sua presença, ignorada pelos núcleons das regiões mais internas e densas.

Obtemos também o módulo de compressibilidade da matéria nuclear $K = (\frac{\partial\epsilon/\rho}{\partial\rho})|_{\rho=\rho_0} = 540\text{MeV}$. Se impusermos à matéria nuclear uma configuração distinta daquela correspondente ao seu equilíbrio original, através da aplicação de uma pequena perturbação, o módulo de compressibilidade determinará se o sistema pode voltar ao equilíbrio e como isto deve acontecer, uma vez que a força nuclear possui um caráter atrativo e de curto alcance. Quanto mais alto o seu valor, maior será a energia necessária para deslocar a matéria de seu equilíbrio, que mais facilmente retornará ao seu estado original. Também obtemos a massa efetiva do núcleon na densidade de saturação, $\frac{M^*(\rho_0)}{M} = 0,56$. Para descrever a equação de estado propriamente dita, utilizamos $p(\rho)$ e $\epsilon(\rho)$, em forma paramétrica, determinando uma transição de fase entre um gás e um líquido de Fermi, conforme mostra a figura 3.4. Utilizamos também o critério de Gibbs ($p_1 = p_2$ e $\mu_1 = \mu_2$) para determinar a região de coexistência de fases, onde uma analogia à transição de fases do tipo Van der Waals é realizada, chamando a região de baixas densidades de *Gás de Fermi* e a região de mais alta densidade de *Líquido de Fermi*, apresentando ainda, uma região de coexistência de fases.

3.2 Modificações ao Modelo de Walecka

Apesar do sucesso obtido pelo modelo de Walecka na descrição de algumas propriedades estáticas e globais da matéria nuclear, alguns pontos ainda necessitavam de aprimoramentos. O modelo de Walecka apresenta uma massa efetiva muito baixa¹ na região de saturação e, ao mesmo tempo, apresenta um módulo de compressibilidade muito alto comparado aos valores obtidos experimentalmente, *ver tabela (3.3)*. É importante salientar que, conforme mostra a tabela (3.3), o módulo de compressibilidade possui uma faixa, aproximadamente

¹ É importante salientar neste ponto a diferença existente entre os conceitos de massa efetiva de Dirac e de Landau. A massa efetiva de Landau provém do valor do campo iso-escalar médio e pode ser derivada a partir do espalhamento de nêutrons em núcleos de chumbo (Pb). A massa de Dirac (m^*), que aparece nas teorias efetivas, está relacionada à massa de Landau (m_L^*) através de $\sqrt{m^{*2} + k_F^2} = m_L^*$.

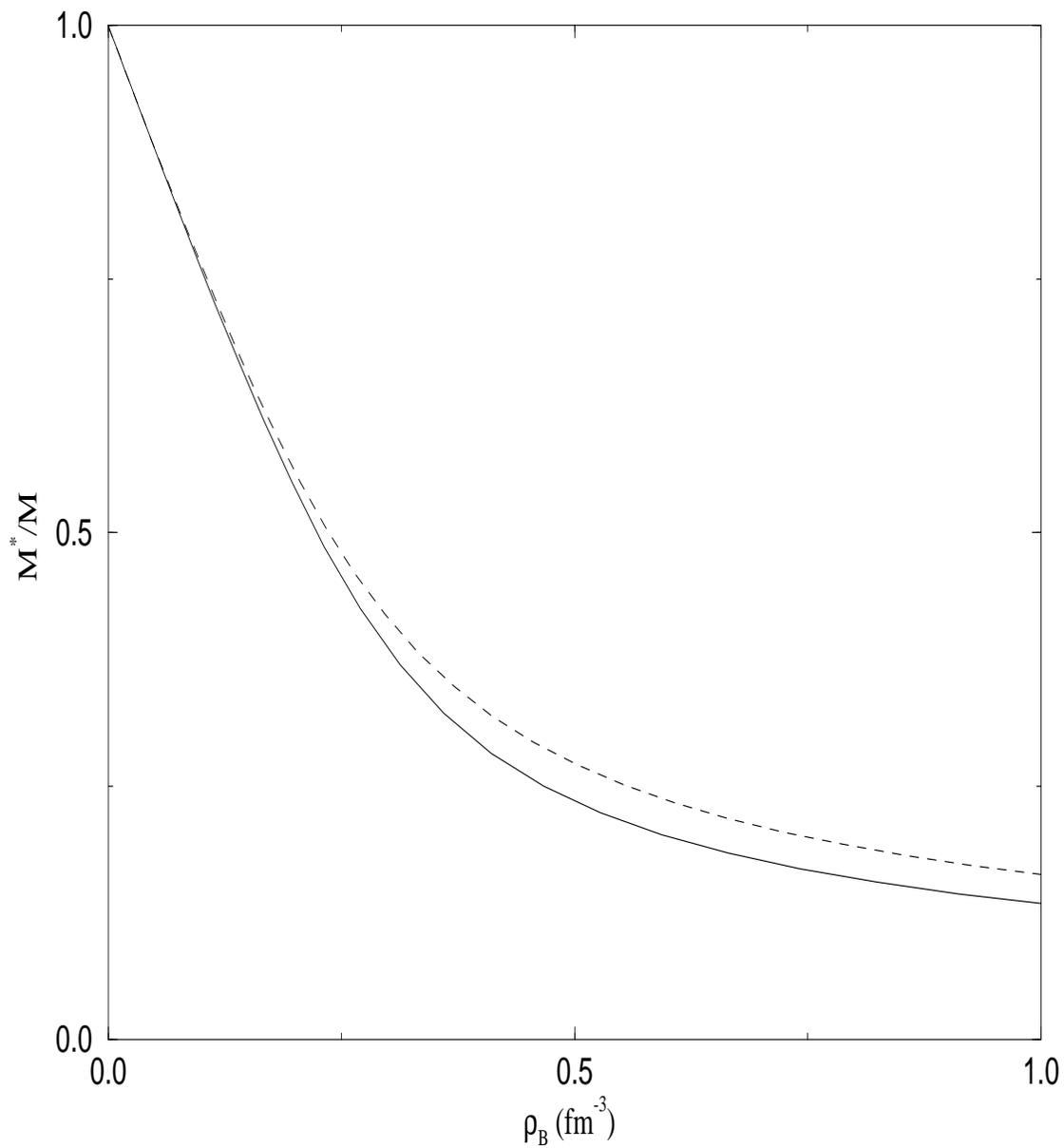


Fig. 3.2: Massa efetiva do nêutron na matéria nuclear (linha cheia) e na matéria de nêutrons (linha tracejada), em função da densidade bariônica ρ_B .

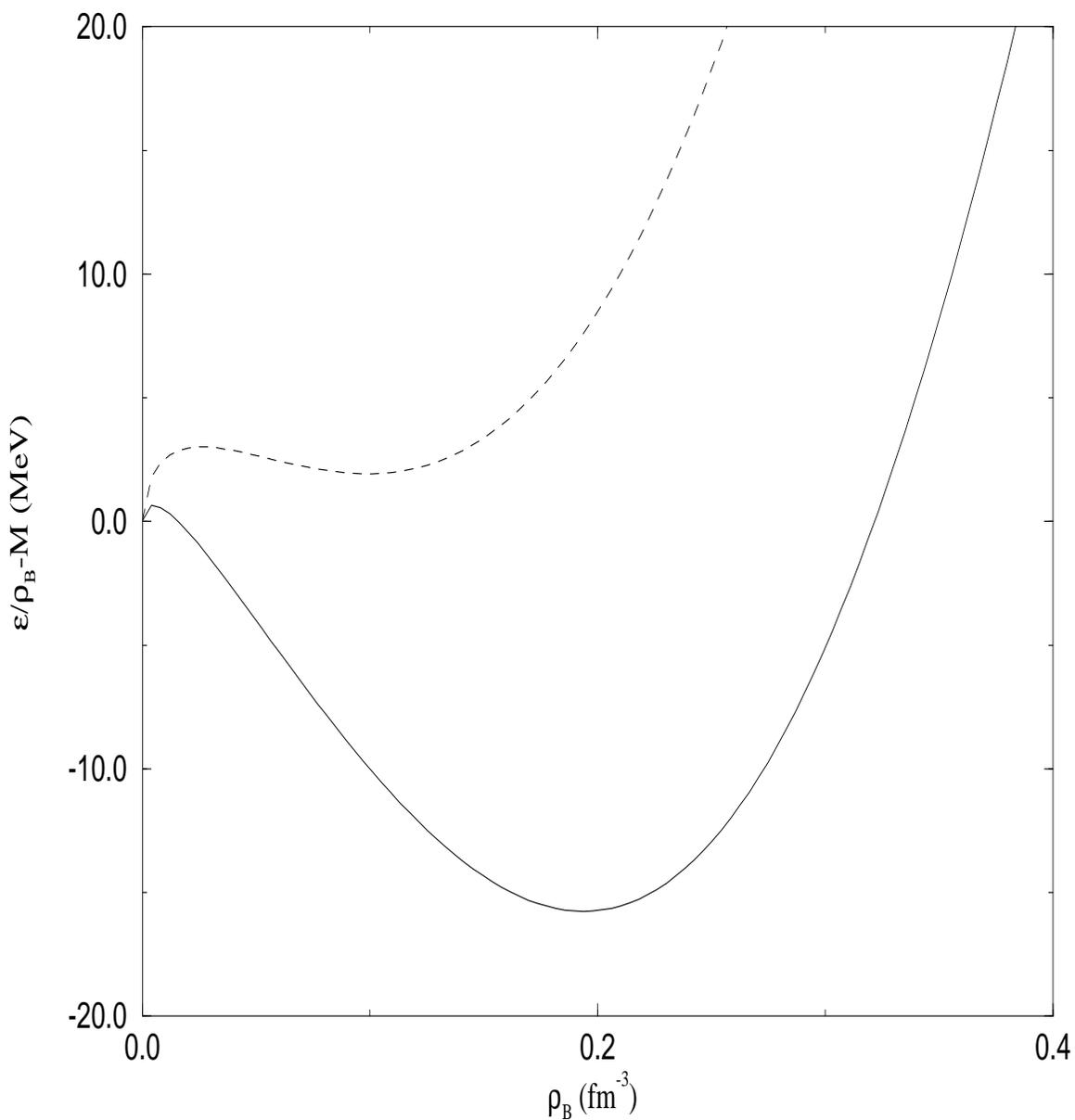


Fig. 3.3: Energia de saturação da matéria nuclear (linha cheia) e de nêutrons (linha tracejada), em função da densidade bariônica ρ_B .

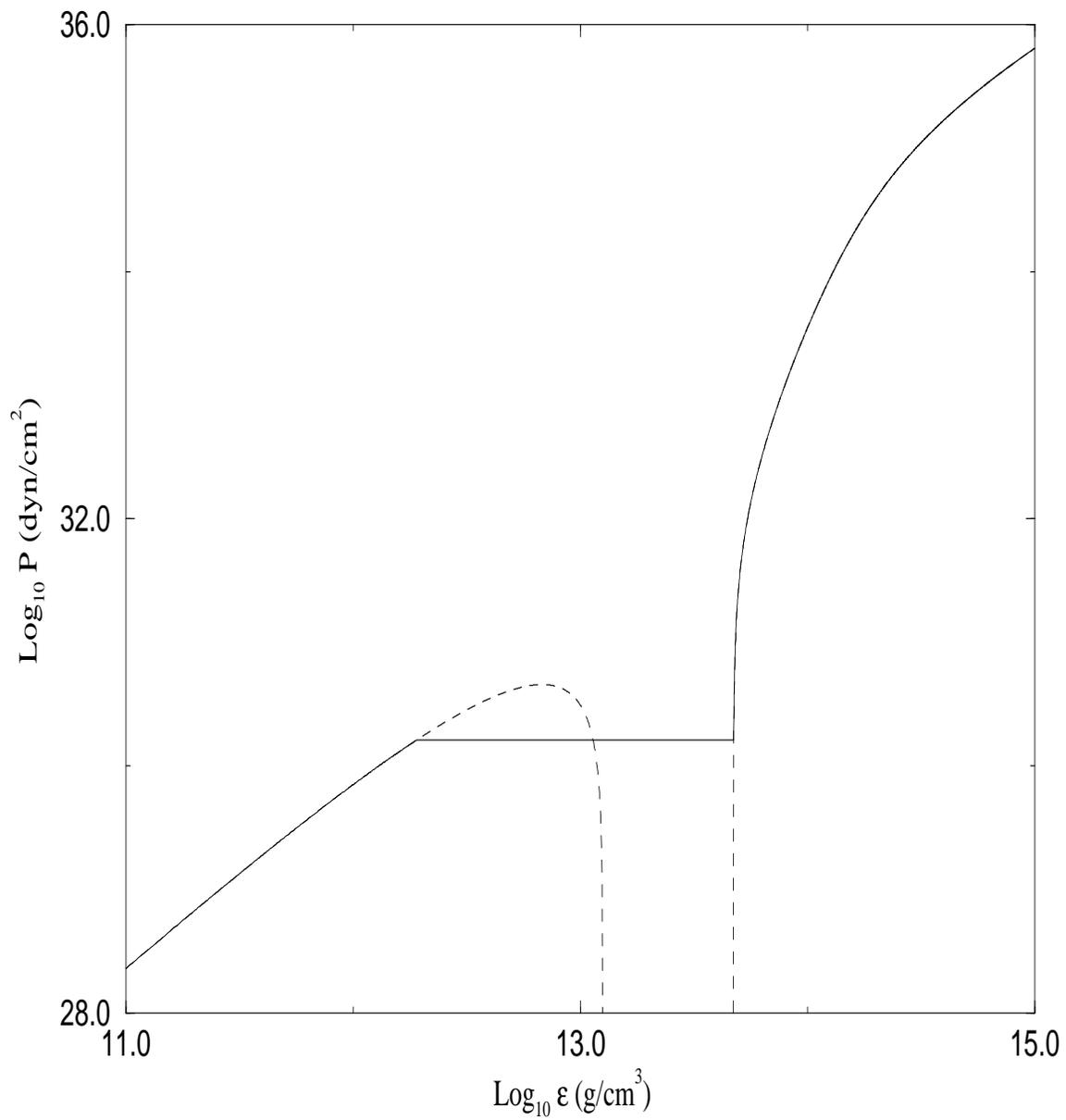


Fig. 3.4: Equação de estado da matéria de nêutrons (linha cheia) com a construção de Maxwell (linha tracejada), determinada a partir do critério de Gibbs.

fixa, de variação de valores dada como certa por diferentes autores, enquanto a massa efetiva do núcleon ainda apresenta divergências quanto ao seu real valor.

	M^*/M	$K(MeV)$
Modelo	0.56	540
Empírico	0.6-0.8	200-300

Tab. 3.3: *Massa efetiva do núcleon e módulo de compressibilidade da matéria nuclear no modelo de Walecka e seus respectivos valores experimentais.*

3.2.1 Modelo Não-Linear de Boguta-Bodmer

Com a finalidade de solucionar os problemas apresentados pelo modelo de Walecka na descrição da massa efetiva do núcleon e do módulo de compressibilidade da matéria nuclear, J. Boguta e A. R. Bodmer propuseram o modelo denominado de não-linear [5], onde os mésons escalares se auto-acoplam de forma cúbica e quártica. A energia de saturação da matéria nuclear, $\frac{\epsilon}{\rho_B}$, na densidade de saturação, $\rho_B = 0.19 fm^{-3}$, está situada em um ponto onde ocorre um delicado balanço entre as componentes mesônicas vetoriais repulsivas e escalares atrativas que se cancelam determinando o valor de aproximadamente $-15,75 MeV$. A componente mesônica repulsiva cresce com a densidade, enquanto a componente atrativa reduz-se com o decréscimo da massa efetiva do núcleon, gerando um equilíbrio na energia de saturação da matéria nuclear. Este balanço de forças determina a motivação de Boguta e Bodmer, para introduzir, na teoria, termos de auto-acoplamento entre os campos do méson- σ na forma

$$U(\phi) = \frac{b\phi^3}{3} + \frac{c\phi^4}{4}, \quad (3.39)$$

onde b e c são novas constantes arbitrárias. Com a adição destas novas constantes, o modelo nos permite determinar duas novas propriedades da matéria nuclear como, por exemplo, a massa efetiva do núcleon e o módulo de compressibilidade. O modelo não-linear passa a ser preciso quanto aos seus resultados. Entretanto, um alto preço é pago - a inclusão de duas novas constantes. A tabela 3.4 demonstra alguns valores possíveis para estas constantes, incluindo valores negativos para a constante c. Estes valores negativos representam um problema grave do ponto de vista da física nuclear; estes valores determinam que o sistema pode não ser ligado a altas densidades [32]. Devemos observar, entretanto, que estamos trabalhando com uma teoria efetiva.

A densidade lagrangeana do modelo de Boguta e Bodmer assume, na aproximação de campo médio, a forma

$$\mathcal{L}_{ACM} = \bar{\psi}[i\gamma_\mu\partial^\mu - g_v\gamma^0V_0 - M^*]\psi - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 + U(\phi). \quad (3.40)$$

Utilizando procedimentos similares ao caso anterior, onde usamos a definição do tensor energia-momento e as equações de Euler-Lagrange na densidade lagrangeana de Boguta-

$(g_s/m_s)^2$	$(g_v/m_v)^2$	100 x b	100 x c	M^*/M	$K(\text{MeV})$
12.684	7.148	0.5610	-0.6986	0.70	200
11.299	5.656	0.8784	-1.0098	0.75	200
9.926	4.233	1.4602	-1.2412	0.80	200
12.230	7.148	0.4312	-0.4103	0.70	250
10.727	5.696	0.6275	-0.3409	0.75	250
9.134	4.233	0.8804	0.6917	0.80	250
11.785	7.148	0.2948	-0.1071	0.70	300
10.177	5.696	0.3601	0.3722	0.75	300
8.403	4.233	0.2480	2.7997	0.80	300

Tab. 3.4: Constantes utilizadas no modelo não-linear, determinando diferentes valores para as propriedades da matéria nuclear, como $m^* = M^*/M$ e K [22].

Bodmer, obtemos neste caso, para a densidade de energia

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 + \frac{m_s^2}{2g_s^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (k^2 + M^{*2})^{1/2} \\ &+ b(M - M^*)^3 + c(M - M^*)^4, \end{aligned} \quad (3.41)$$

e para a pressão

$$\begin{aligned} p &= \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 - \frac{m_s^2}{2g_s^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} \\ &- b(M - M^*)^3 - c(M - M^*)^4. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2.2 Modelos ZM

J. Zimanyi e S. A. Moszkowski propuseram, em 1990, uma formulação lagrangeana com o objetivo de superar as limitações anteriormente nomeadas do modelo de Walecka, sem a necessidade de incluir novas constantes de acoplamento como no modelo de Boguta e Bodmer. Nesta formulação, a densidade lagrangeana diferencia-se da teoria de Walecka na forma entre os acoplamentos envolvendo os núcleons e os mésons. O modelo denominado de ZM [6], é também conhecido como modelo com acoplamento escalar derivativo, devido à forma do acoplamento entre o campo do méson σ e do núcleon conforme demonstram as equações 3.43 e 3.44:

$$\mathcal{L}_{\sigma N} = \frac{g_s \phi}{1 + \frac{g_s \phi}{M}} \bar{\psi} \psi = m^* g_s \phi \bar{\psi} \psi \quad (3.43)$$

onde uma expansão da função m^* , em termos do campo ϕ recupera, em primeira ordem, o acoplamento de Yukawa, conforme a equação (3.44).

$$m^* = \frac{M^*}{M} = \frac{1}{1 + \frac{g_s \phi}{M}} = 1 - \frac{g_s \phi}{M} + \left(\frac{g_s \phi}{M}\right)^2 + \dots \quad (3.44)$$

Encontramos a nova densidade lagrangeana do sistema como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(1 + \frac{g_s \phi}{M}\right) [\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi - g_v \bar{\psi} \gamma_\mu \psi V^\mu] - \bar{\psi} M \psi \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2). \end{aligned} \quad (3.45)$$

No mesmo artigo onde Zimanyi e Moszkowski propuseram o modelo de acoplamento escalar derivativo, aparecem dois outros modelos, conhecidos como ZM2 e ZM3. Estes modelos apresentam outras formas de acoplamento entre os campos dos núcleons e dos mésons. Uma formulação unificada para as densidades lagrangeanas [33], considerando-se os modelos derivativos e de Walecka pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi - \bar{\psi} (M - m^{*\beta} g_s \phi) \psi - m^{*\alpha} [g_v \bar{\psi} \gamma_\mu \psi V^\mu \\ & + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2), \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde associamos as constantes α e β aos modelos considerados, utilizando-se as seguintes prescrições:

$$\begin{aligned} W : \alpha = 0 & \quad \beta = 0; \\ ZM : \alpha = 0 & \quad \beta = 1; \\ ZM2 : \alpha = 1 & \quad \beta = 1; \\ ZM3 : \alpha = 2 & \quad \beta = 1. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Através de uma escolha apropriada para as constantes de acoplamento da teoria, C_s^2 e C_v^2 , os modelos do tipo ZM devem encontrar novos resultados para a massa efetiva do núcleon e para o módulo de compressibilidade da matéria nuclear, alterando as previsões feitas através do modelo de Walecka, uma vez que utilizamos, nos modelos tipo ZM, novas formas de acoplamentos entre os mésons e os núcleons comparativamente àquele.

Analisando os dados da tabela (3.5) observamos uma grande variação na massa efetiva do núcleon (0.56M - 0.85M) para os diferentes modelos considerados neste trabalho. Entretanto, este ainda é um resultado polêmico, onde diferentes autores diferem sobre o valor correto desta quantidade, variando estes resultados entre 0.6M e 0.8M [34][35][36]. Já o módulo de compressibilidade, reconhecidamente alto no modelo de Walecka, reduz seu valor nos modelos do tipo ZM, atingindo, do ponto de vista fenomenológico, um resultado mais próximo do esperado para o modelo ZM, um resultado ainda aceitável para o modelo ZM2 e valores levemente exagerados para o modelo ZM3. Novamente, os modelos ZM podem

	C_s	C_v	m^*	$K(MeV)$
ZM	169.2	59.1	0.85	224.71
ZM2	219.3	100.5	0.82	198.32
ZM3	443.3	305.5	0.72	155.74

Tab. 3.5: Constantes de acoplamento dos modelos derivativos e respectivas previsões para as propriedades, m^* e K , da matéria nuclear.

ser vistos, da mesma forma que o modelo não-linear, como introduzindo termos de acoplamento à densidade lagrangeana de forma arbitrária, uma vez que a forma do acoplamento núcleon-méson é indeterminada. Além deste fato, o modelo não-linear tem a vantagem de reproduzir os resultados de forma correta, o que não acontece nos modelos de Zimanyi e Moszkowski.

As equações de estado para os modelos derivativos podem ser escritas, de forma geral, como

$$\epsilon = \frac{C_v^2}{2M^2} m^{*\alpha} \rho^2 + \frac{M^4}{2C_s^2} \left(\frac{1 - m^*}{m^{*\beta}} \right)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k E^*(k), \quad (3.48)$$

$$p = \frac{C_v^2}{2M^2} m^{*\alpha} \rho^2 - \frac{M^4}{2C_s^2} \left(\frac{1 - m^*}{m^{*\beta}} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{E^*(k)}, \quad (3.49)$$

onde $E^*(k) = \sqrt{k^2 + M^{*2}}$.

3.3 Limite de Baixas Densidades

Analisamos, nesta seção, o comportamento dos modelos apresentados no regime de baixas densidades. Neste limite, onde $k_F \rightarrow 0$, obtemos a expressão para a massa efetiva

$$m^* \rightarrow 1 - \frac{g_s^2}{m_s^2 M} \rho_B; \quad (3.50)$$

A densidade de energia reduz-se, neste limite, a

$$\epsilon \rightarrow \rho_B \left[M + \frac{3k_F^2}{10M} - \frac{3k_F^4}{56M^3} + \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B - \frac{g_s^2}{2m_s^2} \rho_B + \frac{3g_s^2 k_F^2}{10m_s^2 M^2} \rho_B + O(\rho_B^2) \right], \quad (3.51)$$

onde o primeiro termo corresponde à massa de repouso do bárion, seguido pelo termo que descreve a energia não-relativística do gás de Fermi e a primeira correção relativística. Os termos seguintes correspondem ao limite não-relativístico da energia potencial dos mésons vetorial e escalar e à sua primeira correção relativística. Ao trabalharmos no limite de mais baixa ordem observamos a igualdade nas expressões para todos os modelos.

Entretanto, como já foi descrito anteriormente, os modelos da hadrodinâmica quântica foram desenvolvidos para o regime de altas densidades, onde a aproximação de campo médio é consistente e eficaz, como por exemplo no interior de núcleos pesados e de estrelas de nêutrons. No caso da superfície de uma estrela de nêutrons, esta apresenta um regime de densidades mais baixas, onde núcleos de ferro formam uma camada cristalina, imersa em elétrons e nêutrons livres. Para descrever esta região da estrela, deve-se utilizar outras equações de estado de modo a realizarmos estes cálculos de maneira consistente. Estas equações estão escritas na tabela 3.6, podendo ser encontradas na referência [19].

Modelos	Equação de Estado	Densidades (g/cm^3)
Feynman-Metropolis-Teller	e^- e Fe_{26}^{56}	$7, 9 < \rho < 10^4$
Harrison-Wheeler	e^- e Fe_{26}^{56} ; e^- e Nuclídeos;	$7, 9 < \rho < 3 \times 10^{11}$
Baym-Pethick-Sutherland	e^- , n e Nuclídeos.	$7, 9 < \rho < 4, 3 \times 10^{11}$
Negele-Vautherin	e^- e Nuclídeos.	$7, 86 < \rho < 10^{13}$
Hadrodinâmica	n,p,léptons,híperons, quarks,condensados de π e K.	$10^{14} < \rho$

Tab. 3.6: *Equações de estado da matéria nuclear em diferentes densidades e suas características, ver referência [19].*

Com isso, definimos a área de atuação do trabalho aqui desenvolvido. É importante ressaltar que, apesar da região superficial da estrela possuir propriedades importantes para a compreensão da estrutura de uma estrela de nêutrons², esta região não contribui de forma significativa na determinação da massa e do raio destes objetos estelares. Estudos anteriores [19][22] determinaram que a inclusão de equações de estado a baixas densidades na determinação da massa e do raio de estrelas de nêutrons não altera seu valor acima de 10%, implicando em variações máximas para a massa e para o raio da ordem de $\Delta M = 0.15M_{\odot}$ e $\Delta R = 1.2Km$, respectivamente. Exemplificamos o comportamento de uma equação de estado a baixas densidades através da figura 3.5, onde incluímos a equação de estado de Negele-Vautherin aos modelos da hadrodinâmica relativística.

3.4 Soluções das Equações TOV

Em um quadro comparativo, apresentamos as soluções das equações de Tolman-

² Acredita-se que a condensação desta camada determine a existência de *Glitches*, gerando uma repentina e breve modificação no padrão de emissão de pulsos de rádio emitidos por um pulsar.

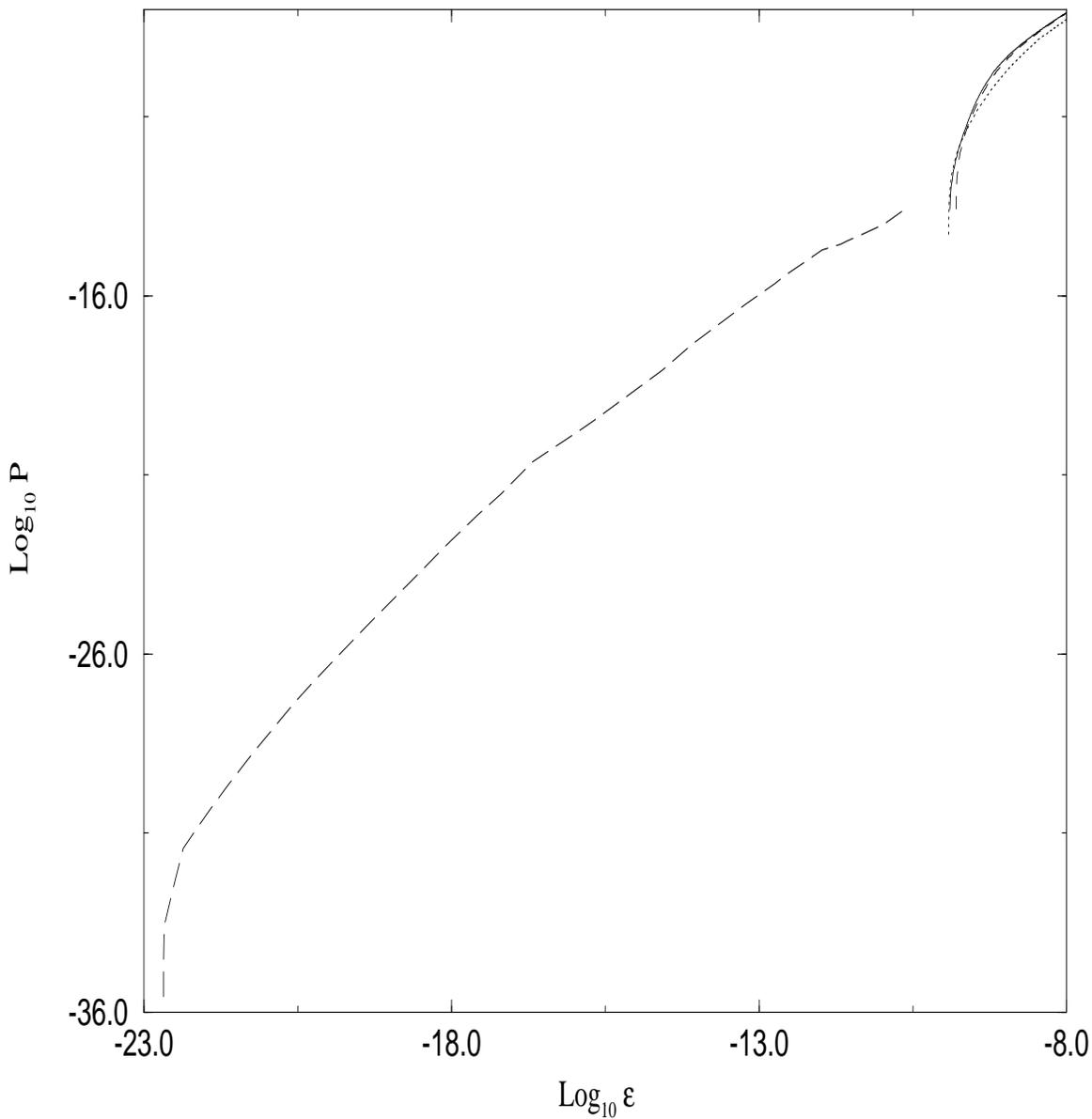


Fig. 3.5: Equação de estado para a matéria de nêutrons nos modelos de Walecka (linha cheia), não-linear (linha tracejada), Zimanyi-Moszkowski (linha pontilhada) e Negele-Vautherin (linha longo-tracejada) [37].

Oppenheimer-Volkoff para as equações de estado da matéria de nêutrons dos modelos citados. As estrelas de nêutrons estão caracterizadas através de suas massas, raios e densidades centrais. Estrelas de nêutrons apresentam uma massa que pode variar de uma a três massas solares de acordo com previsões teóricas e observacionais, com um raio aproximado de 10 Km. Como podemos observar, os resultados obtidos para os três modelos são válidos, sendo que o modelo de Walecka apresenta um valor mais alto para a massa máxima ($M=2.6M_{Sol}$), bem como o maior raio possível ($R=13\text{Km}$). O modelo não-linear apresenta valores intermediários e o modelo ZM apresenta os menores valores para estas grandezas ($M=1.75M_{Sol}$ e $R=10.5\text{Km}$). Estes resultados podem ser melhor observados nas figuras 3.6 e 3.7, e podem ser compreendidos a partir da análise a seguir.

Uma vez que as equações TOV são analisadas através do comportamento das equações de estado, podemos verificar uma dependência entre os resultados para as massas de estrelas de nêutrons e estrutura destas equações. Por sua vez, as equações de estado dependem diretamente do módulo de compressibilidade da matéria nuclear. Sendo assim, as equações de estado que possuem o valor do módulo de compressibilidade mais alto são denominadas de equações duras, resultando em massas mais altas para estrelas de nêutrons. Ao contrário, as equações de estado ditas suaves, geram massas mais baixas quando aplicadas nas equações TOV. Isto ocorre porque as equações de estado mais duras, e de maior compressibilidade da matéria nuclear, são capazes de diminuir a distância internuclear, armazenando maior quantidade de núcleons por unidade de volume em uma estrela e elevando, conseqüentemente, a sua massa máxima. Os resultados para as massas máximas de estrelas de nêutrons estão descritos na tabela 3.7.

É importante salientar que um valor elevado para a massa máxima de uma estrela de nêutrons, mesmo que não seja uma boa previsão, pode não ser necessariamente considerada errada, ao contrário de uma massa máxima muito baixa, onde estrelas com massa superior possam ser detectadas, tornando incorretos os resultados obtidos, através da forma como a teoria está desenvolvida. A estrela de nêutrons com maior massa conhecida, que determina um limite para os modelos, possui uma massa igual a $1.77M_{Sol}$ ³. Devido a este fato, o modelo ZM encontra-se na fronteira de sua validade. Entretanto, diferentes fatores podem fazer com que este modelo torne-se novamente válido, uma vez que ele se apresenta neste trabalho na sua forma mais simples, sendo possível incluir novos ingredientes como, por exemplo, a rotação, possibilitando com isso o aprimoramento de suas previsões. Verificamos também a distribuição de densidade para as estrelas de massa máxima nos três modelos considerados, conforme mostra a figura 3.8, onde determinamos o limite do raio estelar no ponto onde a pressão se anula, $p(r)=0$.

³ Esta massa pode variar entre 1.56 e $2.04M_{Sol}$ devido à imprecisão das medidas, que possuem uma grande margem de erro.

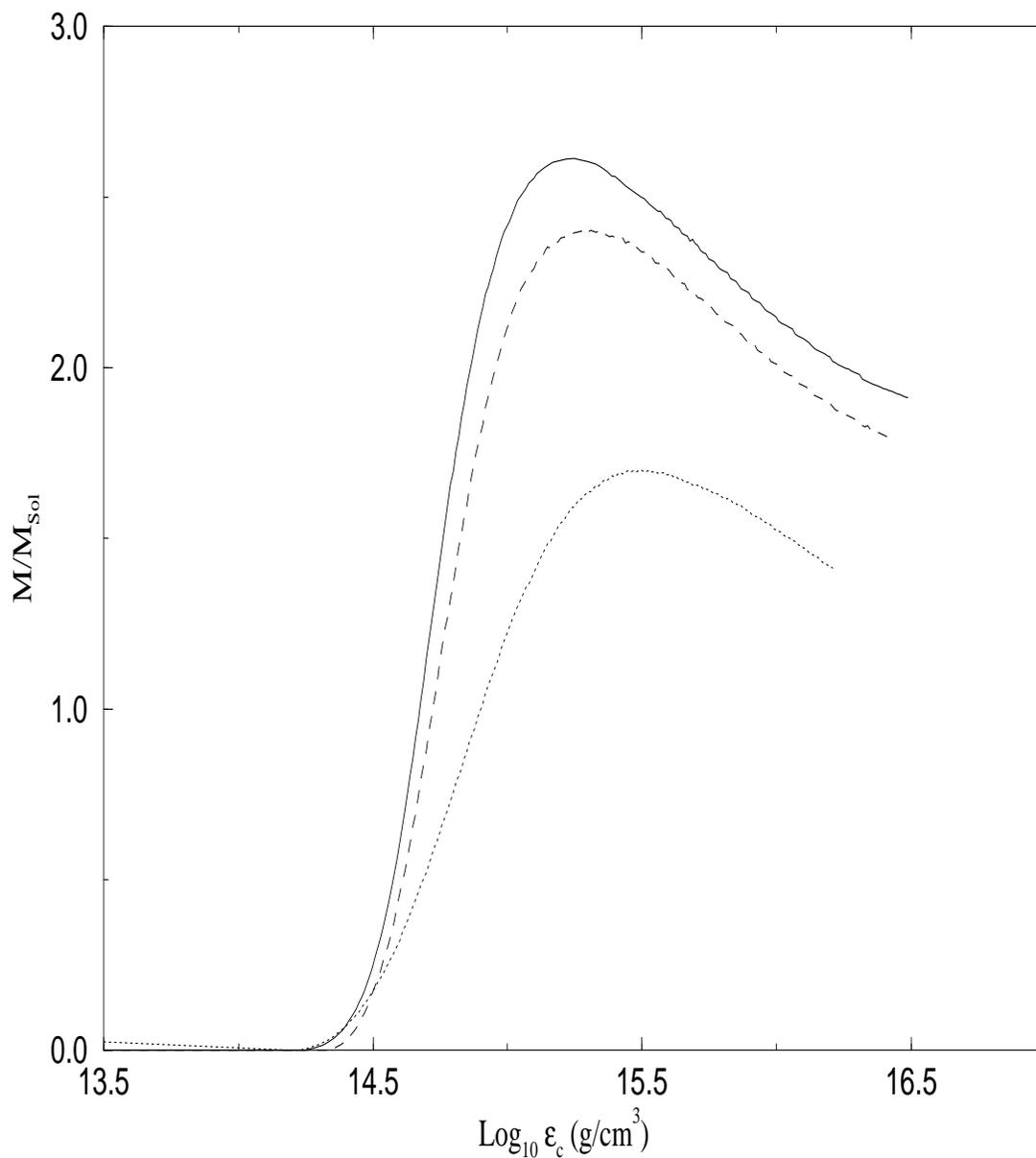


Fig. 3.6: Massa da estrela de nêutrons nos modelos de Walecka (linha cheia), modelo não-linear (linha tracejada) e modelo ZM (linha pontilhada), em função da densidade central.

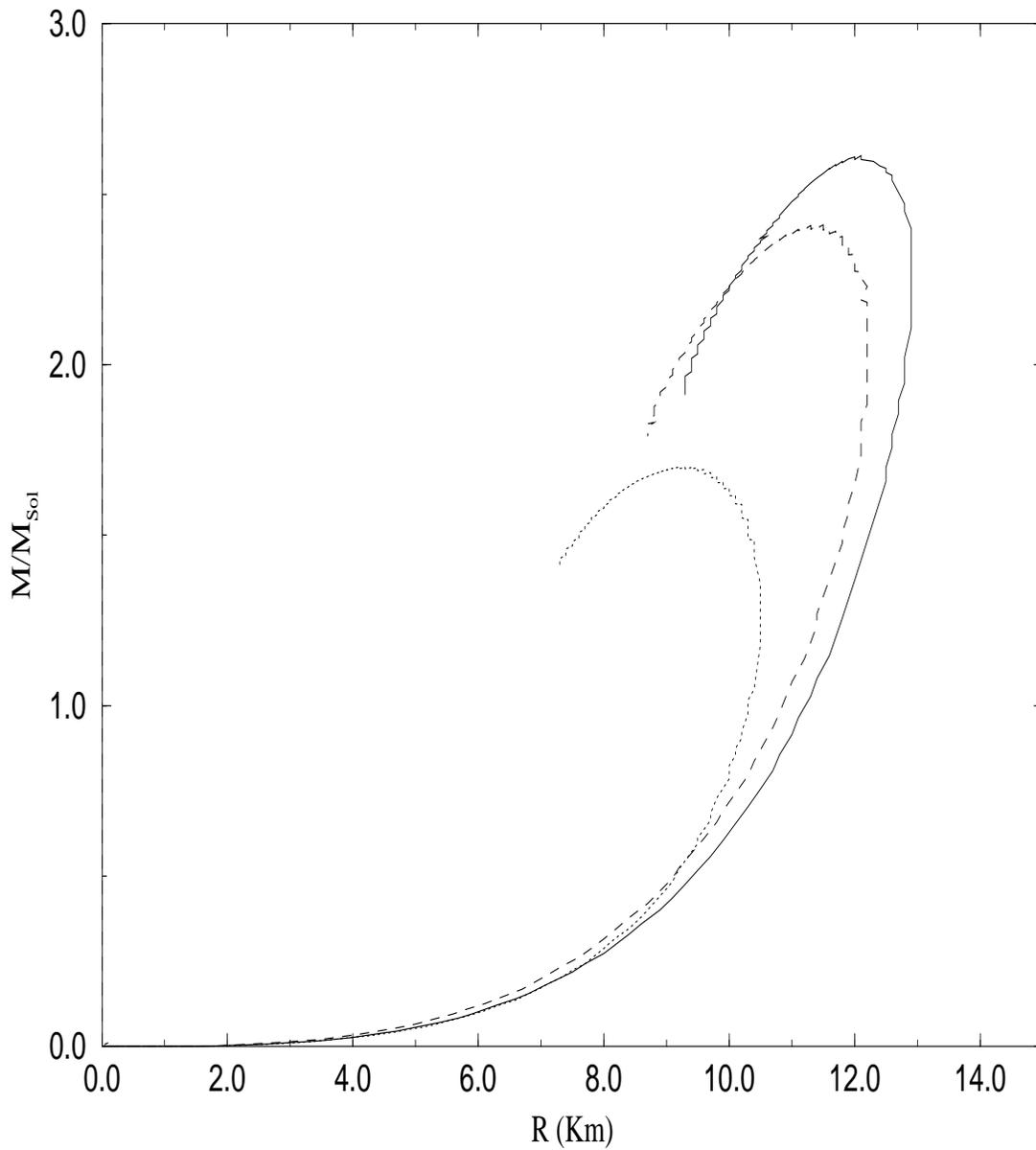


Fig. 3.7: *Massa em função do raio da estrela de nêutrons para os modelos de Walecka (linha cheia), modelo não-linear (linha tracejada) e modelo ZM (linha pontilhada).*

Modelos	Massa Máxima (M_{\odot})
W	2.57
ZM	2.29
NL	1.70

Tab. 3.7: Massa máxima das estrelas de nêutrons para os diferentes modelos considerados.

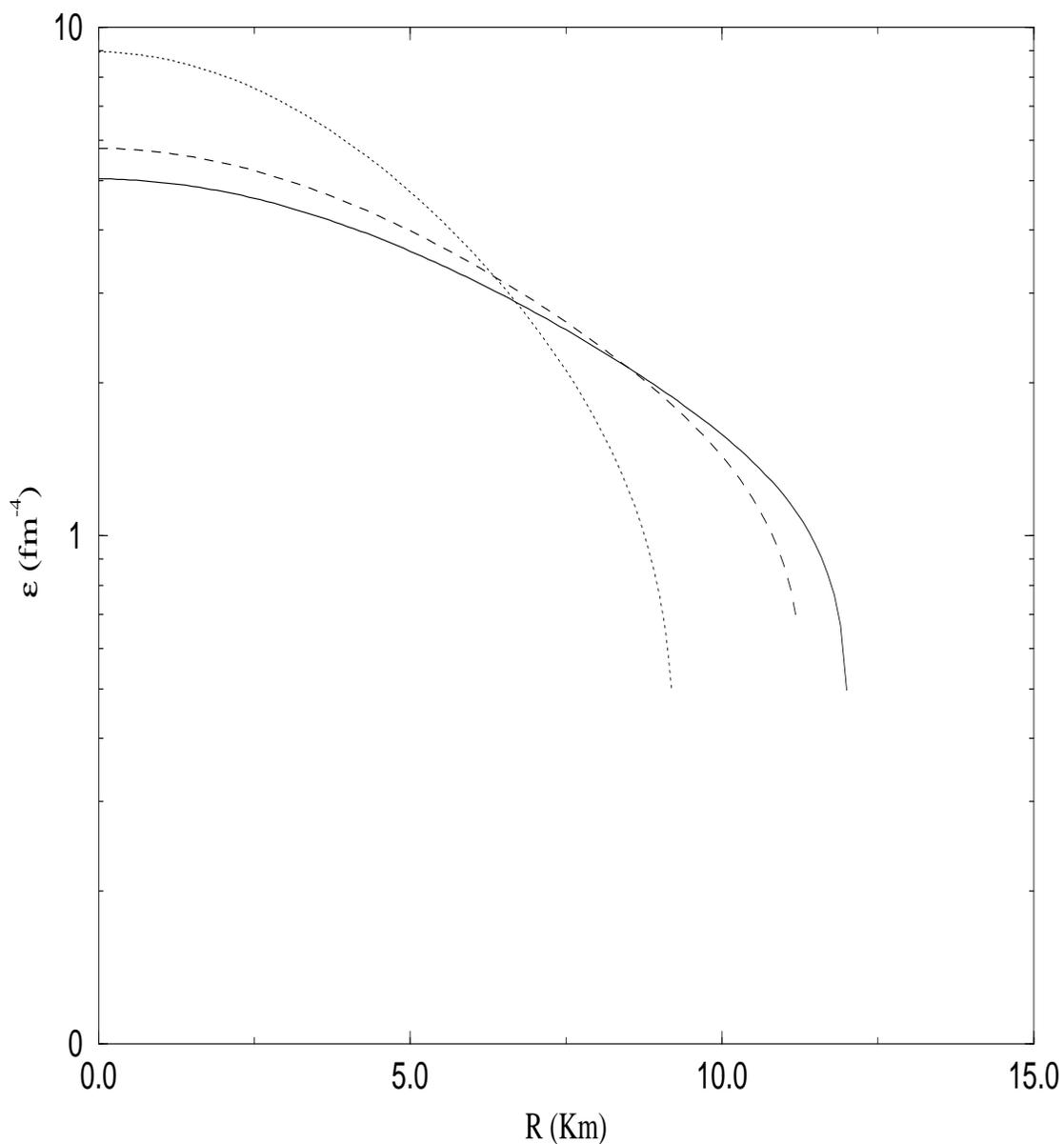


Fig. 3.8: Distribuição de densidade no interior das estrelas de nêutrons de massa máxima para os modelos de Walecka (linha cheia), modelo não-linear (linha tracejada) e modelo ZM (linha pontilhada) em função do raio estelar.

Capítulo 4

Modelos da Hadrodinâmica à Temperatura Finita

Consideramos, até o momento, em nosso estudo, o tratamento de modelos da hadrodinâmica quântica em um formalismo onde a temperatura é nula. Existem, entretanto, muitos problemas em física onde a influência da temperatura se faz relevante, e seus efeitos significativos ou até mesmo essenciais. Levar em conta a temperatura torna-se necessário no estudo de colisões de íons pesados realizadas em grandes aceleradores, onde uma transição de fase se desenvolve no regime de altas densidades e temperaturas e no estudo de estrelas protoneutrônicas que são formadas a temperaturas elevadas ($T \sim 10^{12} K$), evoluindo a partir de uma supernova até seu estágio final de estrela de nêutrons.

Este capítulo apresenta uma introdução ao formalismo de potenciais termodinâmicos aplicados aos modelos da hadrodinâmica quântica. Realizamos uma análise sobre a consistência termodinâmica destas estruturas formais, passando a utilizá-los na descrição da equação de estado da matéria nuclear e de nêutrons. Apresentamos, a seguir, um estudo do *vácuo térmico*, onde analisamos as propriedades do meio quando $\rho_B = \mu = 0$, e o estudo de propriedades termodinâmicas da matéria nuclear. Neste ponto determinamos os pontos críticos nas transições de fase previstas por estes modelos. Aplicamos nossos resultados ao estudo de estrelas protoneutrônicas determinando o papel da temperatura em sua estrutura, através da resolução das equações TOV.

4.1 Introdução

Para estudarmos a estrutura da equação de estado da matéria nuclear à temperatura finita devemos recorrer a um formalismo estatístico, onde descrevemos o potencial termodinâmico do sistema, Ω , a partir do potencial químico, μ , do volume, V , da temperatura, T e sua relação com a função de partição, Z_G ,

$$\Omega(\mu, V, T) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_G; \quad (4.1)$$

nesta expressão $\beta = \frac{1}{k_B T}$ e k_B é a constante de Boltzmann. A função de partição é descrita por:

$$Z_G = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{B})} \quad (4.2)$$

onde \hat{H} é o hamiltoniano do sistema e \hat{B} o operador de número bariônico. Consideramos o operador hamiltoniano unificado para os modelos apresentados no capítulo anterior, na aproximação de campo médio:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & V\left[\frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 + \frac{b}{3}\phi^3 + \frac{c}{4}\phi^4\right] \\ & + g_v V_0 \hat{B} + \sum_{k\lambda} \sqrt{k^2 + M^{*2}} (A_{k\lambda}^\dagger A_{k\lambda} + B_{k\lambda}^\dagger B_{k\lambda}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde \hat{B} é dado por

$$\hat{B} = \sum_{k\lambda} (A_{k\lambda}^\dagger A_{k\lambda} - B_{k\lambda}^\dagger B_{k\lambda}) \quad (4.4)$$

com $A_{k\lambda}$, $A_{k\lambda}^\dagger$, $B_{k\lambda}$ e $B_{k\lambda}^\dagger$ representando os operadores de criação e destruição de partículas e anti-partículas na representação de segunda quantização.

Utilizando as expressões termodinâmicas para o potencial, dependente da pressão p , do volume V , da entropia S , do número de núcleons B e do potencial químico μ

$$\begin{aligned} \Omega &= -pV, \\ d\Omega &= -SdT - pdV - Bd\mu \end{aligned} \quad (4.5)$$

obtemos

$$\begin{aligned} B &= -\left(\frac{d\Omega}{d\mu}\right)_{T,V;\phi_0,V_0} \\ \rho_B &= \frac{B}{V} \end{aligned} \quad (4.6)$$

No limite contínuo, $\sum_k \rightarrow \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3k$, resulta, para a densidade bariônica,

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3k (n_k - \bar{n}_k) \quad (4.7)$$

onde n_k e \bar{n}_k representam as funções de distribuição de Fermi-Dirac para partículas e anti-partículas. Estas funções de distribuição descrevem os níveis de ocupação na representação de momentum linear para diferentes temperaturas e são dadas, em função dos auto-valores de \hat{H} , E^* , por

$$n_k = [e^{\beta(E^* - \mu^*)} + 1]^{-1}; \quad \bar{n}_k = [e^{\beta(E^* + \mu^*)} + 1]^{-1}. \quad (4.8)$$

e representadas na figura 4.1

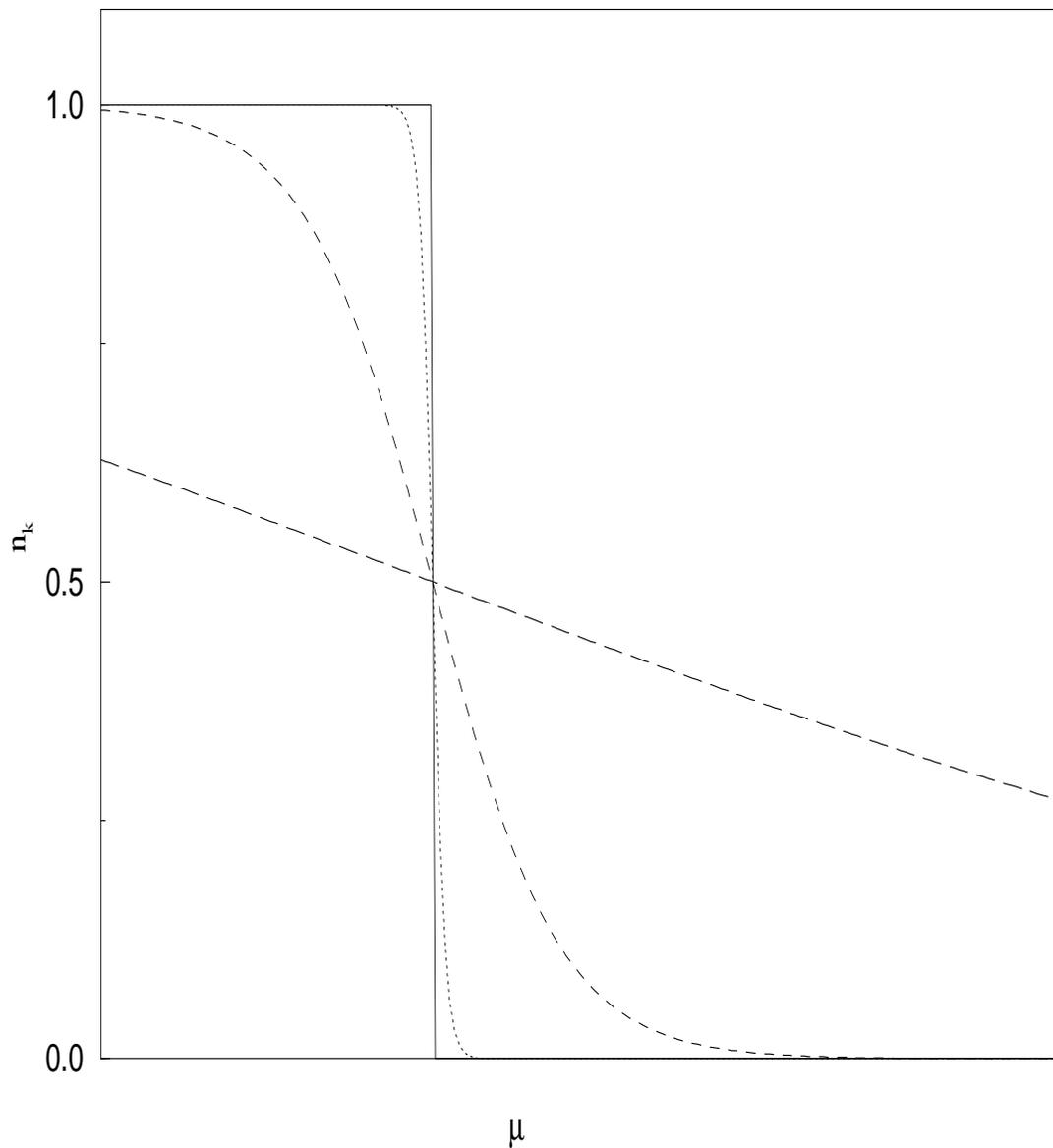


Fig. 4.1: *Distribuição das partículas no mar de Fermi para $T=0$ MeV (linha sólida), $T=1$ MeV (linha pontilhada), $T=10$ MeV (linha tracejada) e $T=100$ MeV (linha longo-tracejada).*

4.2 Consistência Termodinâmica

Um aspecto importante da aproximação de campo médio é o fato de sua formulação apresentar consistência quando analisada do ponto de vista termodinâmico. A consistência termodinâmica desta aproximação provém da equivalência entre as pressões hidrostática e termodinâmica [38], ou seja:

$$p = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle = \frac{-\Omega(\mu, T, V)}{V}. \quad (4.9)$$

Ao descrevermos a função de partição, o hamiltoniano do modelo é calculado considerando-se somas entre todos seus estados permitidos, $|n_i\rangle$, onde $|n_0\rangle$ corresponde ao estado do vácuo não interagente. Assim

$$Z_G = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_o} \sum_{\bar{n}_1} \dots \sum_{\bar{n}_o} \langle n_1 \dots n_o, \bar{n}_1 \dots \bar{n}_o | e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{B})} | n_1 \dots n_o, \bar{n}_1 \dots \bar{n}_o \rangle. \quad (4.10)$$

Na aproximação de campo médio, esta quantidade assume a forma

$$\begin{aligned} Z_G &= \exp[-\beta V (\frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{b}{3} \phi^3 + \frac{c}{4} \phi^4)] \\ &\times \prod_i \sum_{n_i} \langle n_i | e^{-\beta(E_i^* - \mu^*) n_i} | n_i \rangle \prod_j \sum_{\bar{n}_j} \langle \bar{n}_j | e^{-\beta(E_j^* + \mu^*) \bar{n}_j} | \bar{n}_j \rangle, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $E_k^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}}$ e $\mu^* = \mu - m^* g_v V_0$. Obtemos então a forma do potencial termodinâmico,

$$\begin{aligned} \Omega &= V (\frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{b}{3} \phi^3 + \frac{c}{4} \phi^4) \\ &- \frac{1}{\beta} \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(E_i^* - \mu^*)}] - \frac{1}{\beta} \sum_j \ln[1 + e^{-\beta(E_j^* + \mu^*)}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

No limite do contínuo, obtemos a seguinte expressão para a pressão do sistema

$$\begin{aligned} p &= \frac{-\Omega}{V} = \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{b}{3} \phi^3 - \frac{c}{4} \phi^4 \\ &+ \frac{1}{\beta} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k (\ln[1 + e^{-\beta(E^* - \mu^*)}] + \ln[1 + e^{-\beta(E^* + \mu^*)}]). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Através de uma mudança de variáveis do tipo

$$\begin{aligned} dv &= k^2 dk & u &= \ln[1 + e^{-\beta(E^* - \mu^*)}], \\ v &= \frac{1}{3} k^3 & du &= -\frac{e^{-\beta(E^* - \mu^*)}}{1 + e^{-\beta(E^* - \mu^*)}} \beta \frac{k dk}{E^*}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

resulta, de 4.14, uma expressão para a pressão idêntica àquela obtida através do cálculo do valor esperado das componentes espaciais do tensor energia-momento

$$p = \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{b}{3}\phi^3 - \frac{c}{4}\phi^4 + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3k \frac{k^2}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}}(n_k + \bar{n}_k). \quad (4.15)$$

Os resultados para a pressão podem ser observados na figura 4.2, para diferentes valores de temperatura aplicados ao modelo de Walecka, onde T_c e T_f são definidas na seção 4.5.

4.3 Equação de Estado

A determinação da equação de estado da matéria nuclear consiste em um dos principais objetivos de nosso estudo da estrutura nuclear [39]. Através deste formalismo podemos determinar a estrutura da matéria nuclear. Uma transição de fase, do tipo líquido-gás pode ocorrer, separando as estruturas nucleares em diferentes regiões, onde uma terceira região pode ser formada, determinando a região de coexistência destas fases. A equação de estado à temperatura finita ocupa importante papel no estudo de estrelas protoneutrônicas, quando inseridas nas equações TOV. Para determinarmos a equação de estado da matéria nuclear ou de nêutrons devemos utilizar a expressão da pressão, obtida na seção anterior, e determinar uma expressão para a densidade de energia através da média térmica do hamiltoniano

$$\epsilon = \frac{1}{V} \langle\langle \hat{H} \rangle\rangle = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta\Omega) + \mu\rho_B. \quad (4.16)$$

Obtemos uma expressão para a densidade de energia semelhante àquela obtida à temperatura nula

$$\epsilon = \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{b}{3}\phi^3 + \frac{c}{4}\phi^4 - \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 + g_vV_0\rho_B + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3k \sqrt{k^2 + M^{*2}}[n_k + \bar{n}_k]. \quad (4.17)$$

Obtemos uma equação para a massa efetiva de forma análoga à feita anteriormente para $T=0$, minimizando o potencial termodinâmico

$$\left. \frac{\partial \Omega(\mu, T, V)}{\partial \phi_0} \right|_{\mu, V, T} = \left. \frac{\partial \Omega(\mu, T, V)}{\partial \phi_0} \right|_{\mu, V, T; V_0} = 0, \quad (4.18)$$

encontrando a expressão

$$m^* = 1 - \frac{\gamma C_s^2}{2\pi^2} m^{*3\beta+1} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + m^{*2}}} [n_x + \bar{n}_x] - \frac{b}{M}(M - M^*)^2 - \frac{c}{M}(M - M^*)^3. \quad (4.19)$$

A figura 4.3 mostra o comportamento da equação de estado da matéria de nêutrons no modelo de Walecka para diferentes temperaturas. Nesta figura são apresentadas transições

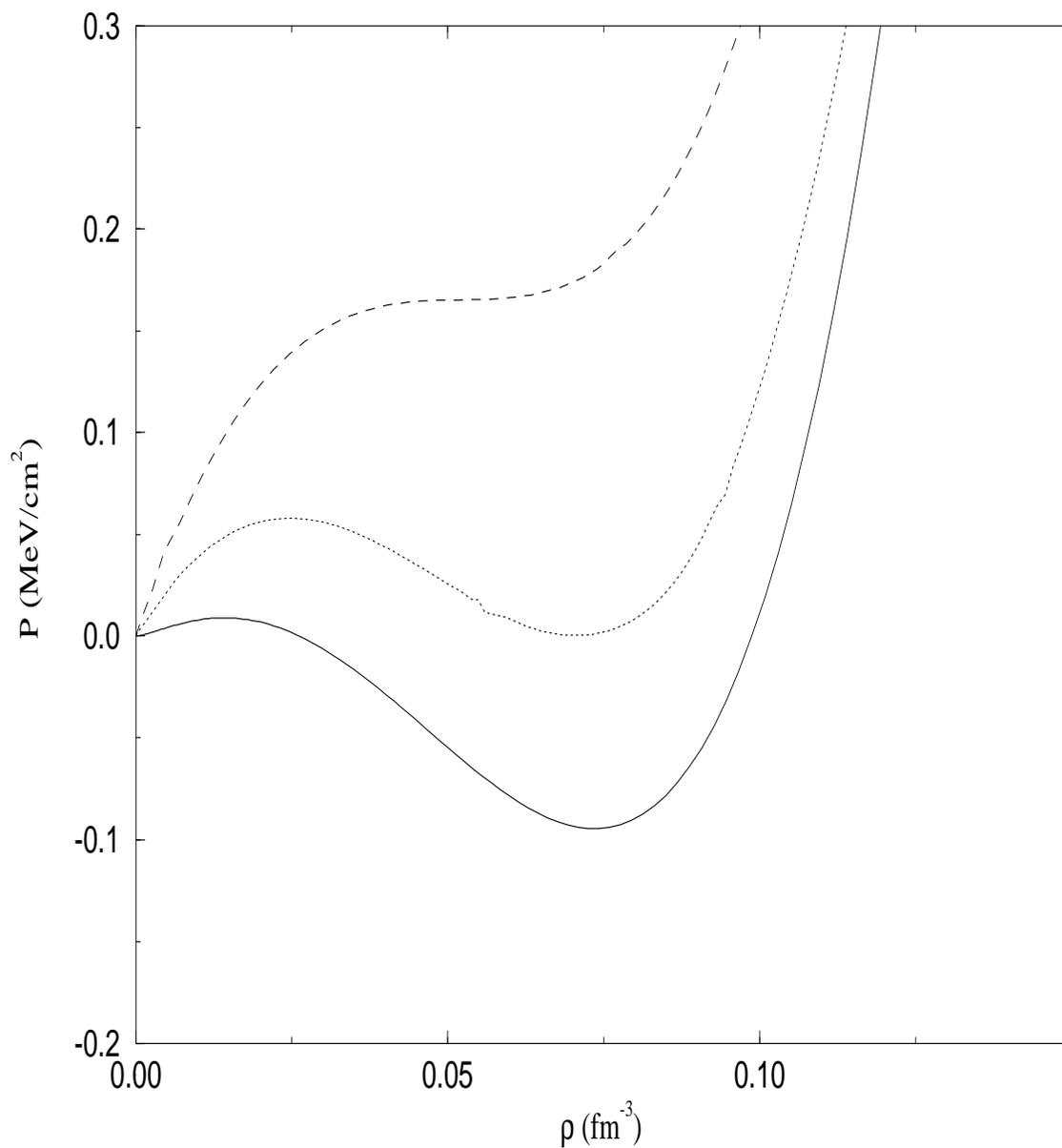


Fig. 4.2: Comportamento da pressão da matéria nuclear em função da densidade no modelo de Walecka para $T=0$ (linha cheia), $T=T_f$ (linha pontilhada) e $T=T_c$ (linha tracejada).

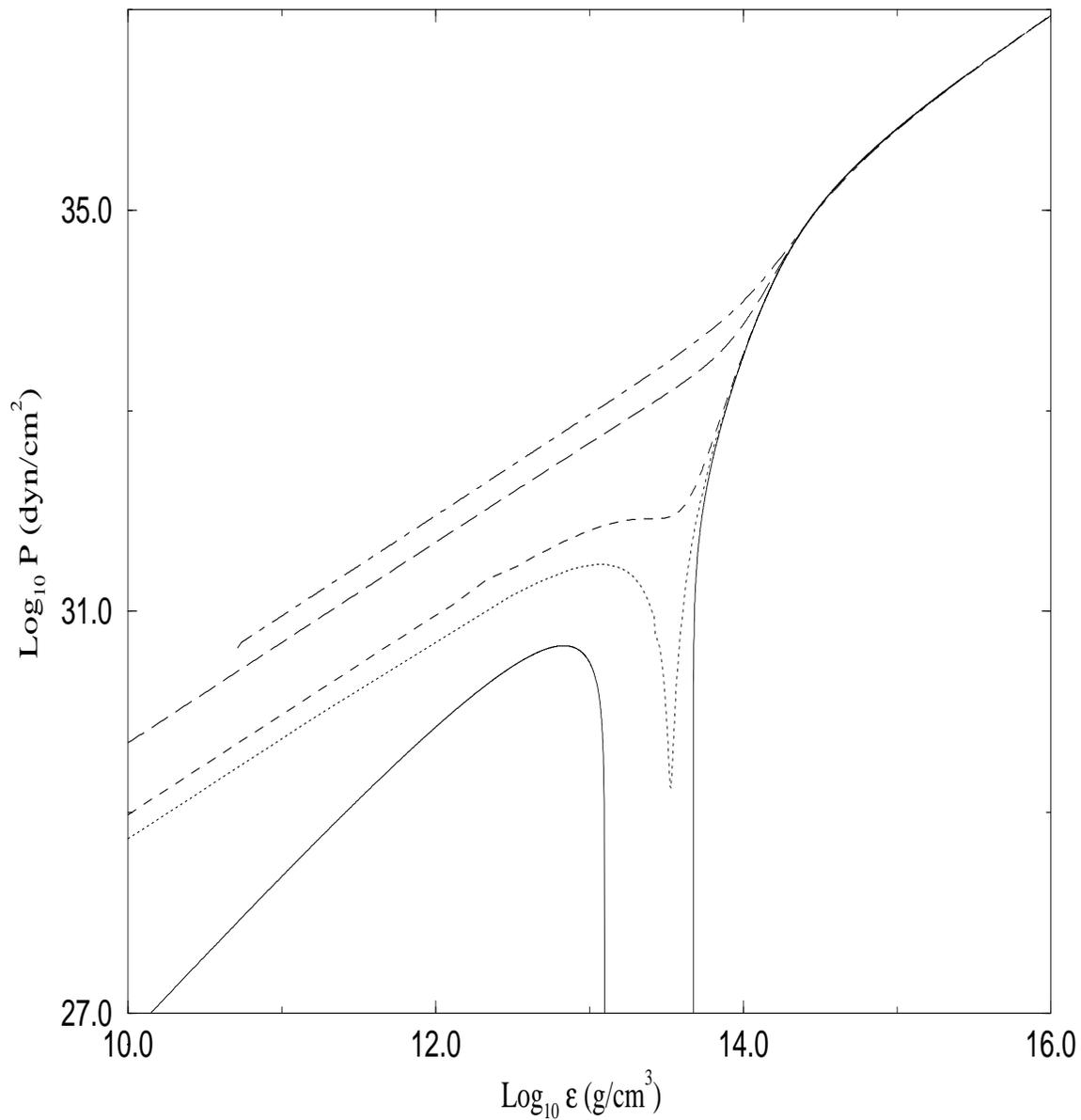


Fig. 4.3: Equação de estado da matéria de nêutrons, no modelo de Walecka, para $T=0$ MeV (linha sólida), $T=T_f$ (linha pontilhada), $T=T_c$ (linha tracejada), $T=50$ MeV (linha longo-tracejada) e $T=100$ MeV (linha ponto-tracejada).

de fase do tipo líquido-gás, similares à equação de estado de van der Waals, e que correspondem a uma transição de fase de primeira ordem¹. A construção de Maxwell é realizada a partir do critério de Gibbs, afim de determinarmos com exatidão as diferentes fases da matéria nuclear,

$$p_1 = p_2; \quad \mu_1 = \mu_2; \quad T = \text{constante}; \quad (4.20)$$

e dentre alguns dos resultados mais importantes destaca-se a semelhança de comportamento da matéria nuclear a altas temperaturas com o comportamento de um corpo negro, onde a energia deste corpo depende na quarta potência da temperatura, conforme mostra a equação 4.21

$$\epsilon \propto T^4; \quad T \rightarrow \infty; \quad (4.21)$$

e uma equação de estado similar a de um gás de nêutrons ultra-relativístico e degenerado. Um gás deste tipo corresponde à uma estrutura onde os nêutrons estão ligados de forma tão densa que suas velocidades aproximam-se da velocidade da luz, e onde a pressão gravitacional é totalmente suportada pela pressão de degenerescência destes nêutrons.

$$p = \frac{1}{3}\epsilon; \quad T \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

4.4 Vácuo Térmico

Descrevemos nesta seção o estudo das propriedades da matéria nuclear à densidade nula ($\mu = \rho_B = 0$), o assim denominado de vácuo térmico. Através desta descrição podemos avaliar diferentes aspectos como, por exemplo, a sensibilidade dos modelos estudados em relação às constantes de acoplamento [40]. Os modelos ZMs não indicam nenhum problema quanto à escolha das constantes. O modelo de Walecka apresenta, entretanto, um comportamento diferenciado onde, dependendo do valor das constantes, uma nova transição de fase, distinta da transição líquido-gás, anteriormente descrita, pode ocorrer. A figura 4.4 apresenta a variação da massa efetiva do núcleon com respeito ao aumento de temperatura no vácuo térmico. Na figura 4.5 visualizamos a figura anterior em menor escala, para o modelo de Walecka. Nesta figura apresentamos dois conjuntos de constantes distintas, cujos efeitos refletem-se no comportamento do calor específico. Na figura 4.6 apresentamos o calor específico da matéria nuclear e de nêutrons.

Uma transição de fase pode ser melhor observada e descrita através da análise do comportamento do calor específico [40], onde aparece um pico, similar ao que encontramos em uma transição de fases de supercondutores, como mostra a figura 4.6. Esta transição se diferencia da transição de fase observada anteriormente por estar em uma região de mais alta temperatura ($T \sim 200$ MeV). Comparando a temperatura onde ocorre esta transição com aquela esperada nas reações a serem realizadas pelo *RHIC*, em processos Hádrons \rightarrow Quarks + Glúons, poderíamos indicá-las como semelhantes. Entretanto, os modelos apresentados

¹ Uma transição de fase de primeira ordem apresenta uma distinção bem definida entre duas fases, separadas por uma fase intermediária onde ocorre uma mistura entre estas.

neste trabalho não apresentam graus de liberdade de quarks, tornando inconsistente esta comparação.

Uma comparação que envolve supercondutividade e superfluidez, juntamente com a idéia de um plasma de quarks e glúons, pode ser realizada. Segundo a nossa proposta, onde fazemos uma alusão à idéia descrita por estes modelos, os hádrons devem se mover livremente dentro de um plasma de quarks e glúons, de uma forma similar ao movimento de *pares de Cooper*² em um condensado eletrônico. No caso do plasma, os quarks devem se unir em uma temperatura inferior a 200 MeV, formando os prótons ou nêutrons, as novas *partículas de cooper* ao invés dos tradicionais pares. Estes prótons e nêutrons tornariam-se partículas supercondutoras ou superfluídas, com as respectivas características destas partículas aplicadas em um novo sistema de muitos corpos.

4.5 Propriedades Termodinâmicas

Ainda podemos descrever outras quantidades termodinâmicas de grande interesse, juntamente com as quantidades já obtidas à temperatura nula. O comportamento da massa efetiva do núcleon com respeito à densidade bariônica, em diferentes temperaturas, pode ser visto na figura 4.7. O comportamento da entropia também pode ser descrito através da variação da energia conforme mostra a figura 4.8.

Ainda é possível extrair informações importantes sobre a matéria nuclear à temperatura finita, como por exemplo, os pontos críticos e *flash* [41].

- **Ponto Flash:** Para adquirir o equilíbrio hidrostático, um sistema deve minimizar a energia livre de Helmholtz[11]

$$F = E - TS, \quad (4.23)$$

onde pode-se observar sua equivalência com a energia livre quando $T=0$. Através da primeira lei da termodinâmica obtemos que

$$dF = -pdV - SdT, \quad (4.24)$$

e considerando T constante, temos, para a pressão

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{f}{\rho}\right). \quad (4.25)$$

Sendo o mínimo da função $\frac{f}{\rho}$, o ponto onde a pressão se anula, com isso, podemos escrever a expressão para o módulo de compressibilidade da matéria nuclear

$$K = 9\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{f}{\rho}\right)_T |_{\rho=\rho_0}, \quad (4.26)$$

² Quando dois elétrons acoplam seus spins anti-paralelamente, tornando-se uma partícula supercondutora, são denominados de par de cooper.

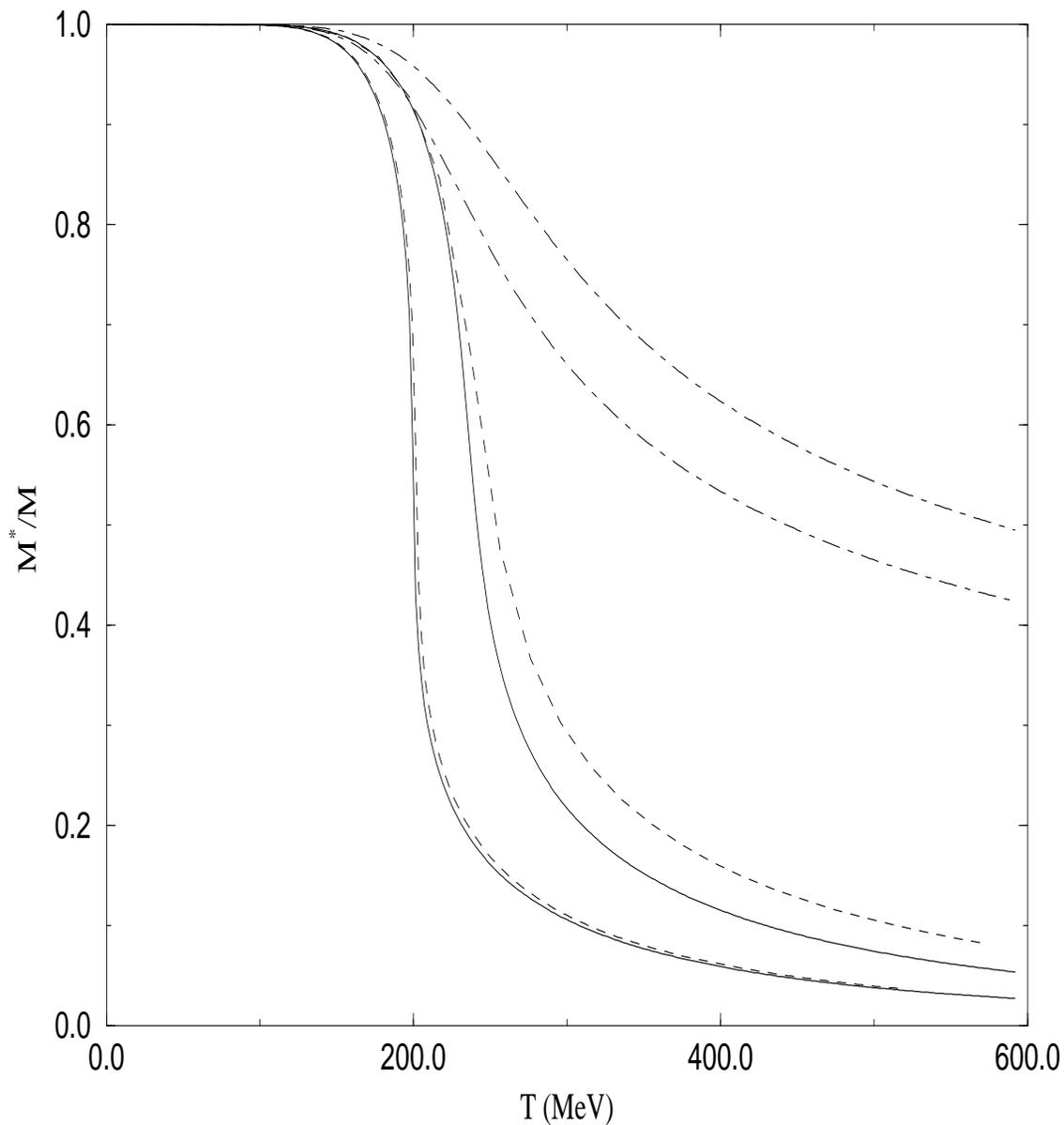


Fig. 4.4: Massa efetiva do nêutron, em função da temperatura, considerando-se o caso em que $\mu = \rho_B = 0$ para o modelo de Walecka (linha cheia), para o modelo ZM (linha ponto-tracejada) e para o modelo não-linear (linha tracejada). As curvas inferiores de cada modelo correspondem à matéria nuclear, enquanto as curvas superiores correspondem à matéria de nêutrons.

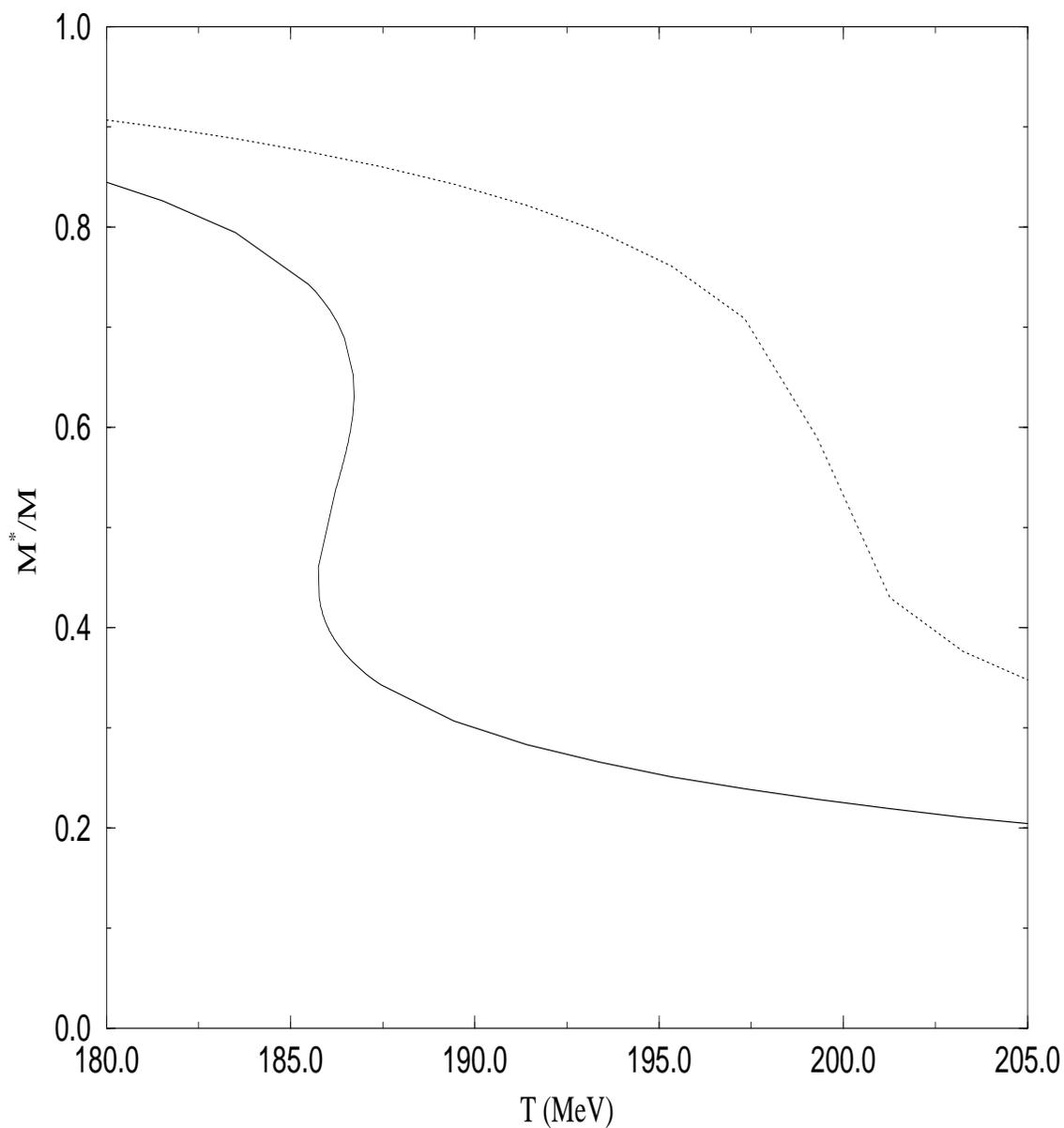


Fig. 4.5: Massa efetiva do nêutron, em função da temperatura, considerando-se o caso em que $\mu = \rho_B = 0$ para o modelo de Walecka com as constantes apresentadas (linha pontilhada) e para as constantes $C_s^2 = 357.4$ e $C_v^2 = 273.8$ (linha sólida).

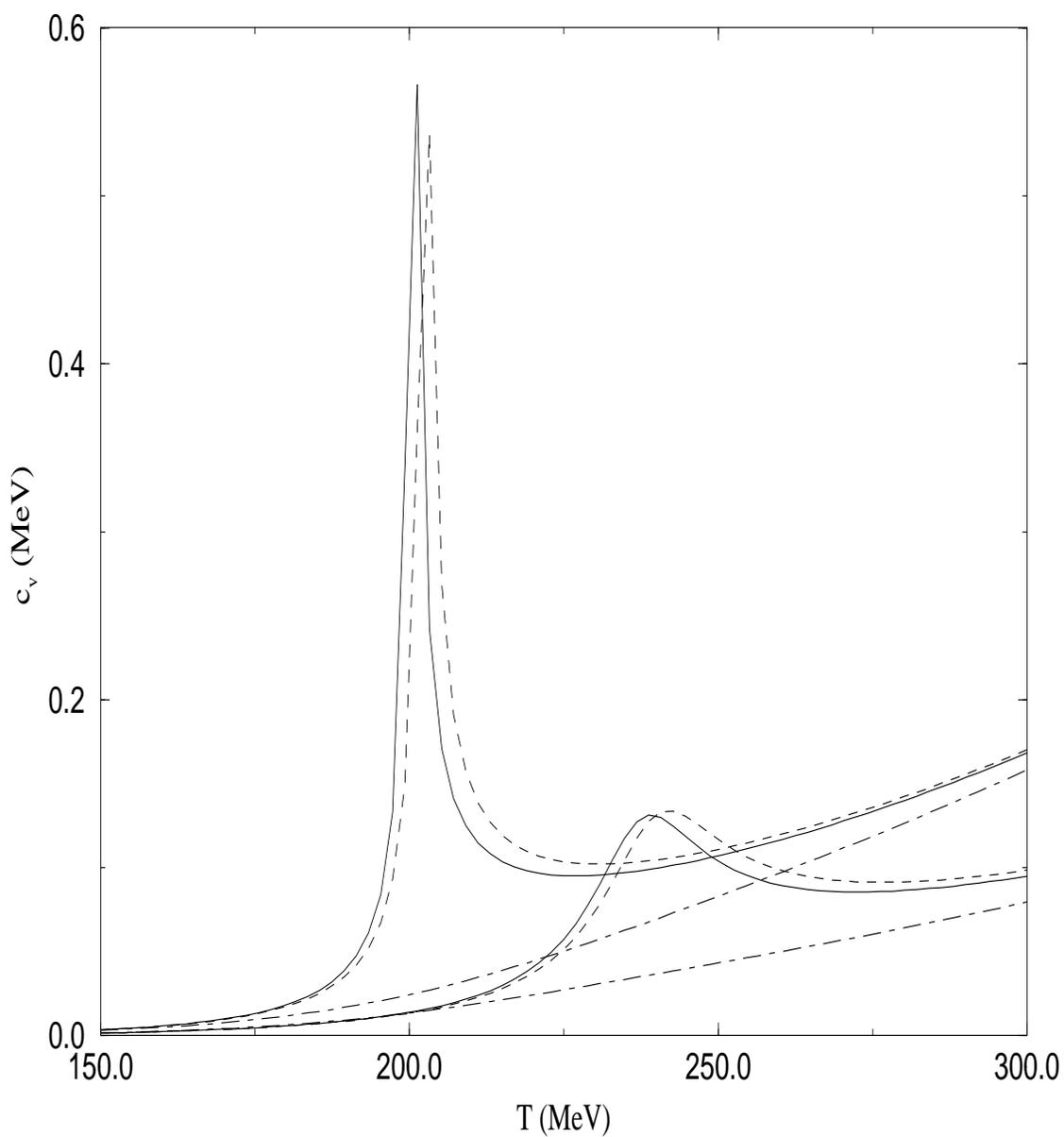


Fig. 4.6: Calor específico para o modelo de Walecka (linha cheia), para o modelo Não-Linear (linha tracejada) e para o modelo ZM (linha ponto-tracejada) na matéria nuclear nas curvas superiores e matéria de nêutrons nas curvas inferiores.

que deve se anular na temperatura *flash*, identificando o ponto requisitado como, $K = p(T_f, \rho_f) = 0$.

- **Ponto Crítico:** O ponto crítico é definido, de maneira mais simples, como sendo aquele onde não existe mais transição de fase. A temperatura crítica fica então definida como

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_c, T_c} = \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho_c, T_c} = 0. \quad (4.27)$$

Os pontos críticos e *flash*, obtidos em nosso trabalho, encontram-se listados na tabela 4.1 e apresentam algumas diferenças com os resultados encontrados nas referências [41] e [42].

	Matéria	T_c	T_f	ρ_c	ρ_f
W	Nuclear	20.2	15.5	0.085	0.122
ZM	Nuclear	16.6	12.9	0.050	0.085
NL	Nuclear	28.6	22.6	0.092	0.137
W	Nêutrons	9.0	5.13	0.052	0.071
ZM	Nêutrons	11.1	7.9	0.037	0.056
NL	Nêutrons	19.6	14.1	0.069	0.100

Tab. 4.1: Pontos críticos e *flash* obtidos neste trabalho.

4.6 Soluções das Equações TOV

Apresentamos a seguir os resultados obtidos para as estrelas protoneutrônicas a partir dos modelos citados. Estrelas protoneutrônicas podem atingir temperaturas da ordem de $10^{11}K \sim 10MeV$. Por isso utilizamos os pontos críticos para o estudo destes objetos. Estrelas de nêutrons possuem temperaturas consideradas muito baixas ($T \sim 10^6 K$), não afetando a estrutura da equação de estado da matéria nuclear. Os resultados estão apresentados para o modelo de Walecka, na figura 4.9, para o modelo ZM, na figura 4.10 e para o modelo não-linear, na figura 4.11.

Os três modelos considerados, Walecka, ZM e não-linear, apresentam um comportamento semelhante para as propriedades listadas na tabela 4.2, onde a massa máxima da estrela não varia de forma significativa. Estas variações são menores que $0.1 M_{Sol}$ quando a temperatura alcança T_c , sendo mais significativas quanto $T \rightarrow 50MeV$, como mostra a tabela a seguir.

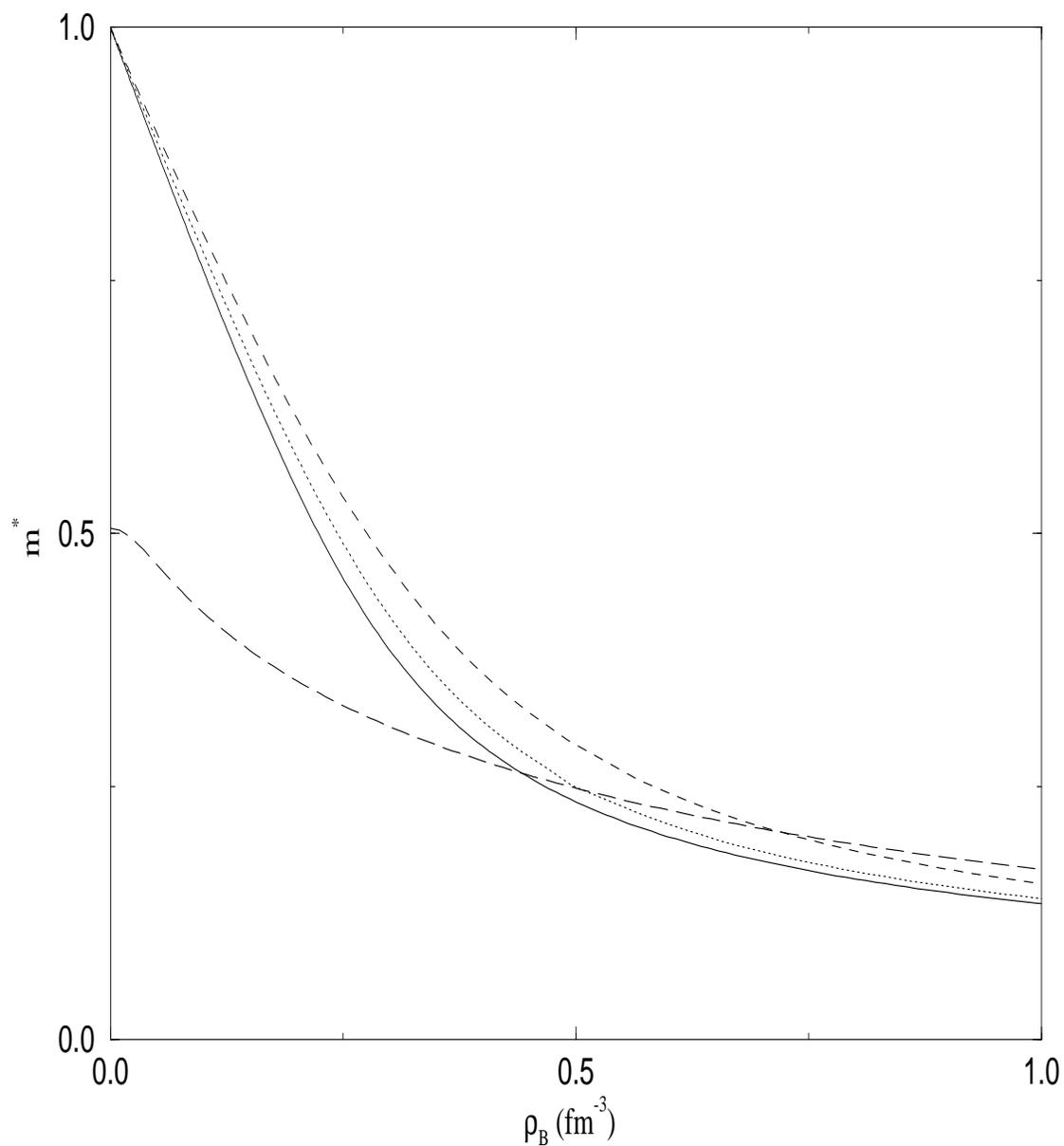


Fig. 4.7: Massa efetiva do nêutron para o modelo de Walecka com $T=0$ MeV (linha cheia), $T=50$ MeV (linha pontilhada), $T=100$ MeV (linha tracejada) e $T=200$ MeV (linha longo-tracejada) em função da densidade bariônica.

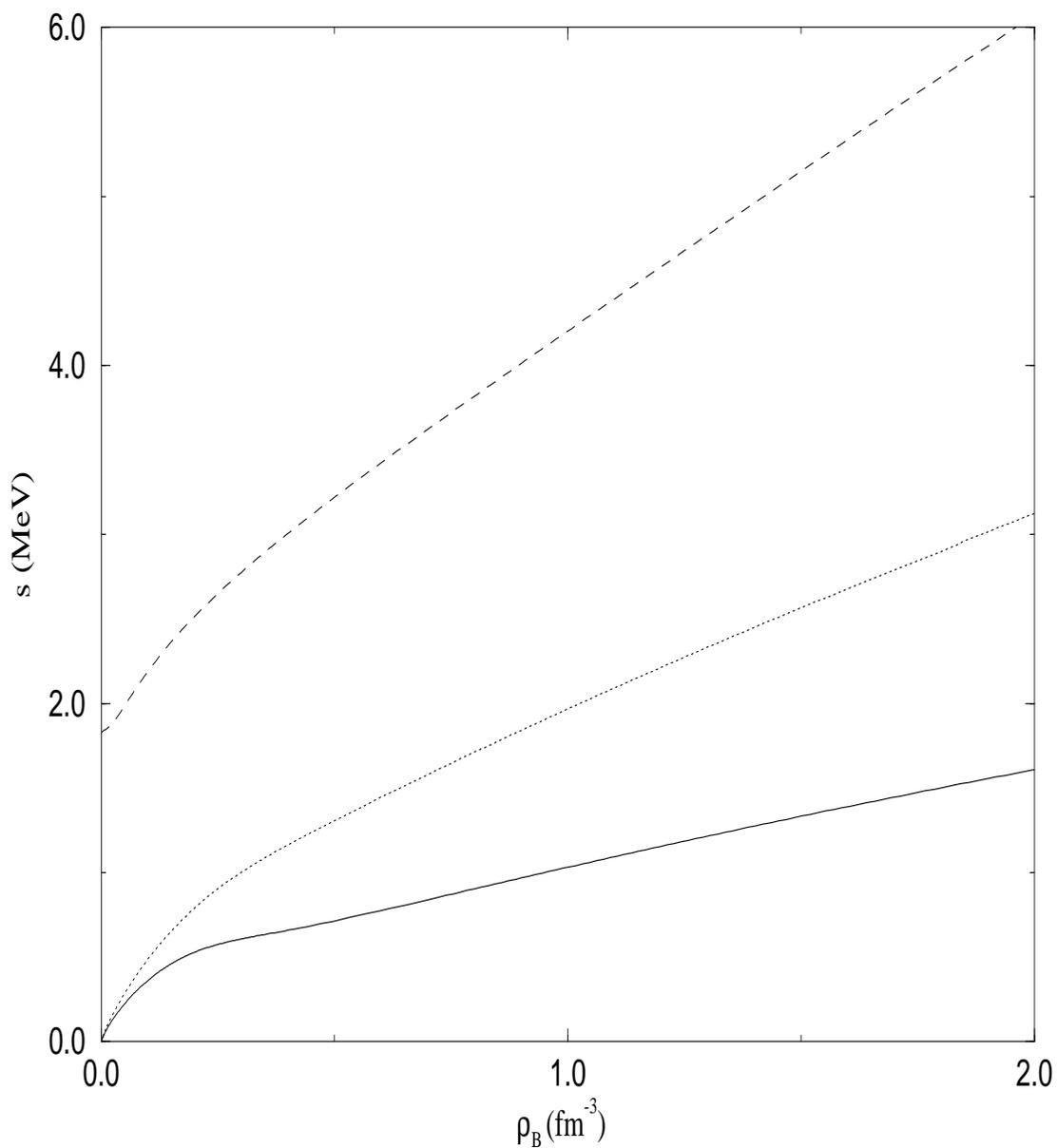


Fig. 4.8: Entropia no modelo de Walecka com $T=50$ MeV (linha cheia), $T=100$ MeV (linha pontilhada) e $T=200$ MeV (linha tracejada) em função da densidade bariônica.

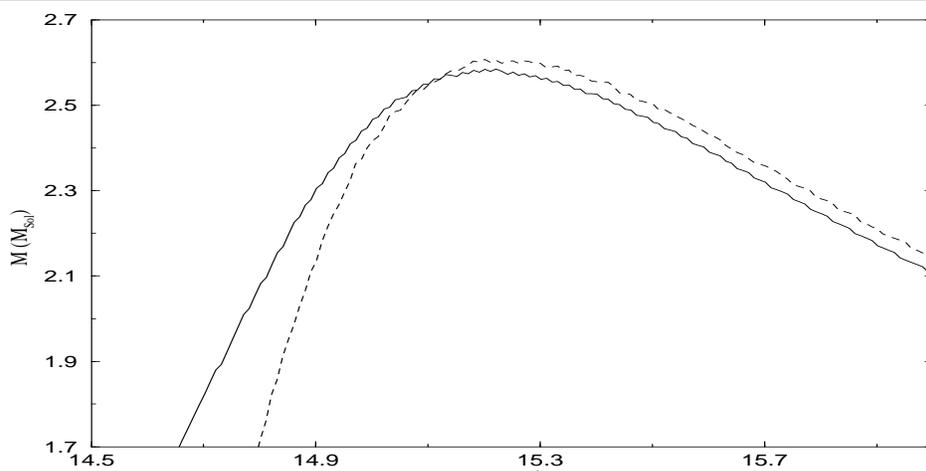


Fig. 4.9: Solução das equações TOV para o modelo de Walecka com $T=0$ MeV (linha cheia) e $T=T_c$ (linha tracejada).

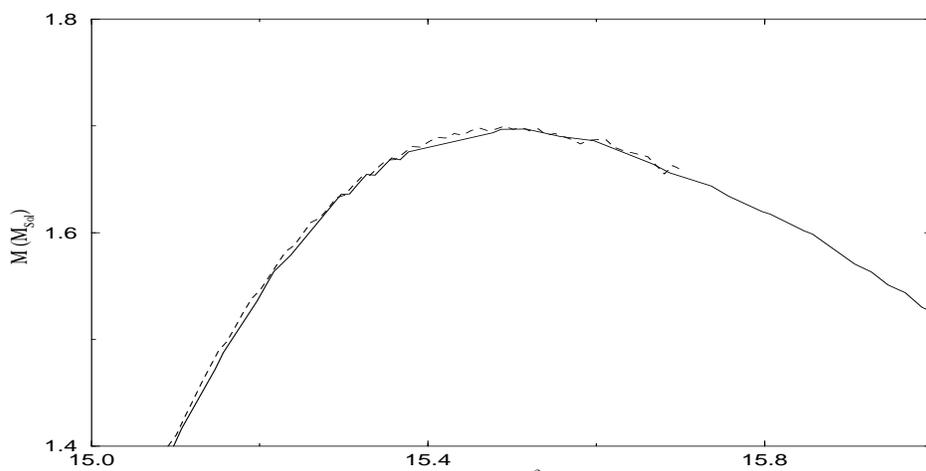


Fig. 4.10: Solução das equações TOV para o modelo de ZM com $T=0$ MeV (linha cheia) e $T=T_c$ (linha tracejada).

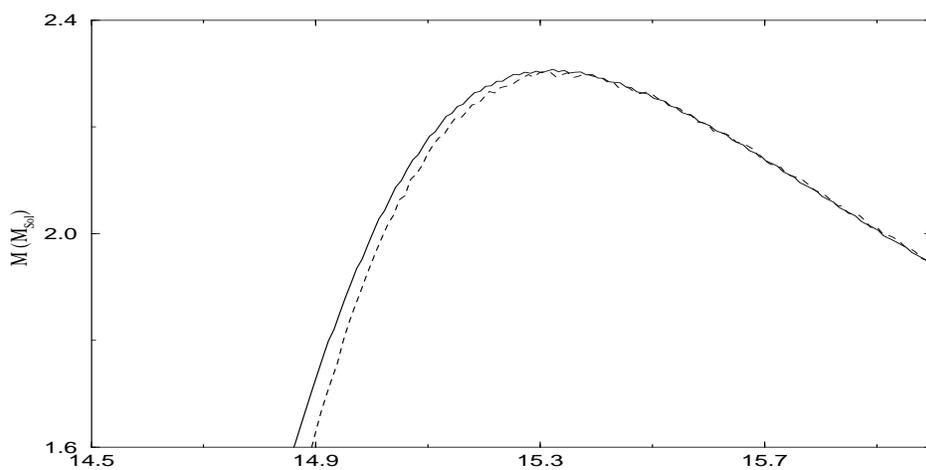


Fig. 4.11: Solução das equações TOV para o modelo NL com $T=0$ MeV (linha cheia) e $T=T_c$ (linha tracejada).

	$\frac{M(T=0MeV)}{M_{Sol}}$	$\frac{M(T=T_c)}{M_{Sol}}$	$\frac{M(T=50MeV)}{M_{Sol}}$
W	2.57	2.60	3.22
ZM	1.70	1.71	1.76
NL	2.29	2.30	2.35

Tab. 4.2: *Massas de estrelas protoneutrônicas com diferentes temperaturas para os modelos de Walecka, ZM e não-linear.*

Capítulo 5

Extensões aos Modelos da Hadrodinâmica

Dedicamos este capítulo ao estudo dos modelos anteriormente apresentados com a inclusão dos campos dos mésons π e ρ , nas densidades lagrangeanas originais. Apresentamos no apêndice C o *Teorema de Noether*, que ocupa um papel importante no estudo dos sistemas de muitos corpos considerados neste capítulo. Descrevemos, a seguir, as densidades lagrangeanas dos mésons π e ρ , bem como as densidades lagrangeanas completas consideradas neste estudo e suas equações de campo. Aplicamos a aproximação de campo médio e determinamos a constante de acoplamento do méson- ρ . Apresentamos a equação de estado da matéria nuclear assimétrica à temperatura finita, determinando uma fração entre os potenciais químicos de prótons e nêutrons. Incluímos elétrons e múons neste formalismo e, finalmente, aplicamos seus resultados nas equações TOV.

5.1 Densidade Lagrangeana do Méson- π

Conforme citamos anteriormente, o méson- π é descrito a partir de um campo pseudo-escalar. O campo deste méson representa uma estrutura triplete, onde encontramos mésons com cargas positiva, negativa e nula.

A densidade lagrangeana que descreve o comportamento dos píons livres é descrita através de

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - m_\pi^2 \vec{\pi} \cdot \vec{\pi}). \quad (5.1)$$

Devemos adicionar a esta densidade lagrangeana termos de acoplamento ao campo dos núcleons na forma

$$\mathcal{L}_{N\pi} = -ig_\pi \bar{\psi} \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi, \quad (5.2)$$

onde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Adicionamos também, termos de acoplamento ao campo do méson- σ

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi} = \frac{1}{2}g_{\sigma\pi} m_s \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \sigma. \quad (5.3)$$

Aplicamos o teorema de Noether a uma densidade lagrangeana composta pelos termos citados acima, gerando uma mudança de fase, através do operador de iso-spin $\vec{\tau}$, sobre o campo dos núcleons e píons

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}/2}\psi(x), \\ \pi(x) &\rightarrow \pi'(x) = e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}/2}\pi(x),\end{aligned}\tag{5.4}$$

onde σ_i são os geradores do grupo SU(2). Quando $\vec{\theta} \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \left(1 + \frac{1}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}\right)\psi(x), \\ \pi'(x) &= (1 - \vec{\theta}\times)\vec{\pi}(x).\end{aligned}\tag{5.5}$$

A densidade lagrangeana torna-se invariante a este conjunto de transformações, gerando uma conservação de corrente, $\partial_\mu J^\mu = 0$, onde J^μ corresponde a uma corrente de isospin

$$J^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi + \vec{\pi} \times \partial^\mu\vec{\pi}.\tag{5.6}$$

5.2 Densidade Lagrangeana do Méson- ρ

Descrevemos os procedimentos realizados na descrição da densidade lagrangeana do méson- ρ , de forma similar àqueles realizados no caso do méson- π , começando por sua densidade lagrangeana livre

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\varrho}_\mu\cdot\vec{\varrho}^\mu,\tag{5.7}$$

acrescentando à densidade lagrangeana um termo de acoplamento ao campo dos núcleons

$$\mathcal{L}_{N\rho} = -\frac{1}{2}g_\rho\bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\cdot\vec{\varrho}^\mu\psi.\tag{5.8}$$

onde $B_{\mu\nu} = \partial_\mu\varrho_\nu - \partial_\nu\varrho_\mu - g_\rho(\varrho^\mu \times \varrho^\nu)$.

Consideramos transformações de fase, similares ao caso anterior, aplicadas agora ao méson- ρ , deixando a sua densidade lagrangeana invariante e gerando uma corrente conservada, dada pela corrente iso-vetorial

$$J^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi + \varrho_\nu \times B^{\mu\nu}.\tag{5.9}$$

Devemos observar também que, ao aplicarmos o operador de isospin no estado fundamental do sistema obtemos

$$\tau_3|\psi_0\rangle = (N_p - N_n)|\psi_0\rangle,\tag{5.10}$$

onde $\langle \tau_1 \rangle_0 = \langle \tau_2 \rangle_0 = 0$ e N_p e N_n representam o número de prótons e nêutrons no sistema, respectivamente.

5.3 Modelos da Hadrodinâmica-II (σ , ω , π e ρ)

Apresentamos agora as densidades lagrangeanas completas para os modelos de Walecka, não-linear e ZM, incluindo os mésons π e ρ . A densidade lagrangeana completa contém os termos

$$\mathcal{L}_{II} = \mathcal{L}_U + \mathcal{L}_{N\pi} + \mathcal{L}_{N\rho} + \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_\rho, \quad (5.11)$$

onde identificamos \mathcal{L}_U como a densidade lagrangeana unificada dos modelos da hadrodinâmica apresentada no capítulo 3 e os novos termos apresentados nas seções anteriores.

Aplicando as equações de Euler-Lagrange a esta densidade lagrangeana, podemos determinar as equações de campo para o núcleon

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - g_v V_\mu - \frac{1}{2}g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu) - (M - m^{*\beta} g_s \phi)]\psi = 0. \quad (5.12)$$

Para o méson- σ obtemos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2)\phi + b\phi^2 + c\phi^3 = m^{*\beta}[1 - \beta(1 - m^*)]g_s \bar{\psi}\psi. \quad (5.13)$$

O méson- ω apresenta a seguinte equação de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu = g_v \bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (5.14)$$

A equação de movimento do méson- π tem uma forma similar à do méson- σ , mas diferentemente deste, com uma fonte pseudo-escalar, a corrente axial bariônica, $\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi$,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2)\vec{\pi} = g_\pi \bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi, \quad (5.15)$$

enquanto o méson- ρ apresenta-se de forma análoga à equação do méson- ω , com uma fonte iso-vetorial, a corrente iso-vetorial bariônica, $\bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau}\psi$,

$$\partial_\mu \rho^{\mu\nu} + m_\rho^2 \rho^\nu = \frac{1}{2}g_\rho \bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau}\psi. \quad (5.16)$$

A aproximação de campo médio se torna um mecanismo bastante favorável na descrição dos campos mesônicos. Isto porque, o valor médio do campo do méson- π se anula nesta aproximação,

$$\langle \vec{\pi} \rangle_0 = \frac{g_\pi}{m_\pi^2} \langle \bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle = 0. \quad (5.17)$$

O méson- π torna-se importante na descrição da matéria nuclear quando utilizamos diferentes métodos de aproximação como, por exemplo, os métodos citados em 3.1.1.

Da mesma forma verificamos, através da invariância translacional e rotacional, que as componentes vetoriais dos campos mesônicos também se anulam

$$\langle \mathbf{V} \rangle_0 = \langle \vec{\rho} \rangle_0 = 0. \quad (5.18)$$

Também verificamos que a fonte iso-vetorial que aparece na equação 5.16, é identificada como a diferença de densidade entre prótons e nêutrons do sistema, como visto na equação 5.10, levando ao valor do campo do méson- ρ , na aproximação de campo médio

$$\rho_0 = \frac{g_\rho}{2m_\rho^2} \rho_3 \quad (5.19)$$

onde $\rho_3 = \rho_p - \rho_n$.

5.3.1 Determinação da Constante C_ρ^2

O passo seguinte, antes da determinação numérica da equação de estado da matéria nuclear consiste na obtenção da constante de acoplamento do méson- ρ . A constante de acoplamento $C_\rho^2 = \frac{g_\rho M^2}{m_\rho^2}$ é definida através do valor da energia de assimetria a_4 .

A energia de assimetria a_4 é um dos coeficientes da equação da fórmula semi-empírica de Weizsacker [43]. Esta fórmula determina a energia de ligação de um núcleo a partir de

$$\frac{E}{A} = M - a_1 + \frac{a_2}{A^{1/3}} + \frac{a_3 Z^2}{A^{4/3}} + a_4 \frac{(N - Z)^2}{A^2(1 + \zeta/A^{1/3})} \quad (5.20)$$

onde A corresponde ao número de núcleons constituintes e: o primeiro termo corresponde à massa de repouso do núcleo, o segundo à energia de ligação ($a_1 = 15.75 MeV$), o terceiro corresponde à uma correção superficial ($a_2 = 17.8 MeV$), o quarto termo refere-se à correções Coulombianas ($a_3 = 0.71 MeV$) e, por fim, o último termo é a correção de assimetria entre nêutrons e prótons ($a_4 = 33.2 MeV$) e $\zeta = 3.28 MeV$, corresponde a um termo de superfície.

Nos modelos em questão, a energia de assimetria assume a forma

$$a_4 = \frac{1}{2} \rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right) \right]_{\rho_3=0} = \frac{g_\rho^2}{12\pi^2 m_\rho^2} k_F^3 + \frac{1}{6} \frac{k_F^2}{\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}. \quad (5.21)$$

Com isso é possível determinar as constantes de acoplamento do méson- ρ . Outra forma de determinar esta constante de acoplamento apresenta-se no estudo sobre núcleos finitos, onde ajusta-se o valor da constante a resultados obtidos para os níveis de energia do chumbo. Neste trabalho, ajustamos a constante C_ρ^2 com a energia de assimetria a_4 , sendo seus resultados apresentados, para os diferentes modelos considerados neste trabalho, na tabela 5.1.

	C_e^2
W	50.4
NL	104.0
ZM	107.5

Tab. 5.1: Constantes de acoplamento determinadas a partir da energia de assimetria para os modelos considerados neste trabalho.

5.3.2 Léptons

Obtemos uma densidade lagrangeana para a matéria nuclear assimétrica onde léptons devem ser incluídos para que o equilíbrio de cargas seja satisfeito no sistema. As partículas leptônicas são inclusas através de uma densidade lagrangeana de Dirac, similar à densidade lagrangeana utilizada para os núcleons. Entretanto, incluímos léptons não-interagentes, restritos apenas ao vínculo de equilíbrio químico e de neutralidade de carga. Incluindo elétrons e múons obtemos a seguinte expressão para a densidade lagrangeana

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi - \bar{\psi} (M - m^{*\beta} g_s \phi) \psi - m^{*\alpha} [g_v \bar{\psi} \gamma_\mu \psi V^\mu \\
 & - \frac{1}{2} g_e \bar{\psi} \gamma_\mu \tau \cdot \varrho^\mu \psi + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
 & + \frac{1}{2} m_\varrho^2 \varrho_\mu \cdot \varrho^\mu] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) + \sum_{l=e^-, \mu^-} \bar{\psi}_l (i \gamma_\mu \partial^\mu + M) \psi_l.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Na descrição da matéria nuclear assimétrica, o equilíbrio químico é a forma mais correta de determinar a fração de densidades entre prótons e nêutrons. Quando aplicamos os nossos resultados ao estudo de estrelas de nêutrons, a condição de neutralidade de cargas também deve ser usada. Juntas, estas duas condições determinam a condição final de equilíbrio:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e + \mu_\mu, \tag{5.23}$$

$$\mu_\mu = \mu_e, \tag{5.24}$$

$$\rho_p = \rho_e + \rho_\mu, \tag{5.25}$$

e

$$\sqrt{k_{F,n}^2 + M^{*2}} + \frac{C_\rho^2}{2M^2} \frac{m^{*\alpha}}{3\pi^2} (k_{F,n}^3 - k_{F,p}^3) = \sqrt{k_{F,p}^2 + M^{*2}} + \sqrt{k_{F,e}^2 + m_e^2} + \sqrt{k_{F,\mu}^2 + m_\mu^2}. \tag{5.26}$$

Ao trabalharmos com temperatura nula, a superfície de Fermi apresentava-se de forma bem definida em um valor k_F . Conforme podemos observar na figura 4.1, à medida que elevamos a temperatura, a superfície de Fermi, antes sob a forma da função $\theta(k - k_F)$, torna-se mais suave, devido à excitação térmica das partículas. Com isso, não podemos mais definir

o limite de k_F para as integrais de densidade, pressão, etc. Estas integrais são analisadas até o limite infinito, onde sua contribuição tende a se anular. Quando trabalhamos com matéria nuclear simétrica ou de nêutrons, este fato não apresenta nenhum empecilho; entretanto, ao trabalharmos com a matéria nuclear assimétrica, a suavização da superfície de Fermi impossibilita a análise do equilíbrio químico (eq.5.26).

Algumas alternativas para o estudo da matéria nuclear assimétrica à temperatura finita já foram apresentadas na literatura como, por exemplo, a utilização de uma fração fixa de densidades entre prótons e nêutrons. Este tipo de aproximação pode ser muito útil no estudo de núcleos finitos, mas inviável para estrelas protoneutrônicas. Em nosso trabalho apresentamos, de forma inédita, uma alternativa baseada na determinação de uma fração entre os potenciais químicos de prótons e nêutrons ($Y = \frac{\mu_p}{\mu_n}$) que, juntamente com a adição dos léptons, respeitem as condições de equilíbrio químico e neutralidade de cargas [44]. Esta fração é determinada à temperatura nula, de forma a aproximar-se ao máximo dos resultados obtidos no formalismo a $T=0$, extendendo posteriormente a sua aplicação à temperatura finita.

Finalmente obtemos a forma analítica para a equação de estado da matéria nuclear assimétrica.

$$\rho_B = \sum_{B=n,p} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= U(\phi) + \frac{C_v^2}{2M^2} \rho^2 + \frac{M^4}{2C_s^2} \left(\frac{1-m^*}{m^{*\beta}} \right)^2 + \frac{C_\rho^2}{8M^2} \rho_3^2 \\ &+ \sum_{B=n,p} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k \sqrt{k^2 + M_B^{*2}} + \sum_{l=e^-, \mu^-} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{Fl}} d^3k \sqrt{k^2 + m_l^2}; \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} p &= -U(\phi) + \frac{C_v^2}{2M^2} \rho^2 - \frac{M^4}{2C_s^2} \left(\frac{1-m^*}{m^{*\beta}} \right)^2 - \frac{C_\rho^2}{8M^2} \rho_3^2 \\ &+ \sum_{B=n,p} \frac{1}{3} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{FB}} d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M_B^{*2}}} + \sum_{l=e^-, \mu^-} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{Fl}} d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_l^2}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Descrevemos na figura 5.1 diferentes frações entre os potenciais químicos de nêutrons e prótons, onde a fração $Y=0.75$ ajusta-se melhor no modelo de Walecka ao equilíbrio- β . Para o modelo de Zimanyi e Moszkowski, a razão entre os potenciais que melhor se ajusta ao equilíbrio químico corresponde a $Y=0.9$, enquanto $Y=0.85$ é a mais adequada ao modelo não-linear. Na figura 5.2 demonstra-se a variação da fração de densidades para diferentes temperaturas. Ainda descrevemos o comportamento das frações de densidades, após a inclusão dos léptons, nas figuras 5.3 e 5.4.

5.3.3 Neutrinos Confinados

Os neutrinos são partículas de carga nula, como o nome sugere, cujas massas aproximam-se muito de zero. Estas partículas, juntamente com os e^- , μ e τ , formam um grupo de

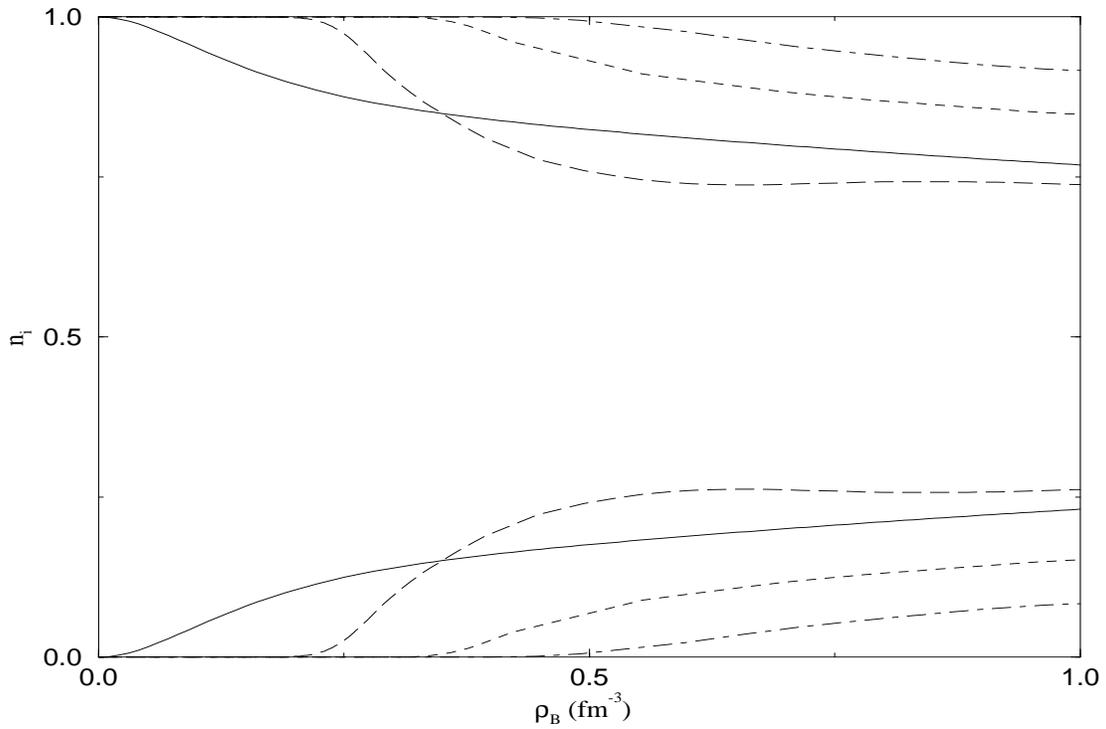


Fig. 5.1: Fração de nêutrons (linhas superiores) e prótons (linhas inferiores) em equilíbrio- β (linha cheia), $Y=0.75$ (linha longo-tracejada), $Y=0.5$ (linha tracejada) e $Y=0.25$ (linha ponto-tracejada).

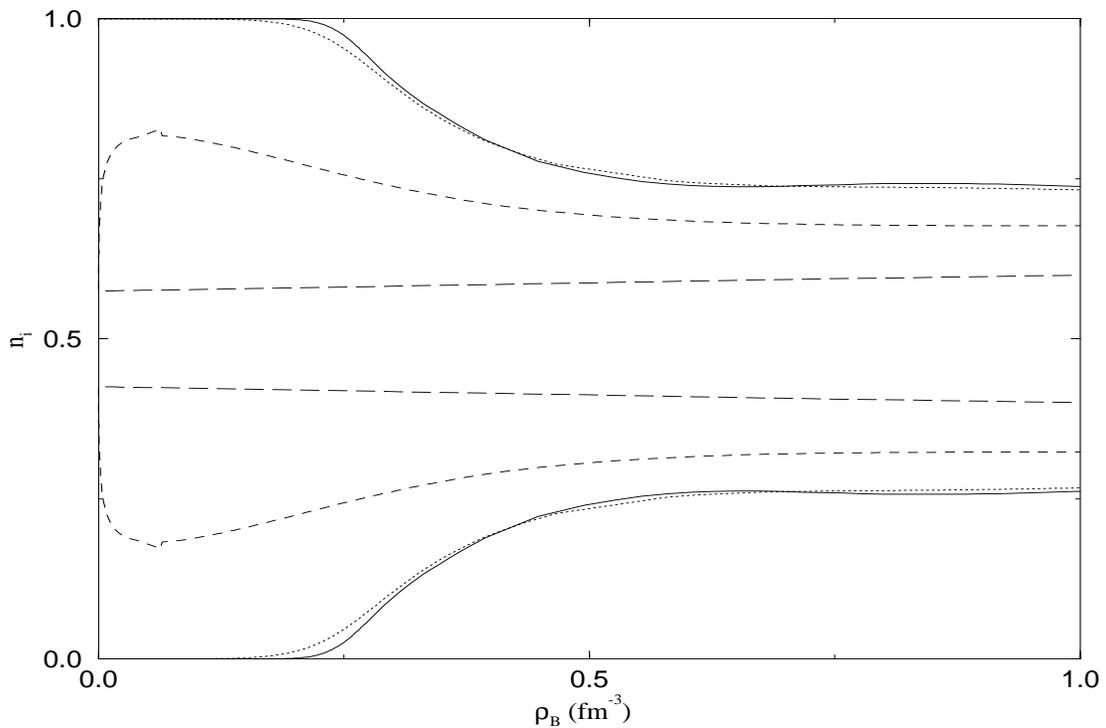


Fig. 5.2: Fração de nêutrons (linhas superiores) e prótons (linhas inferiores) em uma fração $Y=0.75$ para $T=10$ MeV (linha cheia), $T=20$ MeV (linha pontilhada), $T=100$ MeV (linha tracejada) e $T=200$ MeV (linha longo-tracejada).

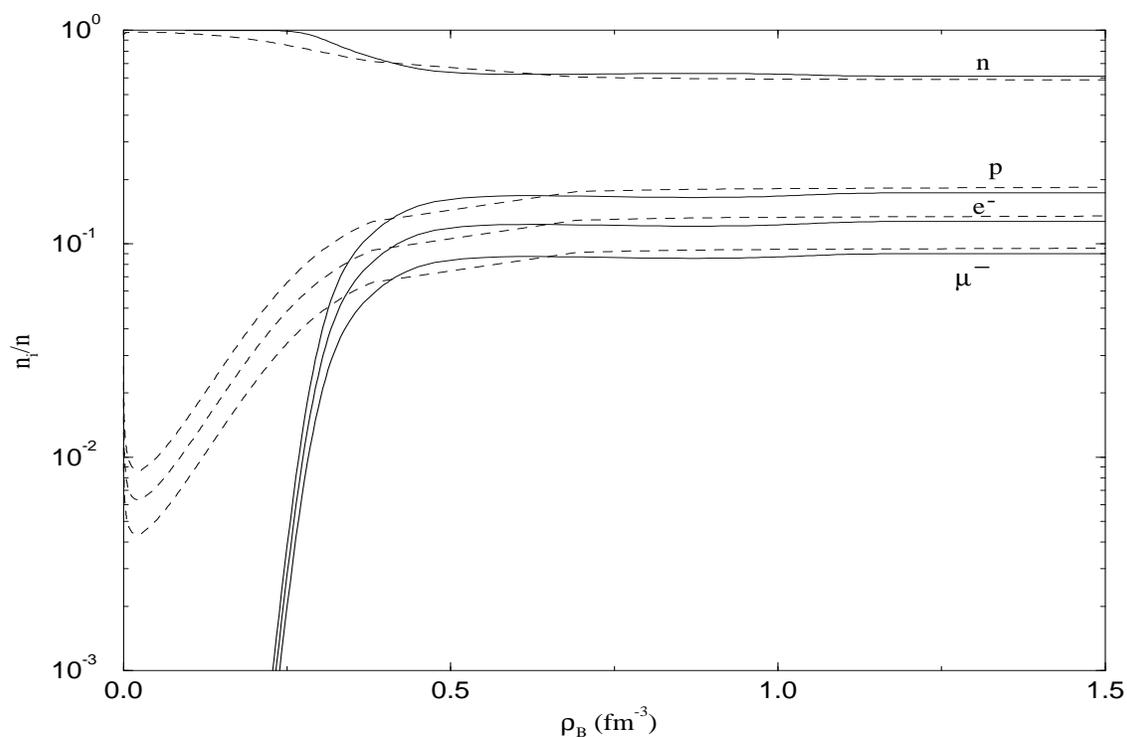


Fig. 5.3: Razão de densidades de nêutrons, prótons, elétrons e múons, para uma fração $Y=0.7$, em $T=10\text{MeV}$ (linhas sólidas) e $T=50\text{MeV}$ (linhas tracejadas), para o modelo de Walecka.

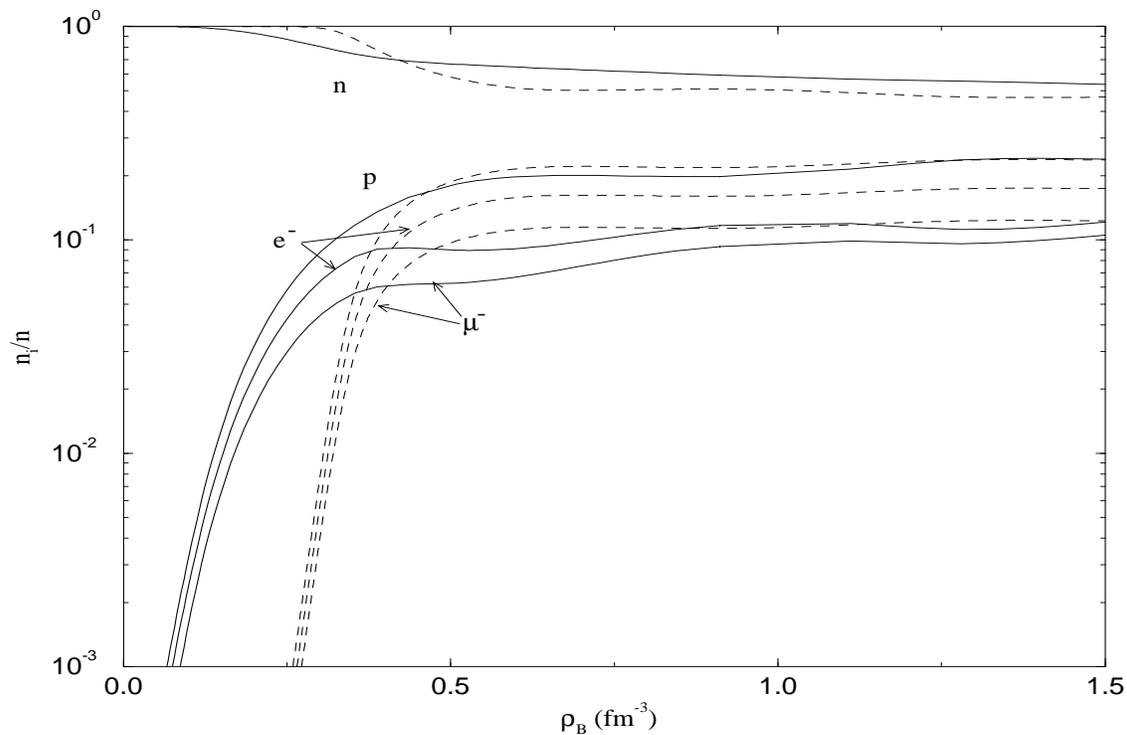


Fig. 5.4: Razão de densidades de nêutrons, prótons, elétrons e múons, em $T=10\text{MeV}$, para o modelo ZM (linha sólida) e para o modelo não-linear (linha tracejada).

partículas elementares, os léptons. Os léptons interagem com a matéria através das forças gravitacional, eletromagnética e fraca. Entretanto, como os neutrinos são partículas de carga nula e massas que podem ser consideradas nulas em um modelo efetivo, devem interagir com a matéria apenas através da força fraca.

Uma propriedade importante dos neutrinos constitui-se na *transparência* de matéria. Estas partículas possuem uma seção de choque pequena, sendo capazes de atravessar nosso planeta sem que praticamente nenhuma colisão ocorra. Entretanto, o interior de estrelas compactas apresentam densidades elevadíssimas, sendo capaz de confinar os neutrinos em seu interior [45]. Estes neutrinos, que foram gerados nos processos de neutronização do núcleo de ferro de uma estrela, são os responsáveis pelo posterior resfriamento de uma estrela protoneutrônica.

A figura 5.5 demonstra a distribuição de partículas no interior de uma estrela proto-neutrônica com neutrinos confinados. A presença de neutrinos também eleva o valor da massa máxima da estrela em aproximadamente $0.25M_{\odot}$, comparado ao valor sem neutrinos. Este resultado é válido para todos os modelos. Isto acontece porque a presença de neutrinos modifica a equação de estado da matéria nuclear, tornando-a mais rígida e, conseqüentemente, elevando a massa máxima da estrela de nêutrons.

5.4 Soluções das Equações TOV

As soluções das equações TOV são apresentadas para diferentes temperaturas e razões entre potenciais químicos de prótons e nêutrons. Neste caso, podemos observar que uma grande variação na razão entre os potenciais químicos (0.5 - 0.75) resulta em uma pequena variação na massa máxima final da estrela protoneutrônica. As soluções para diferentes frações de potenciais químicos estão apresentadas nas figuras 5.6 e 5.7, sendo apresentadas para diferentes temperaturas na figura 5.8

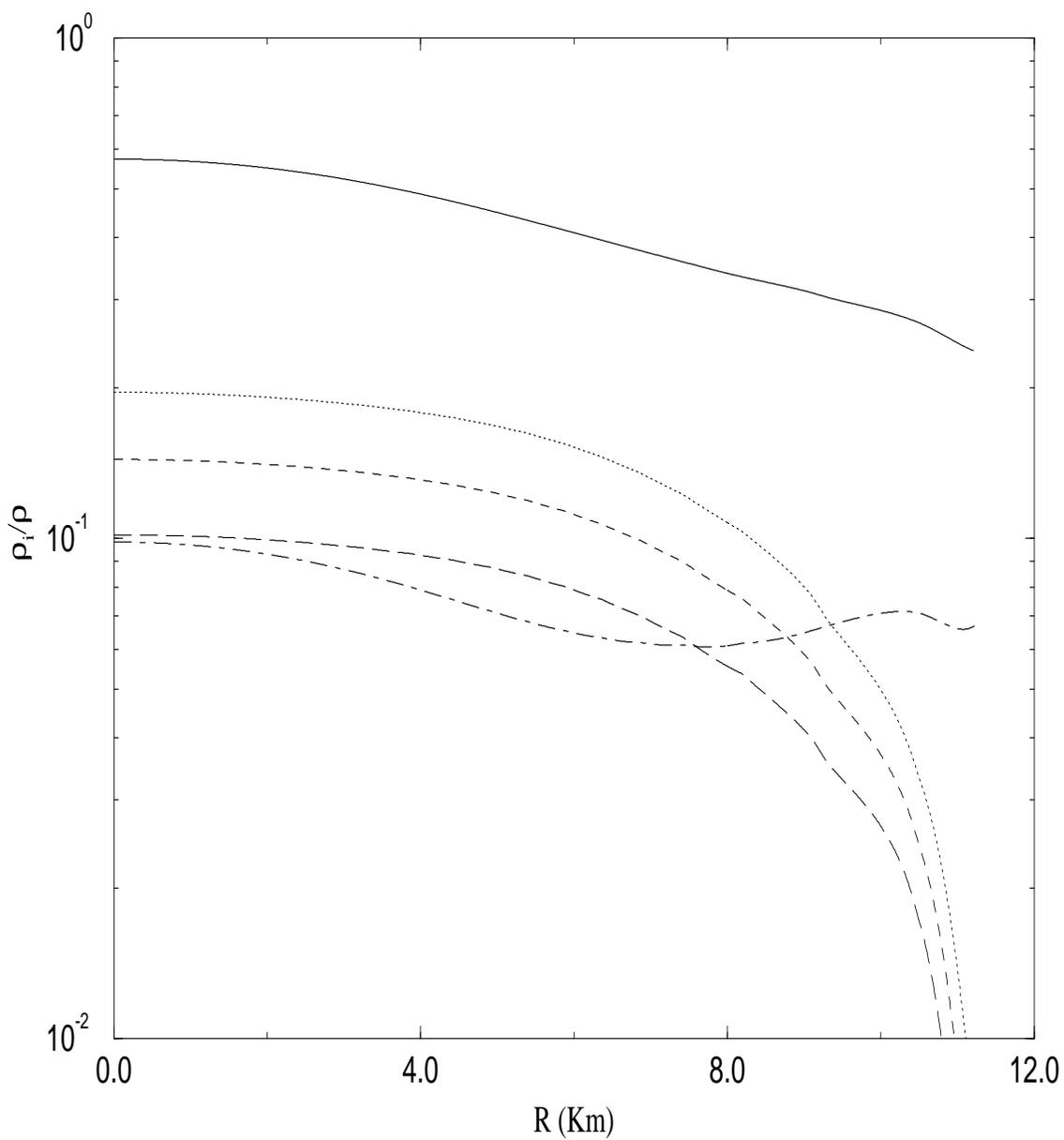


Fig. 5.5: Distribuição radial de nêutrons (linha sólida), prótons (linha pontilhada), elétrons (linha tracejada), múons (linha longo-tracejada) e neutrinos (linha ponto-tracejada) em uma estrela protoneutrônica, com temperatura de 10 MeV.

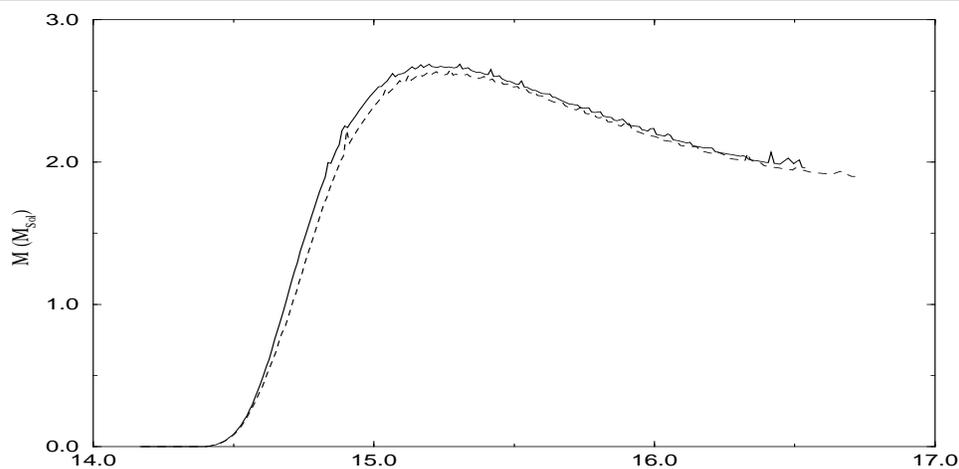


Fig. 5.6: Solução das equações TOV para $T=10$ MeV e $Y=0.5$ (linha cheia) e $Y=0.75$ (linha tracejada).

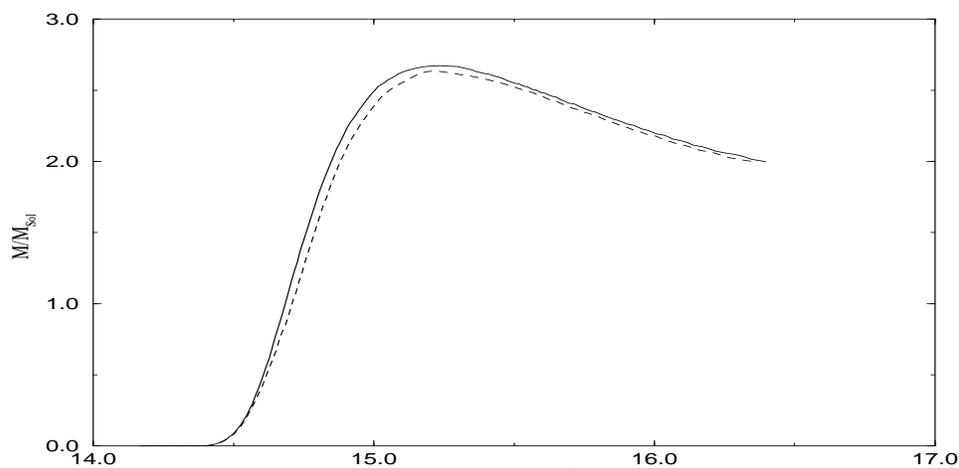


Fig. 5.7: Solução das equações TOV para $T=20$ MeV e $Y=0.5$ (linha cheia) e $Y=0.75$ (linha tracejada).

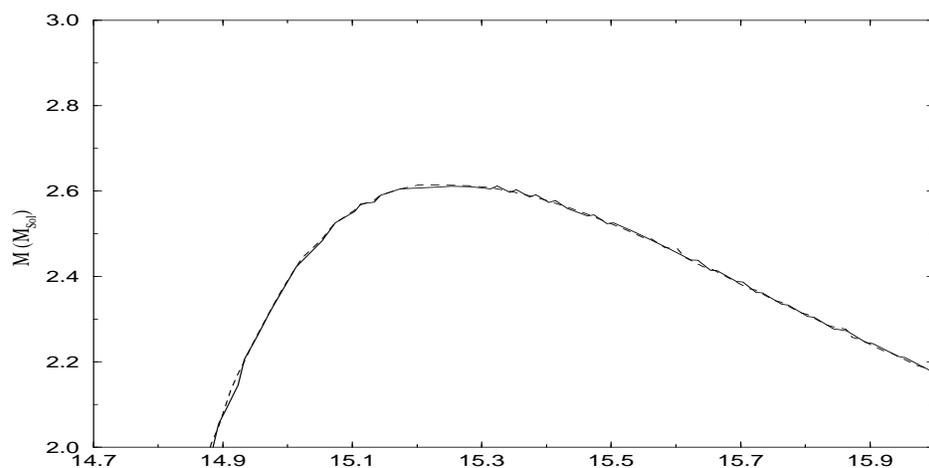


Fig. 5.8: Solução das equações TOV para $Y=0.75$ e $T=10$ MeV (linha cheia) e $T=20$ MeV (linha tracejada).

Capítulo 6

Matéria de Quarks

Nos capítulos anteriores deste trabalho desenvolvemos um estudo sobre a matéria nuclear, desconsiderando a presença dos graus de liberdade dos quarks e glúons que constituem os hádrons. Em um tratamento a baixas densidades, esta formulação é perfeitamente válida. Entretanto, o interior de uma estrela de nêutrons apresenta uma densidade que pode ser comparada à densidade da transição de fase entre hádrons e quarks, tornando-se necessário, neste regime, levar-se em consideração estes graus de liberdade e sua influência sobre a estrutura da matéria e da estrela.

6.1 Introdução

Os campos dos quarks descrevem partículas de spin-1/2, que possuem propriedades muito peculiares. Os quarks são partículas que aparecem na natureza como constituintes dos hádrons, sejam mésons ($q\bar{q}$) ou bárions (qqq)¹. Algumas das propriedades dos seis sabores² dos quarks estão descritas na tabela abaixo.

Sigla	Sabor	Carga (e)	Massa (MeV)
u	up	2/3	3
d	down	-1/3	5
s	strange	-1/3	150
c	charm	2/3	1500
b	bottom	-1/3	5000
t	top	2/3	$\sim 10^5$

Tab. 6.1: Descrição de propriedades dos quarks.

A *Cromodinâmica Quântica* é a teoria fundamental da interação forte. Este nome, *Cromodinâmica*, provém do estudo das componentes de cor da função de onda dos quarks. Nas estruturas de prótons (uud) ou nêutrons (udd), não existe nenhum problema aparente quanto ao princípio de exclusão de Pauli. Entretanto, existem hádrons compostos por três quarks do mesmo sabor, por exemplo a partícula delta, Δ^{++} (uuu). Neste caso, podemos gerar uma função de onda com spin positivo e outra com spin negativo, restando-nos um

¹ q =quark, \bar{q} =anti-quark

² Cada tipo diferente de quark é denominado de sabor.

quark com a mesma orientação de spin de algum dos outros dois quarks. Surge então a função de onda de cor, onde todos os quarks possuem uma cor verde, vermelha ou azul, restando aos anti-quarks, as respectivas anti-cores. Utilizando a teoria das cores, onde ao combinarmos todas as cores do espectro geramos a cor branca, os hádrons não apresentam a componente da função de onda de cor, por serem compostos por três cores distintas ou por um par de cor e anti-cor. Desta forma o princípio de Pauli é plenamente respeitado.

Um estudo sobre o comportamento dos quarks deve incorporar dois aspectos básicos de sua fenomenologia: liberdade assintótica e confinamento. A liberdade assintótica implica em uma constante de acoplamento da interação forte que diminui quando estes aproximam-se. Entretanto, o confinamento implica em um potencial crescente à medida em que os quarks se afastam, impedindo que se separem. Desta forma, torna-se impossível encontrar quarks livres no universo.

6.2 Modelos da QCD

Assim como na hadrodinâmica quântica, existem diversos modelos capazes de descrever algumas das principais propriedades dos quarks. Escolhemos um modelo baseado em uma formulação lagrangeana, semelhante aos modelos estudados até então no setor hadrônico. O lagrangeano da QCD está descrito por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{i}{2}g\lambda^a A_\mu^a)]\psi - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^a\mathcal{F}^{a\mu\nu}, \quad (6.1)$$

onde ψ representa o campo dos quarks, A_μ^a representa o campo dos glúons e λ^a são as matrizes de Gell-Mann.

Neste formalismo apresentamos os quarks como partículas de massa nula³, retirando da densidade lagrangeana um termo

$$\mathcal{L}_{massa} = -\bar{\psi}\underline{M}\psi, \quad (6.2)$$

onde \underline{M} representa a matrix unitária, nos índices de cor,

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \underline{m} & 0 \\ 0 & \underline{m} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Devido à grande complexidade contida na teoria fundamental da cromodinâmica, foi desenvolvido no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) um modelo conhecido como **Modelo de Sacola**, onde os quarks apresentam-se livres dentro de uma *sacola* de raio determinado, anulando a função de onda dos quarks em seu exterior. Este modelo está descrito a partir da densidade lagrangeana 6.4.

$$\mathcal{L}_{MIT} = [\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi) - B]\Theta_V(x) - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\Delta_s \quad (6.4)$$

³ No estudo da equação de estado, os quarks *up* e *down* podem ser tratados como partículas de massa nula, uma vez que suas massas são desprezíveis frente às energias relacionadas às massas dos hádrons.

onde B representa a constante da sacola, determinando seu raio. A constante de sacola está relacionada com a diferença de energia e pressão entre o sistema composto pelos quarks e seu exterior. O graus de liberdade dos glúons não foram considerados.

Aplicando, à densidade lagrangeana, as equações de Euler-Lagrange, como já foi feito para a matéria nuclear, obtemos:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0, \quad (6.5)$$

dentro da sacola, e

$$i\gamma^\mu n_\mu \psi = \psi, \quad (6.6)$$

na superfície da sacola. Isto significa que a equação de Dirac somente pode ser analisada no interior da sacola, onde os quarks estão confinados. Uma condição de contorno é introduzida através da eq.6.6.

A densidade lagrangeana do MIT completa, onde os quarks são tratados como partículas massivas e os termos de acoplamento entre quarks e glúons são incorporados é definida como:

$$\mathcal{L}_{MIT} = [\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - igL^a V_\mu^a) \psi - \bar{\psi} m \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - B] \Theta_V(x) - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \Delta_s, \quad (6.7)$$

onde g representa o acoplamento dos glúons aos quarks, V_μ^a representa o campo dos glúons e a=1,2,...8 representa os diferentes glúons da interação.

6.3 Equação de Estado

A equação de estado para a matéria de quarks é determinada de forma análoga àquela na qual determinamos as equações de estado da matéria nuclear para os diferentes modelos apresentados. Trabalhamos com duas aproximações distintas: uma aproximação onde T=0 e m≠0 para descrever o comportamento da matéria de quarks e outra com T≠0 e m=0 para descrever a transição entre um sistema de hádrons e o plasma de quarks e glúons desenvolvido a altas densidades e temperaturas.

6.3.1 Temperatura Nula

Para a descrição da matéria nuclear à temperatura nula obtemos as seguintes expressões:

$$\rho_B = \sum_f \frac{k_f^3}{3\pi^2}, \quad (6.8)$$

para a densidade bariônica,

$$\epsilon = B + \sum_f \frac{3}{4\pi^2} [E_f k_f (E_f^2 - \frac{1}{2} m_f^2) - \frac{1}{2} m_f^4 \ln(\frac{E_f + k_f}{m_f})], \quad (6.9)$$

para a densidade de energia do gás de quarks, e

$$p = -B + \sum_f \frac{1}{4\pi^2} [E_f k_f (E_f^2 - \frac{5}{2} m_f^2) + \frac{3}{2} m_f^4 \ln(\frac{E_f + k_f}{m_f})]. \quad (6.10)$$

para a pressão de degenerescência deste gás. Nestas expressões $E_f = \sqrt{m_f^2 + k_f^2}$, e \sum_f representa a soma sobre os diferentes sabores de quarks a serem incluídos na equação de estado.

O estudo da equação de estado da matéria de quarks à temperatura nula será aplicado nas equações TOV, onde analisamos a existência de estrelas compostas, totalmente ou em parte, por matéria de quarks livres.

6.3.2 Temperatura Finita

A equação de estado da matéria de quarks para temperaturas diferentes de zero é desenvolvida na aproximação onde $m=0$. Os quarks são tratados como partículas de massa nula, uma vez que consideramos apenas os quarks *up* e *down*, cujas massas são, respectivamente, 5 e 7 MeV.

Obtemos expressões similares às obtidas à temperatura nula (eqs.6.8, 6.9 e 6.10), incluindo de forma análoga ao estudo da matéria nuclear, distribuições de Fermi-Dirac. A densidade bariônica pode ser escrita através de

$$\rho_B = \sum_f \frac{1}{3} \frac{\gamma_f}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk [n_k(\mu) - \bar{n}_k(\mu)]; \quad (6.11)$$

expressamos a densidade de energia como

$$\epsilon = B + \sum_f \frac{\gamma_f}{2\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk [n_k(\mu) + \bar{n}_k(\mu)]; \quad (6.12)$$

e a pressão é representada pela equação

$$p = -B + \sum_f \frac{1}{3} \frac{\gamma_f}{2\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk [n_k(\mu) + \bar{n}_k(\mu)]; \quad (6.13)$$

onde $\gamma_f = 2_{spin} \times 3_{cor}$, representa a multiplicidade de spin e cor.

6.3.3 Conservação de Número Bariônico e Critério de Gibbs

A próxima etapa de nossa análise consiste em determinar de forma consistente as regiões onde os modelos nucleares e de quarks são válidos. Desta forma também determinaremos duas regiões distintas da equação de estado onde encontraremos a matéria nuclear ordinária e o plasma de quarks e glúons [46].

Para estabelecer de forma consistente esta transição, devemos respeitar algumas leis de conservação, como a conservação do número bariônico

$$N_q/3 + N_N = \text{constante}, \quad (6.14)$$

onde N_q é o número de quarks e N_N , o número de núcleons. Também devemos respeitar o critério de Gibbs para uma transição de fases que estabelece a região de coexistência de fases em

$$\begin{aligned} P_q &= P_N, \\ \mu_q &= \mu_N, \\ T &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Através do critério de Gibbs determinamos, na figura 6.1, a transição de fase que está representada na figura 6.2. Nesta figura podemos observar uma região de baixa energia composta por um líquido de matéria nuclear, uma fase de densidades intermediárias composta por matéria nuclear na fase gasosa, aparecendo, em altas densidades, uma fase onde os quarks apresentam-se livres [47]. Os dados obtidos na análise destas figuras nos permite criar um diagrama de fases, onde a transição para o plasma de quarks e glúons pode ser melhor observada (fig.6.3).

6.4 Soluções das Equações TOV

Aplicamos os resultados, obtidos no estudo da matéria de quarks, nas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, afim de determinarmos a estrutura interna de estrelas de quarks e de estrelas híbridas (estrelas compostas por núcleons e quarks) [48].

Para estudarmos as estrelas de quarks, trabalhamos com estrelas compostas pelos quarks *up*, *down*, *strange* e *charm*, além do elétron. Com isso devemos determinar as condições de equilíbrio químico e de cargas para estas partículas.

O equilíbrio químico está determinado através de

$$\begin{aligned} \mu_d &= \mu_u + \mu_e, \\ \mu_s &= \mu_d, \\ \mu_c &= \mu_u, \end{aligned} \quad (6.16)$$

enquanto o equilíbrio de cargas corresponde a

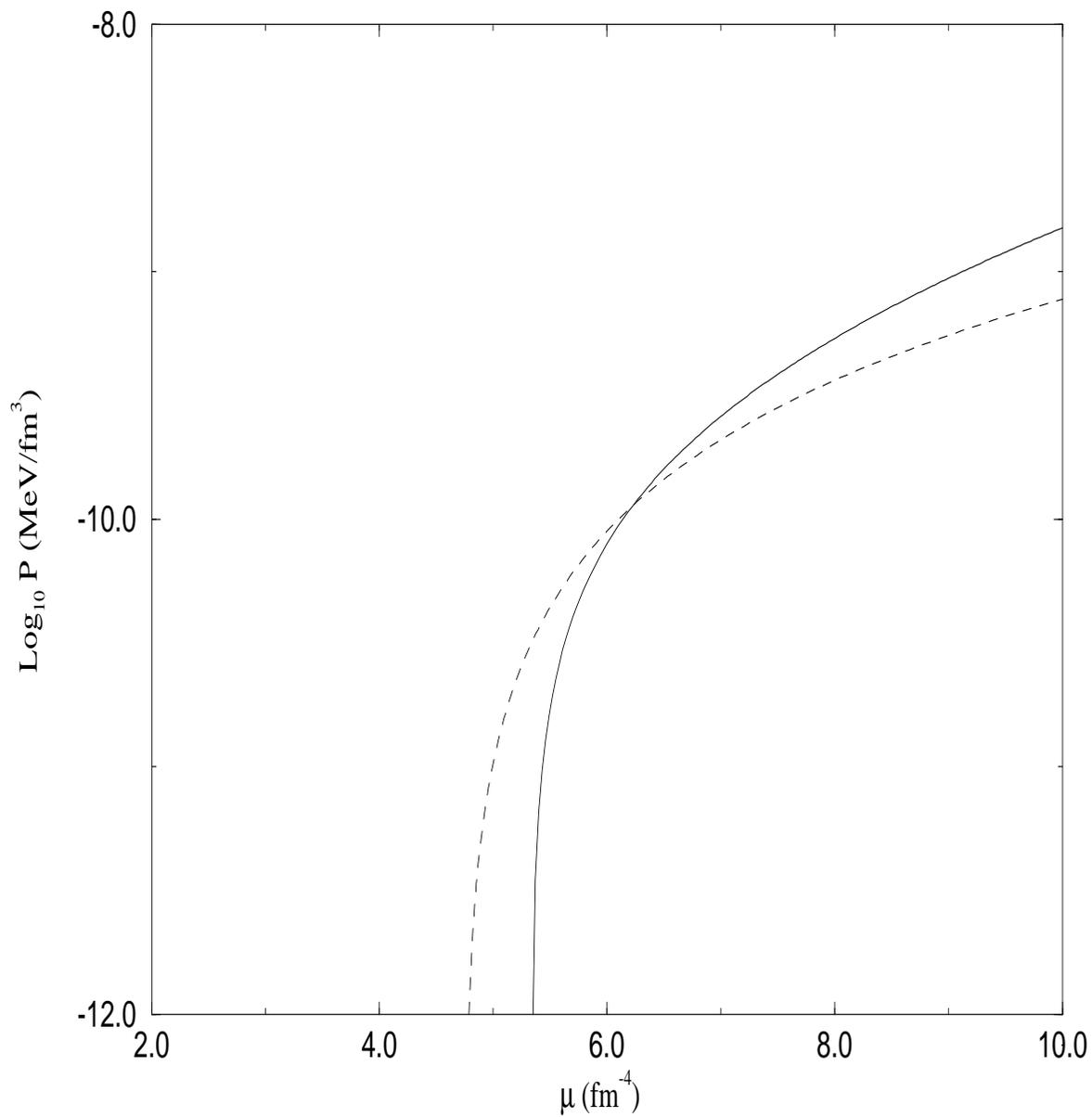


Fig. 6.1: Gráfico de pressão versus potencial químico, determinando a região de transição de fases através do critério de Gibbs.

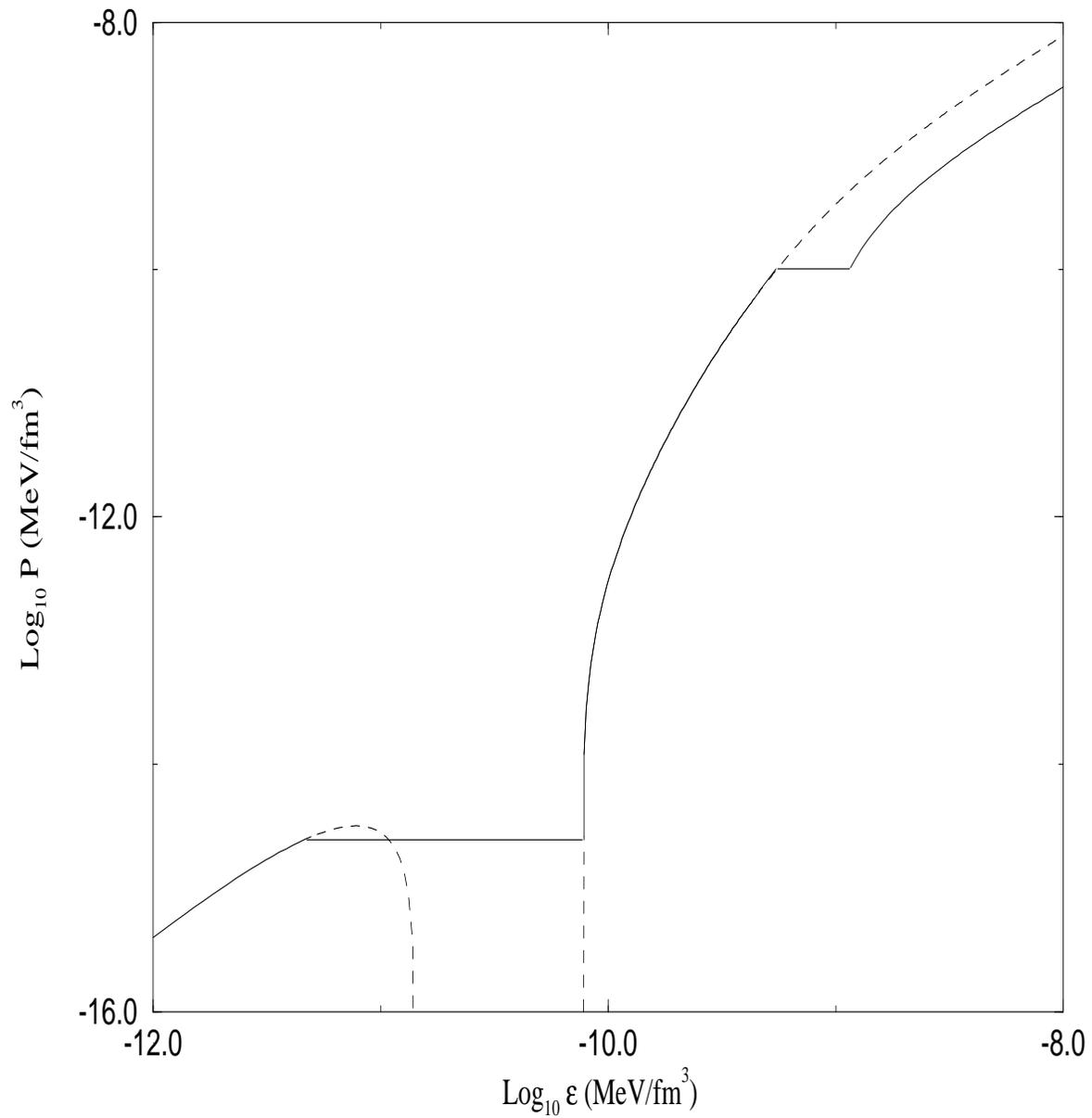


Fig. 6.2: Transição de fases entre a matéria nuclear e o plasma de quarks e glúons.

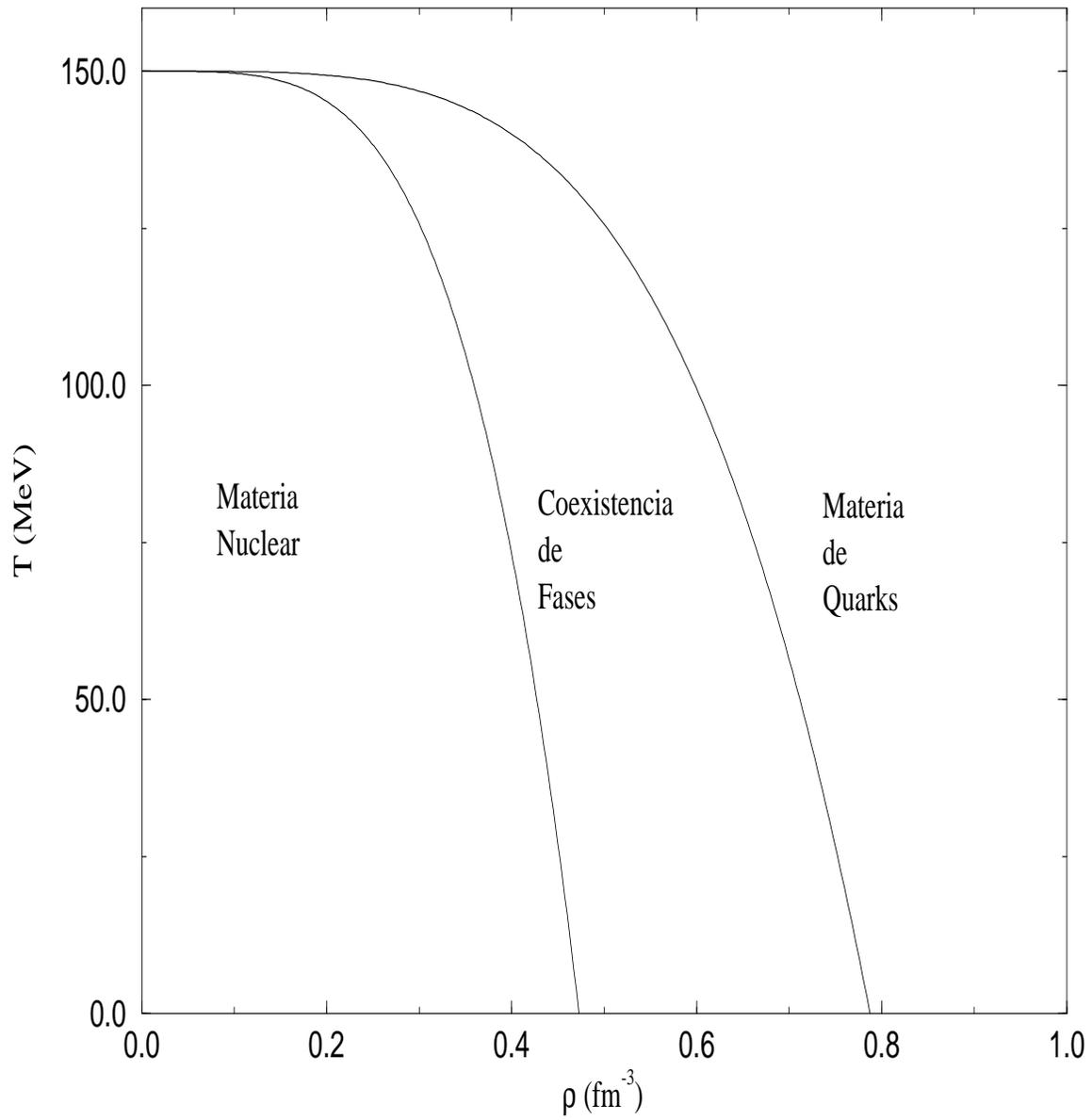


Fig. 6.3: *Diagrama de fases.*

$$q = \sum_f (q_f \frac{k_f^3}{\pi^2}) - \frac{k_e^3}{3\pi^2} = 0, \quad (6.17)$$

onde $k_i = \sqrt{\mu_i^2 - m_i^2}$.

Desta forma encontramos uma sequência de estrelas, com densidades centrais superiores às densidades encontradas em estrelas de nêutrons, cuja composição revela uma estrutura de quarks livres em seu interior. A figura 6.4 demonstra esta sequência de estrelas, enquanto a figura 6.5 mostra a estrutura interna de uma destas estrelas, compostas por quarks u, d, s e c, além do lépton e^- .

Estrelas de quarks mostram muita sensibilidade na escolha da constante da sacola, para a determinação de suas massas e raios. Como este valor não é determinado, a não ser por uma larga faixa de valores, devemos estudar também a dependência dos resultados de estrelas de quarks em função desta constante. Uma análise numérica dos resultados nos leva a equações capazes de determinar a massa máxima e o seu respectivo raio, em função da constante B, como:

$$\begin{aligned} M_{max} &= \frac{1.9638}{\sqrt{B_{60}}} M_{\odot}, \\ R_{M_{max}} &= \frac{10.712}{\sqrt{B_{60}}} km, \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde $B_{60} = \frac{B}{60}$. Em nosso trabalho variamos os valores da constante de sacola entre 100 e 150 MeV, obtemos a massa máxima de estrelas de quarks, respectivamente, entre 1.52 e 1.24 M_{Sol} .

Ainda estudamos a estrutura interna de estrelas compostas por um núcleo, preenchido com quarks livres, e por um envelope de nêutrons. Neste estudo, utilizamos apenas nêutrons como partículas nucleares e quarks *up* e *down*, sob a forma $2N_u = N_d$, estabelecendo o equilíbrio de cargas na estrelas híbrida. As figuras 6.6 e 6.7 apresentam as estruturas internas destas estrelas para diferentes modelos e densidades centrais. Observamos que, para o modelo não-linear, representado na figura 6.6, a linha pontilhada representa uma estrela composta apenas por nêutrons, enquanto a linha sólida representa uma estrela com um núcleo formado por quarks livres que se estende por cerca de 2,5 Km coberto por uma camada de nêutrons, formando uma estrela de 13 Km de raio. Ambas as estrelas possuem a mesma densidade central. Na figura 6.7, para o modelo de Walecka, apresentamos duas estrelas distintas, cujos núcleos de quarks estendem-se por 1,5 Km e 5 Km. Mesmo com densidades centrais muito próximas, estas estrelas estão separadas pelo ponto de massa máxima nas soluções das equações TOV, fazendo com que a estrela representada pela linha sólida corresponda a uma configuração não estável.

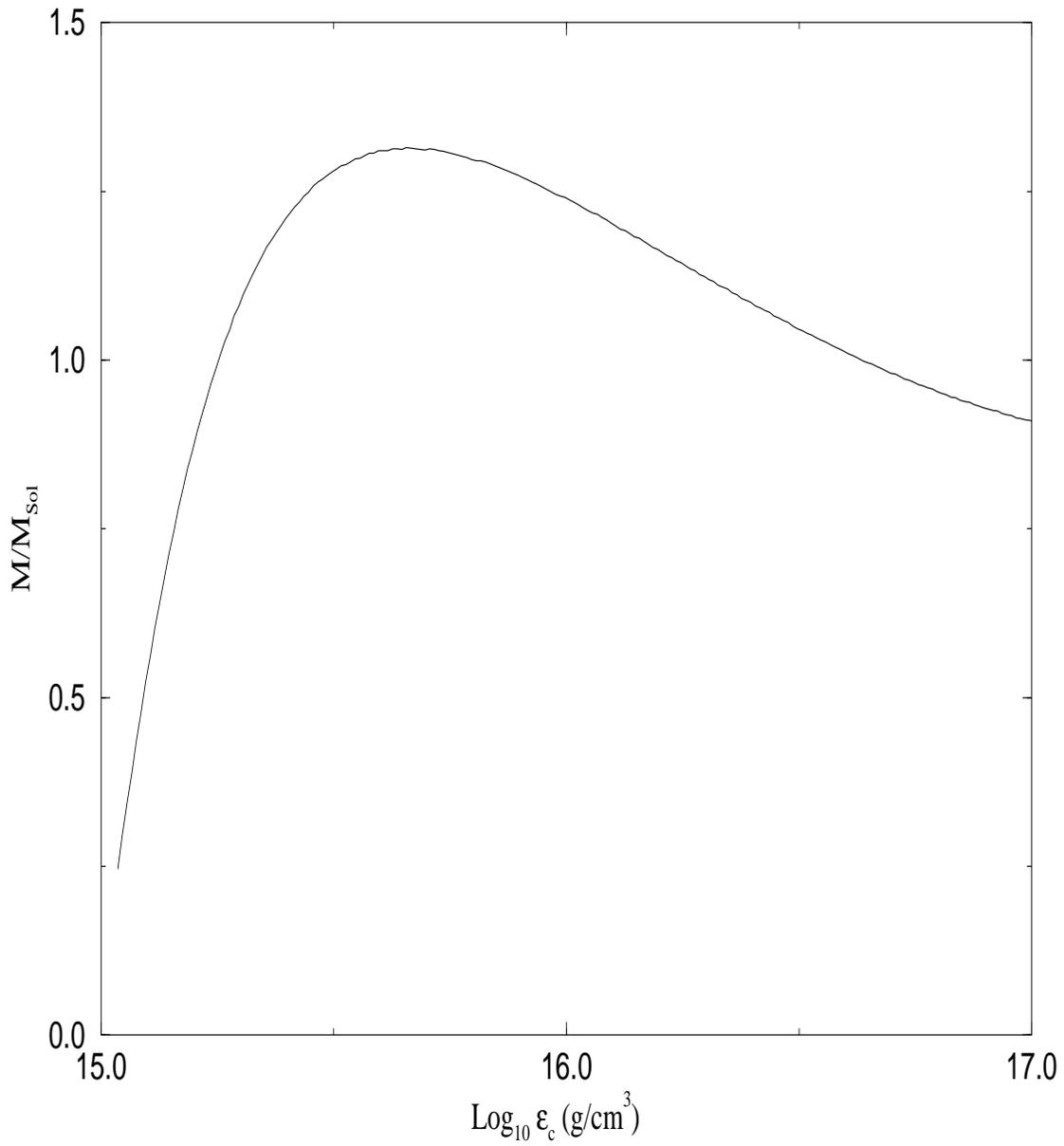


Fig. 6.4: Solução das equações TOV para uma estrela de quarks com $B = 131\text{MeV}$.

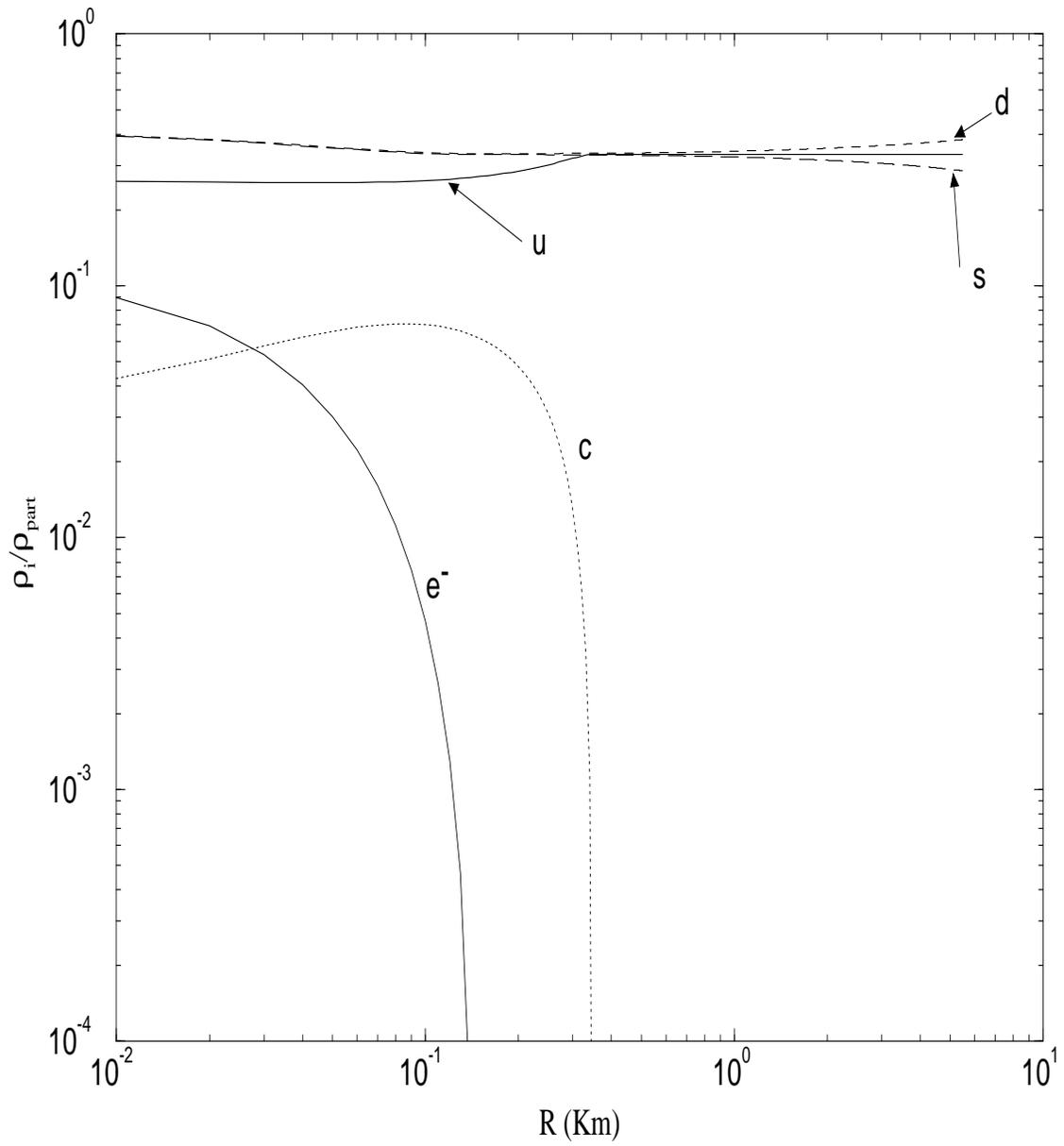


Fig. 6.5: Distribuição radial de partículas no interior de uma estrela de quarks.

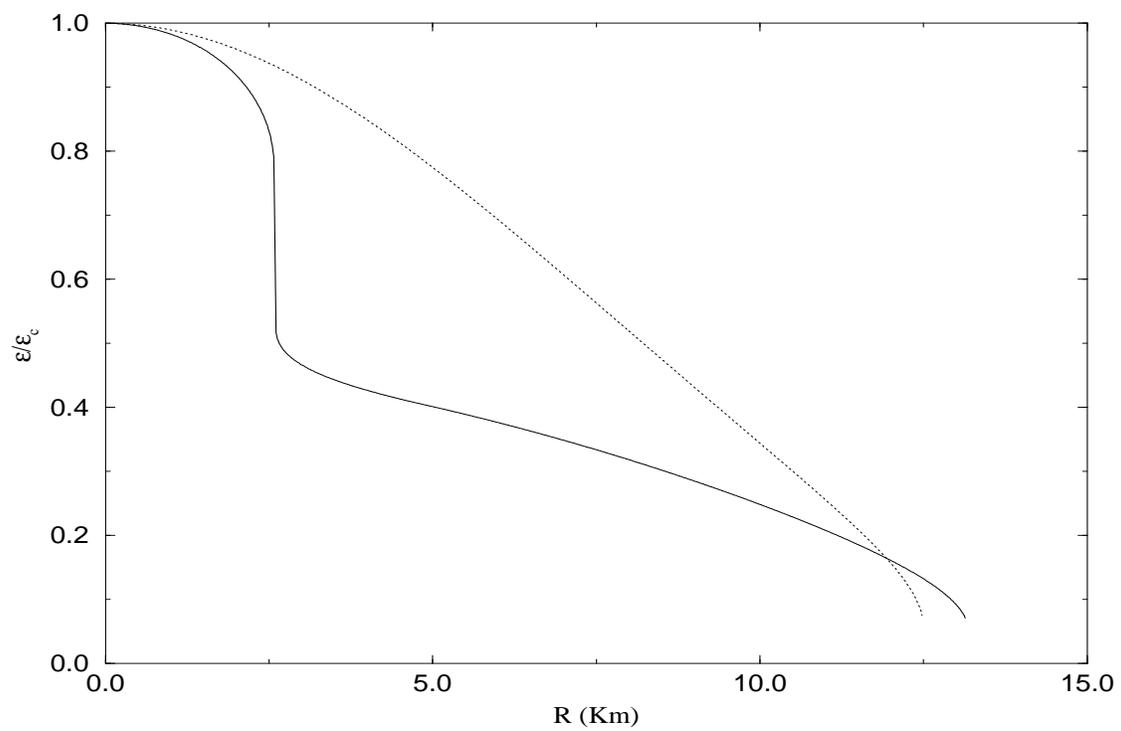


Fig. 6.6: *Caroço de quarks no interior de uma estrela de nêutrons para o modelo não-linear.*

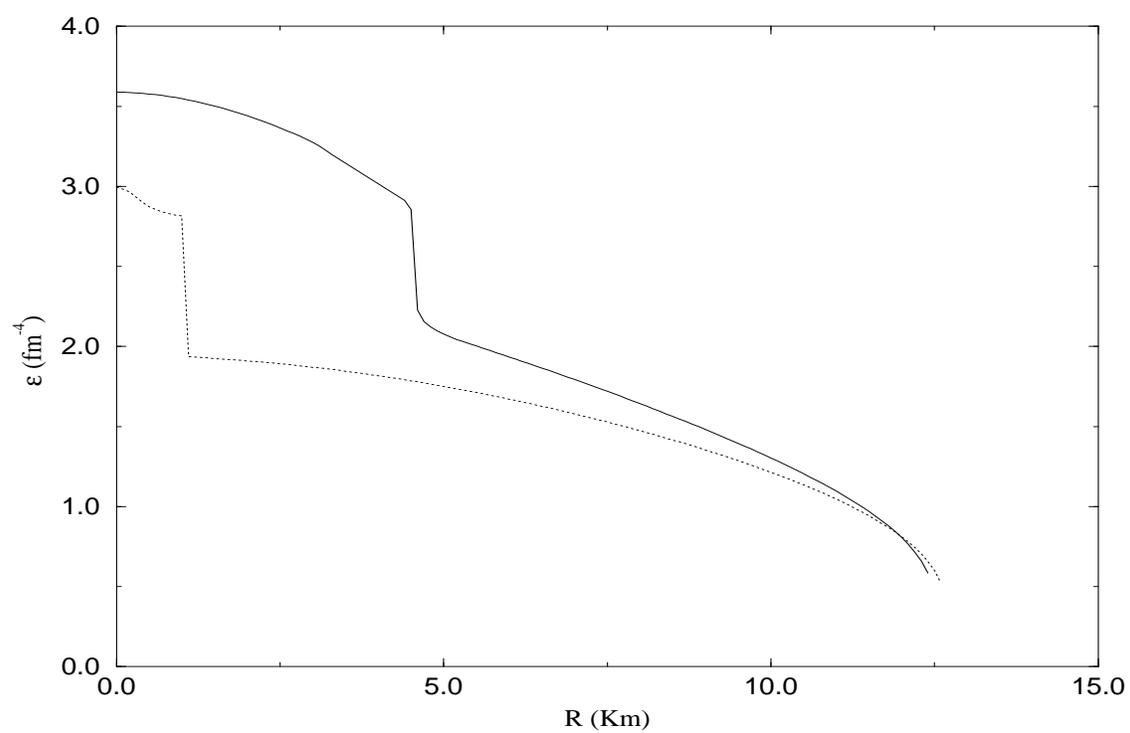


Fig. 6.7: *Caroço de quarks no interior de uma estrela de nêutrons para o modelo de Walecka.*

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Diversas linhas de estudo foram consideradas ao longo deste trabalho. A partir do estudo de modelos da hadrodinâmica quântica, em sua formulação para a matéria nuclear simétrica à temperatura nula, desenvolvemos os tópicos relacionados à temperatura finita e à assimetria de isospin, onde também incluímos a presença de campos leptônicos. Posteriormente incluímos os graus de liberdade de quarks e glúons afim de determinarmos uma equação de estado para a matéria nuclear em diferentes regimes de densidade e temperatura. Como principal aplicação deste trabalho escolhemos o estudo de estrelas compactas, aqui descritas por estrelas de nêutrons, protoneutrônica, estrelas de quarks e híbridas.

Uma análise individual de cada capítulo é feita a seguir.

7.1 Temperatura Finita

O estudo à temperatura finita demonstra claramente a transição de fase dos modelos relacionados, indicando as regiões em que predominam um gás ou um líquido de Fermi, bem como a região de coexistência de fases. É importante salientar neste tópico a transição de fase indicada no modelo de Walecka, na figura referente ao calor específico. Esta transição assemelha-se à transição de fase de um supercondutor que, conforme desenvolvemos anteriormente, deve ser compreendida como o acoplamento de quarks, formando os hádrons, que por sua vez são considerados como partículas de Cooper em um mar de quarks livres. Fica claro, através dos gráficos apresentados, que a inclusão da temperatura é vital no estudo das transições de fase, determinando os pontos críticos desta transição. No estudo de estrelas protoneutrônicas, a temperatura apresenta apenas pequenas variações nos valores de massa e raio. Uma maior variação destes valores é observada para temperaturas mais elevadas, limitadas pelos valores encontrados nestes objetos estelares.

7.2 Assimetria de Isospin

O estudo sobre o méson- ρ já é bastante desenvolvido, e a forma como determinamos o equilíbrio químico à temperatura finita difere dos estudos anteriores, realizados por outros autores. Uma determinação sobre as frações entre prótons e nêutrons é consistente, uma vez que o equilíbrio químico não é violado e mostra-se eficaz para o estudo de estrelas de nêutrons, onde pequenas variações entre esta fração não resultam em modificações significativas dos resultados. Isto deve-se ao fato de trabalharmos em um regime de altas densidades,

onde toda uma faixa de razões entre potenciais químicos levam a uma fração de densidades. A utilização da aproximação de Sommerfeld, em um tratamento ainda preliminar, porém mais consistente para este problema, é apresentada no apêndice B. Este tratamento já possui alguns resultados relevantes ao estudo da matéria nuclear assimétrica à temperatura finita, necessitando porém de alguns aprimoramentos.

7.3 Quarks e Glúons

Através da introdução dos graus de liberdade de quarks na equação de estado da matéria, definimos uma transição de fase, onde a matéria nuclear se decompõe em um plasma de quarks e glúons. Esta nova equação de estado da matéria influencia, conseqüentemente, nas soluções das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Novas soluções são determinadas, como para aquelas estrelas de quarks e para estrelas híbridas, cuja composição inclui a matéria de quarks e a matéria nuclear.

7.4 Perspectivas

Vários tópicos podem ser desenvolvidos a partir dos resultados obtidos nesta dissertação. A evolução da estrela protoneutrônica consiste em um dos principais tópicos de estudo. Esta evolução pode ser descrita, basicamente, através de duas formas distintas. A primeira delas, como aparece na literatura, se dá através de uma estrela de nêutrons já formada, onde a dinâmica do transporte de neutrinos em matéria densa é analisada. O problema encontrado em trabalhos atuais está na faixa de temperatura por eles utilizada. As regiões de temperatura utilizadas, e que descrevem a evolução de uma estrela de nêutrons já formada, são baixas. Nosso interesse reside no estudo da formação de estrelas de nêutrons a partir do resfriamento de estrelas protoneutrônicas. Outra possibilidade, de maior interesse, é a incorporação de um setor de força fraca diretamente na densidade lagrangeana do sistema. Esperamos realizar um estudo coerente que nos leve a resultados sobre a dinâmica de produção e emissão de neutrinos, bem como sobre a evolução de estrelas protoneutrônicas.

Outra linha de pesquisa, da qual já temos resultados parciais, consiste no estudo da rotação destas estrelas compactas. A propriedade de rotação é muito importante para realizarmos um estudo completo de estrelas de nêutrons. Resultados preliminares por nós realizados e não apresentados nesta dissertação indicam um aumento da massa máxima destas estrelas, bem como o aumento do raio máximo que podem atingir até 20% do valor inicial para estrelas estáticas. Estudos realizados por diferentes autores apresentam uma relação entre a variação no período de rotação, o enfraquecimento do campo magnético e o resfriamento das estrelas de nêutrons.

Com isso define-se uma linha de pesquisa que deve estudar o comportamento de uma estrela protoneutrônica, originada após a explosão de uma supernova e de seu posterior resfriamento, determinando propriedades estáticas globais e dinâmicas de uma estrela de nêutrons.

Apêndice A

Notação e Fatores de Conversão

Durante este trabalho avaliamos as expressões em unidades onde $G = c = 1$, determinando novas unidades de medida. Por sua vez, as unidades naturais de medida podem ser reestabelecidas através dos seguintes fatores de conversão:

$$\begin{aligned} 1s &= 2.9979 \cdot 10^{10} \text{ cm}, \\ 1g &= 7.4237 \cdot 10^{-29} \text{ cm}, \\ 1s^{-2} &= 1.4988 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3, \\ 1erg = 1gcm^2s^{-2} &= 8.2601 \cdot 10^{-50} \text{ cm}, \\ 1g/cm^3 &= 7.4237 \cdot 10^{-19} \text{ km}^{-2}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Outras unidades úteis a serem consideradas são:

$$\begin{aligned} MeV &= 1.6022 \cdot 10^{-6} \text{ erg} = 1.3234 \cdot 10^{-55} \text{ cm}, \\ &= 1.7827 \cdot 10^{-27} \text{ g} = 1.1605 \cdot 10^{10} \text{ K}, \\ hc &= 197.33 \text{ MeV fm}, \\ e^2 &= 1.4400 \text{ MeV fm}, \\ MeV/fm^3 &= 1.7827 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ao trabalharmos com a equação de estado da matéria nuclear frequentemente utilizamos unidades onde $h = c = 1$, definindo os seguintes fatores de conversão:

$$\begin{aligned} 1/fm^4 &= 3.5178 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3, \\ &= 3.1616 \cdot 10^{35} \text{ dinas/cm}^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Combinando as unidades para utilizarmos $G = h = c = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} 1/fm^4 &= 2.6115 \cdot 10^{-4} \text{ /km}^2, \\ 1MeV/fm^3 &= 1.3234 \cdot 10^{-6} \text{ /km}^2. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Desta forma podemos desenvolver diretamente o trabalho sobre a equação de estado da matéria nuclear e aplicá-la nas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, determinando a massa de uma estrela de nêutrons em unidades de massas solares. Por exemplo

$$M_{\odot} = 1.4766 \text{ km} = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g} = 1.116 \cdot 10^{60} \text{ MeV}. \quad (\text{A.5})$$

Também foi utilizada, neste trabalho, a mesma notação utilizada nas referências [1] e [26]. Relacionamos a seguir alguns aspectos principais relacionados a esta notação.

O tensor métrico é definido por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

e o quadrivetor covariante

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z). \quad (\text{A.7})$$

As derivadas parciais que aparecem ao longo do texto devem ser lidas como

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (\text{A.8})$$

e o vetor momentum linear

$$p^{\mu} = i\partial^{\mu} = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right). \quad (\text{A.9})$$

As matrizes de Pauli são descritas através de

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

As matrizes de Dirac respeitam a condição de anti-comutação

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

e estão definidas como

$$\gamma_i = \beta\alpha_i \quad \gamma^0 = \gamma_0 = \beta. \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

Aproximação de Sommerfeld

Uma forma alternativa para o estudo da matéria nuclear à temperatura finita pode ser encontrada na *aproximação de Sommerfeld* [49]. Esta aproximação baseia-se em uma expansão em série de Taylor no integrando das funções de densidade bariônica, densidade de energia e pressão. Sendo ela uma teoria de perturbação, sua validade se restringe ao limite de altas densidades e baixas temperaturas.

As altas densidades citadas são compatíveis com as densidades relacionadas a estrelas compactas. Já a temperatura deve variar até um máximo de 10 MeV e como vimos anteriormente, estrelas protoneutrônicas podem atingir até algumas dezenas de MeVs em seu interior.

Para apresentarmos a aproximação de Sommerfeld utilizaremos a função de distribuição representada por $f(\epsilon)$ e uma função genérica $H(\epsilon)$.

Com isso, expandimos a função $H(\epsilon)$ em torno do ponto $\epsilon = \mu$:

$$H(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{d\epsilon^n} H(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu} \frac{(\epsilon - \mu)^n}{n}. \quad (\text{B.1})$$

A partir de então, utilizamos a expressão acima para resolver o integrando de uma função como densidade de energia, pressão, etc, através de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (k_B T)^{2n} a_n \frac{d^{2n-1}}{d\epsilon^{2n-1}} H(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu}. \quad (\text{B.2})$$

Os coeficientes a_n são determinados por

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)} \left(-\frac{d}{dx} \frac{1}{e^x + 1} \right) dx. \quad (\text{B.3})$$

Desta forma obtemos o resultado genérico até terceira ordem

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 H'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 H'''(\mu) + O\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^6. \quad (\text{B.4})$$

Em particular obtemos para os modelos apresentados nesta dissertação os seguintes resultados, em primeira ordem, para a densidade bariônica, densidade de energia e pressão, respectivamente, também ilustradas na figura B.1 para o modelo de Walecka

$$\rho_B = \rho_{B0} + \frac{\gamma}{6} \left(\frac{k_B T}{k_F} \right)^2, \quad (\text{B.5})$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\gamma}{6} (k_B T)^2 \frac{k_F E_F + k_F^3}{2E_F}, \quad (\text{B.6})$$

$$p = p_0 + \frac{\gamma}{12} (k_B T)^2 \left(\frac{4k_F^3}{E_F} - \frac{k_F^5}{E_F^3} \right), \quad (\text{B.7})$$

onde ρ_{B0} , ϵ_0 e p_0 representam os resultados à temperatura nula. Na figura a seguir mostra-se o resultado da equação de estado obtida através da aproximação de Sommerfeld.

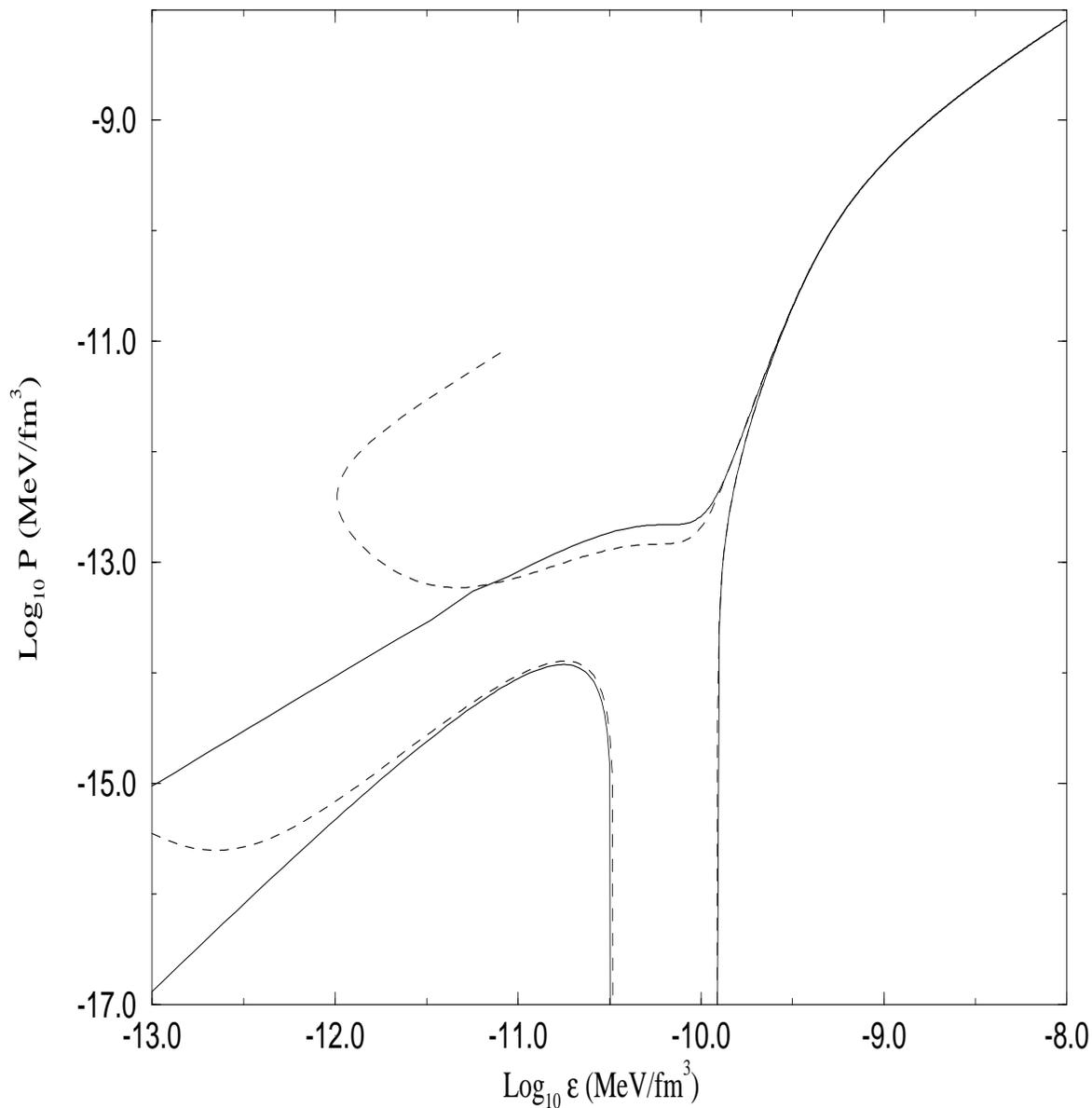


Fig. B.1: *As linhas sólidas representam os resultados exatos para $T=0\text{MeV}$ e $T=10\text{MeV}$, enquanto as linhas tracejadas representam os resultados para $T=1\text{MeV}$ e $T=10\text{MeV}$ na aproximação de Sommerfeld.*

Apêndice C

Teorema de Noether

O estudo de simetrias, em física, é essencial na medida em que, de acordo com o teorema de Noether, uma simetria está sempre associada a uma quantidade física conservada. Por exemplo, em um sistema que possui simetria esférica, o momentum angular é conservado.

Consideramos em particular uma mudança de fase em uma função ψ , onde α é uma constante:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x). \quad (\text{C.1})$$

Sendo esta uma transformação infinitesimal, obtemos

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = (1 + i\alpha)\psi; \quad (\text{C.2})$$

e da mesma forma,

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = (1 - i\alpha)\bar{\psi}. \quad (\text{C.3})$$

Observa-se que as densidades lagrangeanas dos modelos apresentados no capítulo 3 invariantes frente a esta transformação, que corresponde a uma simetria de translação. Consequentemente,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta\psi \right] = \partial [i\bar{\psi}\gamma^\mu \delta\psi] = 0 \quad (\text{C.4})$$

onde $\delta\psi = i\alpha\psi$, levando a conservação da corrente bariônica J_B^μ

$$\begin{aligned} \alpha \partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0, \\ \partial_\mu J_B^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Bibliografia

- [1] WALECKA, J. D. A theory of high condensed matter. *Annals of Physics*, New York, v. 83, n. 2, p. 491-529, Apr. 1974.
- [2] YUKAWA, H., *Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. Ser. 3*, v. 17, p. 48, 1935.
- [3] MUKERJEE, M., A Little Big Bang. *Sci. Am.*, v. 280, n. 3, p. 42-47, Mar. 1999.
- [4] NEGELE, J. W., The mean-field theory of nuclear structure and dynamics *Rev. Mod. Phys.*, Oct. 1981
- [5] BOGUTA, J., BODMER, A. R. Relativistic calculation on nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, Amsterdam, v. 292, n. 3, p. 413-428, Dec. 1977.
- [6] ZIMANYI, J., MOSZKOWSKI, S. A. Nuclear equation of state with derivative scalar coupling. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 42, n. 4, p. 1416-1421, Oct. 1990.
- [7] PRAKASH, M., BOMBACI, I., PRAKASH, M., ELLIS, P. J., LATTIMER, J. M. KNORREN, R. Composition and Structure of Protoneutron Star. *Phys. Rep.*, v. 280, p. 1-77, 1997.
- [8] CHODOS, A., JAFFE, R. L., JOHNSON, K., THORN, C. B., WEISSKOPF, V., New extended model of hadrons. *Phys. Rev. D*, v. 9, p. 3471, 1974.
- [9] TOLMAN, R. C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev*, New York, v. 55, n. 4, p. 364-373, Feb. 1939.
- [10] OPPENHEIMER, J. R., VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, New York, v.55, n. 4, p. 374-381, Feb. 1939
- [11] FETTER, A. L., WALECKA, J.D. Quantum theory of many-particle systems, New York: McGraw Hill, 1971.
- [12] FILHO, K. S. O., SARAIVA, M. F. O. *Astronomia e Astrofísica*, Porto Alegre: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.
- [13] CHANDRASEKHAR, S., Maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophys. J.*, New York, v.74, p. 81-82, Jul. 1931.
- [14] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology*, John Wiley, New York: 1972.

- [15] BAADE, W., ZWICKY, F. Supernovae and cosmic rays. *Phys. Rev.*, New York, v. 45, n. 1, p. 138, Jan. 1934.
- [16] CHADWICK, J. Possible existence of a neutron. *Nature*, London, v. 129, p. 312, Feb. 1932.
- [17] HEWISH, A., BELL, S. J., PIKINGTON, J. D. H., SCOTT, P. F., COLLINS, R. A. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, London, v. 217, p.709-713, Feb. 1968.
- [18] PACINI, F. Rotating neutron stars, pulsars and supernova remnants. *Nature*, London, v. 219, p. 145-146, July 1968.
- [19] SHAPIRO, S. L., TEUKOLSKY, S. A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, New York: John Wiley,1983.
- [20] GLENDENNING, N. K. Neutron stars are giant hypernuclei? *Astrophys. J.*, Chicago, v. 293, n. 2, p. 470-493, June 1985.
- [21] BANERJEE, B., GLENDENNING, N. K., GYULASSY, M. Pion condensation in a relativistic field theory consistent with bulk properties of nuclear matter. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 361, p. 326-354, Feb. 1981.
- [22] GLENDENNING, N. K. Compact stars, New York: Springer-Verlag, 1997.
- [23] KASPI, TAYLOR, RYBA, *Astrophys. J.*, v. 428, p. 713, 1994.
- [24] RHOADES, C. E., RUFFINI, R. Maximum mass of a neutron star. *Phys. Rev. Lett.*, NewYork, v. 32, n. 6, p. 324-327, Feb. 1974.
- [25] TAURINES, A. R., MARRANGHELLO, G. F., VASCONCELLOS, C. A. Z., Equation of State in Derivative Coupling Models. *Proceedings of the International Workshop on Hadron Physics*, World Scientific, Singapore, p.291-293, 1998.
- [26] BJORKEN, J.D., DRELL, S. D., Relativistic quantum fields, New York: McGraw Hill, 1965.
- [27] CHIAPPARINI, M., DELFINO A., MALHEIRO, M., GATTONE, A. Finite nuclei in a relativistic mean-field model with derivative couplings. *Z. Physik A*, Heidelberg, v. 357, p. 47-52, Feb. 1997.
- [28] FURNSTAHL, R. J., PERRY, R. J., SEROT, B. D. Two loop corrections for nuclear matter in the Walecka model. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 40, n. 1, p. 321-353, July 1989.
- [29] CHIN, S. A., Relativistic many-body theory of high-density matter *Ann. Phys.*, New York, v. 108, p. 301-367, 1977.
- [30] GLENDENNING, N.K. Vacuum polarization effects on nuclear matter and neutrons stars. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 493, n. 3/4, p. 521-548, Mar. 1989.

- [31] WEINBERG, S. The quantum theory of fields, vol. I: Foundations, Cambridge: University of Cambridge Press, 1995.
- [32] KOEPF, W., SHARMA, M. M., RING, P. Scalar coupling in relativistic mean field theory and properties of nuclei and nuclear matter. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 533, n. 1, p. 95-112, Oct. 1992.
- [33] DELFINO, A., CHIAPPARINI, M., MALHEIRO, M., BELVEDERE, L. V., GAT-TONE, A. O. Derivative-coupling models and the nuclear-matter equation of state. *Z. Physik A*, Heidelberg, v.355, p. 145-150, Jul. 1996.
- [34] SEROT, B. D., WALECKA, J. D. , Advances in Nuclear Physics, New York: Plenum Press, 1986.
- [35] GLENDENNING, N. K., WEBER, F., MOSZKOWSKI, S. A. Neutron stars in the derivative coupling model. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 45, n. 2, p.844-855, Feb. 1992.
- [36] DELFINO, A. COELHO, C. T. MALHEIRO, M. Relativistic nuclear matter with a alternative derivative coupling models. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 51, n. 4, p. 2188-2195, Apr. 1995; Nuclear matter properties for modified Zimanyi-Moszkowski models, *Phys. Lett. B*, Woodbury, v. 345, p. 361-366, Feb. 1995.
- [37] NEGELE, J. W., VAUTHERIN, D. Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nuclear Phys. A*, Amsterdam, v. 207, n. 2, p. 298-320, Jun. 1973.
- [38] WALECKA, J. D. Theoretical nuclear and subnuclear physics. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [39] MARRANGHELLO, G. F., VASCONCELLOS, C. A. Z., Nuclear Matter Equation of State at Finite Temperature. *XXII Reunião de Trabalho de Física Nuclear no Brasil*, 1999. (Aceita para publicação.)
- [40] THEIS, J., GRAEBNER, G., BUCHWALD, G., MARUHN, J., GREINER, W., STÖCKER, H., POLONYI, J., Phase transition of the nucleon-antinucleon plasma in a relativistic mean-field theory. *Phys. Rev. D*, v. 28, n. 9, p. 2286-2290, Nov. 1983.
- [41] MALHEIRO, M., DELFINO A., COELHO, C. T. Phase transition in warm nuclear matter with alternative derivative coupling models. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 58, n. 1, p. 1-7, Jul. 1998.
- [42] QIAN, Z., SONG, H., SU, R., Thermodynamical properties of relativistic nuclear matter with derivative scalar coupling. *Phys. Rev. C*, v. 48, n. 1, p. 154-158, Jul. 1993.
- [43] VON WEIZSACKER, C. F. Theory of nuclear mass. *Z. Physik*, Heidelberg, v. 96, n. 7/8, p. 431-458, Sept. 1935.

- [44] MARRANGHELLO, G. F., VASCONCELLOS, C. A. Z., Hot and Flowing Asymmetric Nuclear Matter. *Proceedings of the International Workshop on Hadron Physics*, World Scientific, Singapore, p. 429-432, 2000.
- [45] CHIAPPARINI, M., RODRIGUES, H., DUARTE, S. B., Neutrino Trapping in Nonstrange Dense Stellar Matter. *Phys. Rev. C*, v. 54, p. 936-941, 1996.
- [46] CLEYMANS, J. et al. Quarks and gluons at high temperatures and densities. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 130, n. 4, p. 217-292, Jan. 1986.
- [47] MARRANGHELLO, G. F., VASCONCELLOS, C. A. Z., Phase transition from σ - ω models to QCD. *XXII Reunião de Trabalho de Física Hadrônica*, 2000.
- [48] ACHARYA, S., MAHARANA, L., MOHANTY, R., PANDA, P. K., Phase transition and hybrid star in non-linear sigma-omega model. *Int. J. Mod. Phys. E*, v. 8, p. 107-120, 1999.
- [49] ASHCROFT, N. W., MERMIN N. D. *Solid State Physics*, Philadelphia: Cornell University, 1976