

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Um Modelo de Sacola Difusa para a Matéria Nuclear

Alberto Sperotto dos Santos Rocha¹

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Cesar Augusto Zen Vasconcellos e do Prof. Dr. Fernando Gonçalves Pilotto e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre

2004

¹Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq).

aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Cesar A. Z. Vasconcellos pela oportunidade de desenvolver este trabalho. Também pela paciência e pela experiência que sempre procurou me passar, nestes sete anos de convivência, desde a Iniciação Científica.

Agradeço ao Prof. Fernando G. Pilotto, que durante todo o desenvolvimento do trabalho atuou como um verdadeiro amigo, pela iniciação nas técnicas computacionais e pela experiência que sempre me ajudou muito.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais, que me apoiaram em todos os momentos, durante a minha graduação e durante o desenvolvimento do trabalho de Mestrado.

Agradeço aos meus colegas da sala M207, pela amizade e apoio nestes últimos anos.

Agradeço aos professores e professoras do IF-UFRGS, em especial às Profas. Victória E. Herscovitz e Ruth Schneider, pela minha formação desde a graduação.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos um modelo efetivo para a descrição da matéria nuclear, que incorpora os resultados obtidos, para a descrição de um núcleon, pelo modelo de sacola difusa. O sistema nuclear será descrito via uma função de energia interna, que compreende um termo livre e outro que leva em conta a interação entre os núcleons. A parte livre, por se tratar de um sistema de férmions, corresponderá à energia de um gás de Fermi livre. Além disso, para evitar a superposição de dois ou mais núcleons, introduzimos um volume de exclusão *a la Van der Waals*. Na parte interagente, a troca de píons entre os núcleons será levada em conta via um potencial efetivo. A função energia interna dependerá da densidade da matéria nuclear e também de um parâmetro que determinará o volume esperado de cada núcleon na matéria nuclear. O valor deste parâmetro será um pouco diferente do valor encontrado para um núcleon isolado, devido à interação entre eles. Obtém-se então resultados para a energia de ligação por núcleon para a matéria nuclear simétrica e para a matéria de nêutrons, bem como para a equação de estado da matéria de nêutrons.

Abstract

In this work we develop an effective model to describe nuclear matter, which incorporates the results obtained, for the description of a nucleon, by the fuzzy bag model. The physical system is described via an internal energy function, which has a free term and an interacting one. The free part, since we are dealing with fermions, will correspond to the energy of a free Fermi gas. Moreover, to avoid superposition of nucleons, we introduce an exclusion volume *a la Van der Waals*. In the interacting part, the pion exchange is taken into account via an effective potential. The internal energy function depends on the nuclear matter density and also on a parameter which will determine the expected volume of a nucleon in matter. The value of this parameter will be slightly different from the one obtained for an isolated nucleon, because of the interaction between them. We then obtain results for the binding energy per nucleon for the symmetric nuclear matter and for neutron matter, as well as the equation of state of neutron matter.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Modelo de Sacola do MIT	7
2.1	Formulação do modelo	7
2.2	Equação de Dirac com potenciais centrais	11
2.3	A função de onda dos quarks	15
2.4	Equação de autovalores de energia	19
2.5	Massa de um hádron	22
2.6	Determinação dos parâmetros do modelo	23
3	Modelos de Gases de Partículas	29
3.1	O modelo de gás ideal	29
3.2	O modelo de gás de Van der Waals	30
3.3	O modelo de gás de Fermi	31
4	Modelo de Kagiya	45
4.1	Descrição do modelo	45
4.2	Determinação dos parâmetros do modelo	54
5	Modelo de sacola difusa	62
5.1	Descrição do modelo	63
5.2	Soluções analíticas para o campo dos quarks	65
5.3	Raio quadrático médio	70
5.4	Massa de um hádron	72
5.5	Determinação dos parâmetros do modelo	75

5.6	Correção de centro de massa	77
5.7	Correção de centro de massa revisitada	80
6	Aplicação do formalismo de Kagiya ao modelo de sacola difusa	89
6.1	Descrição do modelo	89
6.2	Determinação dos parâmetros do modelo	93
7	Conclusões	98
A	Unidades, Notação, Convenções, etc.	100
B	Determinação da constante B no modelo do MIT	105
C	Comutadores	110
D	Normalização da função de onda no modelo do MIT	115
E	Minimização da massa da sacola no modelo do MIT	117
F	Raio Quadrático Médio do Quark no Modelo do MIT	118
G	Cálculos para o Modelo de Kagiya	121
H	Cálculos para o Modelo Desenvolvido no Capítulo 6	126

Capítulo 1

Introdução

Os hádrons são partículas encontradas na natureza que interagem via força forte. Eles podem ter spin semi-inteiro, caso em que são denominados bárions, ou inteiro, quando recebem a denominação de mésons. Este trabalho se concentrará no próton e no nêutron, que são bárions com spin $1/2$. Em unidades da carga elétrica elementar, o próton tem carga igual a 1 e o nêutron, zero.

Os quarks são considerados partículas elementares com spin semi-inteiro e estão confinados em estados ligados, formando os hádrons. Os bárions são formados por três quarks, enquanto que os mésons são compostos por um quark e um anti-quark. Existem seis tipos, ou sabores, de quarks: *up*, *down*, *top*, *bottom*, *charm* e *strange*. A massa e a carga elétrica dos quarks são dependentes do seu sabor. Sobre a interação entre os quarks, existem duas características básicas. A primeira é que a força de atração entre eles aumenta à medida em que aumenta a sua distância de separação, de modo que os quarks não podem ser observados isoladamente. Esta característica é conhecida por confinamento dos quarks[1]. A segunda diz que a força de atração entre os quarks diminui quando a distância entre eles é pequena. Damos a esta característica o nome de liberdade assintótica dos quarks[2]. Uma maneira de explicar o confinamento dos quarks é estipular que eles carregam, além da carga elétrica, um outro tipo de carga chamada carga de cor. Existem três cores, neste sentido: azul (B), vermelha (R) e verde (G). Os anti-quarks carregam um número quântico associado então à anti-cor: anti-azul (\bar{B}), anti-vermelha (\bar{R}) e anti-verde (\bar{G}). A natureza seletiva desta maneira os estados permitidos para existirem isoladamente como somente aqueles cuja cor total é nula, os hádrons. Um trabalho que procura investi-

gar o comportamento dos quarks como constituintes dos hádrons foi feito por Callan Jr., Dashen e Gross[1].

A teoria fundamental que procura descrever o comportamento dos quarks e dos hádrons é a cromodinâmica quântica (CDQ)[3]. Dentro da CDQ, a interação entre os quarks se dá via troca de glúons, que são partículas sem massa e com spin 1. Diferentemente da eletrodinâmica, em que duas partículas carregadas eletricamente trocam um fóton e não alteram a sua carga, no caso da troca de um glúon a carga de cor do quark em geral é alterada. Isto pode ser explicado se considerarmos que os glúons também carregam carga de cor (diferentemente do fóton, que não possui carga elétrica). Cada glúon carrega um número quântico associado à carga de cor e outro associado à anti-cor. Desta maneira, se, por exemplo, um quark G emite um glúon $\bar{B}G$, se transforma em um quark B , e assim por diante. Uma das dificuldades no tratamento da CDQ é que nem sempre os cálculos podem ser feitos analiticamente, devido à complexidade formal desta teoria. Desta forma, muitas vezes é necessário lançar mão de algum outro método, como veremos a seguir nesta dissertação cujo objetivo é o de abordar um modelo alternativo à CDQ para a modelagem de um hádron.

Como vimos, os quarks, a pequenas distâncias de separação, comportam-se como partículas quase livres, e para grandes distâncias, a força de atração entre eles é muito intensa, de modo que é baixa a probabilidade de encontrar dois quarks muito afastados um do outro. Podemos então visualizar os quarks de maneira simplista como confinados a uma caixa, de onde não podem sair. Na verdade, esta é a base dos modelos que procuram descrever o hádron, evitando assim as dificuldades inerentes ao tratamento analítico da CDQ. O modelo de potencial efetivo é uma das opções que procuram investigar as propriedades dos hádrons. Uma vez que não sabemos exatamente como se dá a interação entre os quarks em um hádron, mas sabemos que eles estão confinados, pode-se desenvolver o modelo incluindo um potencial que seja confinante, ou seja, que cresça com a distância de separação entre os quarks. Além disso, o potencial deve se aproximar de zero (ou, pelo menos, de um valor constante) para pequenas distâncias entre os quarks, para que seja respeitada a propriedade de liberdade assintótica. Uma referência que trata sobre um modelo de potencial efetivo pode ser encontrada em[4].

Embora não sendo exatamente modelos do tipo de potencial, modelos de sacola possi-

bilitam a simulação das propriedades de confinamento e de liberdade assintótica através da introdução, como veremos, de condições de contorno apropriadas. Entre os modelos de sacola, serão desenvolvidos aqui o modelo do MIT e o modelo de sacola difusa, respectivamente nos capítulos 2 e 5. O modelo de sacola difusa possibilita uma conexão com os modelos do tipo de potencial, conforme será visto, de modo que pode-se introduzir, neste modelo, um potencial confinante. O modelo de sacola do MIT também fornece uma opção para a modelagem de um hádron e das propriedades de confinamento e de liberdade assintótica. Existe uma terceira possibilidade, o modelo tipo sóliton, estudada por Friedberg, R. e Lee, T. D.[5]. Para uma revisão sobre estes modelos, ver a Ref.[6].

Esta dissertação tem como objetivo o de desenvolver um modelo efetivo para a descrição da matéria nuclear incorporando a esta as propriedades determinadas pelo modelo de sacola difusa para a descrição de propriedades hadrônicas. Buscamos neste trabalho descrever o sistema nuclear via uma função de energia interna que compreende um termo livre e outro que leva em conta a interação entre os núcleons. A parte livre, por se tratar de um sistema de férmions, será dada pela energia de um gás de partículas de Fermi livres. Já o termo correspondente à interação entre as partículas será descrito através de um potencial efetivo não-relativístico que leva em conta a troca de píons entre as partículas. Neste termo, como estaremos interessados em descrever a matéria nuclear formada por prótons e nêutrons, o campo vetorial dos píons será acoplado ao isospin dos férmions. Além disso, levaremos em consideração o regime de altas densidades bariônicas, de modo que será introduzido, no termo livre da função de energia interna, o volume de exclusão *a la Van der Waals*. Obtém-se resultados para a energia de ligação por núcleon para a matéria nuclear simétrica e para a matéria de nêutrons, e também para a equação de estado da matéria de nêutrons.

Fazemos agora uma breve descrição do que será tratado em cada capítulo. No capítulo 2, expomos o modelo de sacola do MIT, que descreve um hádron considerando três quarks livres dentro de um poço de potencial de paredes infinitas. O capítulo 3 é um capítulo de referência, onde desenvolvemos três modelos de gases: (i) o modelo de gás ideal, (ii) o modelo de gás de Van der Waals e (iii) o modelo de gás de Fermi. Destes, os dois últimos serão utilizados em capítulos posteriores. No capítulo 4, é descrito o modelo para a matéria nuclear desenvolvido por Kagiya, S., Nakamura, A. e Omodaka, T. [11], que

incorpora os resultados do modelo do MIT para um núcleon. No capítulo 5, descrevemos o modelo de sacola difusa. Neste modelo, a função de onda dos quarks não é suprimida abruptamente por um poço infinito, mas de maneira suave, via uma chamada função de supressão. Os resultados obtidos por este modelo são utilizados no modelo desenvolvido para a matéria nuclear no capítulo 6.

Capítulo 2

Modelo de Sacola do MIT

Neste capítulo estudaremos o modelo de sacola para hádrons desenvolvido no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) por A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. Weisskopf[7]. Consideramos um bárion formado por três quarks confinados em uma região limitada do espaço, chamada de sacola. Dentro da sacola, os quarks são livres, o que reproduz a característica de liberdade assintótica. Para criar a sacola a partir do vácuo, é necessário fornecer uma certa quantidade de energia ao sistema, que corresponde à diferença de energia entre os vácuos perturbativo e não-perturbativo da CDQ. Neste modelo, esta diferença será representada por BV , onde B é uma constante com dimensões de energia por unidade de volume (no sistema natural de unidades, fm^{-4}) e V representa o volume da sacola. Este modelo é chamado modelo de sacola do MIT, e neste capítulo trataremos somente uma aproximação do modelo conhecida como aproximação estática e esfero-simétrica, ou seja, o caso em que a sacola tem um formato esférico e raio constante no tempo. Veremos que, nesta aproximação, é possível encontrar soluções analíticas para os campos dos quarks. O desenvolvimento seguido aqui está em grande parte baseado na apresentação do modelo do MIT na Ref.[8]. Os aspectos principais deste modelo também podem ser encontrados na Ref.[9].

2.1 Formulação do modelo

Em sua versão original, o modelo de sacola do MIT foi formulado de maneira completamente covariante. Um aspecto importante desta versão é o papel dinâmico desempenhado

pela superfície da sacola, que é capaz de reagir ao movimento dos quarks em seu interior, deformando-se apropriadamente. As equações a serem resolvidas são, entretanto, muito complexas. Nas aplicações do modelo do MIT é utilizada quase que unicamente a aproximação em que a superfície da sacola tem forma esférica e não sofre nenhuma deformação. Nesta aproximação, a densidade Lagrangiana para o modelo do MIT é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MIT} = & \left(\frac{i}{2} \sum_q (\bar{\psi}_q \gamma^\mu \partial_\mu \psi_q - (\partial_\mu \bar{\psi}_q) \gamma^\mu \psi_q) - \sum_q m_q \bar{\psi}_q \psi_q - B \right) \theta(R - r) \\ & - \frac{1}{2} \sum_q \bar{\psi}_q \psi_q \delta(R - r) . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Na expressão acima, a soma em q refere-se a cada um dos três quarks que compõem o hádron, sendo ψ_q a função de onda e m_q a massa de cada quark, e o último termo é responsável por incorporar as condições de contorno para os quarks na superfície da sacola, conforme será visto mais adiante. As funções $\theta(R - r)$ e $\delta(R - r)$ representam, respectivamente, as funções degrau e delta de Dirac, sendo definidas como

$$\begin{aligned} \theta(R - r) &= \begin{cases} 1 & , r \leq R \\ 0 & , r > R \end{cases} \\ \delta(R - r) &= \begin{cases} \text{“}\infty\text{”} & , r = R \\ \text{“}0\text{”} & , r \neq R \end{cases} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Lembramos ainda que estamos utilizando o sistema natural de unidades (ver apêndice A), no qual tanto a constante de Planck quanto a velocidade da luz no vácuo são iguais à unidade, ou seja, $\hbar = c = 1$.

Na densidade Lagrangiana (2.1), tanto o campo dos quarks, $\psi(x)$, como o raio da sacola, R , são variáveis dinâmicas. As equações de movimento dos campos dos quarks são obtidas através do princípio variacional usual, que exige que a densidade Lagrangiana do modelo (2.1) (na verdade a ação) seja estacionária com relação a variações infinitesimais dos campos dos quarks. A consequência desta exigência são as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MIT}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{MIT}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 , \quad (2.3)$$

onde aqui suprimimos o índice inferior q por simplicidade, ficando subentendido que a equação vale para cada um dos campos ψ_q . Isto será feito de maneira sistemática daqui para a frente, onde não houver ambigüidade. A equação dinâmica para o raio da sacola R segue também de um princípio variacional, conforme será visto mais adiante.

Vejam os primeiramente as equações de movimento para os campos dos quarks. Calculando a derivada de $\theta(R - r)$ na seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \theta(R - r) &= (\partial_t, \nabla) \theta(R - r) = (0, \hat{r}) \frac{d}{dr} \theta(R - r) \\ &= (0, -\hat{r}) \delta(R - r) = n_\mu \delta(R - r),\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde $n^\mu = (0, \hat{r})$ é o vetor unitário que aponta para fora da superfície da sacola, podemos ver que a aplicação de (2.3) em (2.1) resulta na equação

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) \theta(R - r) + \frac{1}{2} (i\gamma^\mu n_\mu \psi - \psi) \delta(R - r) = 0.\tag{2.5}$$

Notamos que o termo proporcional a $\theta(R - r)$ é independente do termo proporcional a $\delta(R - r)$, pois não existe uma função $f(x)$ tal que $\theta(x) = f(x)\delta(x)$. Obtemos então uma equação que governa o movimento de cada quark no interior da sacola,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad , \quad r \leq R,\tag{2.6}$$

e uma condição de contorno para cada função de onda,

$$i\gamma^\mu n_\mu \psi = \psi \quad , \quad r = R.\tag{2.7}$$

A equação (2.6) é simplesmente a equação de Dirac livre para os quarks dentro da sacola.

O motivo da imposição da condição de contorno (2.7) pode ser facilmente compreendido. Tomando-se a equação adjunta à condição de contorno (2.7) e utilizando a propriedade (A.18) das matrizes de Dirac, obtemos

$$-in_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = \bar{\psi} \quad , \quad r = R.\tag{2.8}$$

Agora multiplicando (2.7) por $\bar{\psi}$ à esquerda, onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, e (2.8) por ψ à direita, ficamos com as equações

$$\begin{aligned}in_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \bar{\psi} \psi \\ -in_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \bar{\psi} \psi \quad , \quad r = R.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Como o vetor unitário n_μ não é nulo, a única solução possível para este sistema é

$$in_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0 \quad , \quad r = R.\tag{2.10}$$

Sendo $j^\mu(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ a corrente quadrivetorial associada a cada quark, obtemos

$$n_\mu j^\mu = 0 \quad , \quad r = R \quad , \quad (2.11)$$

e portanto não há fluxo de corrente para fora da sacola. Deste modo, a condição de contorno (2.7) garante a propriedade de confinamento dos quarks, simulando, de maneira indireta, a presença de um potencial confinante de paredes infinitas. Na seção 2.3, obteremos soluções analíticas para o campo dos quarks.

Introduziremos agora uma outra exigência, a de que a ação

$$A = \int d^4x \mathcal{L}_{MIT} \quad (2.12)$$

seja estacionária também com relação a pequenas variações do formato da sacola. Denotando por \mathcal{L}'_{MIT} a densidade Lagrangiana obtida por uma pequena variação no formato da sacola, a condição que deve ser satisfeita é

$$\delta A = \int d^4x \mathcal{L}'_{MIT} - \int d^4x \mathcal{L}_{MIT} = 0 \quad . \quad (2.13)$$

Analisamos agora um caso mais simples, envolvendo apenas uma variável, o que nos permite obter a consequência direta da condição acima. Consideramos a integral definida de uma função arbitrária $f(x)$ e posteriormente, uma pequena variação desta integral com relação a um dos limites de integração,

$$\begin{aligned} \delta_y \int_0^y dx f(x) &= \int_0^{y+dy} dx f(x) - \int_0^y dx f(x) \\ &= F(y+dy) - F(y) = \frac{dF(y)}{dy} \delta y = f(y) \delta y \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

A função $f(x)$ faz o papel da densidade Lagrangiana e a integral $F(x) \equiv \int dx f(x)$ representa a ação. O limite superior de integração y tem um significado análogo àquele tomado ao considerar-se a superfície da sacola, no nosso caso uma esfera de raio R . A exigência de que

$$\delta_y \int_0^y dx f(x) = 0 \quad (2.15)$$

leva à conclusão de que $f(y) = 0$, ou seja, a densidade Lagrangiana deve se anular sobre a superfície da sacola,

$$\left[\left(\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi - B \right) \theta(R-r) - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \delta(R-r) \right] \Big|_{r=R} = 0 \quad . \quad (2.16)$$

Das equações (2.9), vemos que

$$\bar{\psi}\psi\Big|_{r=R} = 0, \quad (2.17)$$

de modo que o último termo à direita de (2.16) e o termo que envolve a massa m são nulos. Obtivemos uma equação que permite calcular B a partir do campo dos quarks,

$$\begin{aligned} B &= \frac{i}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi)\Big|_{r=R} = -\frac{1}{2} (n^\mu\bar{\psi}\partial_\mu\psi + n^\mu(\partial_\mu\bar{\psi})\psi)\Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2} n_\mu\partial^\mu(\bar{\psi}\psi)\Big|_{r=R} = -\frac{1}{2} (0, -\hat{r})\partial^\mu(\bar{\psi}\psi)\Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}(\bar{\psi}\psi)\Big|_{r=R}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde salientamos que há uma soma implícita sobre os campos dos quarks no lado direito desta expressão. No apêndice B, obteremos uma forma explícita para esta expressão.

2.2 Equação de Dirac com potenciais centrais

No modelo de sacola do MIT, não existe nenhum potencial atuando¹ sobre os quarks no interior da sacola, como pode ser visto em (2.6), que é a equação de Dirac para partículas livres. No entanto, como a condição de contorno (2.7) tem simetria esférica, é natural procurarmos por soluções que possuam momento angular bem definido. Para que isto seja possível, é necessário que o Hamiltoniano para o modelo de sacola comute com o operador de momento angular total \vec{J} . Isto está demonstrado no apêndice C, onde inclusive consideramos o caso mais geral em que os quarks estão submetidos a potenciais centrais e onde mostramos também que o Hamiltoniano comuta com o operador K . Para uma definição deste operador, ver (2.19).

Nesta seção iremos considerar a dependência angular dos espinores de Dirac, deduzindo a sua estrutura a partir do uso dos operadores de momento angular e do operador K . Na próxima seção trataremos do Hamiltoniano e das partes radial e temporal dos espinores.

Os operadores de momento angular orbital \vec{L} , de spin $\vec{\Sigma}$, momento angular total \vec{J} e o

¹Na verdade, a força que atua sobre os quarks é nula. O potencial poderia ser constante e diferente de zero, sem que se alterasse a física do modelo.

operador K são definidos por

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} & \vec{J} &= \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \\ \vec{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} & K &= \beta \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 \right) .\end{aligned}\tag{2.19}$$

Como veremos adiante, o operador K será útil na classificação dos espinores com momento angular total bem definido, embora envolvendo, em sua definição, um acoplamento do tipo spin-órbita ². De acordo com o que foi mostrado no apêndice C, os espinores são auto-estados dos operadores J_z , K e \vec{J}^2 , e seus autovalores são dados por

$$J_z \psi = j_z \psi \quad K \psi = -\kappa \psi \quad \vec{J}^2 \psi = j(j+1) \psi .\tag{2.20}$$

A seguir, vamos relacionar os valores de κ com os valores de j . Usando os fatos de que $[\beta, \vec{\Sigma}] = 0$ e $\beta^2 = 1$, podemos obter para o operador K^2 a expressão

$$K^2 = \left[\beta \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 \right) \right]^2 = (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L})(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L}) + 2\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 .\tag{2.21}$$

Usando as relações ³

$$(\vec{\Sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\Sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\Sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) ,\tag{2.23}$$

$$i \vec{\Sigma} \cdot (\vec{L} \times \vec{L}) = i \sum_i \epsilon_{ijk} L_j L_k = i \sum_x [L_y, L_z] + i \sum_y [L_z, L_x] + i \sum_z [L_x, L_y] = -\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \tag{2.24}$$

obtemos

$$\begin{aligned}K^2 &= \vec{L}^2 + i \vec{\Sigma} \cdot (\vec{L} \times \vec{L}) + 2\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 \\ &= \vec{L}^2 + \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 .\end{aligned}\tag{2.25}$$

²O termo de acoplamento spin-órbita $\vec{\Sigma} \cdot \vec{L}$ não comuta com o Hamiltoniano do sistema, fazendo com que ψ não seja auto-função de momento orbital \vec{L} . A forma como o operador K é definido permite, porém, que as componentes de ψ sejam auto-funções de operadores de momento angular orbital com autovalores bem definidos e distintos, como veremos a seguir.

³Note-se que o produto $\vec{L} \times \vec{L}$, que aparece nos cálculos a seguir, não é zero como se esperaria, pois \vec{L} é um operador quântico. Deve-se interpretar este produto como uma notação. Por exemplo,

$$\left(\vec{L} \times \vec{L} \right)_z = L_x L_y - L_y L_x = [L_x, L_y] = i L_z \neq 0 .\tag{2.22}$$

Já o operador de momento angular total ao quadrado é facilmente calculado,

$$\vec{J}^2 = \left(\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \right)^2 = \vec{L}^2 + \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{4}, \quad (2.26)$$

e notamos então que \vec{J}^2 difere de K^2 apenas por uma constante,

$$K^2 = \vec{J}^2 + \frac{1}{4}. \quad (2.27)$$

Desta maneira, a relação entre os autovalores κ e j é

$$\kappa^2 = j(j+1) + \frac{1}{4} = \left(j + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (2.28)$$

o que implica em

$$\kappa = \pm \left(j + \frac{1}{2} \right), \quad j = |\kappa| - \frac{1}{2}. \quad (2.29)$$

Note-se que para cada valor de j existem sempre dois valores para κ . Como os valores possíveis de j são $1/2, 3/2, 5/2, \dots$, vemos a partir da primeira equação acima que os valores possíveis de κ são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

De acordo com o que foi mostrado no apêndice C, os espinores de Dirac não possuem spin e momento angular orbital bem definidos, pois os operadores $\vec{\Sigma}$ e \vec{L} não comutam com o Hamiltoniano. Veremos agora a maneira como o spin e o momento angular são carregados pelos espinores. Antecipando o resultado final, escrevemos o espinor de Dirac na forma de uma matriz 2×2 ,

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Escrevendo K também na forma matricial de ordem 2,

$$K = \beta \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 \right) = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1 & 0 \\ 0 & -(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

pois $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, e usando a equação de autovalores (2.20) para o operador K , obtemos as duas equações

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \phi_1 &= -(\kappa + 1)\phi_1 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \phi_2 &= +(\kappa - 1)\phi_2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

de onde fica claro que o momento angular orbital de ϕ_1 é diferente do de ϕ_2 . Este resultado já seria suficiente para demonstrar a importância do operador K . Porém, voltaremos a este tema a seguir. Podemos atribuir momento angular ℓ a ϕ_1 e ℓ' a ϕ_2 ,

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 \phi_1 &= \ell(\ell + 1)\phi_1 \\ \vec{L}^2 \phi_2 &= \ell'(\ell' + 1)\phi_2.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Vamos então relacionar os valores de ℓ e ℓ' com os autovalores de \vec{J}^2 e K . Escrevemos \vec{L}^2 em termos de \vec{J}^2 e K ,

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 &= \left(\vec{J} - \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\right)^2 = \vec{J}^2 - \vec{\Sigma} \cdot \vec{J} + \frac{1}{4}\Sigma^2 = \vec{J}^2 - \frac{1}{2}\Sigma^2 - \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \frac{1}{4}\Sigma^2 \\ &= \vec{J}^2 - \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} - \frac{3}{4} = \vec{J}^2 - (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1) + \frac{1}{4} = \vec{J}^2 - \beta K + \frac{1}{4},\end{aligned}\tag{2.34}$$

pois $\beta K = \beta^2 (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1) = \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1$. Aplicando \vec{L}^2 na função de onda dada por (2.30),

$$\vec{L}^2 \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{J}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} K + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \end{pmatrix},\tag{2.35}$$

obtemos as seguintes relações entre os autovalores,

$$\begin{aligned}\ell(\ell + 1) &= j(j + 1) + \kappa + \frac{1}{4} = \kappa(\kappa + 1) \\ \ell'(\ell' + 1) &= j(j + 1) - \kappa + \frac{1}{4} = \kappa(\kappa - 1),\end{aligned}\tag{2.36}$$

onde usamos (2.28) para relacionar j com κ . Estas equações possuem duas soluções, que dependem do sinal de κ ,

$$\begin{aligned}\kappa > 0: \quad \ell &= \kappa = j + \frac{1}{2} & ; & \quad \ell' = \kappa - 1 = j - \frac{1}{2} \\ \kappa < 0: \quad \ell &= -\kappa - 1 = j - \frac{1}{2} & ; & \quad \ell' = -\kappa = j + \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Pode-se notar que

$$\ell + \ell' = 2j \quad ; \quad |\ell - \ell'| = 1\tag{2.38}$$

em qualquer um dos casos.

Ainda das relações (2.37) entre os autovalores de \vec{L}^2 , K e \vec{J}^2 , vemos que o operador K é essencial para descrever de forma completa os números quânticos do sistema, pois, para um dado valor de j , há sempre duas possibilidades para κ , uma positiva e outra negativa.

Se $\kappa > 0$, temos $\kappa = j + 1/2$, e se $\kappa < 0$, o seu valor é $\kappa = -(j + 1/2)$, de modo que somente o operador momento angular total ao quadrado \vec{J}^2 , junto com a sua projeção J_z e o Hamiltoniano \mathcal{H} , não são suficientes para diferenciar todos os estados do sistema. Uma maneira de levar em conta o sinal de κ na solução para o espinor de Dirac é escrever o espinor (2.30) na forma

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) \\ if(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Como estamos lidando com potenciais centrais, é natural que a parte radial da solução seja separável da parte angular. Além disso, cada uma das componentes de Dirac, superior e inferior, carrega os números quânticos apropriados de momentum angular total ao quadrado \vec{J}^2 , projeção J_z e momentum angular orbital ao quadrado \vec{L}^2 . As funções $\mathcal{Y}_{j\eta}^{m_j}(\hat{r})$, onde aqui $\eta = \ell$ ou $\eta = \ell'$, são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{j\eta}^{m_j}(\hat{r}) = & (\eta \ \frac{1}{2} \ m_j - \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}|j \ m_j) Y_{\eta}^{m_j - \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + (\eta \ \frac{1}{2} \ m_j + \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}|j \ m_j) Y_{\eta}^{m_j + \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde as funções $Y_{\eta}^m(\hat{r})$ representam os harmônicos esféricos e $(j_1 \ j_2 \ m_1 \ m_2 | J \ M)$ são coeficientes de Clebsch-Gordan, que respeitam a seguinte relação:

$$(\eta \ \frac{1}{2} \ m_j - \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}|j \ m_j)^2 + (\eta \ \frac{1}{2} \ m_j + \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}|j \ m_j)^2 = 1. \quad (2.41)$$

Note-se que a expressão (2.40) para as funções $\mathcal{Y}_{j\eta}^{m_j}(\hat{r})$ representa a soma do momento angular orbital com o spin.

2.3 A função de onda dos quarks

Na seção anterior, determinamos a estrutura da parte angular da função de onda dos quarks. Nesta seção, veremos que, dentro da aproximação estática e esfero-simétrica, é possível encontrar soluções analíticas para a parte radial do campo dos quarks, expressa pelas funções $g(r)$ e $f(r)$ em (2.39).

No modelo do MIT, como vimos, os quarks são livres no interior da sacola. O ponto de partida é, então, a equação de movimento do campo dos quarks (2.6), que é a equação de Dirac livre,

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi = 0. \quad (2.42)$$

Salientamos que esta equação de movimento para o campo dos quarks é válida somente no interior da sacola ($r \leq R$), já que os quarks estão confinados a ela e portanto no exterior da sacola a função de onda é nula. Utilizando as relações que envolvem as matrizes de Dirac, $(\gamma^0)^2 = 1$ e $\vec{\alpha} = \beta\vec{\gamma}$ (ver apêndice A), podemos escrever, de (2.42),

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi, \quad (2.43)$$

o que permite identificar o Hamiltoniano de Dirac de partícula livre como

$$\mathcal{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (2.44)$$

Como o Hamiltoniano é independente do tempo, as soluções estacionárias da equação de movimento (2.42) são autofunções de energia, na forma

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{-iEt}\psi(\vec{r}). \quad (2.45)$$

Vimos na seção anterior que a parte espacial da solução tem a forma

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) \\ if(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

o que nos permite escrever a equação de movimento (2.42) na seguinte forma matricial 2 x 2, usando a representação padrão das matrizes de Dirac (A.17),

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla \right] \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) \\ if(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \end{pmatrix} \\ & = m \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) \\ if(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

que é um sistema acoplado de duas equações,

$$\begin{aligned} (E - m)g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) - (\vec{\sigma} \cdot \nabla)f(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) &= 0 \\ (E + m)f(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) + (\vec{\sigma} \cdot \nabla)g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Na obtenção da expressão acima, utilizamos (2.45) e a definição

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) . \quad (2.49)$$

Podemos eliminar a dependência espinorial de (2.48), obtendo uma equação radial. Utilizamos a representação do operador momento linear no espaço de configuração (A.10) para escrever

$$-i(\vec{\sigma} \cdot \nabla) = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} \left(\vec{r} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right) , \quad (2.50)$$

onde, no desenvolvimento acima, usamos as relações $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})^2 = 1$ e $(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \vec{r} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$. Como $\vec{r} \cdot \vec{p} = -ir \frac{d}{dr}$, temos

$$-i(\vec{\sigma} \cdot \nabla) = -i(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right) . \quad (2.51)$$

Agora substituímos o resultado acima em (2.48), obtendo as equações acopladas

$$\begin{aligned} - \left[\frac{dg(r)}{dr} + \frac{\kappa + 1}{r} g(r) \right] (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) &= (E + m) f(r) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \\ \left[\frac{df(r)}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r} f(r) \right] (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) &= (E - m) g(r) \mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Neste último passo, foram usadas as equações de autovalores do operador momento angular orbital \vec{L} atuando sobre as componentes superior e inferior de Dirac, (2.32). Explorando as propriedades das funções $\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r})$,

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) = -\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \quad \text{e} \quad (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) = -\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) , \quad (2.53)$$

o sistema de equações (2.52) para as funções $f(r)$ e $g(r)$ toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{dg(r)}{dr} + \frac{(1 + \kappa)}{r} g(r) &= (E + m) f(r) \\ \frac{df(r)}{dr} + \frac{(1 - \kappa)}{r} f(r) &= -(E - m) g(r) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Assim, as variáveis angulares foram eliminadas, de modo que o sistema (2.54) tem unicamente dependência radial. Podemos derivar a primeira equação em relação a r mais uma vez e substituir $f(r)$ e $df(r)/dr$ na segunda, obtendo uma equação diferencial de segunda ordem para g ,

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg(r)}{dr} + \left(p^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) g(r) = 0 . \quad (2.55)$$

Na obtenção desta expressão, utilizamos as relações entre os autovalores dos operadores K e \vec{L} dadas em (2.37). A equação assim obtida é a equação de Bessel esférica, cujas soluções[10] são dadas por

$$g(r) = Nj_\ell(pr) \quad , \quad r \leq R. \quad (2.56)$$

A solução $f(r)$ dever ser do mesmo tipo, vide sistema (2.54). Em outras palavras, deve ser uma função de Bessel de ordem ℓ' . Mas sabemos que as funções $f(r)$ e $g(r)$ são dependentes uma da outra, de modo que devemos determinar a constante de proporcionalidade entre elas. Esta constante pode ser obtida através da primeira equação em (2.54),

$$f(r) = \frac{1}{E+m} \left(\frac{dg(r)}{dr} + \frac{(1+\kappa)}{r}g(r) \right). \quad (2.57)$$

Utilizando (2.56) e propriedades das funções de Bessel, chegamos a

$$f(r) = N \frac{\kappa}{|\kappa|} \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} j_{\ell'}(pr) \quad , \quad r \leq R. \quad (2.58)$$

Note-se que as soluções (2.56) e (2.58) estão expressas em termos de ℓ e ℓ' , apesar de que ψ em (2.39) não é autofunção do momento angular orbital \vec{L} . Mas isso não é um problema, pois os autovalores ℓ e ℓ' estão relacionados a κ e j através das relações (2.37). Então, podemos escrever $f(r)$ e $g(r)$ como $f_{n\kappa}(r)$ e $g_{n\kappa}(r)$, respectivamente, de agora em diante, onde n é o número quântico associado ao autovalor de energia.

No estado fundamental, as componentes superior e inferior do espinor de Dirac, (2.56) e (2.58), são dadas por

$$g(r) = Nj_0(pr) = N \frac{\text{sen}(pr)}{pr} \quad , \quad r \leq R \quad (2.59)$$

e

$$f(r) = -N \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} j_1(pr) = -N \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \left[\frac{\text{sen}(pr)}{(pr)^2} - \frac{\text{cos}(pr)}{pr} \right] \quad , \quad r \leq R. \quad (2.60)$$

Através das equações (2.37), vemos que, no estado fundamental, podemos tomar $\ell = 0$, mas não $\ell' = 0$ também. De fato, de acordo com a segunda das expressões (2.37), vemos que a escolha $\ell = 0$ determina que $\ell' = 1$ e $\kappa = -1$ para o estado fundamental.

Normalização da função de onda

Podemos calcular a constante de normalização N da função de onda utilizando as soluções obtidas para o estado fundamental da sacola. Para isso, impomos a condição

$$\int_V d^3x \psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r}) = 1. \quad (2.61)$$

O cálculo da constante de normalização está feito no apêndice D. Substituindo (2.46), (2.59) e (2.60) na condição acima, obtemos

$$N = \left\{ \frac{1}{p^3(E+m)} \left[E \left(pR - \frac{\text{sen}^2(pR)}{pR} \right) + m \left(\frac{\text{sen}^2(pR)}{pR} - \frac{\text{sen}(2pR)}{2} \right) \right] \right\}^{-1/2}. \quad (2.62)$$

2.4 Equação de autovalores de energia

Uma vez calculadas as autofunções de \mathcal{H} , \vec{J}^2 , J_z e K , passamos à análise da condição de contorno (2.7). Usando a representação padrão das matrizes de Dirac, temos

$$\gamma^\mu n_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \cdot (-\hat{r}), \quad (2.63)$$

e portanto podemos expressar (2.7) no formato matricial 2×2 como

$$i \begin{pmatrix} 0 & -\hat{r} \cdot \vec{\sigma} \\ \hat{r} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad r = R,$$

que é um sistema acoplado de duas equações

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) g_{n\kappa}(R) \mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) &= f_{n\kappa}(R) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) f_{n\kappa}(R) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) &= g_{n\kappa}(R) \mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}), \quad r = R. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Podemos agora usar as condições (2.53) para eliminar a dependência angular do sistema de equações obtido, e ficamos com

$$g_{n\kappa}(R) = -f_{n\kappa}(R). \quad (2.65)$$

Escrevendo a equação acima em termos das soluções (2.56) e (2.58) obtidas anteriormente, obtemos

$$j_\ell(pR) = -\frac{\kappa}{|\kappa|} \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} j_{\ell'}(pR). \quad (2.66)$$

Lembrando que $p = \sqrt{E^2 - m^2}$, identificamos (2.66) como a equação de autovalores de energia para cada um dos quarks.

No estado fundamental, a equação acima pode ser escrita como

$$j_0(pR) = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} j_1(pR) . \quad (2.67)$$

A dependência entre E e R para o estado fundamental pode ser visualizada na Fig. 2.1. Para analisar este resultado, consideramos inicialmente quarks com massa nula, $m = 0$.

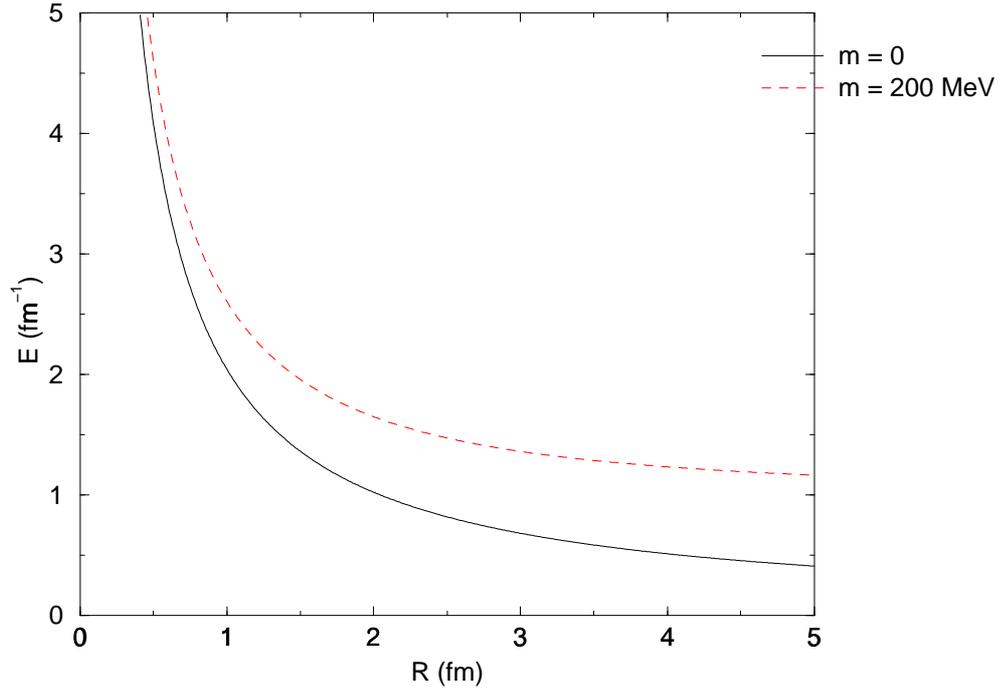


Figura 2.1: Autovalores de energia dos quarks em função do raio da sacola.

Neste caso, temos $p = E$, e a equação de autovalores (2.67) assume a forma

$$j_0(ER) = j_1(ER) . \quad (2.68)$$

Esta relação depende unicamente do comportamento das funções $j_0(\omega)$ e $j_1(\omega)$. Para cada solução encontrada para ω , teremos um autovalor de energia. Denotaremos o valor correspondente ao estado fundamental por ω_0 . O autovalor de energia do estado fundamental será dado então por

$$E = \frac{\omega_0}{R} , \quad (2.69)$$

que está de acordo com a forma da curva encontrada. Já se $m \neq 0$, a análise não é tão simples, pois a equação de autovalores não terá somente termos do tipo pR . Mas, considerando a massa dos quarks pequena, a alteração na equação de autovalores será devida fundamentalmente à raiz quadrada que comparece do lado direito de (2.67). Em outras palavras, deverá ainda haver um valor de ω_1 próximo a ω_0 que satisfará a equação de autovalores. Podemos escrever $pR = \omega_1$, e neste caso o autovalor de energia será dado por

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx p = \frac{\omega_1}{R}. \quad (2.70)$$

Esperamos, então, que as curvas obtidas para valores da massa do quark não-nulos tenham um comportamento próximo ao do tipo $1/R$.

Pode-se ainda escrever a equação de autovalores em uma forma alternativa. Para isso, introduzimos as variáveis $\omega \equiv pR$ e $y \equiv \sqrt{E - m}/\sqrt{E + m}$. Podemos então escrever (2.67) como

$$j_0(\omega) = y j_1(\omega). \quad (2.71)$$

Utilizando as formas explícitas de j_0 e j_1 , temos

$$\frac{\sin \omega}{\omega} = y \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right). \quad (2.72)$$

Podemos agrupar os termos em função de $\sin \omega$ e $\cos \omega$, e após dividir a equação por $\cos \omega$, obtendo

$$\tan \omega = \frac{\omega y}{y - \omega}. \quad (2.73)$$

No caso em que a massa do quark é nula temos $y = 1$, e

$$\tan \omega = \frac{\omega}{1 - \omega}. \quad (2.74)$$

Nesta forma fica claro que, a cada solução ω que esta equação tiver, teremos um autovalor de energia correspondente, definido por $ER = \omega$.

Fisicamente, esperamos que o autovalor de energia seja uma função decrescente do raio da sacola. Podemos fazer uma estimativa considerando o estado fundamental, onde a função de onda dos quarks só possui um nodo. Quanto maior for o raio, maior será

o comprimento de onda do quark. Como $E \propto 1/\lambda$, temos que E deve ser inversamente proporcional ao raio da sacola.

Também incluímos, na Fig. 2.2, a dependência entre E e m . Esperamos que E cresça com m , porque $E = \sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_1}{R}\right)^2 + m^2}$. Como sabemos que ω_1 tem uma dependência fraca em m , vemos que E cresce com m .

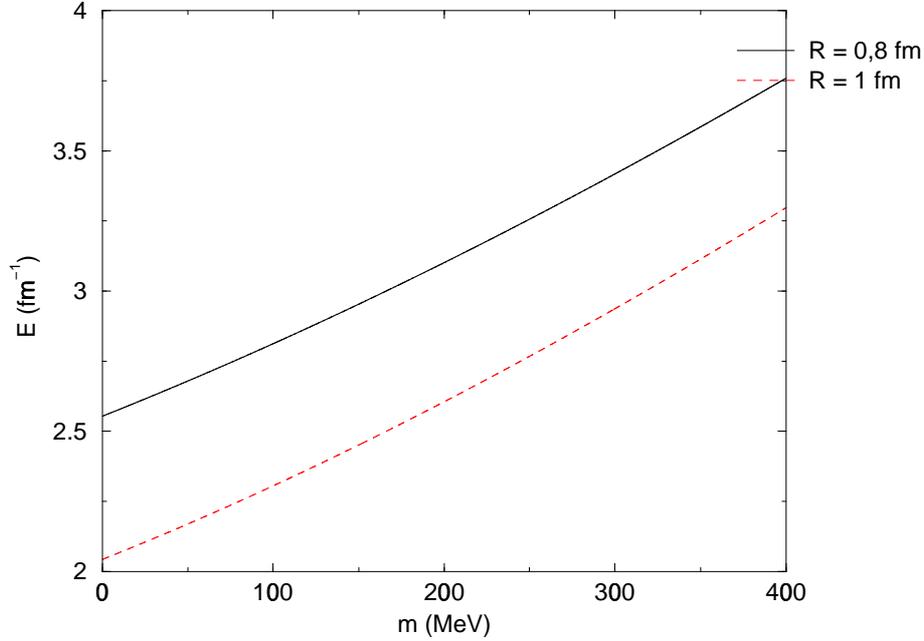


Figura 2.2: Comportamento dos autovalores de energia em função das massas dos quarks.

2.5 Massa de um hádron

Nesta seção calculamos a massa M de um hádron dentro do modelo do MIT. Para fazer este cálculo, utilizamos o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, definido por

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{MIT}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{MIT}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{MIT} . \quad (2.75)$$

A massa M do hádron pode ser identificada diretamente como a integral espacial da componente T^{00} do tensor energia-momento, ou seja,

$$M = \int d^3x T^{00} , \quad (2.76)$$

onde a integral se estende em princípio sobre todo o volume tridimensional. Utilizando a densidade Lagrangiana (2.1) em (2.75), obtemos

$$T^{00} = \left(\sum_q \frac{i}{2} (\bar{\psi}_q \gamma^0 \partial^0 \psi_q - (\partial^0 \bar{\psi}_q) \gamma^0 \psi_q) + g^{00} B \right) \theta(R - r), \quad (2.77)$$

e portanto a massa da sacola é dada pela expressão

$$\begin{aligned} M &= \int d^3x \left(\sum_q \frac{i}{2} (\bar{\psi}_q \gamma^0 \partial^0 \psi_q - (\partial^0 \bar{\psi}_q) \gamma^0 \psi_q) + g^{00} B \right) \theta(R - r) \\ &= \sum_q \int_V d^3x \frac{i}{2} (\bar{\psi}_q \gamma^0 \partial^0 \psi_q - (\partial^0 \bar{\psi}_q) \gamma^0 \psi_q) + BV, \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde voltamos a explicitar os índices dos quarks nos somatórios. Da forma geral de solução (2.45) e com a normalização adotada, temos

$$M = \sum_q E_q + BV, \quad (2.79)$$

onde

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (2.80)$$

e, via equação de autovalores, $E_q = E_q(R)$. O valor de R que minimiza a massa da sacola é determinado ⁴ pela equação $dM/dR = 0$, juntamente com a equação de autovalores (2.66). A equação $dM/dR = 0$ resulta em

$$\frac{dM}{dR} = - \sum_q \frac{p_q^2}{E_q R} \frac{2E_q(E_q R - 1)}{2E_q(E_q R - 1) + m_q} + 4\pi B R^2 = 0. \quad (2.81)$$

A obtenção detalhada deste resultado é feita no apêndice E. Na Fig. 2.3 incluímos, a título de ilustração, o comportamento da massa da sacola em função do raio, no estado fundamental, para valores fixos dos parâmetros m_q e B . Pode-se ver desta figura que a massa da sacola tem realmente um valor mínimo para algum valor de R .

2.6 Determinação dos parâmetros do modelo

Dentro do modelo, temos os parâmetros B e R e um autovalor de energia para cada quark a determinar, totalizando cinco incógnitas. Agora determinamos estas quantidades

⁴Fisicamente, esperamos que a massa física da sacola seja um mínimo da função (2.79) com relação a R . No apêndice B, demonstramos que este é de fato o caso.

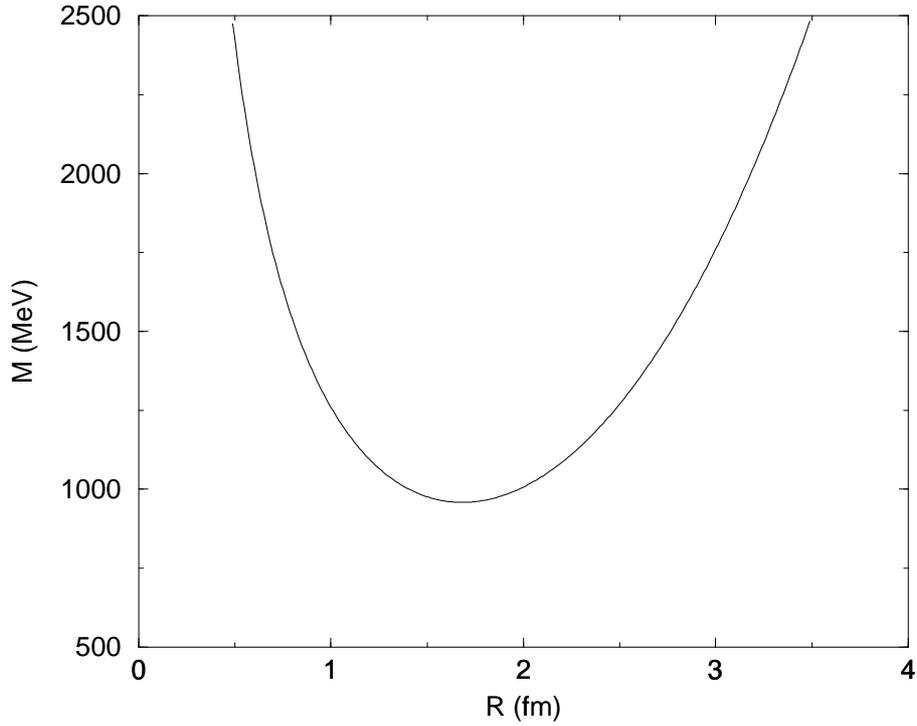


Figura 2.3: Massa da sacola em função do raio no estado fundamental, para $m = 0$ e $B = 12\text{MeV}/\text{fm}^3$.

numericamente, para o estado fundamental do núcleon ($\ell = 0$, $\ell' = 1$ e $\kappa = -1$). Temos as três equações de autovalores (2.66),

$$j_0(pR) = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} j_1(pR) , \quad (2.82)$$

e a equação de minimização da massa (2.81). Usaremos como quinta condição para a determinação das quantidades citadas o valor experimental da massa do núcleon, $M_0 = 940\text{MeV}$. Nesta seção, como estamos trabalhando com o estado fundamental, omitimos os índices dos quarks. O autovalor de energia será o mesmo para os três quarks, $E_q \equiv E$. De acordo com a expressão obtida para a massa de um núcleon (2.79), temos

$$M_0 = 3E + BV . \quad (2.83)$$

Para valores da massa dos quarks nulos, os resultados obtidos são $R = 1,715307\text{fm}$, $B = 11,116133\text{MeV}/\text{fm}^3$ e $E_1 = E_2 = E_3 = 235,000002\text{MeV}$. Podemos analisar a variação de B com a massa dos quarks apresentada na Fig. 2.4 a seguir. Este gráfico foi feito com valores de R e dos autovalores de energia que determinam a massa experimental

do núcleon e minimizam a função massa da sacola em relação a R . Note-se que B decresce

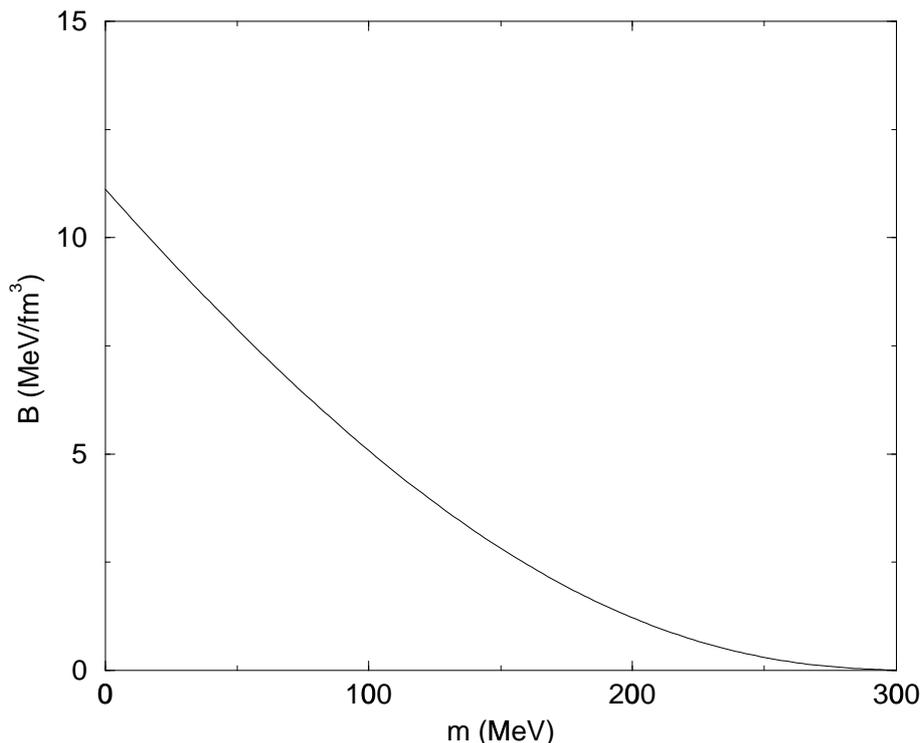


Figura 2.4: Comportamento da constante B da sacola em função da massa do quark.

continuamente à medida que m cresce. Na verdade, este fato é esperado, pois, com a massa do núcleon fixa, há uma compensação entre os dois termos à direita de (2.79): enquanto E é função crescente de m (ver Fig. 2.2), B deve decrescer com este parâmetro. Observe que esta interpretação é intuitiva, pois a Fig. 2.2 é feita para um valor fixo do raio, o comportamento de B em função de m é realizado para valores dos parâmetros e autovalores de energia que fixam a massa do núcleon e a minimizam.

Podemos visualizar melhor os resultados obtidos observando, na Fig. 2.5, as funções de onda de Dirac para quarks de massa nula no estado fundamental. Ressaltamos que, neste gráfico, utilizamos os valores $R = 1,715307\text{fm}$ e $E = 235,000002$, mas poderíamos ter utilizado qualquer valor de R , e $E(R)$ ficaria determinado via a equação de autovalores (2.65). De qualquer modo, os gráficos de $g(r)$ e de $-f(r)$ devem se interceptar em $r = R$. Além disso, observe que o gráfico não chega a completar uma oscilação completa, indicando o estado fundamental do sistema.

No caso de quarks de massa nula, o cálculo é bastante simplificado e pode ser feito

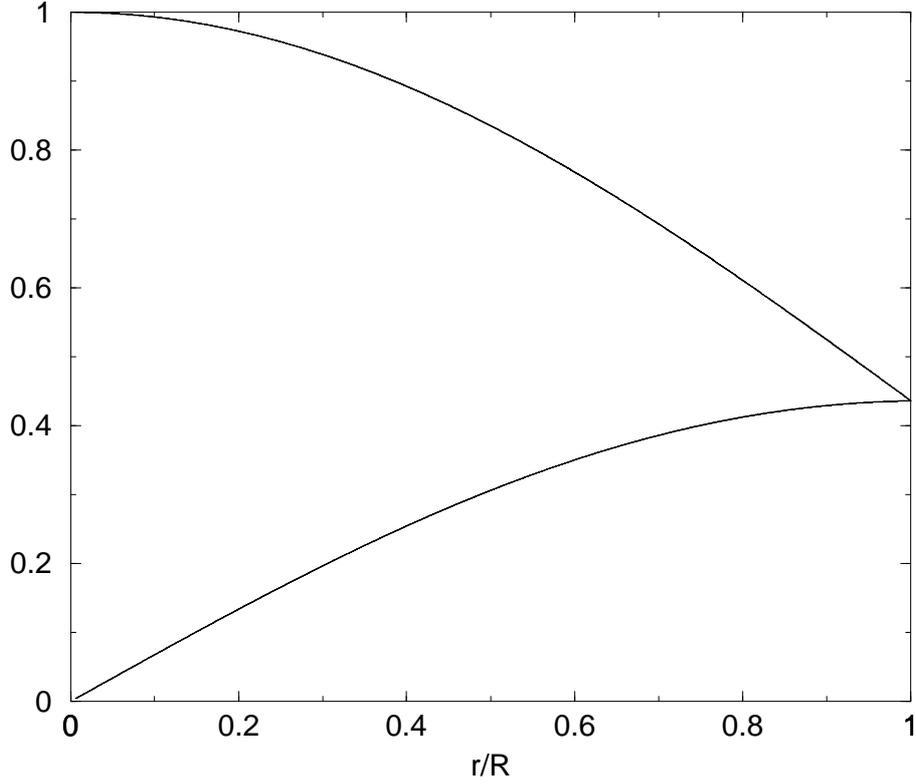


Figura 2.5: Parte radial da função de onda do quark no estado fundamental. A curva superior representa $g(r)/N$, e a inferior, $-f(r)/N$.

analiticamente. Neste caso, como vimos anteriormente, temos $p = E$ e a equação de autovalores para cada quark é dada por

$$j_0(ER) = j_1(ER) . \quad (2.84)$$

Desta relação, vemos que o produto ER assumirá valores correspondentes aos pontos ω de intersecção entre as funções de Bessel envolvidas, de forma que

$$E = \frac{\omega}{R} . \quad (2.85)$$

Vemos que o menor valor de ω corresponderá à energia do estado fundamental. Este valor pode ser encontrado numericamente como $\omega = 2,042787$. As equações (2.81) e (2.83) formam então o sistema de equações

$$-\frac{3E^2}{ER} + 4\pi R^2 B = -\frac{3E}{R} + 4\pi R^2 B = -\frac{3\omega}{R^2} + 4\pi R^2 B = 0 . \quad (2.86)$$

$$M_0 = 3E + BV = \frac{3\omega}{R} + \frac{4\pi BR^3}{3} . \quad (2.87)$$

Da expressão (2.87), fica claro que a massa de um hádron deverá ter um valor mínimo. A massa tende a infinito tanto quando $R \rightarrow 0$, por causa do termo proporcional a $1/R$, como quando $R \rightarrow \infty$, por causa do termo em R^3 . Para um determinado valor do raio, a massa assume o seu menor valor, M_0 , que será o valor físico da massa da sacola. A solução do sistema acima para B e R é

$$R = \left(\frac{3\omega}{4\pi B} \right)^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad B = \frac{3M_0^4}{1024\pi\omega^3} . \quad (2.88)$$

Raio quadrático médio

Com as soluções (2.56) e (2.58) para a função de onda dentro deste modelo, podemos obter uma expressão para o raio quadrático médio de um quark no estado fundamental. A definição do raio quadrático médio é

$$\langle \psi | r^2 | \psi \rangle = \int d^3x r^2 \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) . \quad (2.89)$$

O cálculo desta grandeza está feito em detalhe no apêndice F. Aqui escrevemos diretamente o resultado final,

$$\begin{aligned} \langle \psi | r^2 | \psi \rangle &= \frac{N^2 p R}{6p^5(E+m)} [(E(2(pR)^2 + 3) - 3m)] \\ &+ \frac{N^2}{4p^5(E+m)} \text{sen}(2pR) [(m(3 - 2(pR)^2) - 2E)] \\ &+ \frac{N^2 p R}{2p^5(E+m)} \cos(2pR) [(E - 2m)] , \end{aligned} \quad (2.90)$$

onde a constante de normalização N é dada por (2.62). O raio quadrático de carga da sacola pode ser calculado por

$$r_Q^2 = \sum_{i=1}^3 e_i \langle r_i^2 \rangle , \quad (2.91)$$

onde a soma é feita sobre os quarks. Se todos os quarks estiverem no estado fundamental, o raio quadrático médio será igual para os três quarks, $\langle r_i^2 \rangle \equiv \langle r^2 \rangle$, para $\forall i$, e então

$$r_Q^2 = \left(\sum_{i=1}^3 e_i \right) \langle r^2 \rangle = e \langle r^2 \rangle , \quad (2.92)$$

onde e é a carga do hádron em questão.

A Fig. 2.6 mostra, para o estado fundamental, e para valores de B e de E que determinam a massa do núcleon e minimizam a função massa da sacola em relação a R ,

a dependência entre o raio quadrático médio e a massa do quark, suposta igual para os três quarks, bem como a variação do raio R da sacola com a massa do quark. É natural

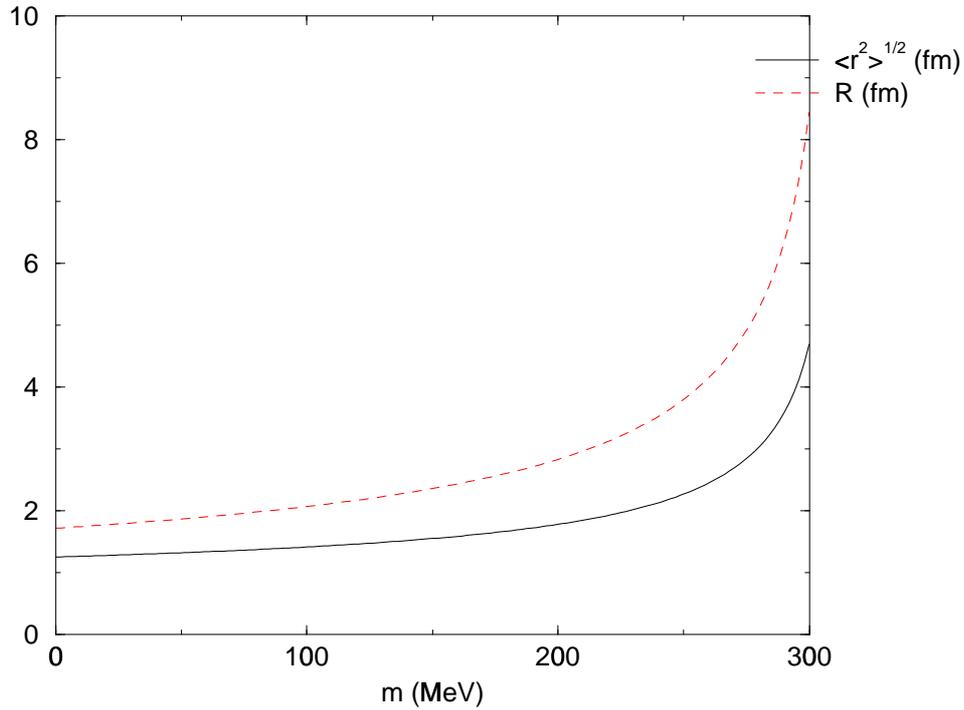


Figura 2.6: Raio quadrático médio, $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ (curva inferior) e raio R da sacola (curva superior) em função da massa do quark.

esperarmos que o valor do raio quadrático médio, que é o valor medido em um experimento, seja menor do que R , que é um parâmetro do modelo, pois a função de onda dos quarks só é não-nula para $r < R$. Então uma média dos valores do raio onde há maior probabilidade de encontrar-se os quarks deve ser um valor entre zero e R .

Capítulo 3

Modelos de Gases de Partículas

O próximo passo no desenvolvimento desta dissertação é utilizar os resultados do modelo de sacola do MIT, em especial a expressão obtida para a massa de um hádron, na descrição do modelo termodinâmico para a matéria nuclear desenvolvido por S. Kagiya, A. Nakamura e T. Omodaka[11]. Este modelo, a ser descrito no próximo capítulo, baseia-se no modelo de gás de Fermi, com a introdução de características do modelo de gás de Van der Waals, cujos resultados principais serão utilizados nos próximos capítulos. Com este intuito, dedicamos este capítulo ao desenvolvimento de modelos de gases de partículas.

3.1 O modelo de gás ideal

Nesta seção apresentamos o modelo mais simples para a descrição física de um gás de partículas, conhecido como modelo de gás ideal[12]. A seção seguinte tratará do gás de Van der Waals, que é baseado neste.

Inicialmente, consideremos um gás de partículas, confinado em um recipiente de volume V , formado por um grande número de partículas movendo-se e chocando-se umas com as outras e com as paredes do recipiente. As variáveis macroscópicas (termodinâmicas) que descrevem o sistema são, além do volume V : a pressão p do gás, oriunda das colisões das partículas do gás com as paredes do recipiente, e a temperatura T , devida à energia cinética das partículas. O modelo mais simples de gás é o chamado modelo de gás perfeito ou ideal. Neste modelo, não há interação à distância entre as partículas que compõem

o gás, ou seja, elas só interagem (pontualmente) quando colidem, alterando as suas velocidades. Em outras palavras, não há energia potencial armazenada no gás, somente a energia cinética das partículas. Ainda no modelo de gás ideal, o volume ocupado por todo o agregado de partículas é desprezível se comparado com V . Com estas duas hipóteses,

⇒ mantendo o volume V fixo, se aumentarmos a energia cinética das partículas, ou seja, T , a pressão aumentará também;

⇒ para manter a pressão fixa, se aumentarmos a energia cinética das partículas, teremos que aumentar o volume, para aumentar a área útil de colisão das partículas com as paredes do recipiente;

⇒ e finalmente, mantendo T fixa, uma pressão maior significa que o volume V foi diminuído, pois isso diminui a área de colisão.

A relação mais simples que engloba as três características mencionadas acima é a chamada equação de estado do gás ideal, dada por

$$pV = NkT . \quad (3.1)$$

A constante de proporcionalidade k denota a constante de Boltzmann.

3.2 O modelo de gás de Van der Waals

O modelo de gás ideal é uma boa aproximação se não tivermos muitas partículas presentes no gás, ou, mais exatamente, se a trajetória de uma partícula não é sensivelmente afetada pela presença das outras. Diz-se que o livre caminho médio de uma partícula não é afetado pelas colisões com outras partículas neste caso. Todavia, à medida em que aumenta o número de partículas comparativamente à dimensão do recipiente onde o gás está, as partículas passam a sentir mais intensamente a presença das outras. O caminho real que cada partícula pode percorrer sem colidir é menor, ou, em outras palavras, o volume real que as partículas têm para se movimentar é menor do que V . Em 1873, Van der Waals introduziu as hipóteses que definem o modelo de gás de Van der Waals:

- o volume efetivo V' que as partículas têm para se movimentar é o volume total V do recipiente descontado um fator dependente do diâmetro da partícula (característico

de cada gás) e do número de partículas, sendo dado por

$$V' = V - bNv , \quad (3.2)$$

onde N é o número de partículas presentes no gás, v é o volume de uma partícula e b é uma constante de proporcionalidade. Esta transformação, proposta como vimos por Van der Waals, limita o volume ocupado pelas partículas, de modo que uma partícula não pode ocupar o espaço onde outra já está. Desta maneira, a hipótese descrita simula uma repulsão entre as partículas do gás;

- a pressão efetiva p' que atua sobre as partículas do gás é a soma da pressão externa p exercida sobre as paredes do recipiente e da pressão interna, produzida pela interação de longo alcance entre as partículas do gás. Supondo-se que esta interação seja atrativa e proporcional ao número de pares de partículas, temos

$$p' = p + a \frac{N^2}{V^2} , \quad (3.3)$$

onde a é uma constante característica de cada gás.

Substituindo V e p em (3.1), que é a equação de estado do gás ideal, por V' e p' , obtemos

$$(V - bNv) \left(p + a \frac{N^2}{V^2} \right) = NkT , \quad (3.4)$$

que é a equação de estado de um gás no modelo de Van der Waals. Algumas características deste modelo serão usadas nas próximas seções para modelar a matéria nuclear. Para uma referência sobre o modelo de gás de Van der Waals, ver a Ref.[12].

3.3 O modelo de gás de Fermi

Nesta seção, descrevemos o modelo de gás de Fermi, tendo em vista que, na descrição do modelo de Kagiya, no capítulo 4, consideraremos um sistema formado por prótons e nêutrons. Para uma referência ao gás de Fermi, ver[13]. Consideramos inicialmente um sistema formado por N férmions não-interagentes, confinados em uma região do espaço. O objetivo principal desta seção é justificar que a densidade de partículas não é independente do módulo do máximo momento linear que uma partícula pode apresentar neste sistema.

Soluções da equação de Dirac

O nosso ponto de partida é a densidade lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi . \quad (3.5)$$

Utilizando-se as equações de Euler-Lagrange (2.3) para o campo ψ , obtemos

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 , \quad (3.6)$$

que é simplesmente a equação de Dirac de partícula livre. Tomando o hermitiano conjugado da equação de Dirac acima e utilizando a propriedade (A.18) das matrizes de Dirac, podemos obter

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 . \quad (3.7)$$

Agora, multiplicamos (3.7) à direita por ψ ,

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 , \quad (3.8)$$

e (3.6) à esquerda por $\bar{\psi}$,

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = 0 . \quad (3.9)$$

A adição dos dois resultados, (3.8) e (3.9), leva a

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \partial_\mu j^\mu = 0 , \quad (3.10)$$

de onde concluímos que a corrente quadrvetorial j^μ é conservada.

Agora procuramos soluções para a equação de Dirac com a forma

$$u(x) = u(\vec{k}, \lambda)e^{-i\epsilon^{(+)}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (3.11)$$

caso a energia seja positiva e

$$v(x) = v(\vec{k}, \lambda)e^{-i\epsilon^{(-)}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (3.12)$$

para o caso de energias negativas. O quadrvetor momento linear é definido por $k^\mu = (\epsilon(\vec{k}), \vec{k})$, e λ representa os outros graus de liberdade, como o spin e o isospin. Salientamos

que, como os bárions estão sobre a camada de energia,¹ uma vez que estão livres, temos $\epsilon = \epsilon(\vec{k})$. Substituindo (3.11) em (3.6), obtemos a equação

$$[i\gamma^\mu (-ik_\mu) - m] u(\vec{k}, \lambda) = 0, \quad (3.14)$$

que pode ainda ser escrita como

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m) u(\vec{k}, \lambda) = \epsilon^{(+)} u(\vec{k}, \lambda). \quad (3.15)$$

A equação acima é a equação de Dirac de partícula livre escrita no espaço de momento linear. Podemos agora aplicar o operador $\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m$ à esquerda de (3.15), obtendo

$$|\vec{k}|^2 + m^2 = \epsilon^2, \quad (3.16)$$

onde utilizamos as propriedades de anti-comutação entre as matrizes α_i . Expressamos a energia das partículas como

$$\epsilon^{(\pm)} = \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \equiv \pm E(k). \quad (3.17)$$

Na notação introduzida acima, $k = |\vec{k}|$. Temos então soluções de energia positiva e negativa, como esperado. Agora aplicamos a solução de energias negativas (3.12) na equação de Dirac (3.6), obtendo, no espaço de momento linear,

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} - \beta m) v(\vec{k}, \lambda) = -\epsilon^{(-)} v(\vec{k}, \lambda). \quad (3.18)$$

Reescrevemos a equação de Dirac para energias positivas

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m) u(\vec{k}, \lambda) = E(k) u(\vec{k}, \lambda) \quad (3.19)$$

¹O termo “sobre a camada de energia” advém da tradução da expressão “*on the energy shell*” que caracteriza, no caso considerado, que a seguinte relação é satisfeita: $p^\mu p_\mu = m^2$ ou

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2, \quad (3.13)$$

ou seja, a relação entre energia e momento linear de uma partícula de Dirac, relativística, livre. O termo justifica-se porque, fixando-se m , as variações infinitesimais de \vec{p}^2 correspondem valores de E que representam superfícies esféricas concêntricas, as assim denominadas “camadas de energia”. Em outras palavras, E depende apenas do módulo do vetor momento linear \vec{p} , e o termo justifica-se pela simetria esférica da relação.

e para energias negativas

$$\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} - \beta m\right) v(\vec{k}, \lambda) = E(k)v(\vec{k}, \lambda) . \quad (3.20)$$

Podemos obter soluções explícitas para os espinores de Dirac. Substituímos $u(\vec{k})$, escrito em termos de uma componente superior e outra inferior,

$$u(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} ,$$

na equação de Dirac (3.19),

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = E(k) \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} ,$$

o que nos permite escrever o sistema de equações

$$\begin{aligned} (E - m) \chi - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \phi &= 0 \\ (E + m) \phi - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \chi &= 0 \end{aligned} . \quad (3.21)$$

Utilizamos agora, por exemplo, a segunda equação para expressar ϕ em termos de χ ,

$$u(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E+m} \chi \end{pmatrix} . \quad (3.22)$$

Para o espinor de energia negativa,

$$v(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} , \quad (3.23)$$

seguimos procedimento análogo. O resultado obtido é

$$v(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E+m} \phi \\ \phi \end{pmatrix} . \quad (3.24)$$

Escolhendo espinores de duas componentes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ em (3.22) e (3.24), obtemos quatro soluções linearmente independentes. A normalização já introduzida em (3.22) e em (3.24) é

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad ; \quad v^\dagger(\vec{k}, \lambda) v(\vec{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad ; \quad u^\dagger(\vec{k}, \lambda) v(-\vec{k}, \lambda') = 0 . \quad (3.25)$$

Será útil neste momento obter alguns resultados com relação aos espinores de Dirac que serão utilizados mais adiante, neste capítulo. Voltamos às equações de Dirac (3.19) para energias positivas e (3.20) para energias negativas. Multiplicamos (3.19) à esquerda por $u^\dagger(\vec{k}, \lambda)\beta$, obtendo

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m \right) u(\vec{k}, \lambda) = E(k) \bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) . \quad (3.26)$$

Tomamos o hermitiano conjugado de (3.19) e, após, multiplicamos o resultado à direita por $\beta u(\vec{k}, \lambda)$, obtendo

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \left(-\vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m \right) u(\vec{k}, \lambda) = E(k) \bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) . \quad (3.27)$$

Somando os dois resultados, (3.26) e (3.27), temos

$$m u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) = E(k) \bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \quad (3.28)$$

De maneira análoga, podemos obter

$$m v^\dagger(\vec{k}, \lambda) v(\vec{k}, \lambda) = -E(k) \bar{v}(\vec{k}, \lambda) v(\vec{k}, \lambda) ; \quad (3.29)$$

$$\bar{v}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) = 0 \quad ; \quad \bar{u}(\vec{k}, \lambda) v(\vec{k}, \lambda) = 0 . \quad (3.30)$$

Ainda, da equação de Dirac para espinores de energia positiva (3.19), temos

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k} u(\vec{k}, \lambda) = (E(k) - \beta m) u(\vec{k}, \lambda) . \quad (3.31)$$

Multiplicamos agora este resultado pelo hermitiano conjugado do espinor $u(\vec{k}, \lambda)$, obtendo

$$\begin{aligned} u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right) u(\vec{k}, \lambda) &= u^\dagger(\vec{k}, \lambda) (E(k) - \beta m) u(\vec{k}, \lambda) \\ &= E(k) u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) - m \bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \\ &= E(k) u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) - \frac{m^2}{E(k)} u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) = \left(\frac{E^2(k) - m^2}{E(k)} \right) = \frac{|\vec{k}|^2}{E(k)} , \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde utilizamos o resultado (3.28). Seguindo procedimento análogo, podemos utilizar a equação de Dirac para espinores de energia negativa para obter

$$v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right) v(\vec{k}, \lambda) = \frac{|\vec{k}|^2}{E(k)} . \quad (3.33)$$

A solução mais geral da equação de Dirac (3.6) é obtida por superposição das soluções encontradas:

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[A_{\vec{k}\lambda} u(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}t} + B_{\vec{k}\lambda}^* v(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}t} \right]. \quad (3.34)$$

Aqui, $A_{\vec{k}\lambda}$ e $B_{\vec{k}\lambda}^*$ são coeficientes da expansão² e λ representa os outros graus de liberdade que não estão associados ao momento linear, como o spin ou o isospin.

Componentes do tensor energia-momento

Utilizando a solução geral (3.34), podemos calcular grandezas de interesse, como a densidade de energia e a pressão, através do tensor energia-momento (2.75),

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.35)$$

Aplicada à densidade lagrangiana (3.5), a expressão para o tensor energia-momento (3.35) resulta na seguinte expressão:

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi. \quad (3.36)$$

Uma maneira de identificar o significado físico de cada componente de $T^{\mu\nu}$ é escrevê-lo[14] na forma de uma matriz de ordem 4×4 ,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & k^1 & k^2 & k^3 \\ k^1 & p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ k^2 & p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ k^3 & p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{pmatrix}.$$

Passamos agora à análise do significado de cada componente desta matriz. Esta representação é válida para a descrição de um fluido relativístico sobre o qual somente agem forças externas puras (uma força pura é aquela que não altera a massa de repouso de uma partícula [14]). O princípio básico que rege cada uma das quantidades na matriz acima é

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = F^\mu, \quad (3.37)$$

²O significado da construção desta forma de solução ficará claro mais adiante, quando for tratada a quantização do campo. Por ora, $A_{\vec{k}\lambda}$ e $B_{\vec{k}\lambda}^*$ são simplesmente coeficientes de uma expansão linear das soluções.

onde $F^\mu = (\vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f})$ é o quadrivetor que representa a densidade de forças externas agindo sobre o sistema. O vetor \vec{u} representa a velocidade do sistema em relação a algum referencial adotado. Note-se que esta expressão é formalmente similar à segunda lei do movimento de Newton, na qual a variação do momento linear de uma partícula é devida à ação de forças externas. A notação ${}_{,\nu}$ indica derivada em relação à coordenada espacial x^ν , ou seja, ${}_{,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$. Na lei acima, só temos a liberdade de escolher o índice μ , já que há uma soma implícita sobre ν , de 0 a 3. Lembramos que o índice 0 (zero) identifica componentes temporais, e os índices $i = 1, 2, 3$ (latinos) identificam componentes espaciais. Então, no caso em que $\mu = 0$, temos

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{k} = \vec{f} \cdot \vec{u} . \quad (3.38)$$

Esta equação expressa a conservação da energia. Toda a energia por unidade de volume (ϵ) que sai de uma pequena região do sistema limitada por uma superfície deve ser compensada por uma certa quantidade de momento por unidade de volume (\vec{k}) que atravessa essa superfície. Qualquer variação nessa quantidade de energia local do sistema deve ser causada por uma força externa. Desta maneira, o lado direito da expressão acima pode ser interpretado como a potência por unidade de volume desenvolvida pelo sistema devido à ação da força externa. Com a escolha $\mu = i$ em (3.37), chegamos a

$$\frac{\partial k^i}{\partial t} + \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = f^i . \quad (3.39)$$

Esta também é uma equação da continuidade. Ela diz que uma variação do momento por unidade de volume em uma pequena região do sistema deve ser acompanhada de uma variação na pressão que o sistema exerce na superfície que limita essa região (expressa pela matriz $\{p^{ij}\}$). Além disso, qualquer outra variação do momento linear deve ser causada por forças externas.

Alguns Observáveis

A partir da definição do tensor energia-momento e das considerações feitas acima sobre o significado físico das componentes do tensor energia-momento, podemos obter algumas quantidades físicas. A pressão p que o sistema exerce pode ser escrita como

$$p = \frac{T^{jj}}{3} = \frac{i}{3} \bar{\psi} \gamma^j \partial^j \psi . \quad (3.40)$$

O Hamiltoniano do modelo é dado pela integral espacial da densidade de energia ϵ ,

$$H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \epsilon = i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \partial^0 \psi , \quad (3.41)$$

Além disso, como a corrente quadrivetorial j^μ é conservada, de acordo com (3.10), o número bariônico, B , também é uma constante de movimento. Calculamos esta quantidade como a integral espacial da componente temporal da corrente (densidade), ou seja,

$$B = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^\dagger \psi . \quad (3.42)$$

Quantização do campo

Antes de continuar os cálculos, fazemos a quantização do modelo na maneira usual. Em se tratando de férmions, temos o operador campo, $\psi(x)$, e o momento conjugado a ele, π , definido por

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\psi^\dagger . \quad (3.43)$$

A quantização do campo de Dirac é determinada através das relações de anticomutação

$$\{\hat{\psi}_a(\vec{x}), \hat{\pi}_b(\vec{x}')\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (3.44)$$

o que leva a

$$\{\hat{\psi}_a(\vec{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(\vec{x}')\} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (3.45)$$

A quantização dos campos equivale a elevar os coeficientes $A_{\vec{k},\lambda}$ e $B_{\vec{k},\lambda}$ à condição de operadores. De fato, pode-se mostrar que a quantização dada pela regra (3.44) é equivalente à condição

$$\{\hat{A}_{\vec{k},\lambda}, \hat{A}_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger\} = \{\hat{B}_{\vec{k},\lambda}, \hat{B}_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'} . \quad (3.46)$$

Nesta última expressão, os operadores $\hat{A}_{\vec{k},\lambda}$ e $\hat{B}_{\vec{k},\lambda}$ são interpretados como operadores de aniquilação, respectivamente, de bárions e de antibárions, com momento linear \vec{k} e números quânticos λ . Os operadores $\hat{A}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ e $\hat{B}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ são operadores de criação, respectivamente, de bárions e de antibárions, com momento linear \vec{k} e números quânticos λ .

Note que $\hat{B}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ substitui $B_{\vec{k},\lambda}^*$ na expansão (3.34) para $\psi(\vec{x}, t)$, e $\hat{A}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ substitui $A_{\vec{k},\lambda}^*$ na expansão de $\psi^*(\vec{x}, t)$. Desta forma, a solução geral da equação de Dirac (3.34) adquire o status de operador, podendo destruir bárions e/ou criar antibárions, com momento linear e graus de liberdade λ bem definidos.

O número bariônico

O número bariônico, agora operador, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \int_V d^3x \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \int_V d^3x \left[\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right] \\
&\quad \cdot \left[\hat{A}_{\vec{k}'\lambda'} u(\vec{k}', \lambda') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k}')t} + \hat{B}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger v(\vec{k}', \lambda') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k}')t} \right] \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda\lambda'} \left[\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{A}_{\vec{k}\lambda} u(\vec{k}, \lambda') + \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{B}_{-\vec{k}\lambda'}^\dagger v(-\vec{k}, \lambda') e^{i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t - i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right] \\
&\quad + \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda\lambda'} \left[\hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{A}_{-\vec{k}\lambda'} u(-\vec{k}, \lambda') e^{i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t - i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{B}_{\vec{k}\lambda'}^\dagger v(\vec{k}, \lambda') \right] \\
&= \sum_{\vec{k}\lambda} \left[\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right] , \tag{3.47}
\end{aligned}$$

onde utilizamos a integral

$$\frac{1}{V} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \tag{3.48}$$

e a normalização (3.25). Note-se que os termos em $u^\dagger v$ e em $v^\dagger u$ não contribuem.

O próximo passo será escrever os operadores na chamada ordem normal, ou seja, escrever sempre os operadores de aniquilação à direita dos de criação, de modo que atuem diretamente sobre o vetor de estado. No caso de este vetor ser o vácuo, teremos um resultado nulo, ou seja,

$$\hat{B}_{\vec{k}\lambda} |0\rangle = \hat{A}_{\vec{k}\lambda} |0\rangle = 0 , \tag{3.49}$$

o que facilita bastante os cálculos. Lembramos que $|0\rangle$ representa o vácuo sem interação, definido pelas relações acima. Sempre é possível inverter a ordem dos operadores utilizando as relações de anticomutação (3.46). O termo aditivo que é obtido, todavia, não envolve operadores de criação nem de aniquilação, sendo apenas uma constante. Como veremos mais adiante, poderemos eliminar esta constante de maneira sistemática. Utilizando então (3.46), escrevemos o operador número bariônico como

$$\hat{B} = \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + 1 - \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) = \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} - \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) + \sum_{\vec{k}\lambda} 1 . \tag{3.50}$$

Claramente, o último termo, que não envolve operadores \hat{A} ou \hat{B} , diverge quando aplicado em qualquer estado, visto que a soma é feita sobre todos os valores possíveis do vetor \vec{k} . Desta maneira, devemos subtrair este infinito de maneira consistente. A maneira padrão de fazer isso é subtrair a quantidade

$$\langle 0|\hat{B}|0\rangle = \sum_{\vec{k}\lambda} \langle 0|0\rangle = \sum_{\vec{k}\lambda} 1, \quad (3.51)$$

chamada de valor esperado de vácuo do operador \hat{B} . Desse modo obtemos

$$\hat{B} = \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} - \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right). \quad (3.52)$$

Vemos que o procedimento de escrever os operadores na ordem normal pode ser feito, pois a única consequência é a adição de um infinito na expressão do operador em questão (no caso, o operador número bariônico). Como este valor é constante, podemos redefinir o que seja a energia do vácuo, e assim subtraímos a quantidade divergente.

O Hamiltoniano

Podemos obter também uma forma específica para o Hamiltoniano, em termos dos operadores de criação e aniquilação de bárions e antibárions, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int_V d^3x T^{00} = i \int_V d^3x \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi = \\ & \int_V d^3x \frac{i}{V} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \left[\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \bar{u}(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \bar{v}(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right] \\ & \cdot \gamma_0 \partial_0 \left[\hat{A}_{\vec{k}'\lambda'} u(\vec{k}', \lambda') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k}')t} + \hat{B}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger v(\vec{k}', \lambda') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k}')t} \right] \\ &= \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \epsilon^{(+)}(\vec{k}') \hat{A}_{\vec{k}'\lambda'} u(\vec{k}', \lambda') \\ &+ \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x} + i(\epsilon^{(+)}(\vec{k}) - \epsilon^{(-)}(\vec{k}'))t} \epsilon^{(-)}(-\vec{k}') \hat{B}_{-\vec{k}'\lambda'}^\dagger v(-\vec{k}', \lambda') \\ &+ \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x} + i(\epsilon^{(-)}(\vec{k}) - \epsilon^{(+)}(\vec{k}'))t} \epsilon^{(+)}(-\vec{k}') \hat{A}_{-\vec{k}'\lambda'} u(-\vec{k}', \lambda') \\ &+ \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \epsilon^{(-)}(\vec{k}') \hat{B}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger v(\vec{k}', \lambda'), \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde, no último passo, nos termos em $u^\dagger v$ e em $v^\dagger u$, fizemos a troca $\vec{k}' \rightarrow -\vec{k}'$, já que a soma é feita sobre todos os valores de momento. Agora, utilizando a integral (3.48) e as relações de ortogonalidade entre os espinores de Dirac (3.25), escrevemos o Hamiltoniano como

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{(+)}(\vec{k}) \hat{A}_{\vec{k}, \lambda'} u(\vec{k}, \lambda') \\
&+ \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i(\epsilon^{(+)}(\vec{k}) - \epsilon^{(-)}(\vec{k}))t} \epsilon^{(-)}(-\vec{k}) \hat{B}_{-\vec{k}\lambda'}^\dagger v(-\vec{k}, \lambda') \\
&+ \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i(\epsilon^{(-)}(\vec{k}) - \epsilon^{(+)}(\vec{k}))t} \epsilon^{(+)}(-\vec{k}) \hat{A}_{-\vec{k}\lambda'} u(-\vec{k}, \lambda') \\
&+ \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda\lambda'} \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \epsilon^{(-)}(\vec{k}) \hat{B}_{\vec{k}, \lambda'}^\dagger v(\vec{k}, \lambda') . \\
&= \sum_{\vec{k}\lambda} \left[\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \epsilon^{(+)}(\vec{k}) \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \epsilon^{(-)}(\vec{k}) \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right] = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} - \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right) .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Mais uma vez seguimos o procedimento de escrever os operadores no ordenamento normal. Utilizando a relação (3.44), obtemos

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) - \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} . \tag{3.55}$$

Claramente, o último termo, que não envolve operadores \hat{A} ou \hat{B} , diverge quando aplicado em qualquer estado, já que $|\vec{k}|^2$ é sempre positivo ou nulo. Desta maneira, devemos subtrair este infinito de maneira consistente. A maneira padrão de fazer isso é subtrair do Hamiltoniano o valor esperado de vácuo deste operador,

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = - \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} , \tag{3.56}$$

de onde obtemos

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) . \tag{3.57}$$

Note-se que isto não significa que estamos desconsiderando as partículas de energia negativa do mar de Dirac. Foi feita apenas uma redefinição do zero de energia.

Matéria nuclear

O sistema físico em consideração é a matéria nuclear uniforme. Consideraremos o estado em que os níveis de energia estão preenchidos por bárions até o momento linear k_F , e denominaremos este estado por $|\Psi_0\rangle$. Note-se que os bárions são férmions e portanto, de acordo com o princípio da exclusão de Pauli, não podem estar todos no estado de mais baixa energia, ou de momento nulo. Matematicamente, podemos escrever

$$\begin{cases} \hat{B}_{\vec{k}\lambda}|\Psi_0\rangle = 0 & , \text{qualquer } \vec{k} \\ \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger|\Psi_0\rangle = 0 & , |\vec{k}| < k_F \\ \hat{A}_{\vec{k}\lambda}|\Psi_0\rangle = 0 & , |\vec{k}| > k_F . \end{cases} \quad (3.58)$$

Observamos que $\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda}|\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle$ se $k < k_F$, sendo nulo no caso contrário.

Podemos calcular a densidade bariônica ρ_B utilizando a expressão obtida para o operador número bariônico e considerando o estado físico $|\Psi_0\rangle$,

$$\begin{aligned} \rho_B &= \frac{\langle\Psi_0|\hat{B}|\Psi_0\rangle}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\lambda} \langle\Psi_0| \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} - \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) |\Psi_0\rangle \\ &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \langle\Psi_0| \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} - \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) |\Psi_0\rangle \\ &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3} = \frac{\gamma k_F^3}{6\pi^2} . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Neste cálculo, fizemos a passagem de uma soma discreta para o contínuo, ou seja,

$$\frac{1}{V} \sum_k \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k , \quad (3.60)$$

e onde γ representa o fator de degenerescência do sistema em relação aos graus de liberdade expressos por λ . Vemos então que a densidade bariônica não é independente do módulo do máximo momento k_F que uma partícula pode ter no sistema em consideração.

Agora, calculamos o valor esperado da energia E do sistema,

$$\begin{aligned} E &= \langle\Psi_0|\hat{H}|\Psi_0\rangle = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \langle\Psi_0| \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) |\Psi_0\rangle \\ &= \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \langle\Psi_0| \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) |\Psi_0\rangle \\ &= \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Esta última integral pode ser calculada. O resultado é

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \\
&= \frac{\gamma V m^4}{16\pi^2} \ln m + \frac{\gamma V}{8\pi^2} \left[k_F (k_F^2 + m^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2}}{2} - \frac{m^4}{2} \ln \left(k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2} \right) \right] \\
&= \frac{\gamma V}{8\pi^2} \left[k_F \left(k_F^2 + \frac{m^2}{2} \right) \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{m^4}{2} \ln \left(\frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2}}{m} \right) \right] . \\
&= \frac{3N}{4k_F^3} \left[k_F \left(k_F^2 + \frac{m^2}{2} \right) \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{m^4}{2} \ln \left(\frac{k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2}}{m} \right) \right] .
\end{aligned} \tag{3.62}$$

O cálculo do valor esperado da pressão será feito a seguir. Para ser consistente com os cálculos já feitos, consideraremos os operadores na ordem normal.

$$\begin{aligned}
p &= \frac{i}{3} \langle \Psi_0 | : \bar{\psi} \gamma^j \partial^j \psi : | \Psi_0 \rangle = \frac{i}{3} \langle \Psi_0 | : \psi^\dagger \alpha^j \partial^j \psi : | \Psi_0 \rangle \\
&= -\frac{i}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \langle \Psi_0 | : \left[\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \right] \\
&\quad \cdot \alpha^j \partial_j \left[\hat{A}_{\vec{k}'\lambda'} u(\vec{k}', \lambda') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k}')t} + \hat{B}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger v(\vec{k}', \lambda') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k}')t} \right] : | \Psi_0 \rangle \\
&= -\frac{i}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \langle \Psi_0 | : \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} \\
&\quad \cdot (\alpha^j \partial_j) \hat{A}_{\vec{k}'\lambda'} u(\vec{k}', \lambda') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k}')t} : | \Psi_0 \rangle \\
&\quad - \frac{i}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \langle \Psi_0 | : \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \\
&\quad \cdot (\alpha^j \partial_j) \hat{B}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger v(\vec{k}', \lambda') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k}')t} : | \Psi_0 \rangle .
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Note-se que os termos cruzados $u^\dagger v$ e $v^\dagger u$ não contribuem. Dessa maneira, a pressão é obtida de

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{i}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \langle \Psi_0 | : \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} \\
&\quad \cdot (\alpha^j \partial_j) \hat{A}_{\vec{k}\lambda} u(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(+)}(\vec{k})t} : | \Psi_0 \rangle \\
&\quad - \frac{i}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \langle \Psi_0 | : \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} \\
&\quad \cdot (\alpha^j \partial_j) \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger v(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\epsilon^{(-)}(\vec{k})t} : | \Psi_0 \rangle ,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \langle \Psi_0 | : \hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) \hat{A}_{\vec{k}\lambda} u(\vec{k}, \lambda) : | \Psi_0 \rangle \\
&\quad - \frac{1}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \langle \Psi_0 | : \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger v^\dagger(\vec{k}, \lambda) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) \hat{B}_{\vec{k}\lambda} v(\vec{k}, \lambda) : | \Psi_0 \rangle
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Utilizando os resultados (3.32) e (3.33), a pressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{|\vec{k}|^2}{E(k)} \langle \Psi_0 | : \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} - \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) : | \Psi_0 \rangle \\
&= \frac{1}{3V} \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{|\vec{k}|^2}{E(k)} \langle \Psi_0 | \left(\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda} \right) | \Psi_0 \rangle = \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{|\vec{k}|^2}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} d^3 k .
\end{aligned} \tag{3.66}$$

A integral acima também pode ser facilmente calculada, obtendo-se

$$\begin{aligned}
p &= \frac{4\pi\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk \\
&= \frac{\gamma}{24\pi^2} \left[k_F^3 E_F - \frac{3m^2 k_F E_F}{2} + \frac{3m^4}{2} \ln \left(\frac{k_F + E_F}{m} \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{3.67}$$

onde $E_F \equiv \sqrt{k_F^2 + m^2}$.

Capítulo 4

Modelo de Kagiya

Neste capítulo será descrito o modelo para a matéria nuclear desenvolvido por S. Kagiya, A. Nakamura e T. Omodaka[11]. Este modelo incorpora os resultados obtidos para a massa de uma sacola no modelo MIT, descrito no capítulo 2. No modelo de Kagiya, uma sacola sofre pressão das outras sacolas, e o volume assumido por ela é menor do que o volume de uma sacola isolada. Como consideraremos altas densidades bariônicas, o modelo também agregará os efeitos do volume de exclusão *a la Van der Waals*, para evitar que duas ou mais sacolas se superponham. A interação do tipo troca de partículas garante a propriedade de saturação da matéria nuclear à densidade normal, bem como o desconfinamento a altas densidades.

4.1 Descrição do modelo

Nesta seção, ao descrevermos o modelo desenvolvido por Kagiya, S., Nakamura, A. e Omodaka, T. para um sistema de núcleons, temos por objetivo descrever propriedades da matéria nuclear, tais como energia de ligação e densidade bariônica de saturação. Inicialmente determinaremos a massa de um núcleon isolado, de acordo com o modelo de sacola do MIT, exposto no capítulo 2.

Massa de uma sacola

Consideramos um núcleon isolado e confinado em uma região com volume v , denominada convenientemente de sacola. De acordo com o modelo do MIT, a expressão para a

massa M de uma sacola, na aproximação mais simples de uma sacola esférica e com raio constante no tempo, é dada por (2.87), que, expressa em termos do volume da sacola (que passará a ser denotado por v), é escrita como

$$M = kv^{-1/3} + Bv . \quad (4.1)$$

Na expressão acima, supomos que os três quarks que compõem o núcleon estão no estado fundamental e possuem massa nula. Além disso, k é um parâmetro (adimensional) do modelo. Se compararmos esta expressão com (2.87), do modelo do MIT, vemos que k está relacionado com os modos de vibração ω dos quarks dentro da sacola. A constante B representa a diferença de energia por unidade de volume entre os vácuos perturbativo e não-perturbativo da CDQ. O primeiro termo do lado direito de (4.1) refere-se à energia dos quarks, que se movimentam livres dentro da sacola. A expressão (4.1) é uma função de v , mas esperamos que haja um valor de M que represente a massa física da sacola. Em outras palavras, devemos encontrar um valor de v que minimize a função $M(v)$. De fato, vemos que M tende a infinito tanto se v é muito pequeno, devido à contribuição dos quarks ao primeiro termo, quanto se v tende a infinito, devido à contribuição do vácuo. Portanto, deve haver um valor v_0 de v que minimiza $M(v)$. Este valor pode ser calculado por

$$\left. \frac{\partial M}{\partial v} \right|_{v=v_0} = -\frac{1}{3}k v_0^{-4/3} + B = 0 , \quad (4.2)$$

de onde obtemos

$$v_0 = \left(\frac{k}{3B} \right)^{3/4} , \quad (4.3)$$

e

$$M_0 \equiv M(v_0) = 4 \left(\frac{k}{3} \right)^{3/4} B^{1/4} \quad (4.4)$$

representa a massa da sacola. Os parâmetros B e k podem ser determinados diretamente usando-se os valores experimentais do raio de carga do próton $R_0 = 0,82 fm$ e da massa do núcleon $M_0 = 0,94 GeV$:

$$k = 4,722579 \quad ; \quad B = 101,750708 MeV/fm^3 . \quad (4.5)$$

Matéria nuclear

Agora consideramos a matéria nuclear, ou seja, um sistema físico hipotético constituído por um número infinito de núcleons. Na realidade, estritamente falando, matéria nuclear não existe na natureza. Porém, um exemplo de um sistema real cujas características se aproximam daquelas da matéria nuclear é uma estrela de nêutrons, que possui da ordem de 10^{57} partículas. O modelo de matéria nuclear é porém útil quando efeitos de superfície em um dado sistema nuclear podem ser desprezados, como por exemplo na descrição de propriedades internas de um núcleo pesado. Para efeitos de cálculo, descrevemos o sistema com um número A de núcleons, e no final tomamos o limite em que A tende a infinito. Dos A núcleons, Z são prótons e N são nêutrons. Cada núcleon possui um volume v , e o sistema está confinado em um volume V . Desejamos estudar o comportamento deste sistema levando em conta as interações entre as sacolas. Veremos que, como as sacolas não estão mais isoladas, elas exercem pressões microscópicas umas sobre as outras, e o volume v de uma sacola no interior do sistema não será mais igual ao valor do de uma sacola isolada, representado por v_0 , mas um valor menor.

O ponto de partida que utilizaremos para estudar este modelo de matéria nuclear é a função energia interna do sistema, ou seja, a soma de todos os tipos de energia que o sistema carrega: a energia cinética das sacolas e a energia de interação entre elas. É natural que a energia interna E dependa do número de partículas e do volume V ocupado por elas. Além disso, E terá uma dependência explícita no volume v de uma sacola. Isto se deve ao fato de que estaremos interessados em variar a densidade bariônica $\rho \equiv A/V$. No regime de altas densidades, a possível superposição de duas ou mais sacolas não pode ser desconsiderada. Para obter resultados mais realistas, introduziremos os efeitos do volume de exclusão *a la Van der Waals*, de onde a dependência explícita em v deverá ser incorporada ao formalismo. Finalmente, devemos esperar que a energia interna E dependa também da massa de uma sacola, $M(v)$. Aqui introduzimos no modelo de Kagiya o resultado para a massa de uma sacola obtido no modelo do MIT. Escrevemos então

$$E = E (N, Z, V, v, M(v)) . \quad (4.6)$$

No modelo do MIT, encontramos um valor de volume que minimiza a massa da sacola, assim determinando a sua massa física. Dentro do modelo de Kagiya, esperamos

igualmente que seja possível encontrar um volume \tilde{v} que corresponda a um mínimo da função energia interna (4.6). Além disso, este volume deve ser diferente do valor obtido em (4.3) para uma sacola isolada, como já havíamos mencionado. Matematicamente, vemos que o valor será diferente porque a equação a ser resolvida não é mais simplesmente $M_v = 0$, mas

$$E_v + E_M M_v = 0 . \quad (4.7)$$

Nesta expressão, os sub-índices, como em M_v , denotam derivadas parciais com relação ao índice. A solução de (4.7) é $v = \tilde{v}(N, Z, V)$, de modo que

$$\tilde{E} = \tilde{E}(N, Z, V, \tilde{v}(N, V), M(\tilde{v}(N, V))) \quad (4.8)$$

é a energia física do sistema.

Após estas considerações, devemos escolher uma forma funcional específica para a função energia interna do sistema. Como o modelo trata de um sistema de férmions, uma escolha razoável para esta forma funcional é a expressão da energia de um gás de Fermi livre, adicionada de um termo correspondente à interação entre os núcleons. Escrevemos a expressão da energia interna E como

$$E(N, Z, V, v, M(v)) = E_F(Z, V, M(v)) + E_F(N, V, M(v)) + E_{INT} . \quad (4.9)$$

Na expressão acima, E_{INT} representa o termo de interação entre as partículas, e os dois primeiros termos no lado direito referem-se à energia de gases de Fermi livres formados, respectivamente, por prótons e por nêutrons. Lembramos que a energia de um gás de Fermi livre, formado por α partículas de massa m , é dada pela equação (3.62),

$$\begin{aligned} E_F(\alpha, V, m) \\ = \frac{V}{4\pi^2} \left[k_{F\alpha} \left(k_{F\alpha}^2 + \frac{m^2}{2} \right) \sqrt{k_{F\alpha}^2 + m^2} - \frac{m^4}{2} \ln \left(\frac{k_{F\alpha} + \sqrt{k_{F\alpha}^2 + m^2}}{m} \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.10)$$

O momento de Fermi, $k_{F\alpha}$, é definido por

$$k_{F\alpha} \equiv \left(\frac{6\pi^2 \alpha}{\gamma V} \right)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{\alpha}{V} \right)^{1/3} , \quad (4.11)$$

onde o fator de degenerescência, γ , para cada termo de Fermi em (4.9) é igual a 2 para a matéria nuclear, devido ao spin. Na notação utilizada em (4.10) e (4.11), α pode assumir os valores Z ou N .

Volume de exclusão *a la Van der Waals*

A partir de agora, olhamos com mais cuidado os termos de Fermi na expressão da energia interna do sistema (4.9). Estamos particularmente interessados em estudar a matéria nuclear a altas densidades bariônicas. Neste regime, as dimensões dos núcleons são importantes, já que poderíamos ter superposições entre eles. Para contornar este problema, introduzimos em (4.9) o volume de exclusão *a la Van der Waals*. A hipótese formulada por Van der Waals baseia-se no fato de que o volume que os núcleons efetivamente podem ocupar não é V , mas

$$V' = V - bAv, \quad (4.12)$$

onde b é um parâmetro a ser determinado no modelo. Note-se que o volume descontado, bAv , é proporcional ao volume de uma partícula ou sacola e ao número de partículas. Este procedimento simula uma interação repulsiva entre os núcleons, já que impede que dois ou mais núcleons se superponham, em contraposição à interação atrativa representada pelo termo próprio de interação introduzido. Devido à implementação do volume de exclusão, redefinimos o momento de Fermi da seguinte forma:

$$k'_{F\alpha} \equiv \left(3\pi^2 \frac{\alpha}{V'}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{\alpha A}{A V'}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{\alpha}{A} \rho'\right)^{1/3}, \quad (4.13)$$

onde

$$\rho' \equiv \frac{A}{V'} = \frac{A}{V - bAv} = \frac{\rho}{1 - b\rho v}. \quad (4.14)$$

Com a introdução do volume de exclusão *a la Van der Waals*, e utilizando a definição (4.13), vemos que a energia de Fermi (4.10), dividida por α ,

$$\begin{aligned} e_F(\alpha, V', M(v)) &\equiv \frac{E_F(\alpha, V', M(v))}{\alpha} \\ &= \frac{V'}{4\pi^2\alpha} \left[k'_{F\alpha} \left(k_{F\alpha}^{2'} + \frac{M^2(v)}{2} \right) \sqrt{k_{F\alpha}^{2'} + M^2(v)} - \frac{M^4(v)}{2} \ln \left(\frac{k_{F\alpha}^{2'} + \sqrt{k_{F\alpha}^{2'} + M^2(v)}}{M(v)} \right) \right] \\ &= \frac{3}{4k_{F\alpha}^{3'}} \left[k'_{F\alpha} \left(k_{F\alpha}^{2'} + \frac{M^2(v)}{2} \right) \sqrt{k_{F\alpha}^{2'} + M^2(v)} - \frac{M^4(v)}{2} \ln \left(\frac{k'_{F\alpha} + \sqrt{k_{F\alpha}^{2'} + M^2(v)}}{M(v)} \right) \right] \\ &= e_F \left(\frac{\alpha}{A} \rho', M(v) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

é na verdade uma função de dois argumentos. Para facilitar alguns cálculos no futuro, escrevemos

$$e_F \left(\frac{\alpha}{A} \rho', M(v) \right) = \frac{3M(v)}{4y_\alpha^3} \left[y_\alpha \left(y_\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + y_\alpha^2} - \frac{1}{2} \ln(y_\alpha + \sqrt{1 + y_\alpha^2}) \right] \quad (4.16)$$

$$\equiv M(v) f(y_\alpha) .$$

onde definimos a nova variável $y_\alpha \equiv k'_{F\alpha}/M(v)$ e a função

$$f(x) = \frac{3}{4x^3} \left[x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right] . \quad (4.17)$$

Energia de interação

Trabalhamos agora o termo de interação em (4.9). Sabemos que os hádrons interagem via troca de mésons e, em particular, de píons. Esta interação de troca pode transformar prótons em nêutrons ou vice-versa, ou mesmo ainda não realizar troca alguma¹. Desta maneira, a interação acopla o isospin dos hádrons com o campo isovetorial dos píons. A introdução deste efeito no modelo é realizada incluindo-se, na formulação, um termo correspondente à aproximação não relativística desta interação, ou seja,

$$E_{INT} = \frac{1}{VM^2(v)} \sum_{i \neq j} \langle \Psi | (a_s + a_v \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j) | \Psi \rangle . \quad (4.18)$$

O termo em a_s corresponde à “não-existência de troca”. No formalismo não-relativístico, o pión aparece via um potencial efetivo, e a_v é, em princípio, uma função da massa do pión, mas será tratada aqui como uma constante. O somatório é feito sobre todos os pares de partículas (prótons e nêutrons), evitando-se o caso em que uma partícula interage consigo mesma. As matrizes $\vec{\tau}$ são as matrizes de isospin de Pauli, e $|\Psi\rangle$ representa o vetor de estado de Z prótons e N nêutrons. Escolhemos a normalização de modo que $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Observe-se que, na expressão da energia de interação, a dependência em $1/V$ está condizente com a modificação introduzida por Van der Waals para levar em conta a atração entre as partículas, de acordo com a equação (3.3). Para relacionar a pressão com a energia interna do sistema, utilizamos a relação termodinâmica

$$p = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_N , \quad (4.19)$$

¹Mesmo quando aparentemente não ocorre nenhuma troca que leve à transformação de um nêutron em um próton ou vice-versa pode estar ocorrendo a troca de um méson neutro que não altera a natureza das partículas compostas interagentes.

e, como veremos adiante, as constantes a_s e a_v fornecerão, no todo, um sinal negativo.

Desenvolvemos agora cada termo de interação em (4.18). A parte em a_s é escrita como

$$\frac{a_s}{VM^2(v)} \sum_{i \neq j} \langle \Psi | \Psi \rangle = \frac{a_s}{VM^2(v)} \sum_{i \neq j} 1 = \frac{a_s}{VM^2(v)} A_{A,2} = \frac{A(A-1)a_s}{VM^2(v)} \approx \frac{A^2 a_s}{VM^2(v)}, \quad (4.20)$$

onde no desenvolvimento acima, $A_{A,2}$ representa o arranjo de A elementos tomados 2 a 2,

$$A_{p,k} = \frac{p!}{(p-k)!}, \quad (4.21)$$

e o termo 1 é muito pequeno quando comparado com A .

Antes de desenvolver o termo em a_v , introduzimos a variável

$$x \equiv \frac{Z}{A} - \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

Esta quantidade é uma medida do grau de assimetria da matéria nuclear. Para a matéria nuclear perfeitamente simétrica, $N = Z$, e assim $A = N + Z = 2Z$, resultando em $x = 0$. Além disso, x varia de $-1/2$ (somente nêutrons) a $1/2$ (somente prótons). Agora devemos considerar o somatório sobre todas as partículas no cálculo do termo em a_v . Para isso, deveremos levar em conta todas as combinações possíveis entre pares de partículas, e como o operador $\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j$ atua sobre $|\Psi\rangle$ em cada caso. O resultado, no final, poderá ser expresso em termos de x . Escrevendo o estado de próton como $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e o estado de

nêutron como $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} \tau_x p &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} n \\ \tau_y p &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} n \\ \tau_z p &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} p \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
\tau_x n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} p \\
\tau_y n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} p \\
\tau_z n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} n .
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Levamos em conta agora cada combinação possível entre pares de partículas.

- i = próton ; j = próton

$$pp (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j pp) = \frac{1}{4} pp (nn - nn + pp) = \frac{1}{4} \tag{4.25}$$

- i = próton ; j = nêutron

$$pn (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j pn) = \frac{1}{4} pn (np + np - pn) = -\frac{1}{4} \tag{4.26}$$

- i = nêutron ; j = próton

$$np (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j np) = \frac{1}{4} np (pn + pn - np) = -\frac{1}{4} \tag{4.27}$$

- i = nêutron ; j = nêutron

$$nn \frac{1}{4} (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j nn) = nn (pp - pp + nn) = \frac{1}{4} . \tag{4.28}$$

Com os resultados (4.25)-(4.28), podemos calcular o produto

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \langle \Psi | \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j | \Psi \rangle &= \left(\sum_{pp} + \sum_{pn} + \sum_{np} + \sum_{nn} \right) \langle \Psi | \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j | \Psi \rangle \\
&= \frac{1}{4} (A_{Z,2} - ZN - ZN + A_{N,2}) \\
&= \frac{1}{4} (Z(Z-1) - 2ZN + N(N-1)) \\
&= \frac{1}{4} (Z(Z-1) - 2Z(A-Z) + (A-Z)(A-Z-1)) \\
&= \frac{1}{4} (4Z^2 + A^2 - 4AZ - A) ,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \langle \Psi | \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j | \Psi \rangle &= A^2 \left[\left(\frac{Z}{A} \right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{Z}{A} \right] - \frac{A}{4} \\
&= A^2 x^2 - \frac{A}{4} \\
&= A (Ax^2 - 1/4) \approx A^2 x^2 .
\end{aligned} \tag{4.30}$$

A última aproximação foi feita levando-se em conta que x varia de $-1/2$ a $1/2$ e portanto não diverge quando A tende a infinito. Utilizamos a definição de arranjo (4.21) e também a relação $N = A - Z$. Agora, escrevemos o termo de interação (4.18) como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{VM^2(v)} \sum_{i \neq j} (a_s + a_v \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j) &= \frac{A^2 a_s}{VM^2(v)} + \frac{a_v}{VM^2(v)} A^2 x^2 \\
&= \frac{A\rho}{M^2(v)} (a_s + a_v x^2) .
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Em termos desta nova quantidade, e reunindo os resultados (4.31) e (4.15), a energia interna do sistema (4.9) por núcleon pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
e(x, \rho, v) &\equiv \frac{1}{A} E(N, Z, V, v, M(v)) \\
&= \frac{1}{A} \left[Z e_F \left(\frac{Z}{A} \rho', M(v) \right) + N e_F \left(\frac{N}{A} \rho', M(v) \right) + \frac{A\rho}{M^2(v)} (a_s + a_v x^2) \right] \\
&= \left(x + \frac{1}{2} \right) e_F \left(\left(x + \frac{1}{2} \right) \rho', M(v) \right) \\
&+ \left(-x + \frac{1}{2} \right) e_F \left(\left(-x + \frac{1}{2} \right) \rho', M(v) \right) \\
&+ \frac{\rho}{M^2(v)} (a_s + a_v x^2) ,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde não escrevemos, para não deixar a notação muito carregada, a dependência de ρ' em ρ e em v , de acordo com (4.14). Nos cálculos feitos até agora, consideramos um número arbitrário de prótons e de nêutrons. Para uso posterior, escrevemos a expressão da energia interna por núcleon em termos da função $f(y_\alpha)$:

$$e(x, \rho, v) = M(v) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) f(y_Z) + \left(-x + \frac{1}{2} \right) f(y_N) \right] + \frac{\rho}{M^2(v)} (a_s + a_v x^2) . \tag{4.33}$$

Ainda, note-se que os $k'_{F\alpha}$ podem ser escritos em termos de x como

$$k'_{FZ} = \left(3\pi^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \rho' \right)^{1/3} ; \quad k'_{FN} = \left(3\pi^2 \left(-x + \frac{1}{2} \right) \rho' \right)^{1/3} . \tag{4.34}$$

No caso da matéria nuclear simétrica, temos

$$k'_{FZ} = k'_{FN} \equiv k'_F = \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho' \right)^{1/3}, \quad (4.35)$$

e como consequência

$$y_Z = y_N \equiv y = \frac{k'_F}{M(v)}. \quad (4.36)$$

4.2 Determinação dos parâmetros do modelo

O próximo passo é determinar os parâmetros do modelo, b , a_s e a_v , utilizando-se dados experimentais. A energia por núcleon é determinada por (4.7):

$$\left. \frac{\partial e}{\partial v} \right|_{\rho, x} = 0, \quad (4.37)$$

de onde obtemos a solução $v = \tilde{v}(x, \rho)$. Esta derivada está calculada explicitamente em (4.39), e podemos escrever a energia por núcleon como

$$\tilde{e} = e(x, \rho, \tilde{v}(x, \rho)). \quad (4.38)$$

O cálculo da derivada da energia interna por núcleon (4.33) em relação a v está feita a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial v}(x, \rho, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left\{ M(v) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) f(y_Z) + \left(-x + \frac{1}{2} \right) f(y_N) \right] + \frac{\rho}{M^2(v)} (a_s + a_v x^2) \right\} \\ &= \frac{\partial M(v)}{\partial v} \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) f(y_Z) + \left(-x + \frac{1}{2} \right) f(y_N) \right] \\ &+ M(v) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \frac{\partial y_Z}{\partial v} + \left(-x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_N)}{dy_N} \frac{\partial y_N}{\partial v} \right] \\ &- \frac{2\rho}{M^3(v)} \frac{\partial M(v)}{\partial v} (a_s + a_v x^2). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Os cálculos intermediários, como a derivada da função $f(y_\alpha)$ e a derivada de y_α em relação a v , estão feitos no apêndice G. No restante desta seção, a referência para os detalhes dos cálculos também estará neste apêndice. Mantemos no desenvolvimento do capítulo o essencial para a compreensão do modelo.

Esperamos que, para cada valor dado de x , a função \tilde{e} tenha um mínimo em algum valor de ρ , para que o modelo descreva a saturação da matéria nuclear. Sabemos que a densidade normal da matéria nuclear simétrica, é $\rho_0 = 0.17 fm^{-3}$. Desta maneira, procuramos agora o valor $\hat{\rho}(x)$ de ρ que minimiza \tilde{e} em (4.38),

$$\left. \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \rho} \right|_x = 0, \quad (4.40)$$

e então

$$e_{min} = e(x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \quad (4.41)$$

representa a energia de saturação da matéria nuclear para um dado valor de x . Desta maneira, utilizaremos como primeira condição para determinação dos parâmetros a equação

$$\hat{\rho}(0) = \rho_0. \quad (4.42)$$

Note-se que a derivada (4.40) pode ser calculada por

$$\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \rho} = \frac{\partial e}{\partial \rho}(x, \rho, \tilde{v}(x, \rho)) = \frac{\partial e}{\partial \rho} + \frac{\partial e}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \rho} = \frac{\partial e}{\partial \rho}, \quad (4.43)$$

onde utilizamos (4.37) no último passo. Calculamos agora explicitamente esta derivada, utilizando mais uma vez a forma (4.33) para a energia interna por núcleon,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \rho}(x, \rho, v) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(M(v) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) f(y_Z) + \left(-x + \frac{1}{2} \right) f(y_N) \right] + \frac{\rho}{M^2(v)} (a_s + a_v x^2) \right) \\ &= M(v) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \frac{\partial y_Z}{\partial \rho} + \left(-x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_N)}{dy_N} \frac{\partial y_N}{\partial \rho} \right] \\ &\quad + \frac{1}{M^2(v)} (a_s + a_v x^2). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Os outros dois dados necessários serão obtidos da fórmula semi-empírica de massa de Bethe-Weizsäcker[15],

$$\frac{M(A, Z)}{A} = \frac{1}{A} \left(M_0 A - u_v A + u_s A^{2/3} + u_\tau \frac{(2Z - A)^2}{A} \right). \quad (4.45)$$

Os valores de u_v , u_τ e M_0 (massa do núcleon) são conhecidos experimentalmente:

$$u_v = 15,7 MeV \quad ; \quad u_\tau = 23,6 MeV \quad ; \quad M_0 = 940 MeV. \quad (4.46)$$

Como estamos considerando um número infinito de núcleons, no limite em que $A \rightarrow \infty$, temos

$$\frac{M(A, Z)}{A} = M_0 - u_v + 4u_\tau x^2, \quad (4.47)$$

que deve ser comparada com o resultado para e_{min} obtido anteriormente. Desta forma,

$$M_0 - u_v + 4u_\tau x^2 = e(x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))). \quad (4.48)$$

Esperamos que a expressão de Bethe-Weizsäcker seja uma boa descrição para a energia da matéria nuclear até a segunda ordem em x . Desta forma, (4.48) deve valer ordem a ordem. Obteremos assim as duas condições que faltavam para a determinação dos parâmetros do modelo. Veremos que, em primeira ordem, a condição obtida é identicamente satisfeita. Em ordem zero temos

$$\begin{aligned} M_0 - u_v &= e(0, \rho_0, \tilde{v}(0, \rho_0)) = e_F \left(\frac{\rho'_0}{2}, M(\tilde{v}(0, \rho_0)) \right) + \frac{a_s \rho_0}{M^2(\tilde{v}(0, \rho_0))} \\ &= M(\tilde{v}(0, \rho_0)) f(y) + \frac{a_s \rho_0}{M^2(\tilde{v}(0, \rho_0))}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde usamos a condição (4.42). Ainda,

$$\rho'_0 \equiv \frac{\rho_0}{1 - b\rho_0\tilde{v}(0, \rho_0)}. \quad (4.50)$$

Em primeira ordem, temos

$$8u_\tau x|_{x=0} = 0 = \left. \frac{de}{dx} (x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \right|_{x=0}. \quad (4.51)$$

Note-se que

$$\frac{de}{dx} (x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) = \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial \hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial \tilde{v}} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} \right] = \frac{\partial e}{\partial x}, \quad (4.52)$$

onde o último passo foi feito usando-se (4.37) e (4.40). A derivada da energia interna por núcleon em relação a x ,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial x} (x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(M(\tilde{v}) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) f(y_Z) + \left(-x + \frac{1}{2} \right) f(y_N) \right] + \frac{\hat{\rho}}{M^2(\tilde{v})} (a_s + a_v x^2) \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

pode ser calculada por

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial e}{\partial x}(x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \\
&= M(\tilde{v}) \left(f(y_Z) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial f(y_Z)}{\partial x} - f(y_N) + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial f(y_N)}{\partial x} \right) + \frac{2\hat{\rho}a_v x}{M^2(\tilde{v})} \\
&= M(\tilde{v}) \left(f(y_Z) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \frac{\partial y_Z}{\partial x} - f(y_N) + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \frac{df(y_N)}{dy_N} \frac{\partial y_N}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{2\hat{\rho}a_v x}{M^2(\tilde{v})} \\
&= M(\tilde{v}) \left(f(y_Z) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \left[\frac{y_Z}{3\left(x + \frac{1}{2}\right)} \right] \right) \\
&+ M(\tilde{v}) \left(-f(y_N) + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \frac{df(y_N)}{dy_N} \left[-\frac{y_N}{3\left(-x + \frac{1}{2}\right)} \right] \right) + \frac{2\hat{\rho}a_v x}{M^2(\tilde{v})} . \\
&= M(\tilde{v}) \left(f(y_Z) + \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \frac{y_Z}{3} - f(y_N) - \frac{df(y_N)}{dy_N} \frac{y_N}{3} \right) + \frac{2\hat{\rho}a_v x}{M^2(\tilde{v})} ,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

onde utilizamos os resultados (G.20). Para a matéria nuclear simétrica, temos

$$\left. \frac{\partial e}{\partial x}(x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \right|_{x=0} = M(\tilde{v}) \left(f(y) + \frac{df(y)}{dy} \frac{y}{3} - f(y) - \frac{df(y)}{dy} \frac{y}{3} \right) + \frac{2\hat{\rho}a_v \cdot 0}{M^2(\tilde{v})} = 0 . \tag{4.55}$$

A primeira ordem, então, não fornece nenhuma condição extra. Pode-se obter este resultado facilmente também se observarmos que a energia interna por núcleon (4.33) é uma função par em x , e portanto sua derivada será ímpar e deve se anular na origem.

O cálculo para a segunda ordem em x fica

$$8u_\tau = \left. \frac{d^2 e}{dx^2}(x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \right|_{x=0} . \tag{4.56}$$

Obtemos então a derivada segunda da energia por núcleon,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \\
&= M(\tilde{v}) \frac{d}{dx} \left(f(y_Z) + \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \frac{y_Z}{3} - f(y_N) - \frac{df(y_N)}{dy_N} \frac{y_N}{3} \right) + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})} ,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

de

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} (x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \\
&= M(\tilde{v}) \left(\frac{df(y_Z)}{dy_Z} + \frac{d^2 f(y_Z) y_Z}{dy_Z^2 3} + \frac{1}{3} \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \right) \frac{\partial y_Z}{\partial x} \\
&+ M(\tilde{v}) \left(-\frac{df(y_N)}{dy_N} - \frac{d^2 f(y_N) y_N}{dy_N^2 3} - \frac{1}{3} \frac{df(y_N)}{dy_N} \right) \frac{\partial y_N}{\partial x} + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})} \\
&= M(\tilde{v}) \left(\frac{4}{3} \frac{df(y_Z)}{dy_Z} + \frac{d^2 f(y_Z) y_Z}{dy_Z^2 3} \right) \frac{\partial y_Z}{\partial x} \\
&+ M(\tilde{v}) \left(-\frac{4}{3} \frac{df(y_N)}{dy_N} - \frac{d^2 f(y_N) y_N}{dy_N^2 3} \right) \frac{\partial y_N}{\partial x} + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})}, \\
&= M(\tilde{v}) \left(\frac{4}{3} \frac{df(y_Z)}{dy_Z} + \frac{d^2 f(y_Z) y_Z}{dy_Z^2 3} \right) \left[\frac{y_Z}{3(x + \frac{1}{2})} \right] \\
&+ M(\tilde{v}) \left(-\frac{4}{3} \frac{df(y_N)}{dy_N} - \frac{d^2 f(y_N) y_N}{dy_N^2 3} \right) \left[-\frac{y_N}{3(-x + \frac{1}{2})} \right] + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})},
\end{aligned} \tag{4.58}$$

onde utilizamos novamente os resultados (G.20). A condiao (4.56) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
8u_\tau &= \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} (x, \hat{\rho}(x), \tilde{v}(x, \hat{\rho}(x))) \Big|_{x=0} \\
&= M(\tilde{v}) \left(\frac{4}{3} \frac{df(y)}{dy} + \frac{d^2 f(y) y}{dy^2 3} \right) \left[\frac{2y}{3} \right] \\
&+ M(\tilde{v}) \left(-\frac{4}{3} \frac{df(y)}{dy} - \frac{d^2 f(y) y}{dy^2 3} \right) \left[-\frac{2y}{3} \right] + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})} \\
&= M(\tilde{v}) \frac{4y}{9} \left(4 \frac{df(y)}{dy} + y \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right) + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})} \\
&= M(\tilde{v}) \frac{4y}{9} \left(\frac{3y}{\sqrt{1+y^2}} \right) + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})} \\
&= \frac{4}{3} M(\tilde{v}) \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2\hat{\rho}a_v}{M^2(\tilde{v})},
\end{aligned} \tag{4.59}$$

onde utilizamos o resultado (G.9). Esta equaao será a terceira condiao utilizada para a determinaao dos parâmetros. Os resultados obtidos são $b = 1,534964$, $a_s = -37,420768$ e $a_v = 8,837203$. A partir destes valores, podemos determinar, através de (4.37), $v = 0,911705v_0$ e, através de (4.1), $M = 1,001396M_0$. Note-se que o volume de uma sacola é um pouco menor do que aquele obtido para uma sacola isolada, como já foi discutido anteriormente. Isso ocorre devido à pressão que os núcleons exercem uns sobre os outros.

A Fig. 4.1 mostra a dependência entre a energia de ligação por núcleon e a densidade bariônica para a matéria nuclear simétrica. Esta curva reflete um balanço entre as energias envolvidas. A baixas densidades, as partículas estão suficientemente espaçadas para que haja um predomínio da parte atrativa da interação, descrita pelo termo próprio de interação (4.31). Neste regime, temos um gás propriamente dito, onde o número de colisões entre os núcleons é pequeno. Já a altas densidades, percebe-se o efeito repulsivo do volume de exclusão, bem como a energia cinética tende a separar os núcleons. Neste caso, temos um superfluido. Desta maneira, para algum valor de densidade, a energia será mínima. Vemos que este valor mínimo ocorre em $\rho = \rho_0$ porque a determinação dos parâmetros foi feita de maneira que isto acontecesse.

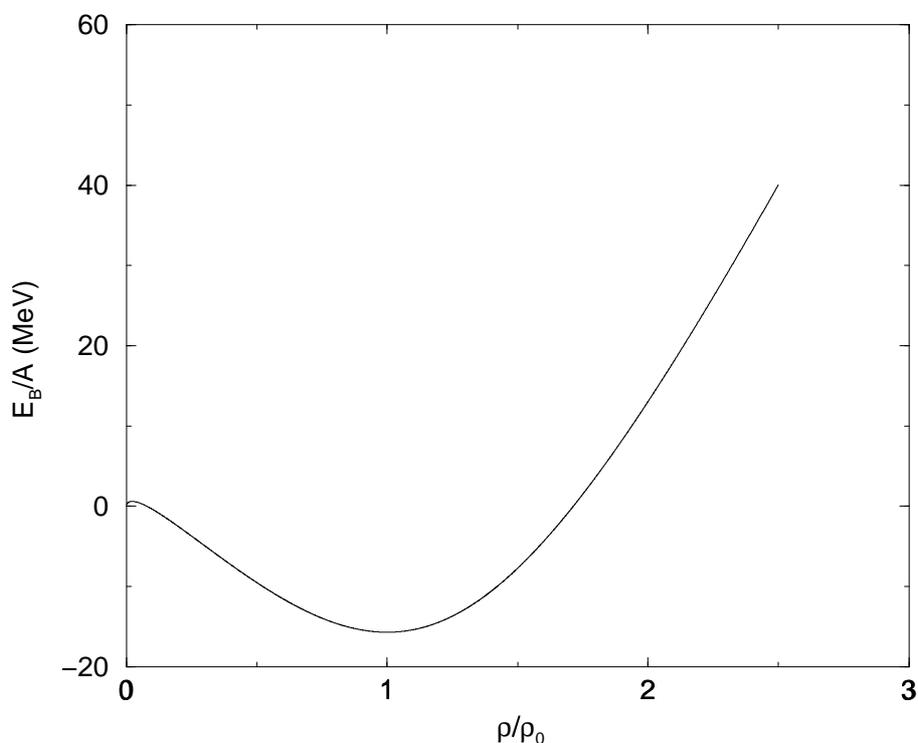


Figura 4.1: Energia de ligação por núcleon em função da densidade bariônica.

A Fig. 4.2 mostra a equação de estado para a matéria de nêutrons. A pressão do sistema é dada por $p = \rho^2 \partial \bar{\epsilon} / \partial \rho$. Note-se que ρ deve crescer com a pressão, caso contrário, como $\rho \propto 1/V$, teríamos a pressão aumentando com V . Então, a região decrescente desta figura não tem sentido físico. Neste intervalo, em que o sistema é instável, para alguns valores de pressão, temos dois ou três valores de densidade (ou de volume). Em outras palavras,

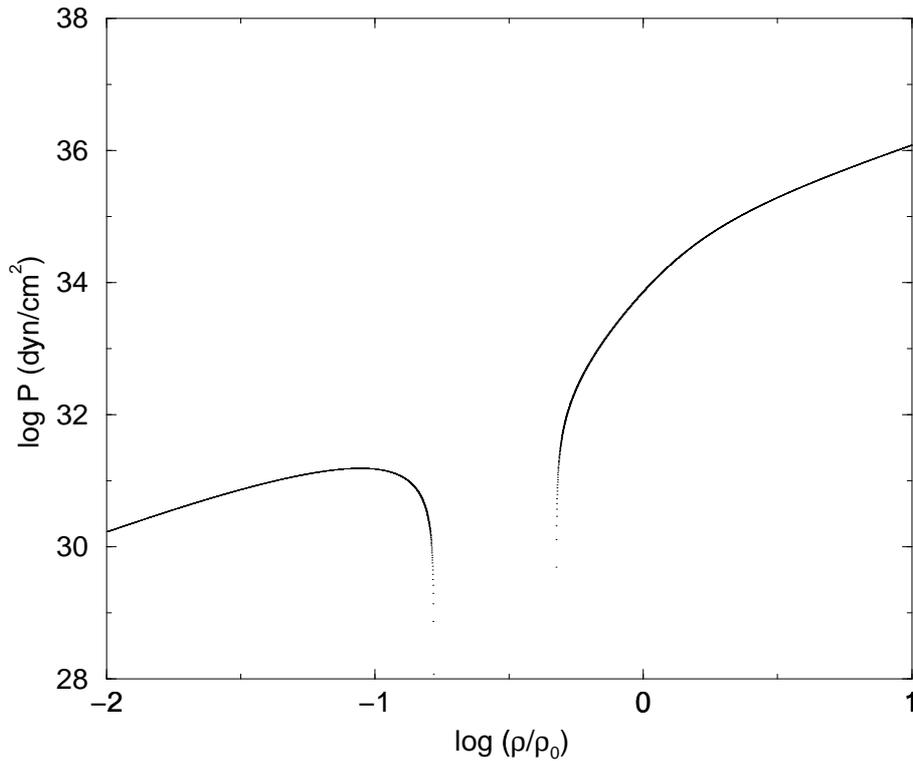


Figura 4.2: Equação de estado para a matéria de nêutrons.

o gráfico mostra mais de um estado do sistema para a mesma pressão. A solução é a utilização da construção de Maxwell[16], ou seja, um segmento horizontal que liga as duas partes crescentes do gráfico seguindo um critério bem definido. Este critério é determinado pelo potencial químico do sistema, μ , definido por

$$\mu = -\frac{S}{N}dT + \frac{V}{N}dp, \quad (4.60)$$

onde S é a entropia do sistema e T a sua temperatura. A variação do potencial químico com a pressão (ou com o volume, via equação de estado) à temperatura constante, quando o sistema passa de um estado R para um estado Q é dada então por

$$\mu_Q - \mu_R = \frac{1}{N} \int_R^Q V(p)dp. \quad (4.61)$$

Porém, como a um valor de pressão podem corresponder mais de um valor de volume, para um mesmo intervalo de integração pode-se obter um resultado diferente em (4.61), basta integrar-se sobre duas curvas $V = V(p)$ diferentes, com os mesmos limites de integração. Podemos fixar o estado (R) como referência. A partir daí, a construção de Maxwell

consiste, então, em determinar até que valor de pressão, p_Y , devemos integrar, sobre as duas curvas em que p decresce com V , de modo que a integral (4.61) forneça o mesmo valor. Desta maneira, teremos

$$\mu_Y - \mu_Y = \mu_Y - \mu_R - (\mu_Y - \mu_R) = \frac{1}{N} \int_R^Y V_1(p) dp - \frac{1}{N} \int_R^Y V_2(p) dp = 0, \quad (4.62)$$

onde $V_1(p)$ e $V_2(p)$ denotam os dois caminhos de integração. Em outras palavras, se integrarmos de p_Y a p_Y seguindo o caminho de integração \mathcal{C} , que vai de um valor de volume em que p é decrescente em função de V ao outro, teremos o mesmo potencial químico nos dois extremos de integração, e portanto, de acordo com (4.61),

$$\int_{\mathcal{C}} V(p) dp = 0. \quad (4.63)$$

Esta condição tem como consequência o fato de que há um valor de pressão que determina um segmento de reta horizontal ligando as duas regiões em que $p = p(V)$ é decrescente, ou, equivalentemente, $p = p(\rho)$ é crescente. Desta maneira, a pressão sempre cresce com a densidade, ou seja, quanto mais denso o sistema for, mais pressão exercerá. Podemos entender isto lembrando que, com o aumento da pressão, mais intensa se torna a repulsão devido ao volume de exclusão.

Capítulo 5

Modelo de sacola difusa

No capítulo 2, apresentamos o desenvolvimento teórico do modelo de sacola do MIT. Neste modelo, o bárion é descrito, de maneira simples, por um poço infinito de potencial. Este poço é uma região limitada do espaço, dentro da qual estão confinados três quarks, e que chamamos de sacola. No exterior da sacola, o potencial tem paredes infinitas, e portanto a função de onda dos quarks é nula. A interface entre estas duas regiões é chamada de superfície da sacola. Trabalhamos a aproximação estática e esfero-simétrica do modelo, dentro da qual a superfície da sacola é uma casca esférica, infinitamente delgada, com raio constante no tempo.

Neste capítulo introduziremos o modelo da sacola difusa[17]. As hipóteses são basicamente as mesmas do modelo do MIT. Porém agora a sacola não terá uma superfície infinitamente delgada que separa uma região de existência dos quarks de outra em que as funções de onda são suprimidas, e sim uma região de transição que caracteriza a superfície da sacola. Neste modelo, as funções de onda serão suprimidas de maneira suave nesta região de transição, via uma função denominada função de supressão que modula as funções de onda. Esta função deverá decrescer para grandes distâncias, de modo que, em $r \rightarrow \infty$, a supressão seja total. Além disso, ela deverá dar origem a um potencial confinante no interior da sacola. Desenvolveremos a aproximação estática e esfero-simétrica do modelo, de modo que a função de supressão deverá ter simetria esférica, ou seja, dependerá unicamente da coordenada radial. Como veremos adiante, o potencial associado não será um poço infinito, mas será igualmente confinante, ou seja, tenderá de maneira contínua ao infinito para grandes distâncias. Note-se que, a princípio, podem-se suprimir as funções

de onda dos quarks a partir de um certo valor do raio, de modo que para valores menores do que esse, os quarks são completamente livres, como no modelo do MIT. Esta região em que os quarks são livres recebe o nome de interior da sacola. No desenvolvimento deste capítulo, porém, consideraremos que o interior da sacola tem dimensões nulas, de modo que as funções de onda serão suprimidas já desde $r = 0$. A sistemática adotada neste capítulo baseia-se na descrição do modelo de sacola difusa na Ref.[8]. Uma outra descrição deste modelo, na qual uma outra função de supressão, diferente da que utilizaremos aqui, é adotada, está na Ref.[9]. Este modelo também é abordado nas Refs.[18, 19, 20].

5.1 Descrição do modelo

A maneira mais simples de fazer a passagem do modelo do MIT para o modelo de sacola difusa é substituir as funções $\theta(R - r)$ e $\delta(R - r)$ na densidade lagrangiana (2.1), respectivamente, por funções distribuição $F(r)$ e $G(r)$, ou seja, por funções matematicamente admissíveis como representações destas funções considerando-se um determinado valor fixo de um parâmetro apropriado que caracterize estas distribuições, e que para outros valores deste parâmetro se comportem como típicas funções de distribuição matemática. A função $F(r)$ determinará de que maneira as funções de onda dos quarks serão suprimidas, como descrito acima. Já $G(r)$ está relacionada a ela, como veremos adiante. De qualquer maneira, as duas serão chamadas de funções de supressão. A densidade lagrangiana do sistema é então dada por

$$\mathcal{L} = \left(\frac{i}{2} (\bar{q}\gamma^\mu \partial_\mu q - \partial_\mu \bar{q}\gamma^\mu q) - m \bar{q}q - B \right) F(r) - \frac{1}{2} \bar{q}q G(r) . \quad (5.1)$$

Lembramos que, em (5.1), há uma soma implícita sobre os três quarks que formam o núcleon, com exceção do termo correspondente à energia de vácuo. Exigiremos, similarmente à condição $\partial_\mu \theta(R - r) = n_\mu \delta(R - r)$ (ver equação (2.4) no capítulo sobre o modelo do MIT), que $F(r)$ e $G(r)$ sejam relacionadas por

$$\partial_\mu F(r) = n_\mu G(r) \rightarrow \frac{dF(r)}{dr} = -G(r) , \quad (5.2)$$

uma vez que são representações daquelas funções para um determinado valor de um parâmetro n , de modo que

$$\begin{aligned} F_n(r) &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \theta(R - r) \\ G_n(r) &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \delta(R - r) \end{aligned} \quad (5.3)$$

e o modelo do MIT é recuperado neste limite.

Agora podemos obter as equações de movimento dos campos dos quarks, utilizando as conhecidas equações de Euler-Lagrange (2.3). O resultado obtido é

$$i\gamma^\mu \partial_\mu q + in_\mu \gamma^\mu q V_c(r) - mq - qV_c(r) = 0, \quad (5.4)$$

onde na obtenção de (5.4) utilizamos (5.2). Definimos ainda

$$V_c(r) = \frac{G(r)}{2F(r)} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \ln(F(r)), \quad (5.5)$$

que representa um potencial escalar (que deve ser confinante, ou seja, $V_c(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$). Pode-se mostrar que as soluções de (5.4) divergem em $r \rightarrow \infty$ para qualquer potencial que tenha o caráter confinante. Além disso, vemos que, se considerarmos $q(t, \vec{r})$ como os campos dos quarks, a corrente vetorial conservada é $i\bar{q}\gamma^\mu q F(r)$, em vez de $i\bar{q}\gamma^\mu q$, de modo que a densidade escalar dos quarks é identificada como $q^\dagger q F(r)$. Esta densidade converge quando $r \rightarrow \infty$, devido à presença da função $F(r)$. Assim, é conveniente redefinirmos o campo dos quarks como

$$\psi(t, \vec{r}) = \sqrt{F(r)} q(t, \vec{r}), \quad (5.6)$$

e assim $\psi(t, \vec{r}) \rightarrow 0$ se $r \rightarrow \infty$, além do que a densidade escalar terá a forma usual $\psi^\dagger \psi$. Esta redefinição permite escrevermos a densidade lagrangiana (5.1) como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - BF(r) - (m + V_c(r)) \bar{\psi} \psi \quad (5.7)$$

e a equação de movimento (5.4) em termos do novo campo $\psi(t, \vec{r})$ como

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi - V_c(r)\psi = 0. \quad (5.8)$$

É importante notar que a redefinição (5.6), que gera uma modulação dos campos dos quarks devido à presença de uma superfície suave, implica na presença de um potencial escalar de Lorentz, ou seja um mecanismo dinâmico “gerador” de matéria.

Para melhor descrever o espectro de massas hadrônicas, é conveniente considerar um potencial escalar constante, na forma $V_0/2$, e um potencial quadrvetorial, $W_\mu(r)$. O fator entre parênteses no último termo em (5.7) é substituído então por

$$m + V_c(r) + \frac{V_0}{2} + \gamma^\mu W_\mu(r). \quad (5.9)$$

O potencial vetorial é definido de modo que $W^0 = V_0/2 + V_c(r)$ e $W^i = 0$. A exigência de que a parte espacial de W^μ seja nula se deve ao fato de que queremos preservar a simetria rotacional no modelo. Deste modo, a densidade lagrangiana (5.7) se modifica pela adição destes termos,

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - \bar{\psi}\left[m + (1 + \gamma^0)\left(\frac{V_0}{2} + V_c(r)\right)\right]\psi - BF(r), \quad (5.10)$$

bem como a equação de movimento do campo dos quarks assume a forma

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \left[m + (1 + \gamma^0)\left(\frac{V_0}{2} + V_c(r)\right)\right]\psi = 0. \quad (5.11)$$

5.2 Soluções analíticas para o campo dos quarks

Nesta seção obtemos soluções analíticas para os campos dos quarks no estado fundamental, dentro da aproximação estática e esfero-simétrica do modelo. As partes temporal e angular da solução foram obtidas em detalhe nas seções 2.2 e 2.3. Podemos escrever uma solução da equação (5.11) como

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{-iEt} \psi(\vec{r}), \quad (5.12)$$

onde

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{r}) \\ \phi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) \\ if(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

As funções $\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r})$ são os harmônicos esféricos generalizados, dados por (A.19). Lembremos novamente que no estado fundamental os números quânticos a considerar são $\ell = 0$, $\ell' = 1$ e $\kappa = -1$. A substituição de (5.13) em (5.11) leva à seguinte equação diferencial para $g(r)$:

$$\frac{d^2g(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dg(r)}{dr} + [(E + m)(E - m - V_0) - 2(E + m)V_c(r)]g(r) = 0. \quad (5.14)$$

De acordo com a equação (2.57), a parte inferior $f(r)$ do espinor de Dirac, para o estado fundamental, é dada em termos de $g(r)$ por

$$f(r) = \frac{1}{E + m} \frac{dg(r)}{dr}. \quad (5.15)$$

Escolha de uma função de supressão

Nos cálculos feitos até agora, a forma da função de supressão ficou em aberto. Para prosseguir, devemos neste momento escolher uma forma funcional específica para $F(r)$. Utilizaremos, convenientemente, uma função que dê origem a um potencial $V_c(r)$ do tipo oscilador harmônico. Este potencial reproduz as características esperadas para a interação entre os quarks, ou seja, é nulo para pequenas distâncias e cresce rapidamente para grandes distâncias de separação, descrevendo assim as propriedades de liberdade assintótica e de confinamento dos campos dos quarks. Ademais, o potencial oscilador harmônico possibilita a obtenção de soluções analíticas do problema bem como a separação exata da coordenada de centro-de-massa e de seus efeitos no problema Hamiltoniano. A forma utilizada será

$$F(r) = e^{-\lambda r^3/3}, \quad (5.16)$$

que, de acordo com a definição (5.2) de $G(r)$, leva a

$$G(r) = -\frac{dF(r)}{dr} = \lambda r^2 e^{-\lambda r^3/3}, \quad (5.17)$$

e utilizando (5.5), obtemos o potencial escalar

$$V_c(r) = \frac{G(r)}{2F(r)} = \frac{\lambda r^2}{2}, \quad (5.18)$$

que é o potencial usual de oscilador harmônico. Como esperado, este é um potencial confinante, bem como reproduz a propriedade de liberdade assintótica dos quarks. Para simplificar a notação, introduzimos as definições

$$p^2 \equiv (E + m)(E - m - V_0) \quad (5.19)$$

e

$$r_0 \equiv \left(\frac{1}{\lambda(E + m)} \right)^{1/4}, \quad (5.20)$$

de modo que a equação de movimento para $g(r)$, (5.14), pode ser escrita como

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg(r)}{dr} + \left[p^2 - \frac{r^2}{r_0^4} \right] g(r) = 0. \quad (5.21)$$

Procuramos uma solução de (5.21) na forma

$$g(r) = e^{-r^2/2r_0^2} u(r), \quad (5.22)$$

que leva a

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + 2 \left[\frac{1}{r} - \frac{r}{r_0^2} \right] \frac{du(r)}{dr} + \left[p^2 - \frac{3}{r_0^2} \right] u(r) = 0. \quad (5.23)$$

Agora, introduzimos a troca de variável $x \equiv r^2/r_0^2$, de onde obtemos

$$x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[\frac{3}{2} - x \right] \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{4} [p^2 r_0^2 - 3] u(x) = 0. \quad (5.24)$$

As únicas soluções não-divergentes de (5.24) são os polinômios generalizados de Laguerre,

$$L_m^{(\alpha)}(z) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{(m+\alpha)!}{(\alpha+i)!(m-i)!} \frac{z^i}{i!}, \quad (5.25)$$

desde que $\alpha = 1/2$ e

$$m = \frac{1}{4} (p^2 r_0^2 - 3), \quad (5.26)$$

com m inteiro. Na verdade, a condição de que m seja inteiro permite identificar (5.26) como a equação de autovalores de energia em termos dos parâmetros do modelo. No estado fundamental, temos $m = 0$, e a equação de autovalores pode ser escrita como $p^2 r_0^2 = 3$, ou, em termos dos parâmetros do modelo,

$$\sqrt{\frac{E+m}{\lambda}} (E - m - V_0) = 3. \quad (5.27)$$

Esta expressão tem uma interpretação simples. Sabemos que o parâmetro λ regula basicamente a intensidade do potencial de oscilador harmônico. Em outras palavras, é uma medida da “rapidez” com que os campos dos quarks são suprimidos, ou seja, uma medida das dimensões da sacola. Esclarecemos que esta “rapidez” não é relacionada a uma variação temporal, mas a uma variação radial, de acordo com a definição de $F(r)$, (5.16). Esperamos então que o autovalor de energia E cresça com o aumento de λ . De fato, introduzindo as novas variáveis E' e m' , definidas por

$$E' \equiv E - \frac{V_0}{2} \quad ; \quad m' \equiv m + \frac{V_0}{2}, \quad (5.28)$$

podemos¹ escrever a equação de autovalores (5.27) como

$$\sqrt{E' + m'} (E' - m') = 3\sqrt{\lambda}. \quad (5.30)$$

Agora calculamos a derivada de E' em relação a λ ,

$$\frac{1}{2\sqrt{E' + m'}} \frac{\partial E'}{\partial \lambda} (E' - m') + \sqrt{E' + m'} \frac{\partial E'}{\partial \lambda} = \frac{3}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{9}{2\sqrt{E' + m'} (E' - m')}. \quad (5.31)$$

Agrupando os termos em $\partial E'/\partial \lambda$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{E' + m'}} (E' - m') + \sqrt{E' + m'} \right\} &= \frac{\partial E'}{\partial \lambda} \left\{ \frac{E' - m'}{2\sqrt{E' + m'}} + \frac{E' + m'}{\sqrt{E' + m'}} \right\} \\ &= \frac{\partial E'}{\partial \lambda} \left\{ \frac{3E' + m'}{2\sqrt{E' + m'}} \right\} = \frac{9}{2\sqrt{E' + m'} (E' - m')}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

de onde

$$\frac{\partial E'}{\partial \lambda} = \frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{9}{(E' - m')(3E' + m')}. \quad (5.33)$$

De acordo com (5.30), devemos ter $E' > m'$. Porém, podemos mostrar que há uma restrição um pouco maior aos valores admissíveis para E' , dada por $E' > |m'|$. De fato, se $m' > 0$, a justificativa é evidente. Já se $m' < 0$, temos $E' - |m'| = E' + m' = E + m > 0$, assim $E' > |m'|$, independentemente do sinal de m' . Desta maneira, a derivada (5.33) é positiva, pois teremos também $3E' + m' > 0$. O valor de E' cresce com λ , como esperado. Na Fig. 5.1, podemos observar este comportamento, para três valores de m' . A interpretação deste resultado é similar à que foi feita no modelo do MIT, com relação

¹Veremos mais adiante que V_0 assume valores negativos, o que significa que m' pode também ser negativa. Porém, isto não significa que estamos trabalhando com uma massa do quark negativa, pois $m' = m + V_0/2$ não é identificada como uma redefinição da massa do quark diretamente. Se compararmos a equação de movimento do campo dos quarks dentro do modelo de sacola difusa, (5.11), com a equação que governa o movimento de quarks livres, (2.6), vemos que a massa dos quarks pode ser identificada como

$$m + (1 + \gamma^0) \left(\frac{V_0}{2} + V_c(r) \right) = \begin{pmatrix} m + V_0 + \lambda r^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

que envolve, além de V_0 , o potencial confinante $V_c(r)$. Em outras palavras, temos uma massa dinâmica para os quarks, que depende da coordenada radial r . Isto acontece porque os quarks não estão livres, mas submetidos a um potencial confinante, e portanto, a massa m é transladada de uma quantidade que depende de r . Como V_0 é constante, a massa aumenta com r , indicando o confinamento dos quarks.

à dependência entre E e R , já que V_0 é um parâmetro fixo. Esperamos que um aumento de λ acarrete uma diminuição nas dimensões da sacola, de modo que o comprimento de onda do quark diminua, e portanto E aumente.

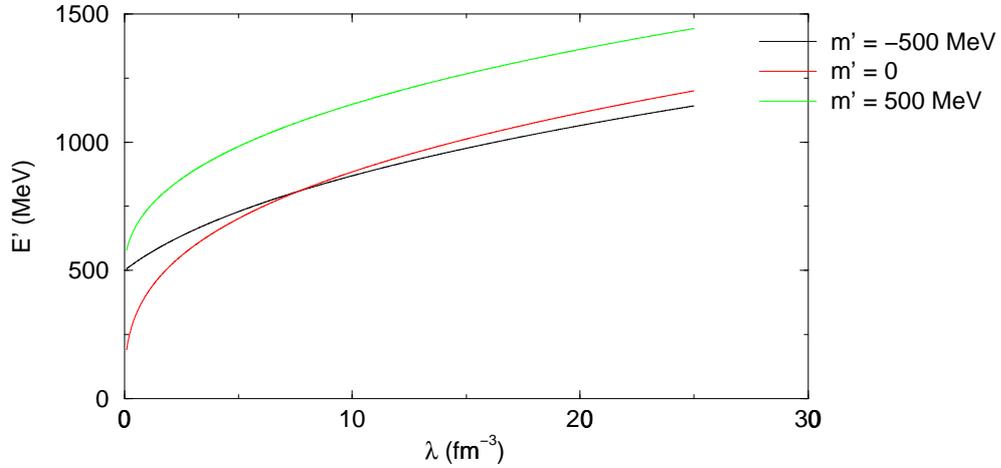


Figura 5.1: Dependência de E' com λ

A solução para $g(r)$ no estado fundamental é

$$g(r) = N e^{-r^2/2r_0^2} L_0^{(1/2)} \left(\frac{r^2}{r_0^2} \right) = N e^{-r^2/2r_0^2}, \quad (5.34)$$

e a componente inferior de Dirac, $f(r)$, é escrita de acordo com (5.15),

$$f(r) = -\frac{Nr}{r_0^2(E' + m')} e^{-r^2/2r_0^2}. \quad (5.35)$$

Normalização da função de onda

A constante de normalização N da função de onda é obtida da condição

$$\int \psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3x = 1. \quad (5.36)$$

Calculamos então a integral

$$\begin{aligned} I \equiv \int \psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3x &= \int_0^\infty (g^2(r) + f^2(r)) r^2 dr \\ &= N^2 \int_0^\infty \left(e^{-r^2/r_0^2} + \frac{r^2}{r_0^4(E' + m')^2} e^{-r^2/r_0^2} \right) r^2 dr. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Introduzimos a variável adimensional $x \equiv r/r_0$,

$$I = N^2 r_0^3 \int_0^\infty \left(e^{-x^2} + \frac{x^2}{r_0^2(E' + m')^2} e^{-x^2} \right) x^2 dx, \quad (5.38)$$

e utilizamos o resultado

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-px^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2p)^n} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad ; \quad p > 0, \quad (5.39)$$

de modo que I é escrita como

$$\begin{aligned} I &= N^2 r_0^3 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{1}{r_0^2 (E' + m')^2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right] = \frac{N^2 r_0^3 \sqrt{\pi} (2r_0^2 (E' + m')^2 + 3)}{8r_0^2 (E' + m')^2} \\ &= \frac{N^2 r_0 \sqrt{\pi} (2r_0^2 (E' + m')^2 + p^2 r_0^2)}{8(E' + m')^2} = \frac{N^2 r_0^3 \sqrt{\pi} (2(E' + m')^2 + p^2)}{8(E' + m')^2} \\ &= \frac{N^2 r_0^3 \sqrt{\pi} (2(E' + m')^2 + (E'^2 - m'^2))}{8(E' + m')^2} \\ &= \frac{N^2 r_0^3 \sqrt{\pi} (2(E' + m') + (E' - m'))}{8(E' + m')} = \frac{N^2 r_0^3 \sqrt{\pi} (3E' + m')}{8(E' + m')}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

No cálculo acima utilizamos a equação de autovalores (5.27) e a definição (5.19) de p^2 . Podemos agora obter a constante de normalização ao quadrado através de (5.36),

$$N^2 = \frac{8(E' + m')}{r_0^3 \sqrt{\pi} (3E' + m')}. \quad (5.41)$$

5.3 Raio quadrático médio

Esta seção é dedicada ao cálculo do raio quadrático médio do núcleon, com base nas funções de onda obtidas. Note-se que, neste modelo, as funções de ondas dos quarks são suprimidas de maneira contínua, de modo que não há um valor da variável radial que determine a superfície da sacola. Definimos então o raio da sacola ao quadrado como o valor esperado do operador raio quadrático médio, ou seja,

$$\langle \psi | r^2 | \psi \rangle = \int d^3x r^2 \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}). \quad (5.42)$$

Utilizando as soluções (5.34) e (5.35) obtidas para os campos dos quarks, temos

$$\langle \psi | r^2 | \psi \rangle = \int_0^{\infty} (g^2(r) + f^2(r)) r^4 dr = N^2 \int_0^{\infty} \left(e^{-r^2/r_0^2} + \frac{r^2}{r_0^4 (E' + m')^2} e^{-r^2/r_0^2} \right) r^4 dr. \quad (5.43)$$

Utilizando a troca de variável $x \equiv r/r_0$, obtemos

$$\langle \psi | r^2 | \psi \rangle = N^2 r_0^5 \int_0^{\infty} \left(e^{-x^2} + \frac{x^2}{r_0^2 (E' + m')^2} e^{-x^2} \right) x^4 dx. \quad (5.44)$$

Este cálculo pode ser efetuado utilizando-se a integral (5.39),

$$\begin{aligned}
\langle \psi | r^2 | \psi \rangle &= N^2 r_0^5 \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{8} + \frac{1}{r_0^2 (E' + m')^2} \frac{15\sqrt{\pi}}{16} \right] \\
&= \frac{3\sqrt{\pi} N^2 r_0^3}{16 (E' + m')^2} [2r_0^2 (E' + m')^2 + 5] \\
&= \frac{3\sqrt{\pi} N^2 r_0^3}{16 (E' + m')^2} \left[2r_0^2 (E' + m')^2 + \frac{5p^2 r_0^2}{3} \right] \\
&= \frac{3\sqrt{\pi} N^2 r_0^5}{16 (E' + m')^2} \left[2(E' + m')^2 + \frac{5p^2}{3} \right],
\end{aligned} \tag{5.45}$$

onde utilizamos a equação de autovalores (5.27). Desenvolvemos agora separadamente o termo entre colchetes:

$$\begin{aligned}
2(E' + m')^2 + \frac{5p^2}{3} &= 2(E' + m')^2 + \frac{5}{3}(E'^2 - m'^2) \\
&= (E' + m') \left[2(E' + m') + \frac{5}{3}(E' - m') \right] \\
&= \frac{(E + m)}{3} (11E' + m'),
\end{aligned} \tag{5.46}$$

onde usamos a definição (5.19) de p^2 . O raio quadrático médio pode então ser escrito como

$$\begin{aligned}
\langle \psi | r^2 | \psi \rangle &= \frac{\sqrt{\pi} N^2 r_0^5 (11E' + m')}{16 (E' + m')} \\
&= \frac{\sqrt{\pi} r_0^5 (11E' + m')}{16 (E' + m')} \frac{8(E' + m')}{r_0^3 \sqrt{\pi} (3E' + m')} \\
&= \frac{r_0^2 (11E' + m')}{2(3E' + m')} \\
&= \frac{3(11E' + m')}{2p^2 (3E' + m')} \\
&= \frac{3}{2} \frac{(11E' + m')}{(E'^2 - m'^2)(3E' + m')},
\end{aligned} \tag{5.47}$$

onde utilizamos outra vez (5.27) e (5.19). Note-se que o raio quadrático médio é uma função do parâmetro λ , via equação de autovalores (5.27). Este parâmetro regula basicamente a intensidade do potencial de oscilador harmônico, conforme discutido anteriormente. Esperamos então que o raio quadrático médio decresça com o aumento de λ . Isto pode ser facilmente verificado se observarmos, de acordo com (5.33), que o autovalor de

energia dos quarks aumenta com λ . Da equação acima, temos dois limites a considerar. O primeiro é o limite em que E' se aproxima de m' , onde o raio quadrático médio tende a infinito. O segundo é o caso em que E' assume valores muito altos, onde o raio quadrático se anula. Desta maneira, podemos esperar que as dimensões da sacola diminuam à medida que aumenta a supressão dos quarks. Este comportamento pode ser visualizado na Fig. 5.2.

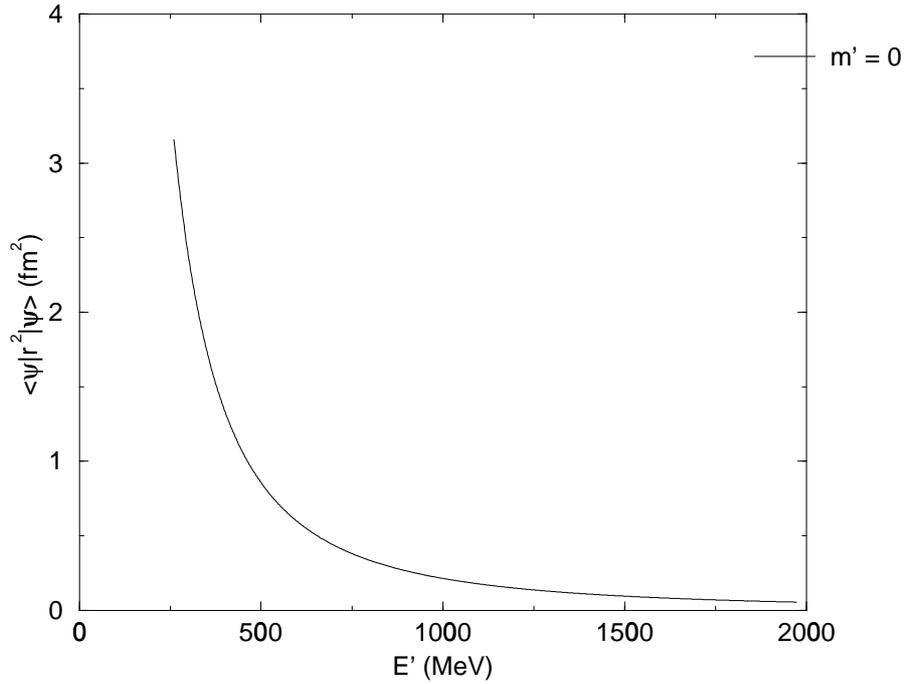


Figura 5.2: Raio quadrático médio da sacola

5.4 Massa de um hádron

Esta seção tem por objetivo obter uma expressão para a massa M de um hádron em termos dos autovalores de energia dos quarks e dos parâmetros B e λ . Inicialmente, deixaremos a forma da função de supressão $F(r)$ em aberto, e depois completaremos o cálculo com a escolha já feita em (5.16). O cálculo será feito a partir do tensor energia-momento, já definido em (2.75),

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (5.48)$$

de onde a massa é dada por

$$M = \int T^{00} d^3x . \quad (5.49)$$

O tensor energia-momento, obtido a partir da densidade lagrangiana (5.10), é

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \frac{i}{2} \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (5.50)$$

Como estamos interessados na componente T^{00} , escrevemos

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \partial^0 \psi - \frac{i}{2} \partial^0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + \frac{i}{2} \partial_i \bar{\psi} \gamma^i \psi + \bar{\psi} \left[m + (1 + \gamma^0) \left(\frac{V_0}{2} + V_c(r) \right) \right] \psi + BF(r) , \end{aligned} \quad (5.51)$$

que, sobre a trajetória (5.11) fica

$$T^{00} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \partial^0 \psi - \frac{i}{2} \partial^0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi + BF(r) . \quad (5.52)$$

Devido à forma da parte temporal da solução, temos $\partial^0 \psi = -iE\psi$ e $\partial^0 \bar{\psi} = iE\bar{\psi}$, onde E representa o autovalor de energia do campo do quark considerado. Ressaltamos mais uma vez que há uma soma implícita sobre os campos dos quarks nos dois primeiros termos à direita na expressão de T^{00} . A partir de agora, escrevemos esta soma explicitamente, de forma que a massa da sacola é dada por

$$M = \sum_q E_q \int \psi_q^\dagger \psi_q d^3x + B \int d^3x F(r) . \quad (5.53)$$

Com a normalização adotada, e calculando as integrais angulares, temos

$$\begin{aligned} M &= \sum_q E_q + 4\pi B \int_0^\infty r^2 F(r) dr \\ &= 3E + 4\pi B \int_0^\infty r^2 F(r) dr . \end{aligned} \quad (5.54)$$

Note-se que os três quarks estão no estado fundamental. Consideramos que possuem a mesma massa (o que é razoável, já que estamos considerando prótons e nêutrons, e as massas de seus quarks constituintes, u e d , são aproximadamente iguais). Então, via equação de autovalores, vemos que os três terão o mesmo autovalor de energia, $E_q \equiv E$.

Agora introduzimos a função de supressão com que estamos trabalhando, (5.16), na expressão (5.54),

$$M = 3E + 4\pi B \int_0^\infty r^2 e^{-\lambda r^3/3} dr . \quad (5.55)$$

Na integral envolvida, fazemos a troca de variável $x \equiv r^3$,

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\lambda r^3/3} dr = \int_0^\infty \frac{dx}{3} e^{-\lambda x/3} = \frac{1}{3} \left. \frac{e^{-\lambda x/3}}{-\lambda/3} \right|_0^\infty = -\frac{1}{\lambda} (0 - 1) = \frac{1}{\lambda}, \quad (5.56)$$

de modo que a massa do hádron é escrita como

$$M = 3E + \frac{4\pi B}{\lambda}. \quad (5.57)$$

Na expressão acima, há um balanço entre os dois termos do lado direito. Foi discutido que o autovalor de energia E é uma função crescente de λ , enquanto que o termo correspondente à energia de vácuo decresce com este parâmetro. Esperamos que exista, então, um valor λ_0 de λ que minimize a massa do hádron. Em outras palavras, o parâmetro λ desempenha o papel de $1/R$ no modelo do MIT. Podemos, por exemplo, comparar (5.57) com a expressão (2.87) do modelo do MIT. Fisicamente, a sacola fixa o seu formato para um determinado valor do parâmetro livre λ , que tomaremos como sendo λ_0 em analogia com o modelo do MIT. Na Fig. 5.3, observamos a variação da massa da sacola com λ , para valores fixos de B , V_0 e m' . São curvas puramente ilustrativas, para que se observe que a função tem realmente um mínimo para algum valor de λ . A determinação dos parâmetros do modelo será feita mais adiante.

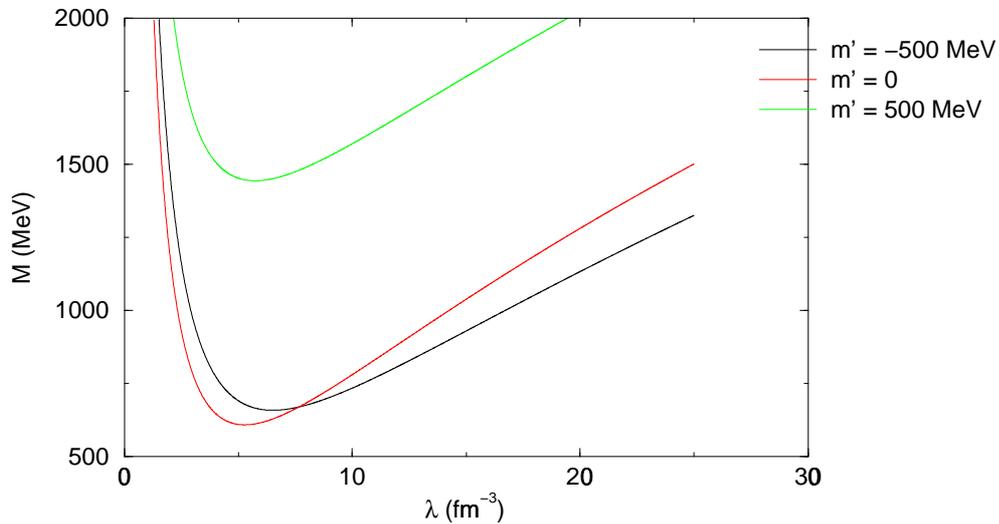


Figura 5.3: Massa da sacola em função de λ , para $B = 300 \text{ MeV}$ e $V_0 = -1500 \text{ MeV}$.

Podemos escrever a equação de minimização da massa como

$$\begin{aligned} \frac{dM(\lambda)}{d\lambda} &= 3 \frac{\partial E}{\partial \lambda} - \frac{4\pi B}{\lambda^2} \\ &= 3 \left[\frac{9}{(E' - m')(3E' + m')} \right] - 4\pi B \left[\frac{81}{(E' + m')^2(E' - m')^4} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde utilizamos o resultado (5.33) e a equação de autovalores (5.30) para substituir λ . A equação de minimização da massa da sacola pode então ser escrita como

$$12\pi B = \frac{(E' - m')(E'^2 - m'^2)^2}{3E' + m'}. \quad (5.59)$$

Uma descrição do modelo de sacola difusa, assim como do modelo do MIT, pode ser encontradas na Ref.[21].

5.5 Determinação dos parâmetros do modelo

Esta seção é dedicada à determinação dos parâmetros do modelo, bem como do autovalor de energia dos quarks no estado fundamental. Temos os seguintes parâmetros a determinar: o parâmetro λ que indica a intensidade do potencial de oscilador harmônico, a constante B da sacola e o potencial constante V_0 . As equações a serem utilizadas são: a expressão da massa de uma sacola (5.57),

$$M_0 = 3 \left(E' + \frac{V_0}{2} \right) + \frac{4\pi B}{\lambda}, \quad (5.60)$$

a equação de autovalores dos quarks (5.30),

$$\sqrt{E' + m'} (E' - m') = 3\sqrt{\lambda}, \quad (5.61)$$

a equação de minimização da massa (5.59),

$$12\pi B = \frac{(E' - m')(E'^2 - m'^2)^2}{3E' + m'}, \quad (5.62)$$

e a expressão do raio quadrático médio (5.47),

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{(11E' + m')}{(E'^2 - m'^2)(3E' + m')}. \quad (5.63)$$

Usaremos para M_0 o valor da massa de um núcleon, ou seja, $M_0 = 939MeV$, e para $\langle r^2 \rangle$ o valor do raio de carga do próton, $\langle r^2 \rangle = (0,82fm)^2$. O valor da massa do quark será dado. Os resultados podem ser visualizados nas Figs. 5.4 - 5.7.

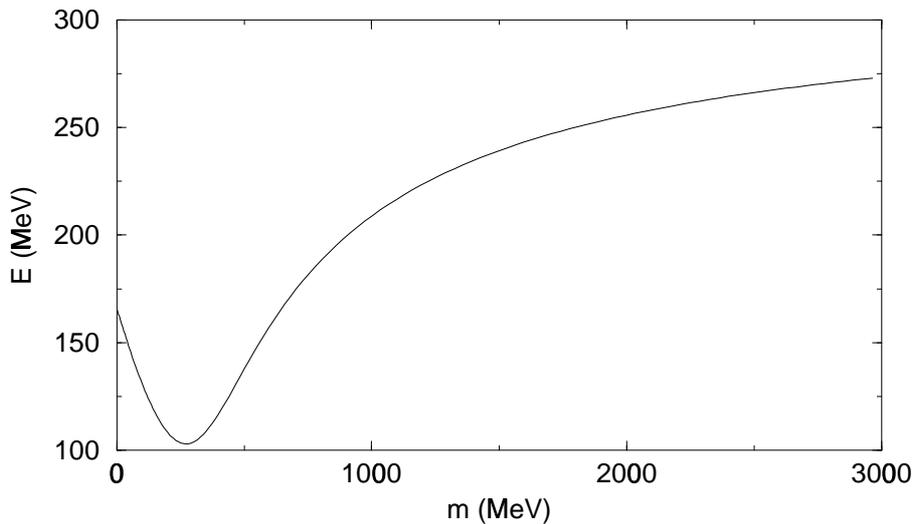


Figura 5.4: Autovalor de energia em função da massa do quark.

Estas figuras devem ser analisadas em conjunto, já que a massa dos quarks é dada. Assim, para cada valor de m , temos valores correspondentes para E , λ , B e V_0 . Os valores numéricos para $m = 0$ serão dados logo adiante. A análise destes resultados não é simples, pois eles foram obtidos da solução de um sistema de 4 equações. Mesmo assim, podemos visualizar algumas coisas nestas figuras. A Fig. 5.5 apresenta uma característica interessante: assim como, no modelo do MIT, o parâmetro R da sacola cresce com a massa m do quark (ver Fig. 2.6), aqui o parâmetro λ decresce com m , já que λ , como já foi discutido, desempenha o papel de $1/R$ no modelo de sacola difusa. A Fig. 5.4 indica que, dentro de um limite em que a massa dos quarks é pequena, um aumento na massa do quark acarreta um decréscimo no autovalor de energia, pois a massa do quark é energia que contribui para a massa do núcleon (que é fixa). Assim, o autovalor de energia diminui para compensar este acréscimo. O mesmo ocorre com a constante B da sacola como se vê na Fig. 5.6, já que esta constante representa uma contribuição à massa da sacola. Com relação à Fig. 5.7, vemos que, quanto mais aumenta a massa do quark, mais energia está sendo cedida à sacola, e não há a necessidade de um potencial V_0 para reproduzir a massa experimental do núcleon (note-se que, para valores pequenos de m , V_0 se aproxima de zero). Para que se entenda melhor os resultados, incluímos a Fig. 5.8, na qual pode-se visualizar a contribuição relativa, à massa da sacola, dos termos referentes ao autovalor de energia e da energia de vácuo. Do mesmo modo que antes, cada reta vertical está

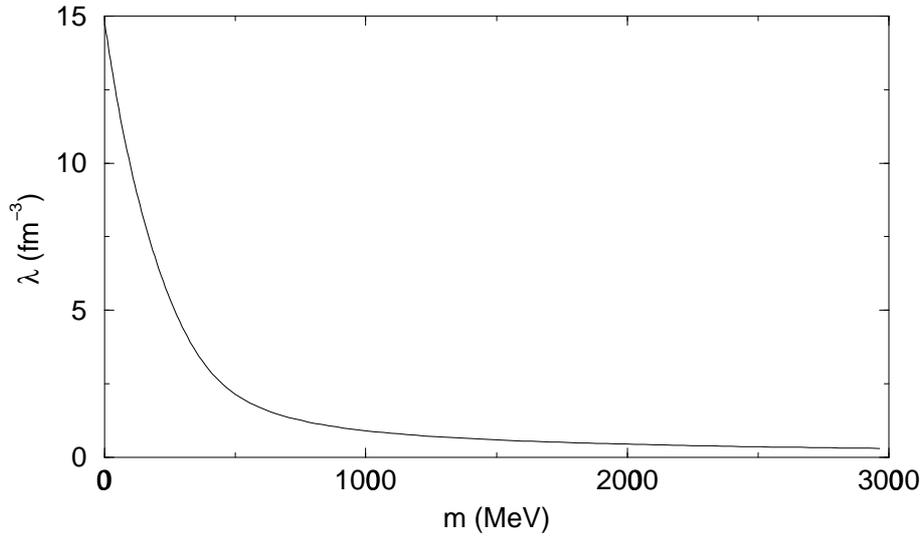


Figura 5.5: Parâmetro λ em função da massa do quark.

associada à solução do sistema para um valor dado de m . Esta figura reflete o fato de que, para massas do quark baixas, ocorrendo uma diminuição no autovalor de energia dos quarks, (como havia sido visto na fig. 5.4), o termo correspondente à energia de vácuo deve aumentar para haver uma compensação. Note-se que isto não é claro que vá acontecer, pois tanto λ quanto B decrescem com m (de acordo com as Figs. 5.5 e 5.6). Mesmo assim, a contribuição de B é suficiente para compensar este decréscimo em E . Numericamente, encontra-se que os valores dos parâmetros e do autovalor de energia para massa do quark nula são $\lambda = 14,891820 fm^{-3}$, $B = 521,528280 MeV/fm^3$, $V_0 = -2322,117511 MeV$ e $E = 166,303859 MeV$.

5.6 Correção de centro de massa

Para que se possa fazer uma comparação dos resultados obtidos numericamente, introduzimos nesta seção a correção de centro de massa no modelo. Este procedimento será feito em duas etapas. Inicialmente, não será alterada a equação de minimização da massa da sacola. Em uma segunda etapa, na seção seguinte, alteraremos também esta equação.

A expressão para a massa de uma sacola, que substituirá (5.60), é dada por

$$M_0 = \sqrt{9 \left(E' + \frac{V_0}{2} \right)^2 - \frac{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)}{2(3E' + m')}} + \frac{4\pi B}{\lambda}. \quad (5.64)$$

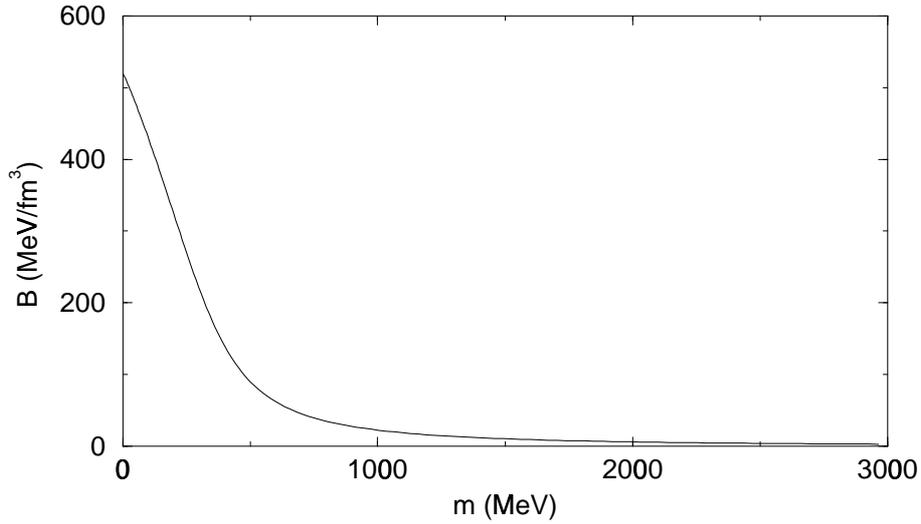


Figura 5.6: Constante B da sacola em função da massa do quark.

A equação de autovalores continua sendo (5.61),

$$\sqrt{E' + m'} (E' - m') = 3\sqrt{\lambda}. \quad (5.65)$$

Quanto à minimização da massa da sacola em relação a λ , utilizaremos a mesma equação anterior, (5.62), mesmo que a expressão para a massa tenha sofrido uma correção,

$$12\pi B = \frac{(E' - m') (E'^2 - m'^2)^2}{3E' + m'}. \quad (5.66)$$

E ainda, a expressão do raio quadrático médio (5.63) sofre uma correção,

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle = & \left[\frac{3}{2} \frac{(11E' + m')}{(E'^2 - m'^2)(3E' + m')} - \frac{9}{2} \frac{(3E' + m')}{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)} \right] \\ & \cdot \left[1 + \frac{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)}{6(3E' + m')M_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

A Fig. 5.9 mostra a variação do raio quadrático médio da sacola com E' , para o valor fixo $m' = 0$. Vê-se, da equação (5.67), que o raio quadrático médio, quando E' tende ao infinito, não se aproxima de zero, mas de um valor finito e não-nulo,

$$\langle r^2 \rangle \Big|_{E' \rightarrow \infty} = \frac{3}{12} \frac{11^2}{3^2} \frac{1}{M_0} - \frac{9}{12} \frac{1}{M_0}. \quad (5.68)$$

Os resultados da determinação dos parâmetros λ , B e V_0 e do autovalor de energia são mostrados em função da massa do quark nas Figs. 5.10 - 5.13. Nestas figuras, A significa

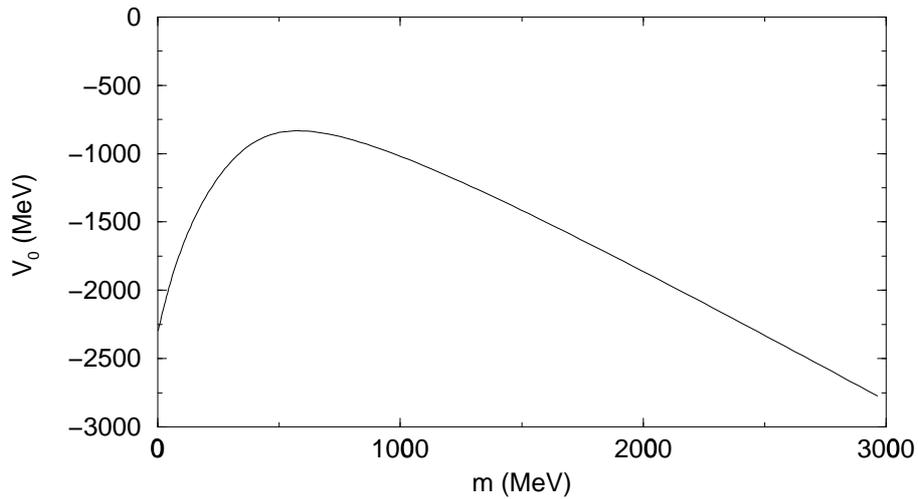


Figura 5.7: Potencial V_0 em função da massa do quark.

sem correção de centro de massa, e B significa com correção. Pode-se ver, nestas figuras, que os resultados são bastante semelhantes àqueles obtidos para o caso sem correção de centro de massa. Um resultado que exibe um comportamento novo é o obtido na Fig. 5.14, que mostra a contribuição dos termos relativos ao autovalor de energia e à energia de vácuo para a massa da sacola. Esta figura praticamente não possui, para massas dos quarks pequenas, um decréscimo devido à contribuição do termo correspondente ao autovalor de energia (compare com a Fig. 5.8). Isso acontece, mesmo que o autovalor de energia em si continue apresentando o mesmo comportamento (Fig. 5.10). A análise deste resultado deve ser feita com base na equação (5.64). Vemos que o termo que corresponde ao autovalor sofre um decréscimo, que depende de m via m' . Uma conclusão exata é difícil de obter, pois outra vez é um sistema de 4 equações, mas vemos que, devido à presença deste decréscimo, mesmo para massas dos quarks bem próximas de zero, o resultado já é menor do que no caso anterior. Note que o mínimo na Fig. 5.8 é aproximadamente o valor de onde parte a curva na Fig. 5.14. Na Fig. 5.15, temos a massa da sacola como função de λ , para os valores fixos $B = 300\text{MeV}$ e $V_0 = -400\text{MeV}$, para dois valores fixos de m' . Esta figura tem apenas o objetivo de mostrar que existe realmente um mínimo da massa da sacola em função de λ , para valores fixos dos outros parâmetros.

Para massa dos quarks nula, os resultados numéricos encontrados para os parâmetros e autovalores de energia são $\lambda = 7,780002\text{fm}^{-3}$, $B = 405,314305\text{MeV}/\text{fm}^3$, $V_0 =$

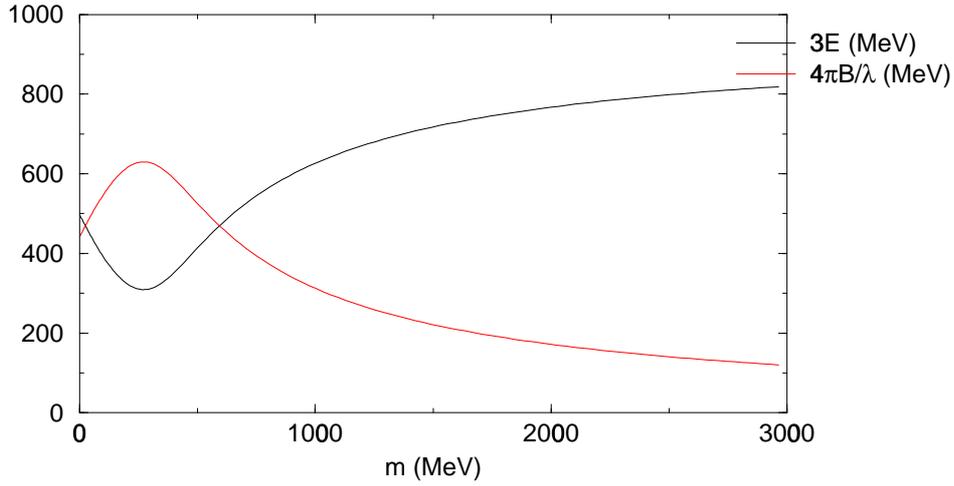


Figura 5.8: Contribuição relativa para a massa da sacola.

$-940,677555 \text{ MeV}$ e $E = 332,104128 \text{ MeV}$.

5.7 Correção de centro de massa revisitada

Nesta seção, complementamos a seção anterior, introduzindo uma correção também para a equação de minimização da massa da sacola. A expressão para a massa de uma sacola, que substituirá (5.60), é dada por

$$M_0 = \sqrt{9 \left(E' + \frac{V_0}{2} \right)^2 - \frac{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)}{2(3E' + m')}} + \frac{4\pi B}{\lambda}. \quad (5.69)$$

A equação de autovalores continua sendo (5.61),

$$\sqrt{E' + m'}(E' - m') = 3\sqrt{\lambda}. \quad (5.70)$$

Para a equação de minimização da massa da sacola em relação a λ , obtemos a expressão

$$12\pi B = \frac{(E' - m')(E'^2 - m'^2)^2 \sqrt{\left(M_0 - \frac{4\pi B}{\lambda}\right)^2 + 3|\vec{p}|^2}}{3E' + m'} \frac{1}{\left(M_0 - \frac{4\pi B}{\lambda}\right)} - \frac{(E'^2 - m'^2)^2(E' - m')}{24\pi(3E' + m')} \frac{1}{\left(M_0 - \frac{4\pi B}{\lambda}\right)} \frac{\partial(|\vec{p}|^2)}{\partial E'}, \quad (5.71)$$

que substituirá (5.62). Na expressão acima, $|\vec{p}|^2$ é o valor esperado do momentum linear ao quadrado,

$$|\vec{p}|^2 = \frac{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)}{6(3E' + m')}. \quad (5.72)$$

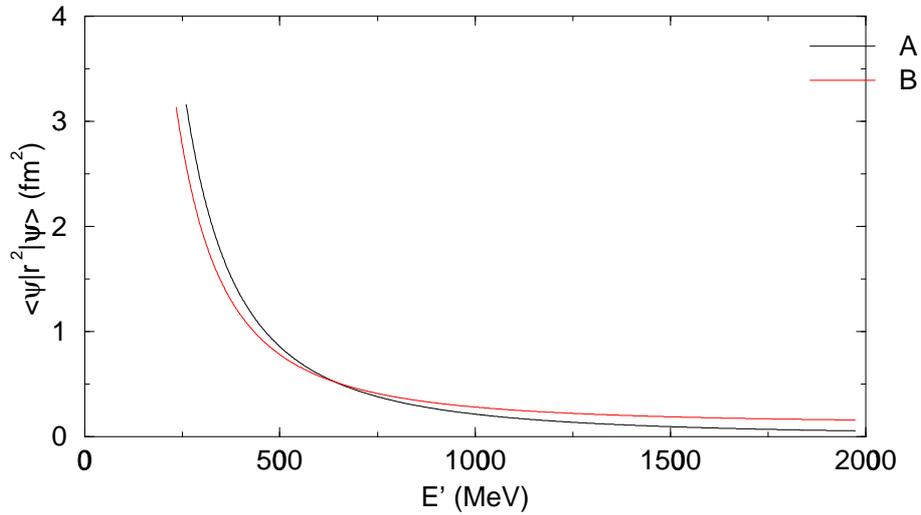


Figura 5.9: Raio quadrático médio da sacola em função de E' , para $m' = 0$. A = sem correção de centro de massa e B = com correção.

E ainda, a expressão do raio quadrático médio (5.63) sofre uma correção,

$$\langle r^2 \rangle = \left[\frac{3}{2} \frac{(11E' + m')}{(E'^2 - m'^2)(3E' + m')} - \frac{9}{2} \frac{(3E' + m')}{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)} \right] \cdot \left[1 + \frac{(11E' + m')(E'^2 - m'^2)}{6(3E' + m')M_0^2} \right]. \quad (5.73)$$

A Fig. 5.16 mostra a variação do raio quadrático médio da sacola com E' , para o valor fixo $m' = 0$. Os resultados da determinação dos parâmetros λ , B e V_0 e do autovalor de energia são mostrados em função da massa do quark nas Figs. 5.17 - 5.20. Nestas figuras, similarmente ao caso anterior, A significa sem correção de centro de massa, e B significa com correção. Na Fig. 5.21, mostramos a contribuição dos termos relativos ao autovalor de energia e à energia de vácuo para a massa da sacola. A Fig. 5.22 mostra a massa da sacola como função de λ , para os valores fixos $B = 300MeV$ e $V_0 = -400MeV$, para dois valores fixos de m' . As interpretações destas figuras são semelhantes àsquelas dadas na seção anterior. A diferença neste caso é que os resultados não contemplam massa do quark nula. O menor valor obtido é aproximadamente $m = 143MeV$, para o qual os valores encontrados são $\lambda = 4,4fm^{-3}$, $B = 326MeV$, $V_0 = -704MeV$ e $E = 282MeV$.

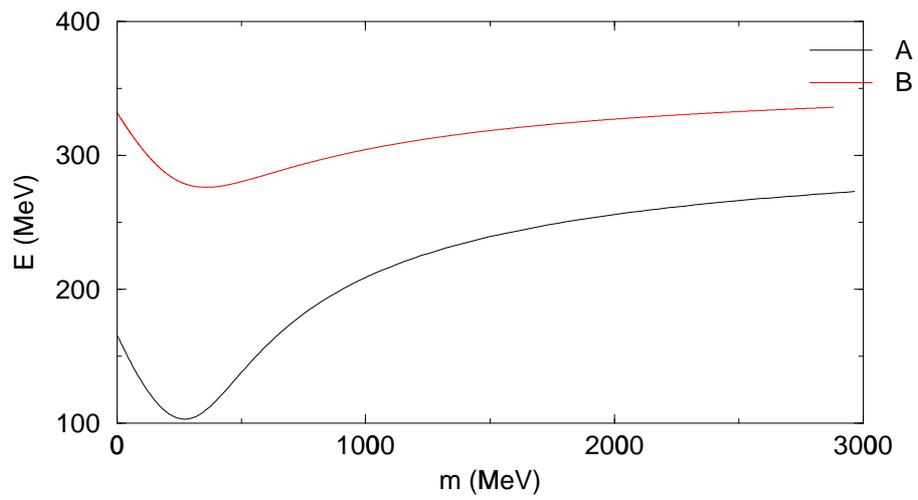


Figura 5.10: Autovalor de energia E em função da massa do quark.

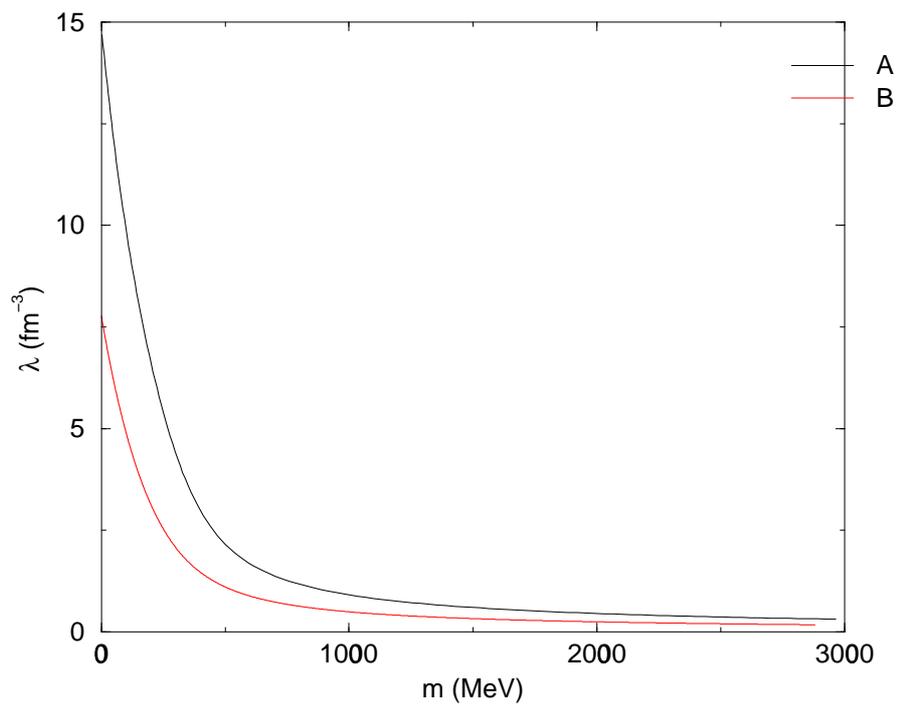


Figura 5.11: Parâmetro λ do oscilador harmônico em função da massa do quark.

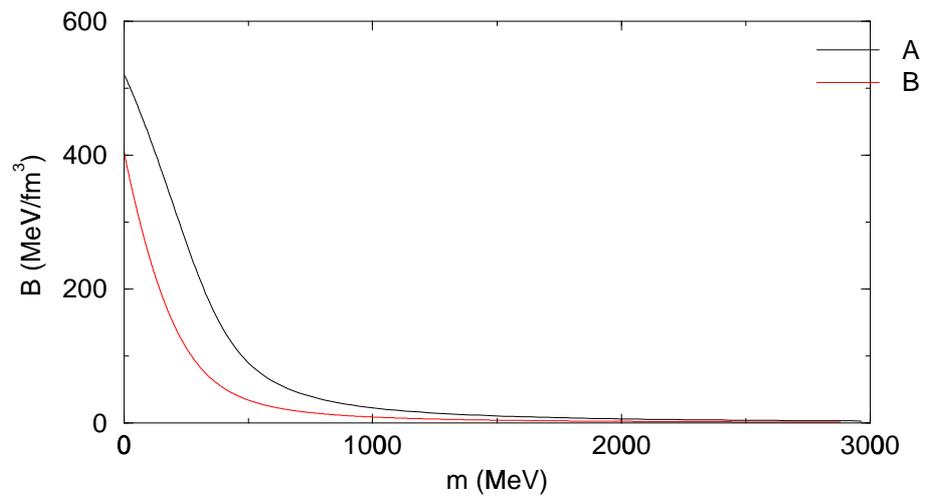


Figura 5.12: Constante B da sacola em função da massa do quark.

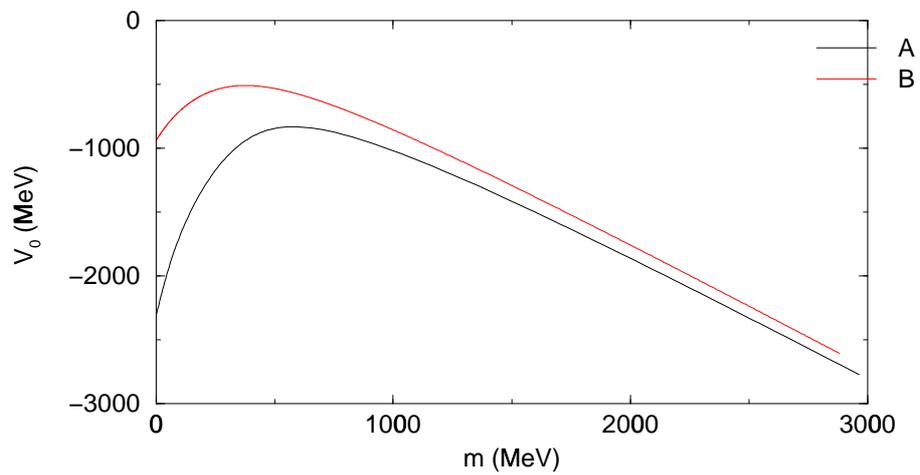


Figura 5.13: Potencial V_0 em função da massa do quark.

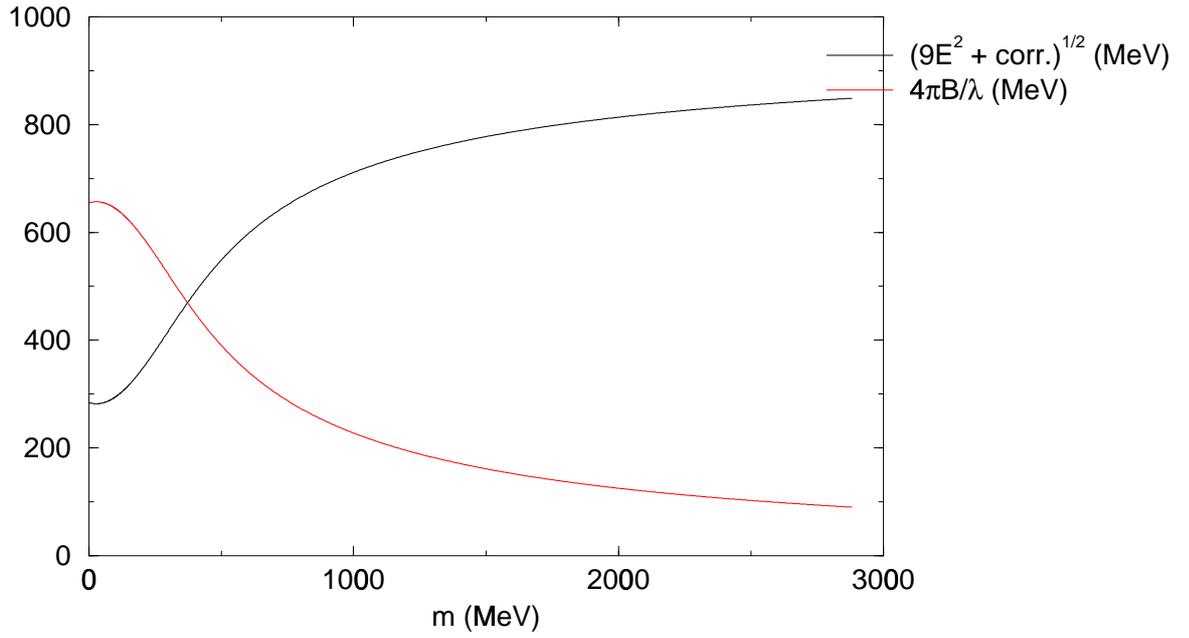


Figura 5.14: Contribuição relativa para a massa da sacola dos termos relacionados ao autovalor de energia e à energia de vácuo.

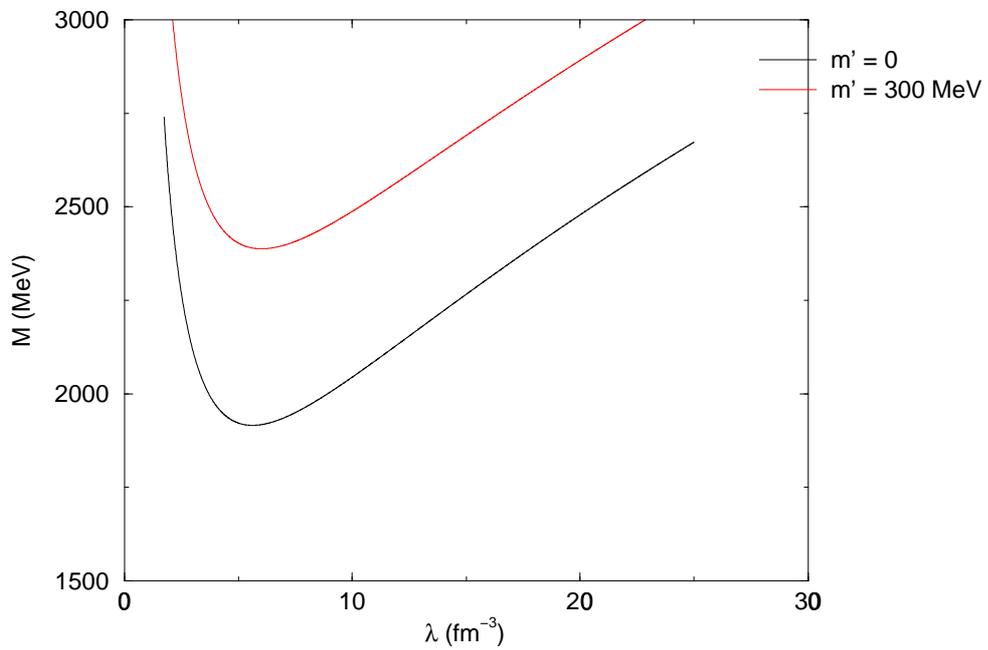


Figura 5.15: Massa da sacola como função de λ , para valores fixos de m' , B e V_0 .

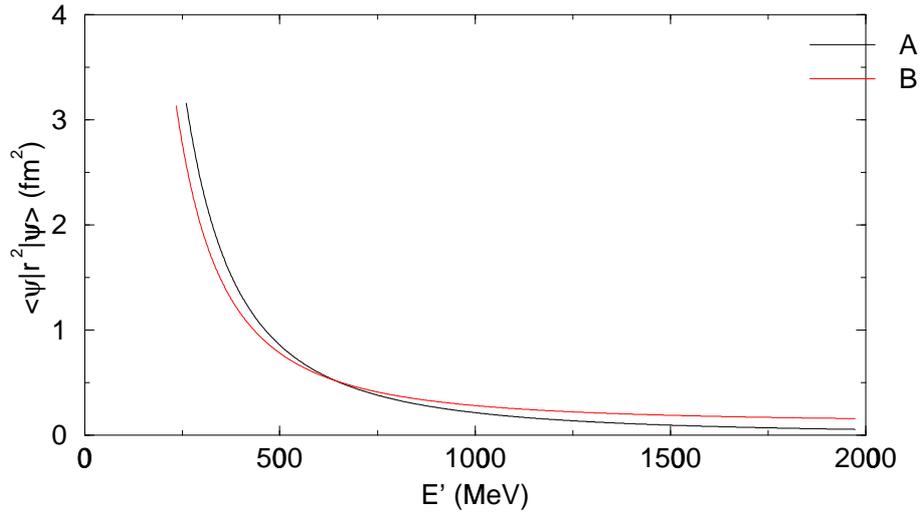


Figura 5.16: Raio quadrático médio da sacola em função de E' , para $m' = 0$. A = sem correção de centro de massa e B = com correção.

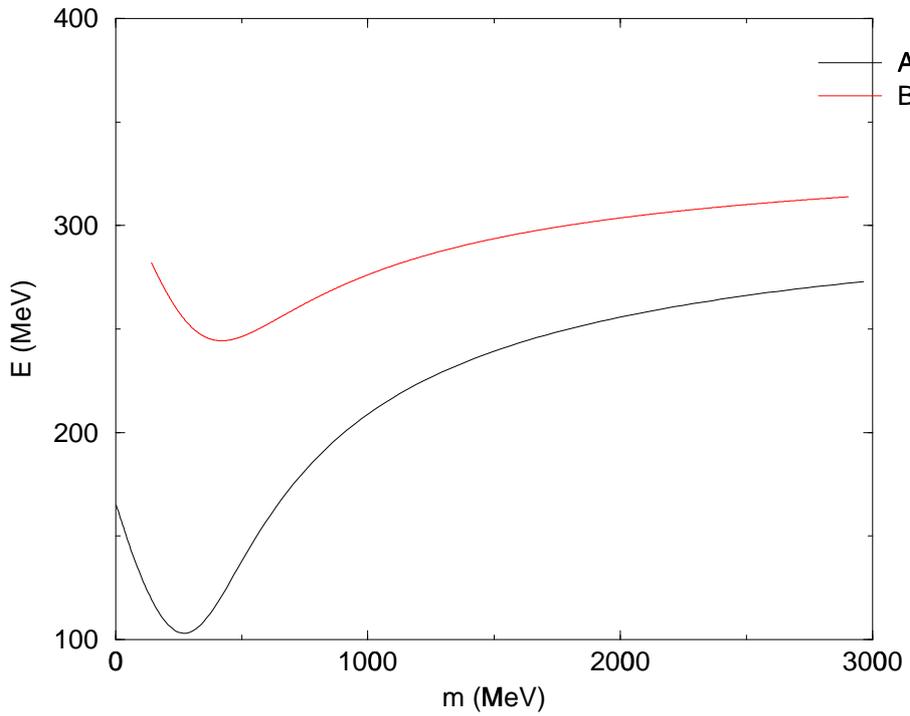


Figura 5.17: Autovalor de energia E em função da massa do quark.

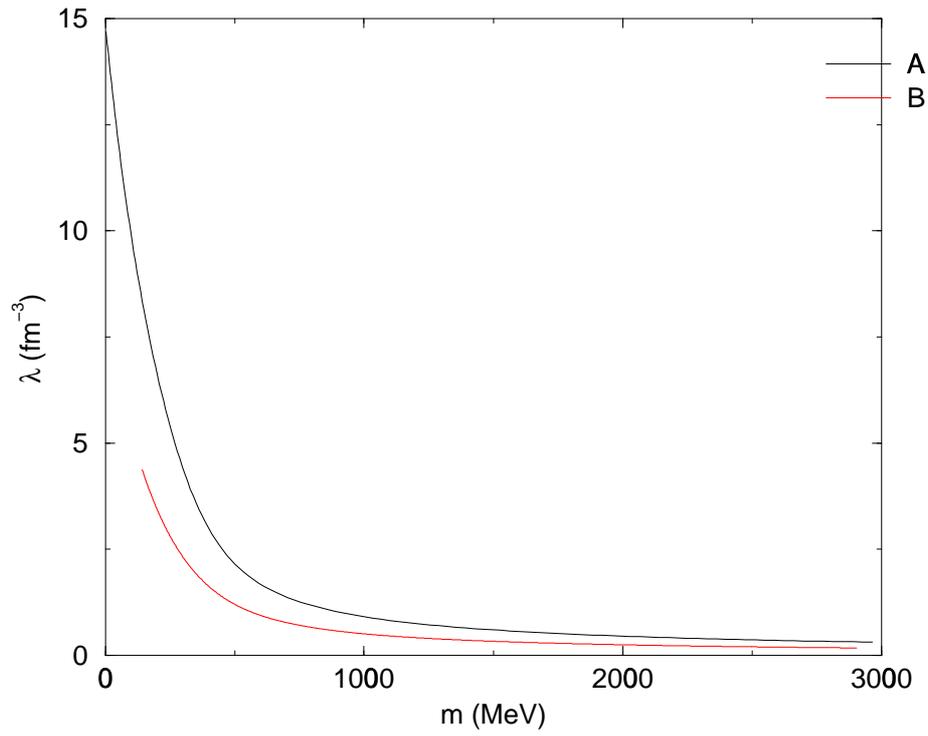


Figura 5.18: Parâmetro λ do oscilador harmônico em função da massa do quark.

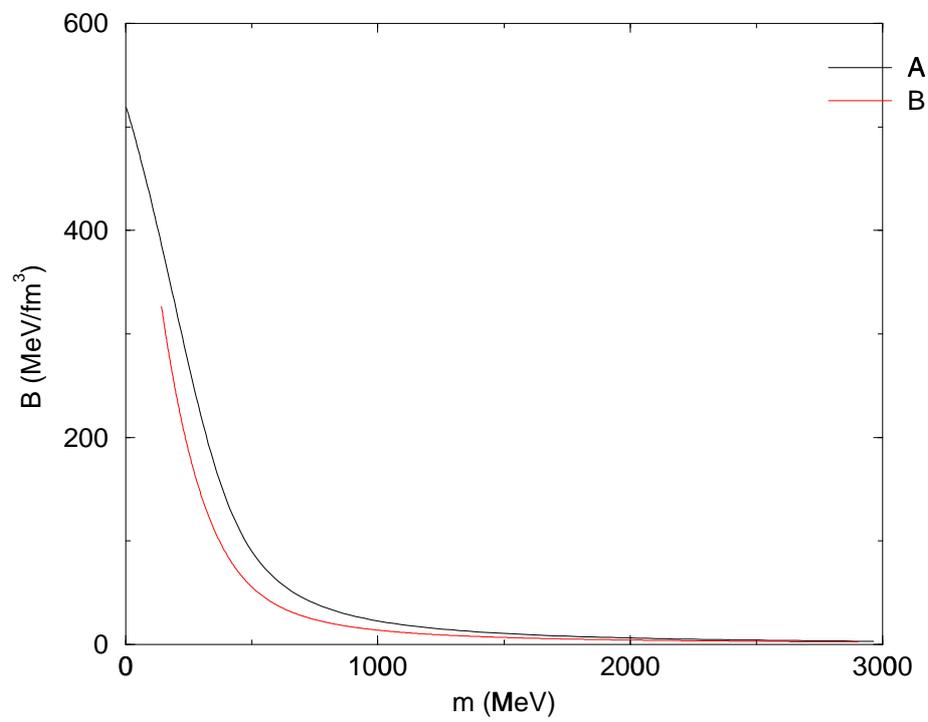


Figura 5.19: Constante B da sacola em função da massa do quark.

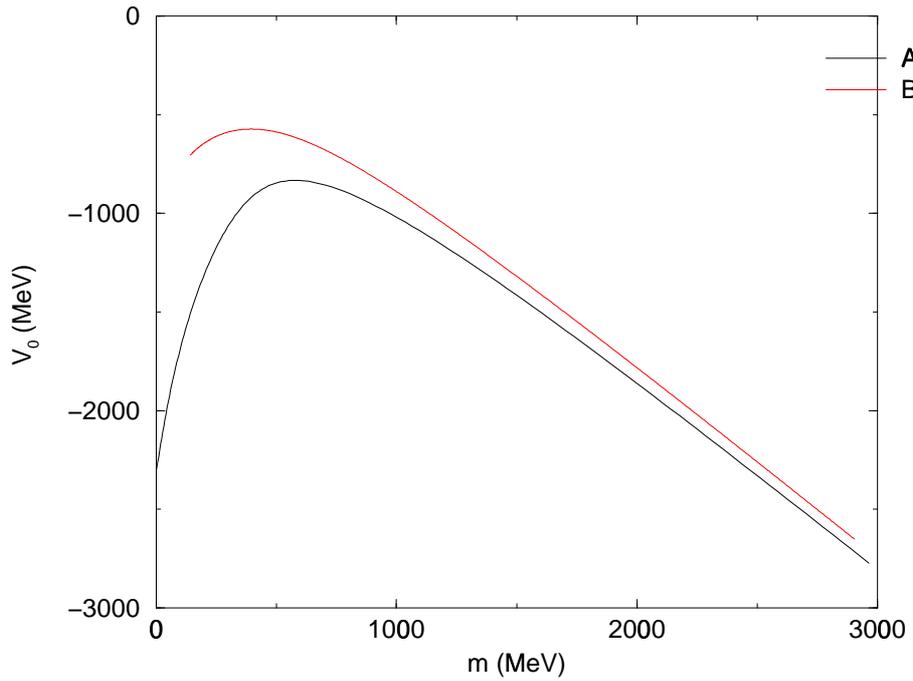


Figura 5.20: Potencial V_0 em função da massa do quark.

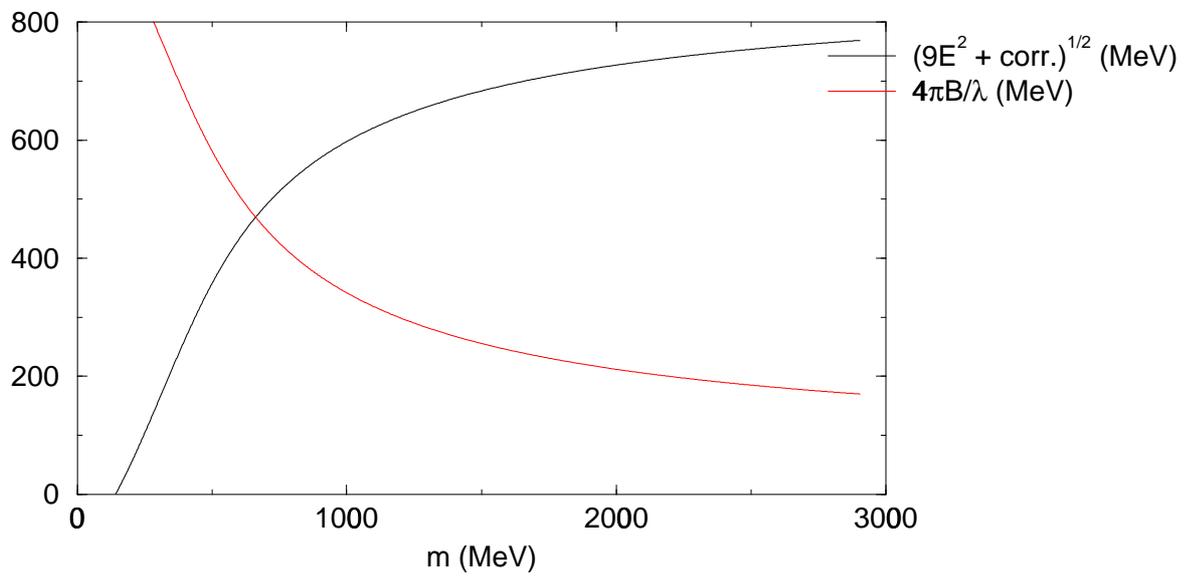


Figura 5.21: Contribuição relativa para a massa da sacola dos termos relacionados ao autovalor de energia e à energia de vácuo.

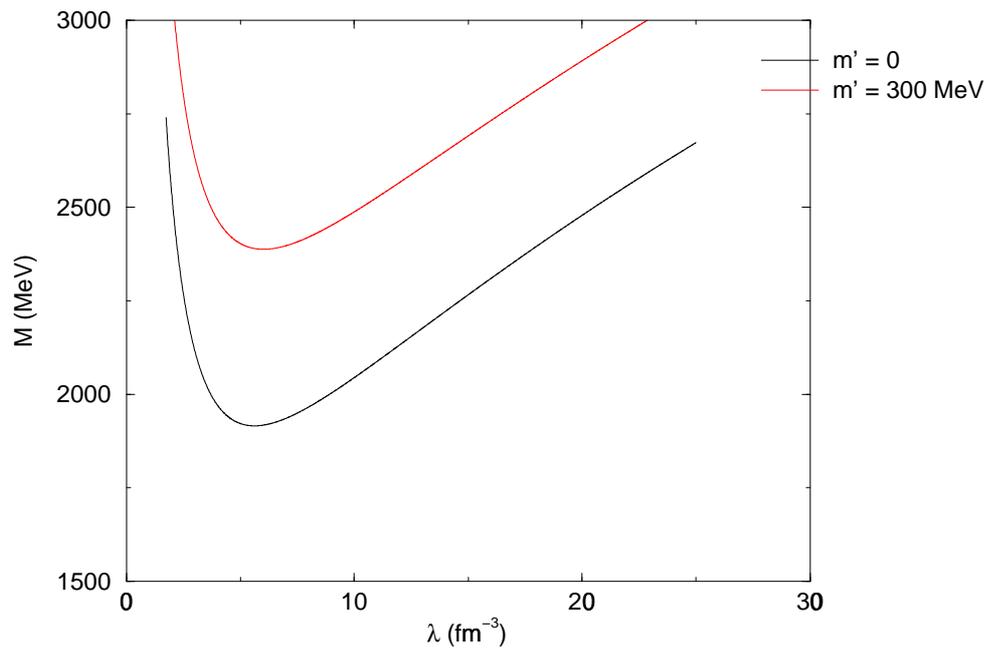


Figura 5.22: Massa da sacola como função de λ , para valores fixos de m' , B e V_0 .

Capítulo 6

Aplicação do formalismo de Kagiya ao modelo de sacola difusa

Neste capítulo descrevemos um modelo para a matéria nuclear que incorpora os resultados obtidos pelo modelo de sacola difusa, discutido no capítulo 5, para a modelagem de um núcleon. O presente modelo segue a linha desenvolvida pelo modelo de Kagiya, exposto no capítulo 4: consideraremos a matéria nuclear como um gás de partículas de Fermi, e a interação via troca de píons será levada em conta no formalismo através da utilização de um potencial efetivo não-relativístico. Como desejamos estudar a região de altas densidades bariônicas, o modelo agregará também o volume de exclusão *a la Van der Waals*. Obtemos resultados para a energia de saturação da matéria nuclear simétrica e para a equação de estado da matéria de nêutrons.

6.1 Descrição do modelo

Consideramos um núcleon isolado constituído por 3 quarks confinados em uma certa região, chamada convenientemente de sacola. De acordo com o modelo de sacola difusa, a expressão para a massa M de uma sacola, na aproximação mais simples de uma sacola esférica é, como vimos em (5.57),

$$M = 3E + \frac{4\pi B}{\lambda} . \quad (6.1)$$

A constante B , lembramos, representa a diferença de energia por unidade de volume entre os vácuos perturbativo e não-perturbativo da QCD. Em outras palavras, é a energia por

unidade de volume necessária para criar a sacola no vácuo. O primeiro termo do lado direito refere-se aos autovalores dos campos dos quarks, e portanto, não somente à energia cinética dos quarks, que se movimentam na sacola, como também reflete a presença de um potencial confinante como vimos. Note-se que a expressão acima para a massa não é dada em termos do volume da sacola, uma vez que a sacola não possui um volume definido, estendendo-se este teoricamente ao infinito. Isto ocorre, conforme descrito no capítulo sobre o modelo de sacola difusa, porque a função de supressão não é uma função degrau, e a sacola não “deixa de existir” para um valor bem definido do raio. O campo dos quarks é suprimido continuamente. A função de supressão escolhida foi

$$F(r) = e^{-\lambda r^3/3} , \quad (6.2)$$

que, conforme foi visto, dá origem a um potencial confinante do tipo oscilador harmônico. O parâmetro λ faz, como vimos, o papel que desempenhava o raio da sacola no modelo do MIT. No capítulo sobre o modelo de sacola difusa, obtivemos soluções para os parâmetros B , λ e V_0 e para o autovalor de energia do estado fundamental que ajustam a massa do núcleon, minimizam esta massa em relação a λ e ajustam o valor experimental do raio de carga do próton.

Neste capítulo, desenvolvemos um modelo para a matéria nuclear ao estilo do que foi feito no modelo de Kagiya, no capítulo 4. A diferença é que agora a descrição de uma sacola será dada pelo modelo de sacola difusa em vez do modelo do MIT. Esperamos obter um novo valor para o parâmetro λ , já que cada sacola sofrerá pressão das outras, e o seu volume tenderá a diminuir. Isto se refletirá em λ , que é o análogo, repetimos, ao raio da sacola no modelo do MIT (ou análogo ao inverso do raio). Conseqüentemente, o autovalor de energia E dos quarks nas sacolas sofrerá alteração também, via a equação de autovalores

$$(E'^2 - m'^2) = 3\sqrt{\lambda(E' + m')} . \quad (6.3)$$

Matéria nuclear

A exemplo do que foi feito no capítulo 4, consideraremos um sistema físico hipotético constituído por um número infinito de núcleons. Como foi feito naquele capítulo, consideramos um número A de núcleons, dos quais Z são prótons e N são nêutrons, e no final

tomamos o limite em que A tende ao infinito. O sistema está confinado em um volume V . Desejamos estudar o comportamento deste sistema levando em conta as interações entre as sacolas. Utilizaremos igualmente uma função energia interna, E , para o sistema, ou seja, a soma de todo o tipo de energia que o sistema carrega: a energia cinética das sacolas e a energia de interação entre elas. As considerações quanto às dependências da energia interna são as mesmas do modelo de Kagiyama, ou seja, E deve depender do número de partículas e do volume V ocupado pelo sistema. Além disso, no modelo de Kagiyama, foi introduzido o volume de exclusão *a la Van der Waals*, para evitar que duas ou mais sacolas se superponham. Neste caso, o volume de uma sacola será dado em termos do valor esperado do operador raio ao quadrado, obtido em (5.47),

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{(11E' + m')}{(E'^2 - m'^2)(3E' + m')} . \quad (6.4)$$

Considerando que a sacola possui simetria esférica, o seu volume v é dado por

$$v = \frac{4\pi}{3} \langle r^2 \rangle^{3/2} . \quad (6.5)$$

Finalmente, devemos esperar que a energia interna E dependa também da massa de uma sacola, $M(\lambda)$. Aqui introduzimos no modelo o resultado (6.1), obtido no modelo de sacola difusa. Escrevemos então

$$E = E(N, Z, V, \lambda, M(\lambda)) . \quad (6.6)$$

Após estas considerações, devemos escolher uma forma funcional específica para a função energia interna do sistema. Como o modelo trata de um sistema de férmions, uma escolha razoável para a parte não-interagente é a energia de um gás de Fermi livre. A expressão da energia de Fermi por partícula e com fator de degenerescência $\gamma = 2$, devido ao spin, é

$$\begin{aligned} & E_F(\alpha, V, M(\lambda)) \\ &= \frac{V}{4\pi^2} \left[k_{F\alpha} \left(k_{F\alpha}^2 + \frac{M^2(\lambda)}{2} \right) \sqrt{k_{F\alpha}^2 + M^2(\lambda)} - \frac{M^4(\lambda)}{2} \ln \left(\frac{k_{F\alpha} + \sqrt{k_{F\alpha}^2 + M^2(\lambda)}}{M(\lambda)} \right) \right] , \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde o momento de Fermi $k_{F\alpha}$ é definido por

$$k_{F\alpha} \equiv \left(3\pi^2 \frac{\alpha}{V} \right)^{1/3} . \quad (6.8)$$

Na notação utilizada em (6.7) e (6.8), α pode assumir os valores Z ou N .

Volume de exclusão a la Van der Waals

Introduzimos agora o volume de exclusão a la Van der Waals,

$$V' = V - bAv(\lambda), \quad (6.9)$$

o que nos leva a definir

$$\rho' \equiv \frac{A}{V'} = \frac{A}{V - bAv(\lambda)} = \frac{\rho}{1 - b\rho v(\lambda)}, \quad (6.10)$$

$$k'_{FZ} \equiv \left(3\pi^2 \frac{Z}{V'}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{Z}{A} \frac{A}{V'}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) \rho'\right)^{1/3} \quad (6.11)$$

e

$$k'_{FN} \equiv \left(3\pi^2 \frac{N}{V'}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{N}{A} \frac{A}{V'}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 \left(-x + \frac{1}{2}\right) \rho'\right)^{1/3}. \quad (6.12)$$

O parâmetro x foi definido em (4.22),

$$x \equiv \frac{Z}{A} - \frac{1}{2}. \quad (6.13)$$

Com a introdução dos efeitos do volume de exclusão, vemos que a energia de Fermi (6.7) por número de partículas é escrita como

$$\begin{aligned} e_F\left(\frac{\alpha}{A}\rho', M(\lambda)\right) &\equiv \frac{E_F(\alpha, V', M(\lambda))}{\alpha} \\ &= \frac{3}{4k_{F\alpha}^{3'}} \left[k'_{F\alpha} \left(k_{F\alpha}^{2'} + \frac{M^2(\lambda)}{2} \right) \sqrt{k_{F\alpha}^{2'} + M^2(\lambda)} - \frac{M^4(\lambda)}{2} \ln \left(\frac{k'_{F\alpha} + \sqrt{k_{F\alpha}^{2'} + M^2(\lambda)}}{M(\lambda)} \right) \right] \\ &= \frac{3M(\lambda)}{4y_\alpha^3} \left[y_\alpha \left(y_\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + y_\alpha^2} - \frac{1}{2} \ln \left(y_\alpha + \sqrt{1 + y_\alpha^2} \right) \right] \\ &= M(\lambda)f(y_\alpha). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Alguns passos nos cálculos acima não foram apresentados em detalhe porque são idênticos àqueles no desenvolvimento do modelo de Kagiyama. A variável $y_\alpha \equiv \frac{k'_{F\alpha}}{M(\lambda)}$ já foi definida naquele capítulo, assim como a função

$$f(x) = \frac{3}{4x^3} \left[x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right]. \quad (6.15)$$

O termo correspondente à energia de interação entre as partículas, E_{INT} , é o mesmo usado anteriormente,

$$E_{INT} = \frac{1}{VM^2(\lambda)} \sum_{i \neq j} (a_s + a_v \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j) = \frac{A\rho}{M^2(\lambda)} (a_s + a_v x^2). \quad (6.16)$$

Escrevemos então a função energia interna por partícula como

$$e(x, \rho, \lambda) = M(\lambda) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) f(y_Z) + \left(-x + \frac{1}{2} \right) f(y_N) \right] + \frac{\rho}{M^2(\lambda)} (a_s + a_v x^2). \quad (6.17)$$

Note-se que esta última expressão é formalmente idêntica à expressão (4.33), obtida no capítulo sobre o modelo de Kagiya, para a energia interna por partícula. A diferença conceitual é que agora o parâmetro λ regulará o valor da energia, ou seja, as sacolas, agora em um meio, ajustarão um valor de λ para o equilíbrio do sistema, como ocorreu com v no modelo de Kagiya. A relação entre o volume de uma sacola e λ será feita via a equação do raio quadrático médio (6.4).

É conveniente ainda, neste ponto dos cálculos, observar que y_α contém dependência em ρ e em λ via ρ' , além da dependência em λ via $M(\lambda)$. Além disso, note-se que, na matéria nuclear simétrica, temos $x = 0$, e assim $N = Z = A/2$:

$$k'_{FZ} = k'_{FN} = \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho' \right)^{1/3} \equiv k'_F \quad (6.18)$$

e

$$y_Z = y_N = \frac{k'_F}{M(\lambda)} \equiv y. \quad (6.19)$$

A título de ilustração, na Fig. 6.1, vemos a variação da energia interna por núcleon para os valores fixos dos parâmetros $V_0 = -2322, 12 MeV$, $B = 521, 53 MeV/fm^3$ e $m' = -1161, 06 MeV$. Estes são os parâmetros do modelo de sacola difusa para massa do quark nula. Além disso, utilizamos $\rho = 0, 17 fm^{-3}$, $b = 1$, $a_s = -30$ e $x = 0$. Vemos que esta função tem um valor mínimo para algum valor de λ , que será o valor que determinará o volume da sacola via (6.4).

6.2 Determinação dos parâmetros do modelo

O modelo possui os parâmetros b , a_s e a_v a serem determinados, além de λ . Foi discutido que λ desempenha aqui o mesmo papel do volume da sacola no modelo do MIT.

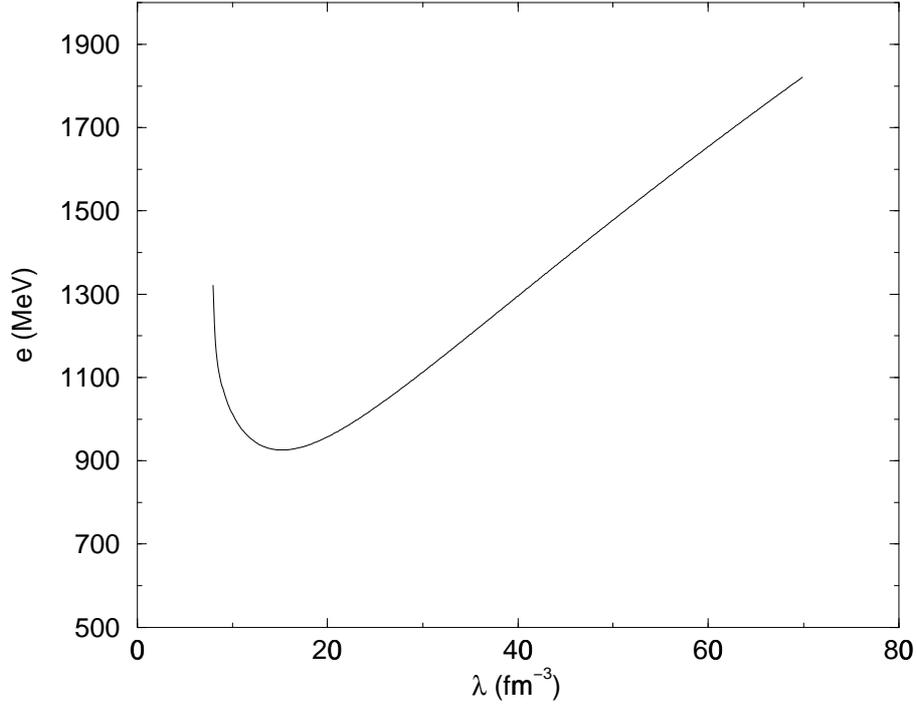


Figura 6.1: Energia interna por núcleon em função de λ .

A determinação de λ será feita, então, por uma equação análoga a (4.37), ou seja,

$$\left. \frac{\partial e}{\partial \lambda} \right|_{\rho, x} = 0, \quad (6.20)$$

cuja solução é $\lambda = \tilde{\lambda}(x, \rho)$, e portanto o valor de energia que minimiza a energia do sistema para um dado valor de ρ é

$$\tilde{e}(x, \rho) = e(x, \rho, \tilde{\lambda}(x, \rho)) \quad (6.21)$$

Esta equação de minimização pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(x, \rho, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{dM(\lambda)}{d\lambda} \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) f(y_Z) + \left(-x + \frac{1}{2} \right) f(y_N) \right] \\ &+ M(\lambda) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \frac{dy_Z}{d\lambda} + \left(-x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_N)}{dy_N} \frac{dy_N}{d\lambda} \right] \\ &- \frac{2\rho}{M^3(\lambda)} \frac{dM(\lambda)}{d\lambda} (a_s + a_v x^2) = 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

No caso da matéria nuclear simétrica, temos $x = 0$, e portanto

$$\left. \frac{\partial e(x, \rho, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{x=0} = \frac{dM(\lambda)}{d\lambda} f(y) + M(\lambda) \frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{d\lambda} - \frac{2\rho a_s}{M^3(\lambda)} \frac{dM(\lambda)}{d\lambda} = 0. \quad (6.23)$$

A sistemática utilizada será a mesma do modelo de Kagiya. Usaremos como primeiro dado experimental o valor da densidade normal de saturação da matéria nuclear simétrica, $\rho_0 = 0.17 fm^{-3}$. Calculamos a derivada de \tilde{e} em relação a ρ agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(x, \rho, \tilde{\lambda}(x, \rho))}{\partial \rho} &= M(\tilde{\lambda}) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_Z)}{dy_Z} \frac{\partial y_Z}{\partial \rho} + \left(-x + \frac{1}{2} \right) \frac{df(y_N)}{dy_N} \frac{\partial y_N}{\partial \rho} \right] \\ &+ \frac{1}{M^2(\tilde{\lambda})} (a_s + a_v x^2) . \end{aligned} \quad (6.24)$$

A solução da equação de minimização em relação a ρ é $\hat{\rho}(x)$, e o valor da energia interna por núcleon é finalmente

$$e_{min}(x) = \hat{e}(x, \hat{\rho}(x)) = e(x, \hat{\rho}(x), \hat{\lambda}(x, \hat{\rho}(x))) . \quad (6.25)$$

Desta maneira, a primeira equação obtida para o ajuste dos parâmetros do modelo é

$$\frac{\partial e(0, \rho_0, \tilde{\lambda}(0, \rho_0))}{\partial \rho} = M(\tilde{\lambda}) \frac{df(y)}{dy} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{a_s}{M^2(\tilde{\lambda})} = 0 . \quad (6.26)$$

O próximo passo será utilizar a fórmula de massa de Bethe-Weizsäcker, que supomos descrever bem a matéria nuclear até a segunda ordem em x . Para um número muito grande de núcleons, a fórmula de massa pode ser escrita como

$$\frac{M(A, Z)}{A} = M_0 - u_v + 4u_\tau x^2 , \quad (6.27)$$

onde $M_0 = 939 MeV$ representa a massa de um núcleon isolado. Os cálculos são análogos aos feitos no modelo de Kagiya, então apresentaremos somente os resultados finais. Em ordem zero de x , temos

$$M_0 - u_v = e(0, \rho_0, \tilde{\lambda}(0, \rho_0)) = M(\tilde{\lambda}) f(y) + \frac{a_s \rho_0}{M^2(\tilde{\lambda})} . \quad (6.28)$$

Já em segunda ordem em x , obtemos a condição

$$8u_\tau = \frac{d^2 e}{dx^2}(0, \rho_0, \tilde{\lambda}(0, \rho_0)) = \frac{4}{3} M(\tilde{\lambda}) \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2\rho_0 a_v}{M^2(\tilde{\lambda})} . \quad (6.29)$$

Os resultados obtidos, utilizando os mesmos valores de B , V_0 e m' da Fig. 6.1, são $\lambda = 15,691698 fm^{-3}$, $b = 1,50593$, $a_s = -37,124127$ e $a_v = 8,887332$. Com estes resultados, podemos calcular, a partir de (6.5), a relação entre o volume de uma sacola na matéria nuclear, v , em relação àquele obtido para uma sacola isolada, v_0 , ou seja,

$v = 0,926241v_0$. Da mesma maneira, uma comparação entre as massas obtidas para a sacola em isolamento e no meio nuclear, de acordo com a equação (6.1), resulta em $M = 1,00114M_0$. Note-se que, como esperamos, o volume da sacola é menor do que v_0 , já que as sacolas exercem pressão umas sobre as outras.

Na Fig. 6.2, observamos o comportamento da energia de ligação por núcleon, $E_B/A = e_{min} - M_0$, para a matéria nuclear simétrica ($x = 0$). Note-se que a função possui um mínimo em $\rho = \rho_0$, como esperamos, já que a determinação dos parâmetros foi feita utilizando-se a matéria simétrica. O sistema é ligado dentro de um grande intervalo de densidades, mas a altas densidades, E_B/A tende a infinito e o sistema se torna instável. A

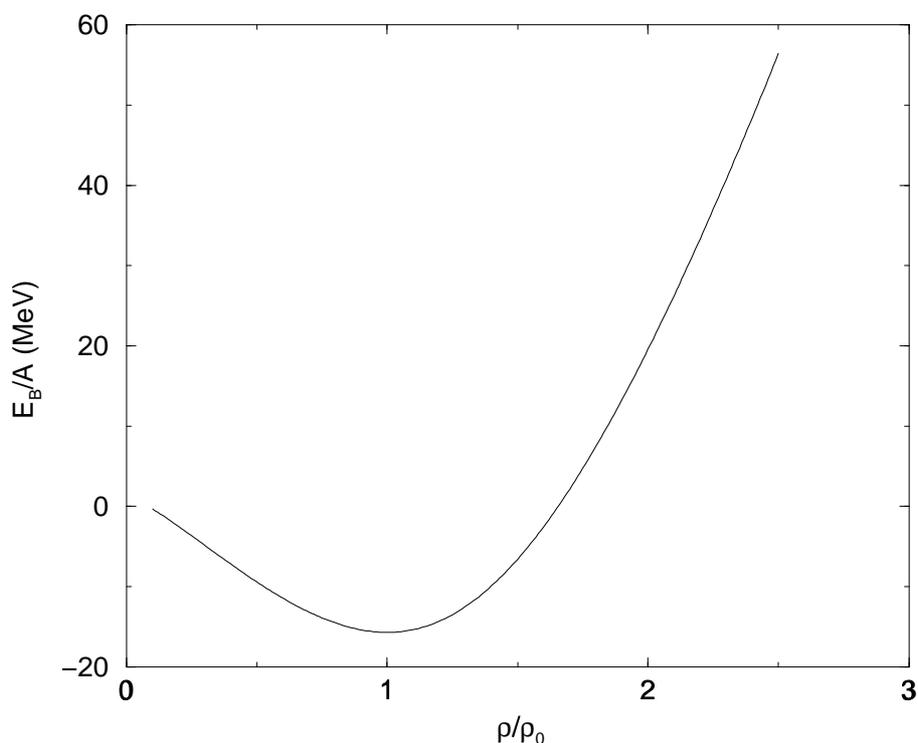


Figura 6.2: Energia de ligação por núcleon em função de ρ para matéria nuclear simétrica.

Fig. 6.3 mostra o comportamento como função da densidade para a matéria de nêutrons. Neste caso, o sistema não é ligado, mesmo a baixas densidades, mesmo que haja um mínimo local da função. Na Fig. 6.4, vemos o gráfico da equação de estado da matéria de nêutrons. Sobre esta figura, valem as mesmas considerações feitas a respeito da construção de Maxwell para a Fig. 4.2.

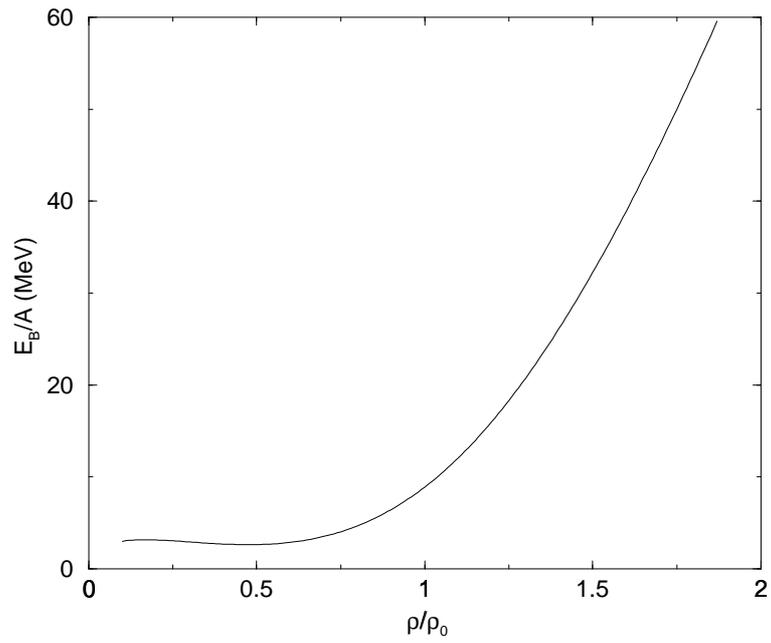


Figura 6.3: Energia de ligação por núcleon em função de ρ para matéria de nêutrons.

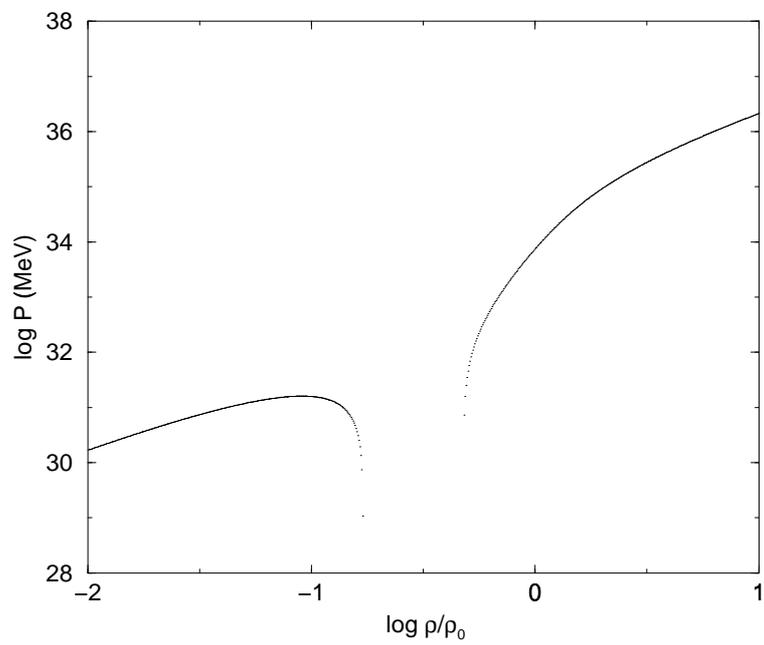


Figura 6.4: Equação de estado para a matéria de nêutrons.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho, pudemos obter resultados a respeito da modelagem de um núcleon via um potencial efetivo (modelo de sacola difusa, no capítulo 5), e também apresentamos o modelo do MIT, no capítulo 2, que de certa forma não deixa de ser um modelo que utiliza um potencial, sendo neste caso o potencial inserido no modelo de forma indireta, via as condições de contorno. Na verdade, é isto que é feito quando se utiliza um poço de potencial infinito.

Uma comparação entre estes dois modelos permite que se observe algumas semelhanças. Por exemplo, nos dois modelos é possível, dentro da aproximação utilizada, obter uma expressão analítica para a massa de um núcleon, em função de alguma variável relacionada, de alguma forma, com as dimensões da sacola. No caso do modelo do MIT, esta variável é o parâmetro R , enquanto que no outro modelo, trata-se também de um parâmetro, λ . Em ambos os casos, foi possível utilizar um raciocínio similar com relação à determinação do que seja a massa física de uma sacola dentro de cada um dos modelos. Foi possível demonstrar que, tanto em um quanto no outro modelo, a massa da sacola admite um mínimo para algum valor de cada uma destas quantidades. Além disso, foi possível obter uma interpretação física para a variação do autovalor de energia dos quarks em termos de R e, no caso do modelo de sacola difusa, do raio quadrático médio (que é função de λ). Vimos que o autovalor de energia aumenta quando as dimensões da sacola diminuem, o que é esperado fisicamente.

Nos capítulos 4 e 6, foram desenvolvidos modelos para a matéria nuclear que incorporam os resultados para a massa de uma sacola obtidos, respectivamente, pelo modelo

do MIT e pelo modelo de sacola difusa. A energia interna da matéria nuclear também pode ser escrita em termos de um parâmetro (R ou λ), que regula as dimensões de uma sacola. O resultado obtido foi que o volume de uma sacola na matéria nuclear é menor do que o volume de uma sacola isolada, devido às pressões que uma sacola faz sobre a outra. Foi possível determinar valores para os parâmetros destes modelos que determinam a densidade de saturação da matéria nuclear, bem como estão de acordo com a fórmula semi-empírica de massa de Bethe-Weizsäcker. Os resultados obtidos pelos dois modelos para a matéria nuclear são muito próximos, mesmo que o parâmetro regulador do tamanho de uma sacola em cada um deles seja diferente. Note-se que R , apesar de ter dimensões de comprimento, não é o raio experimental de uma sacola (basta ver, na Fig. 2.6, que o raio quadrático médio da sacola difere de R). Já λ , no modelo de sacola difusa, regula o tamanho de uma sacola via a “rapidez” com que suprime os campos dos quarks. Como foi dito no capítulo 5, estamos nos referindo a uma variação radial, e não temporal.

Apêndice A

Unidades, Notação, Convenções, etc.

(A) Unidades Naturais

No sistema internacional de unidades, a velocidade da luz,

$$c = 299792458 \text{ m/s} , \quad (\text{A.1})$$

e a constante de Planck,

$$\hbar = 1,05457266 \times 10^{-31} \text{ kg m}^2/\text{s} , \quad (\text{A.2})$$

são iguais a 1 (um):

$$c = \hbar = 1 . \quad (\text{A.3})$$

A conversão entre unidades do sistema internacional (S. I.) e unidades do sistema natural (S. N.) é dada pela tabela A.1.

Em particular, um resultado útil é

$$1 \text{ fm}^{-1} = 197,327052 \text{ MeV} . \quad (\text{A.4})$$

(B) Métrica

Neste trabalho foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell[22] para a métrica. O quadri-vetor contravariante é

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) , \quad (\text{A.5})$$

quantidade física	unidade S.I.	unidade S.N.	fator de conversão S.I. → S.N.
distância	m	m	1
tempo	s	m	c
massa	kg	m ⁻¹	c/ħ
velocidade	m/s	adimensional	1/c
momento linear	kg·m/s	m ⁻¹	1/ħ
momento angular	kg·m ² /s	adimensional	1/ħ
energia	kg·m ² /s ²	m ⁻¹	1/ħc
ação	kg·m ² /s	adimensional	1/ħ

Tabela A.1:

e o vetor covariante correspondente é

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z), \quad (\text{A.6})$$

onde o tensor métrico é definido por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usamos a convenção de que índices latinos (i, j, k, \dots) assumem os valores 1,2,3 e índices gregos assumem os valores 0,1,2,3. Na equação (A.6) e em todo este trabalho, a repetição de índices gregos indica soma implícita.

O produto escalar entre dois quadri-vetores é denotado por

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (\text{A.7})$$

As derivadas parciais são definidas de acordo com

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (\text{A.8})$$

Usamos a convenção de que a derivada $\partial_\mu A B$ atua somente em A , enquanto que $\partial_\mu(A B)$ atua sobre o produto $A B$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu A B &= (\partial_\mu A) B \\ \partial_\mu(A B) &= (\partial_\mu A) B + A(\partial_\mu B) = \partial_\mu A B + A \partial_\mu B .\end{aligned}\tag{A.9}$$

O operador de momento linear é

$$p^\mu = i \partial^\mu = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \nabla \right) .\tag{A.10}$$

(C) Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli obedecem a lei de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2 i \epsilon_{ijk} \sigma_k ,\tag{A.11}$$

e a lei de anti-comutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 I \delta_{ij} ,\tag{A.12}$$

onde I é a matriz identidade 2×2 , δ_{ij} é o símbolo de Kronecker e ϵ_{ijk} é o símbolo totalmente anti-simétrico. Uma relação útil envolvendo operadores \vec{A} e \vec{B} que comutam com as matrizes de Pauli, mas não necessariamente um com o outro, é

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) .\tag{A.13}$$

A representação padrão para as matrizes de Pauli é

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

No espaço de isospin, as mesmas matrizes são denotadas por $\vec{\tau}$.

(D) Matrizes de Dirac

Neste trabalho foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell[22] para as matrizes de Dirac. A propriedade fundamental destas matrizes é a lei de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} .\tag{A.14}$$

As matrizes α_i e β são definidas por

$$\gamma_i = \beta \alpha_i \quad \gamma^0 = \gamma_0 = \beta. \quad (\text{A.15})$$

A matriz γ_5 é definida por

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.16})$$

Note-se que 5 não é um índice tensorial. A representação padrão para γ^μ é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Nesta representação, a matriz adjunta hermitiana de γ^μ é

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad (\text{A.18})$$

e a matriz γ_5 é:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

(E) Parte Angular dos Espinores de Dirac

A parte angular dos espinores de Dirac é dada por (ver Capítulo 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{jl}^{m_j}(\hat{r}) &= (l \ \frac{1}{2} \ m_j - \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} | j \ m_j) Y_l^{m_j - \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ (l \ \frac{1}{2} \ m_j + \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} | j \ m_j) Y_l^{m_j + \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde as funções $Y_l^m(\hat{r})$ são harmônicos esféricos e $(j_1 \ j_2 \ m_1 \ m_2 | J \ M)$ são coeficientes de Clebsch-Gordon[23]. Para momento angular total $j = 1/2$ e projeção $m_j = 1/2$, temos

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) = Y_0^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \text{sen}(\theta) e^{i\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Para projeção $m_j = -1/2$, temos

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}0}^{-\frac{1}{2}}(\hat{r}) = Y_0^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\frac{1}{2}1}^{-\frac{1}{2}}(\hat{r}) &= +\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{-1}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= +\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \text{sen}(\theta) e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Apêndice B

Determinação da constante B no modelo do MIT

Neste capítulo derivamos um procedimento alternativo para a determinação da constante B da sacola no modelo do MIT, desenvolvido no capítulo 2. A maneira mais direta é via utilização da condição de contorno não-linear (2.18),

$$B = -\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\psi}\psi) \Big|_{r=R}. \quad (\text{B.1})$$

Na seção 2.5, obtivemos uma expressão para a massa M de uma sacola em função do raio R ,

$$M = 3E + \frac{4\pi BR^3}{3}. \quad (\text{B.2})$$

Lembramos que os autovalores de energia dos quarks são funções do raio, $E = E(R)$, via a equação de autovalores (2.67),

$$j_0(pR) = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} j_1(pR), \quad (\text{B.3})$$

onde $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Além disso, as expressões (B.1), (B.2) e (B.3) são válidas para o caso em que os três quarks estão no estado fundamental. Esperamos que a massa física da sacola seja um mínimo em relação a R . Neste apêndice, veremos que esta hipótese é equivalente à condição de contorno não-linear (B.1). Portanto, existe uma maneira alternativa para o cálculo de B , via minimização da massa do hádron.

Inicialmente, desenvolvemos a condição de contorno (B.1). A solução para o espinor de Dirac é dada por (2.39),

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) \\ if(r)\mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

onde as funções $g(r)$ e $f(r)$ são dadas por (2.59) e (2.60),

$$\begin{aligned} g(r) &= Nj_0(pr) \quad , \quad r < R \\ f(r) &= -N\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}j_1(pr) \quad , \quad r < R. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Utilizando estes resultados, (B.1) é escrita como

$$\begin{aligned} B &= -\frac{3N^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(j_0^2(pr) - \left(\frac{E-m}{E+m} \right) j_1^2(pr) \right) \Big|_{r=R_0} \\ &= -\frac{3pN^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x'} \left(j_0^2(x') - \left(\frac{E-m}{E+m} \right) j_1^2(x') \right) \Big|_{x'=x} \\ &= -\frac{3pN^2}{4\pi} \left[\left(j_0(x') \frac{dj_0(x')}{dx'} \right) \Big|_{x'=x} - \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(j_1(x') \frac{dj_1(x')}{dx'} \right) \Big|_{x'=x} \right] \\ &= \frac{3pN^2}{4\pi} \left[j_0(x)j_1(x) + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(\frac{E-m}{p} - \frac{2}{x} \right) j_1^2(x) \right] \\ &= \frac{3N^2}{2\pi x} j_0^2(x) [Ex - p] , \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde introduzimos as variáveis adimensionais $x' \equiv pr$ e $x \equiv pR$. No desenvolvimento acima, utilizamos a equação de autovalores (B.3), as expressões (A.20) - (A.23) e as derivadas das funções de Bessel,

$$\begin{aligned} \frac{dj_0(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right) = -j_1(x) \\ \frac{dj_1(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \right) = j_0(x) - \frac{2j_1(x)}{x} = \left(\sqrt{\frac{E-m}{E+m}} - \frac{2}{x} \right) j_1(x) \\ &= \left(\frac{E-m}{p} - \frac{2}{x} \right) j_1(x) , \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde, no cálculo da derivada de $j_1(x)$, utilizamos novamente (B.3). Antes de prosseguirmos os cálculos, trabalharemos a constante de normalização da função de onda, N^2 , e, via equação de autovalores, eliminaremos a função $j_0^2(x)$ em favor de x . O motivo deste

procedimento ficará claro mais adiante, na parte da minimização da massa da sacola. A constante de normalização é dada por (2.62),

$$\begin{aligned}
N^{-2} &= \frac{x}{p^3 (E + m)} [E (1 - j_0^2(x)) + mx j_0(x) j_1(x)] \\
&= \frac{x}{p^3 (E + m)} \left[E (1 - j_0^2(x)) + mx \sqrt{\frac{E + m}{E - m}} j_0^2(x) \right] \\
&= \frac{x}{p^4 (E + m)} [Ep + j_0^2(x) (mx (E + m) - Ep)] ,
\end{aligned} \tag{B.8}$$

onde novamente utilizamos a equação de autovalores (B.3). Expressamos agora $j_0^2(x)$ em termos de x . De (B.3), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen}(x)}{x} &= \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x^2} - \frac{\text{cos}(x)}{x} \right) \\
&= \frac{E - m}{p} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x^2} - \frac{\text{cos}(x)}{x} \right) .
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Podemos agrupar os termos em $\text{sen}(x)$ e em $\text{cos}(x)$,

$$\text{sen}(x) [E - m - px] = (E - m) x \text{cos}(x) , \tag{B.10}$$

e elevar ambos os membros ao quadrado, obtendo

$$\text{sen}^2(x) [(E - m)^2 + p^2 x^2 - 2px (E - m)] = (E - m)^2 x^2 \text{cos}^2(x) . \tag{B.11}$$

Usando a definição de p e a identidade trigonométrica

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1 , \tag{B.12}$$

obtemos

$$\text{sen}^2(x) [(E - m) + (E + m) x^2 - 2px] = (E - m) x^2 (1 - \text{sen}^2(x)) . \tag{B.13}$$

Agora podemos expressar $\text{sen}^2(x)$ em termos de x ,

$$\text{sen}^2(x) = \frac{(E - m) x^2}{2x(E x - p) + (E - m)} . \tag{B.14}$$

Desta forma,

$$j_0^2(x) = \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} = \frac{E - m}{2x(E x - p) + (E - m)} . \tag{B.15}$$

Utilizando este resultado no cálculo da constante de normalização em (B.8), obtemos

$$\begin{aligned}
N^{-2} &= \frac{x}{p^4 (E + m)} \left[Ep + \left(\frac{E - m}{2Ex^2 - 2px + (E - m)} \right) (mx(E + m) - Ep) \right] \\
&= \frac{x^2}{p^3 (E + m)} \left[\frac{2E(Ex - p) + mp}{2x(Ex - p) + (E - m)} \right].
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Agora voltamos à condição de contorno não-linear na forma (B.6). Introduzindo as expressões obtidas para a constante de normalização, (B.16), e para $j_0^2(x)$, (B.15), obtemos

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3}{2\pi x} (Ex - p) \frac{p^4 (E + m)}{x} \left[\frac{2x(Ex - p) + (E - m)}{2Epx(Ex - p) + mxp^2} \right] \left[\frac{E - m}{2x(Ex - p) + (E - m)} \right] \\
&= \frac{3p^4}{2\pi x^2} (Ex - p) (E + m) \left[\frac{E - m}{2Epx(Ex - p) + mxp^2} \right] \\
&= \frac{3p^5}{2\pi x^3} \left[\frac{Ex - p}{2E(Ex - p) + mp} \right].
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Utilizamos agora a definição $x = pR$, obtendo o resultado

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3p^2}{2\pi R^3} \left[\frac{EpR - p}{2E(EpR - p) + mp} \right] \\
&= \frac{3p^2}{2\pi R^3} \left[\frac{ER - 1}{2E(ER - 1) + m} \right].
\end{aligned} \tag{B.18}$$

O próximo passo é demonstrar que a exigência de que a massa do hádron seja um mínimo com relação a R leva igualmente à equação (B.18). O ponto de partida é a expressão da massa de uma sacola em função do raio, (B.2). A condição de minimização é expressa então como

$$\frac{dM}{dR} = 3 \frac{dE}{dR} + 4\pi BR^2 = 0. \tag{B.19}$$

Calculamos separadamente a derivada de E em relação a R , derivando (B.3) implicitamente em relação ao raio,

$$\begin{aligned}
\frac{dj_0(x)}{dx} \frac{dx}{dR} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E + m}{E - m}} \left[\frac{(E + m) \frac{dE}{dR} - \frac{dE}{dR} (E - m)}{(E + m)^2} \right] j_1(x) + \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} \frac{dj_1(x)}{dx} \frac{dx}{dR} \\
&= \frac{m}{p} \frac{1}{E + m} \frac{dE}{dR} j_1(x) + \frac{E - m}{p} \frac{dj_1(x)}{dx} \frac{dx}{dR},
\end{aligned} \tag{B.20}$$

onde $x \equiv pR$. Utilizando o resultado

$$\frac{dx}{dR} = \frac{d(pR)}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\sqrt{E^2 - m^2} R \right) = \frac{1}{2p} 2E \frac{dE}{dR} R + p = \frac{ER}{p} \frac{dE}{dR} + p, \quad (\text{B.21})$$

escrevemos

$$(E + m) \frac{dj_0(x)}{dx} \left(\frac{ER}{p} \frac{dE}{dR} + p \right) = \frac{m}{p} \frac{dE}{dR} j_1(x) + p \frac{dj_1(x)}{dx} \left(\frac{ER}{p} \frac{dE}{dR} + p \right), \quad (\text{B.22})$$

e agrupamos os termos que envolvem dE/dR ,

$$\frac{dE}{dR} \left[(E + m) \frac{ER}{p} \frac{dj_0(x)}{dx} - \frac{m}{p} j_1(x) - ER \frac{dj_1(x)}{dx} \right] = p^2 \frac{dj_1(x)}{dx} - p (E + m) \frac{dj_0(x)}{dx}. \quad (\text{B.23})$$

Utilizando as derivadas das funções de Bessel (B.7), obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dR} \left[-(E + m) \frac{ER}{p} j_1(x) - \frac{m}{p} j_1(x) - ER \left(\frac{E - m}{p} - \frac{2}{x} \right) j_1(x) \right] \\ = p^2 \left(\frac{E - m}{p} - \frac{2}{x} \right) j_1(x) + p (E + m) j_1(x), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

de onde a derivada procurada pode ser escrita como

$$\frac{dE}{dR} = -2p^2 \frac{Ex - p}{2ER(Ex - p) + mx}. \quad (\text{B.25})$$

Podemos eliminar $x = pR$, obtendo

$$\frac{dE}{dR} = -\frac{2p^2}{R} \frac{ER - 1}{2E(ER - 1) + m}. \quad (\text{B.26})$$

A equação de minimização da massa (B.19) é escrita então como

$$\frac{3p^2}{R} \frac{ER - 1}{2E(ER - 1) + m} = 2\pi BR^2, \quad (\text{B.27})$$

que é equivalente à equação (B.18).

Apêndice C

Comutadores

Neste apêndice complementamos a seção 2.2 do capítulo 2, onde examinamos a equação de Dirac com potenciais centrais. De acordo com a definição, um potencial central deve comutar com o operador de momento angular \vec{J} . Na seção 2.2, introduzimos um potencial escalar $S(r)$ e um potencial vetorial $V^\mu(r) = (V_0(r), \vec{V}(r))$. Obviamente, os potenciais dependem de r , e não de \vec{r} , para que comutem com o operador de momento angular orbital \vec{L} . Foi comentado também que $\vec{V}(r)$ deveria ser nulo para que tivéssemos um potencial central. Esta, e outras afirmações usadas na referida seção, serão demonstradas neste apêndice. Para uma descrição deste tipo de tratamento, ver a Ref.[24]

Especificamente, vamos calcular os comutadores dos operadores \vec{J}^2 , \vec{J} e K entre si e com o Hamiltoniano \mathcal{H} . Veremos que todos os referidos comutadores são nulos (exceto $[J^i, J^j]$), e assim podemos escolher \vec{J}^2 , J_z , K e \mathcal{H} como um conjunto completo de operadores comutantes. Os operadores mencionados podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta [m + S(r)] + V_0(r) - \vec{\alpha} \cdot \vec{V}(r) \\ \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = \epsilon_{ijk} r^j p^k \\ \vec{J} &= \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \\ \vec{J}^2 &= \vec{L}^2 + \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + \frac{1}{4} \\ K &= \beta \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1 \right) .\end{aligned}\tag{C.1}$$

Na simplificação da expressão para \vec{J}^2 , usamos o resultado

$$\vec{\Sigma}^2 = \Sigma^i \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \sigma^i \end{pmatrix} = 3I .\tag{C.2}$$

Para o cálculo dos comutadores, a seguinte identidade operatorial será útil,

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC - CAB + ACB - ACB \\ &= A[B, C] + [A, C]B, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e lembramos também que

$$\begin{aligned} [r^i, p^j] &= i\delta_{ij} & [f(\vec{r}), \vec{p}] &= i\nabla f(\vec{r}) & [f(r), \vec{p}] &= i\hat{r}\partial_r f(r) \\ [L^i, L^j] &= i\epsilon_{ijk}L^k & [f(r), \vec{L}] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Note-se que o último comutador representa o motivo pelo qual um potencial central deve depender somente do módulo de \vec{r} .

Relações de comutação entre \vec{J}^2 , \vec{J} e K

Para estabelecer as relações de comutação entre os operadores \vec{J}^2 , \vec{J} e K , notamos que o comutador entre as componentes de \vec{J} é dado por

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk}J^k. \quad (\text{C.5})$$

Com isto, pode-se deduzir que

$$[\vec{J}^2, J^j] = [J^i J^i, J^j] = J^i [J^i, J^j] + [J^i, J^j] J^i = i\epsilon_{ijk}(J^i J^k + J^k J^i) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Tendo em vista calcular o comutador de \vec{J} com K , vemos que

$$\begin{aligned} [\Sigma^i, \Sigma^j] &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} \\ &= 2i\epsilon_{ijk}\Sigma^k, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

e também que

$$\begin{aligned} [\Sigma^i, \beta] &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Em consequência, obtemos

$$\begin{aligned}
[J^i, K] &= [L^i + \frac{1}{2}\Sigma^i, \beta(\Sigma^j L^j + 1)] \\
&= \beta\Sigma^j[L^i, L^j] + \frac{1}{2}[\Sigma^i, \beta\Sigma^j]L^j \\
&= i\epsilon_{ijk}\beta\Sigma^j L^k + \frac{1}{2}\beta[\Sigma^i, \Sigma^j]L^j \\
&= i\epsilon_{ijk}\beta\Sigma^j L^k + i\epsilon_{ijk}\beta\Sigma^k L^j \\
&= i\epsilon_{ijk}\beta\Sigma^j L^k - i\epsilon_{ijk}\beta\Sigma^j L^k \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Obviamente, o comutador $[\vec{J}^2, K]$ também é nulo.

Comutador de \vec{J} com o Hamiltoniano

Vamos precisar dos comutadores

$$[L^i, p^j] = \epsilon_{ijk}[r^l p^k, p^j] = \epsilon_{ilk}[r^l, p^j]p^k = i\epsilon_{ijk}p^k, \tag{C.10}$$

e também de

$$\begin{aligned}
[\Sigma^i, \alpha^j] &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \sigma^j \\ \sigma^i \sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \sigma^i \\ \sigma^j \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \\ [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2i\epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ijk}\alpha^k.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Agora, tomando cada um dos termos do Hamiltoniano em separado, temos

$$\begin{aligned}
[\vec{J}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] &= [L^i, \alpha^j p^j] + \frac{1}{2}[\Sigma^i, \alpha^j p^j] \\
&= \alpha^j i\epsilon^{ijk}p^k + \frac{1}{2}p^j 2i\epsilon^{ijk}\alpha^k \\
&= i\epsilon^{ijk}[\alpha^j p^k + p^j \alpha^k] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
[\vec{J}, \beta(m + S(r))] &= [L^i, \beta(m + S(r))] + \frac{1}{2}[\Sigma^i, \beta(m + S(r))] \\
&= \beta[L^i, S(r)] + \frac{1}{2}[\Sigma^i, \beta](m + S(r)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
[\vec{J}, V_0(r) - \vec{\alpha} \cdot \vec{V}(r)] &= [L^i, V_0(r) - \alpha^j V^j(r)] + \frac{1}{2} [\Sigma^i, V_0(r) - \alpha^j V^j(r)] \\
&= -\frac{1}{2} V^j(r) [\Sigma^i, \alpha^j] \\
&= -i\epsilon_{ijk} V^j(r) \alpha^k .
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Portanto, o operador de momento angular comuta com o Hamiltoniano somente se a parte espacial do potencial vetorial for nula, $\vec{V}(r) = 0$. Obviamente, se $[\vec{J}, \mathcal{H}] = 0$, então temos $[\vec{J}^2, \mathcal{H}] = 0$. Note-se também que, para a obtenção do resultado $[\vec{J}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = 0$, é necessário o cancelamento de termos entre os comutadores $[\vec{L}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}]$ e $\frac{1}{2}[\vec{\Sigma}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}]$. O fato destes comutadores serem não-nulos indica que as projeções de momento angular orbital e de spin sobre um eixo qualquer (convencionalmente, o eixo z) não são bons números quânticos. No entanto, a soma das projeções de momento angular orbital e de spin sobre um eixo qualquer (convencionalmente, o eixo z) é um bom número quântico.

Comutador de K com o Hamiltoniano

Vamos precisar dos resultados

$$p^i L^i = p^i \epsilon_{ijk} r^j p^k = \epsilon_{ijk} (r^j p^k - i\delta^{ij}) p^k = -\epsilon_{jik} r^j p^i p^k = 0. \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} \Sigma^i \alpha^j &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\Sigma^i \alpha^j - \Sigma^j \alpha^i) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left[\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \sigma^j \\ \sigma^i \sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \sigma^i \\ \sigma^j \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \\ [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} 2i\epsilon_{ijl} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ \sigma^l & 0 \end{pmatrix} \\
&= i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} \alpha^l \\
&= 2i\alpha^k ,
\end{aligned} \tag{C.16}$$

onde usamos a identidade

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{ijl} = (\delta^{jj} \delta^{kl} - \delta^{lj} \delta^{kj}) = 2\delta^{kl} , \tag{C.17}$$

e do comutador

$$\begin{aligned}
[\beta\Sigma^i, \alpha^j] &= \beta\Sigma^i\alpha^j - \alpha^j\beta\Sigma^i = \beta(\Sigma^i\alpha^j + \alpha^j\Sigma^i) \\
&= \beta \left[\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \right] \\
&= \beta \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i\sigma^j \\ \sigma^i\sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j\sigma^i \\ \sigma^j\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= 2\beta\delta_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\beta\delta_{ij}\gamma_5 .
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Agora, tomando cada um dos termos do Hamiltoniano em separado, temos

$$\begin{aligned}
[K, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] &= [\beta\Sigma^i L^i, \alpha^j p^j] + [\beta, \alpha^j p^j] \\
&= \beta\Sigma^i \alpha^j [L^i, p^j] + [\beta\Sigma^i, \alpha^j] p^j L^i + 2\beta\alpha^j p^j \\
&= i\epsilon^{ijk} \beta\Sigma^i \alpha^j p^k + 2i\beta\gamma_5 p^i L^i + 2\beta\alpha^j p^j \\
&= -2\beta\alpha^k p^k + 2\beta\alpha^j p^j \\
&= 0 \\
[K, \beta(m + S(r))] &= [\beta\Sigma^i L^i, \beta(m + S(r))] + [\beta, \beta(m + S(r))] \\
&= 0 \\
[K, V_0(r) - \vec{\alpha} \cdot \vec{V}(r)] &= [\beta\Sigma^i L^i, V_0(r) - \alpha^j V^j(r)] + [\beta, V_0(r) - \alpha^j V^j(r)] \\
&= -V^j(r) L^i [\beta\Sigma^i, \alpha^j] - V^j(r) [\beta, \alpha^j] \\
&= -2\beta\gamma_5 \vec{V}(r) \cdot \vec{L} - 2\beta\vec{V} \cdot \vec{\alpha} .
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Portanto, o operador K comuta com o Hamiltoniano somente se a parte espacial do potencial vetorial for nula, $\vec{V}(r) = 0$.

Assim sendo, mostramos neste apêndice que os operadores \vec{J}^2 , J_z , K e \mathcal{H} comutam uns com os outros, sendo o Hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta[m + S(r)] + V_0(r) , \tag{C.20}$$

onde notamos a presença de um potencial central escalar $S(r)$ e de um potencial central vetorial $V_0(r)$, que é a componente temporal do quadri-vetor $V^\mu = (V^0, \vec{0})$.

Apêndice D

Normalização da função de onda no modelo do MIT

Neste apêndice calculamos detalhadamente a constante de normalização da função de onda correspondente ao estado fundamental, dentro do modelo do MIT. O resultado está expresso na equação (2.62).

A condição a ser utilizada para a normalização é

$$\int_V d^3x \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = 1. \quad (\text{D.1})$$

Denotando a integral acima por I , temos

$$\begin{aligned} I &= \int_V d^3x \left\{ g^2(r) \mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j \dagger}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{j\ell}^{m_j}(\hat{r}) + f^2(r) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j \dagger}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{j\ell'}^{m_j}(\hat{r}) \right\} \\ &= \int_0^R r^2 dr \left\{ g^2(r) + f^2(r) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

onde a parte angular foi facilmente integrada usando-se (2.41) e lembrando que os harmônicos esféricos estão normalizados à unidade. Introduzindo no cálculo acima as soluções (2.59) e (2.60) para o estado fundamental, obtemos

$$I = N^2 \int_0^R dr r^2 \left[\frac{\text{sen}^2(pr)}{(pr)^2} + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(\frac{\text{sen}(pr)}{(pr)^2} - \frac{\text{cos}(pr)}{pr} \right)^2 \right]. \quad (\text{D.3})$$

Para facilitar o cálculo da integral, introduzimos a variável $x \equiv pr$,

$$I = \frac{N^2}{p^3} \int_0^{pR} dx \left[\text{sen}^2(x) + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} - \text{cos}(x) \right)^2 \right]. \quad (\text{D.4})$$

Tratamos o integrando separadamente,

$$\begin{aligned}
\text{sen}^2(x) + \frac{E-m}{E+m} \left[\frac{\text{sen}(x)}{x} - \cos(x) \right]^2 &= \text{sen}^2(x) + \frac{E-m}{E+m} \left[\frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} + \cos^2(x) - 2 \frac{\text{sen}(x) \cos(x)}{x} \right] \\
&= \frac{E}{E+m} [\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)] - \frac{m}{E+m} [\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)] \\
&+ \frac{E-m}{E+m} \left[\frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} - 2 \frac{\text{sen}(x) \cos(x)}{x} \right].
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \text{sen}^2(x),
\end{aligned} \tag{D.6}$$

e também a relação

$$\left[\frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} - 2 \frac{\text{sen}(x) \cos(x)}{x} \right] = - \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen}^2(x)}{x} \right), \tag{D.7}$$

obtemos

$$\text{sen}^2(x) + \frac{E-m}{E+m} \left[\frac{\text{sen}(x)}{x} - \cos(x) \right]^2 = \frac{E-m \cos(2x)}{E+m} - \frac{E-m}{E+m} \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen}^2(x)}{x} \right). \tag{D.8}$$

Com isto, a integral de normalização pode ser efetuada,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{N^2}{p^3(E+m)} \int_0^{pR} dx \left[E - m \cos(2x) - (E-m) \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen}^2(x)}{x} \right) \right] \\
&= \frac{N^2}{p^3(E+m)} \left[Ex - \frac{m}{2} \text{sen}(2x) - (E-m) \frac{\text{sen}^2(x)}{x} \right] \Big|_0^{pR} \\
&= \frac{N^2}{p^3(E+m)} \left[E \left(pR - \frac{\text{sen}^2(pR)}{pR} \right) + m \left(\frac{\text{sen}^2(pR)}{pR} - \frac{\text{sen}(2pR)}{2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{D.9}$$

A exigência (D.1) leva à seguinte expressão para a constante de normalização,

$$N = \left\{ \frac{1}{p^3(E+m)} \left[E \left(pR - \frac{\text{sen}^2(pR)}{pR} \right) + m \left(\frac{\text{sen}^2(pR)}{pR} - \frac{\text{sen}(2pR)}{2} \right) \right] \right\}^{-1/2}. \tag{D.10}$$

Apêndice E

Minimização da massa da sacola no modelo do MIT

Neste apêndice obtemos a expressão (2.81), usada para determinar o raio R que minimiza a massa M da sacola no modelo do MIT, desenvolvido no capítulo 2. Partimos da expressão (2.79) para M . Considerando que os três quarks estejam no estado fundamental, cada um terá autovalor de energia $E_q \equiv E$, e (2.79) pode ser escrita como

$$M = 3E + \frac{4\pi BR^3}{3} . \quad (\text{E.1})$$

Ressaltamos que $E = E(R)$ via a equação de autovalores (2.67),

$$j_0(pR) = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} j_1(pR) , \quad (\text{E.2})$$

onde $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Calculamos agora a derivada dM/dR ,

$$\frac{dM}{dR} = 3\frac{dE}{dR} + 4\pi BR^2 = 0 . \quad (\text{E.3})$$

A derivada do autovalor de energia em relação a R já foi calculado em (B.26),

$$\frac{dE}{dR} = -\frac{2p^2}{R} \frac{ER - 1}{2E(ER - 1) + m} = -\frac{p^2}{ER} \frac{2E(ER - 1)}{2E(ER - 1) + m} . \quad (\text{E.4})$$

Com este resultado, a equação de minimização da massa da sacola pode ser escrita como

$$\frac{dM}{dR} = -\frac{3p^2}{ER} \frac{2E(ER - 1)}{2E(ER - 1) + m} + 4\pi BR^2 = 0 . \quad (\text{E.5})$$

Apêndice F

Raio Quadrático Médio do Quark no Modelo do MIT

Este apêndice apresenta os cálculos para a obtenção da expressão (2.90) para o raio quadrático médio do quark no estado fundamental, dentro do modelo do MIT. Partimos da definição do raio quadrático,

$$\langle \psi | r^2 | \psi \rangle = \int d^3x r^2 \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) . \quad (\text{F.1})$$

Repetimos aqui as funções de onda obtidas para os quarks no estado fundamental, (2.59) e (2.60),

$$g(r) = N \frac{\text{sen}(pr)}{pr} \quad , \quad r \leq R , \quad (\text{F.2})$$

$$f(r) = -N \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \left[\frac{\text{sen}(pr)}{(pr)^2} - \frac{\text{cos}(pr)}{pr} \right] \quad , \quad r \leq R . \quad (\text{F.3})$$

Substituindo estas soluções na definição acima, obtemos

$$\langle \psi | r^2 | \psi \rangle = N^2 \int_0^R dr r^4 \left[\frac{\text{sen}^2(pr)}{(pr)^2} + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(\frac{\text{sen}(pr)}{(pr)^2} - \frac{\text{cos}(pr)}{pr} \right)^2 \right] , \quad (\text{F.4})$$

onde a parte angular foi integrada utilizando-se (2.41). Fazemos agora a mudança de variável $x \equiv pr$, a fim de facilitar os cálculos. Desta forma,

$$\begin{aligned} \langle \psi | r^2 | \psi \rangle &= \frac{N^2}{p^5} \int_0^{pR} dx x^4 \left[\frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(\frac{\text{sen}(x)}{x^2} - \frac{\text{cos}(x)}{x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{N^2}{p^5} \int_0^{pR} dx \left[x^2 \text{sen}^2(x) + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) (\text{sen}(x) - x \text{cos}(x))^2 \right] . \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Trabalhamos o integrando agora separadamente,

$$\begin{aligned}
& x^2 \text{sen}^2(x) + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) (\text{sen}(x) - x \cos(x))^2 \\
&= x^2 \text{sen}^2(x) + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \text{sen}^2(x) \\
&+ \left(\frac{E-m}{E+m} \right) x^2 \cos^2(x) - 2 \left(\frac{E-m}{E+m} \right) x \text{sen}(x) \cos(x) \\
&= \frac{Ex^2}{E+m} (\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)) - \frac{mx^2}{E+m} (\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)) \\
&+ \left(\frac{E-m}{E+m} \right) (\text{sen}^2(x) - 2x \text{sen}(x) \cos(x)) .
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Agora utilizamos as identidades (D.6), e ainda

$$\begin{aligned}
\text{sen}(2x) &= 2\text{sen}(x) \cos(x) \\
\text{sen}^2(x) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) ,
\end{aligned} \tag{F.7}$$

onde a segunda destas relações decorre diretamente de (D.6). Desta forma, escrevemos

$$\begin{aligned}
& x^2 \text{sen}^2(x) + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) (\text{sen}(x) - x \cos(x))^2 \\
&= \frac{Ex^2}{E+m} - \frac{mx^2}{E+m} \cos(2x) + \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(\frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) - x \text{sen}(2x) \right) \\
&= \frac{1}{E+m} \left[Ex^2 - mx^2 \cos(2x) + \left(\frac{E-m}{2} \right) (1 - \cos(2x) - 2x \text{sen}(2x)) \right] .
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Utilizamos agora as integrais

$$\int x^2 \cos(2x) dx = \frac{x^2 \text{sen}(2x)}{2} + \frac{x \cos(2x)}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} \tag{F.9}$$

e

$$\int x \text{sen}(2x) dx = -\frac{x \cos(2x)}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{4} \tag{F.10}$$

para calcular o raio quadrático médio

$$\begin{aligned}
\langle \psi | r^2 | \psi \rangle &= \frac{N^2}{p^5(E+m)} \int_0^{pR} dx [Ex^2 - mx^2 \cos(2x)] \\
&+ \frac{N^2}{p^5(E+m)} \int_0^{pR} dx \left[\left(\frac{E-m}{2} \right) (1 - \cos(2x) - 2x \text{sen}(2x)) \right] .
\end{aligned} \tag{F.11}$$

O desenvolvimento do cálculo pode ser apresentado como

$$\begin{aligned}
\langle \psi | r^2 | \psi \rangle &= \frac{N^2}{p^5(E+m)} \left[\frac{E(pR)^3}{3} - m \left[\frac{x^2 \text{sen}(2x)}{2} + \frac{x \cos(2x)}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} \right]_0^{pR} \right] \\
&+ \frac{N^2}{2p^5} \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(pR - \left[\frac{\text{sen}(2x)}{2} \right]_0^{pR} - 2 \left[-\frac{x \cos(2x)}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{4} \right]_0^{pR} \right) \\
&= \frac{N^2}{p^5(E+m)} \left[\frac{E(pR)^3}{3} - \frac{m}{2} \left[(pR)^2 \text{sen}(2pR) + pR \cos(2pR) - \frac{\text{sen}(2pR)}{2} \right] \right] \\
&+ \frac{N^2}{2p^5} \left(\frac{E-m}{E+m} \right) \left(pR - \frac{\text{sen}(2pR)}{2} + pR \cos(2pR) - \frac{\text{sen}(2pR)}{2} \right) \\
&= \frac{N^2}{p^5(E+m)} \left[\frac{E(pR)^3}{3} + \left(\frac{E-m}{2} \right) pR \right] \\
&+ \frac{N^2}{p^5(E+m)} \text{sen}(2pR) \left[-\frac{m(pR)^2}{2} + \frac{m}{4} - \frac{(E-m)}{4} - \frac{(E-m)}{4} \right] \\
&+ \frac{N^2}{p^5(E+m)} \cos(2pR) \left[-\frac{mpR}{2} + \left(\frac{E-m}{2} \right) pR \right] .
\end{aligned} \tag{F.12}$$

Trabalhamos separadamente os dois primeiros termos entre colchetes acima. Primeiramente,

$$\begin{aligned}
\frac{E(pR)^3}{3} + \left(\frac{E-m}{2} \right) pR &= pR \left(\frac{2E(pR)^2}{6} + \frac{3}{6} (E-m) \right) \\
&= \frac{pR}{6} (E (2(pR)^2 + 3) - 3m) .
\end{aligned} \tag{F.13}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
-\frac{m(pR)^2}{2} + \frac{m}{4} - \frac{(E-m)}{4} - \frac{(E-m)}{4} \\
&= -\frac{m(pR)^2}{2} + \frac{m}{4} - \frac{(E-m)}{2} = \frac{1}{4} (-2m(pR)^2 + m - 2(E-m)) \\
&= \frac{1}{4} (m (3 - 2(pR)^2) - 2E) .
\end{aligned} \tag{F.14}$$

O último termo a ser desenvolvido é

$$-\frac{mpR}{2} + \left(\frac{E-m}{2} \right) pR = \frac{pR}{2} (E - 2m) . \tag{F.15}$$

Desta forma, a expressão para o raio quadrático médio de um quark é escrita como

$$\begin{aligned}
\langle \psi | r^2 | \psi \rangle &= \frac{N^2 pR}{6p^5(E+m)} [(E (2(pR)^2 + 3) - 3m)] \\
&+ \frac{N^2}{4p^5(E+m)} \text{sen}(2pR) [(m (3 - 2(pR)^2) - 2E)] \\
&+ \frac{N^2 pR}{2p^5(E+m)} \cos(2pR) [(E - 2m)] ,
\end{aligned} \tag{F.16}$$

onde a constante de normalização N é dada por (2.62).

Apêndice G

Cálculos para o Modelo de Kagiya

Este apêndice tem o intuito de servir para consulta a detalhes dos cálculos apresentados no desenvolvimento do modelo de Kagiya. Apresentamos aqui cálculos de derivadas e outros resultados que não são essenciais para a compreensão do desenvolvimento do modelo, mas são igualmente importantes para a obtenção dos resultados.

Derivada de $f(x)$

A função $f(x)$ está definida em (4.17). A sua derivada pode ser calculada por

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{4x^3} \left[x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \right) \\ &= -\frac{9}{4x^4} \left[x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \\ &\quad + \frac{3}{4x^3} \left[\left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1+x^2} + 2x^2 \sqrt{1+x^2} + x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]. \end{aligned} \tag{G.1}$$

Desenvolvemos agora o último termo entre colchetes,

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1+x^2} + 2x^2 \sqrt{1+x^2} + x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \left\{ 2 \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) (1+x^2) + 4x^2 (1+x^2) + 2x^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \left\{ 2 \left(x^2 + x^4 + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \right) + 4x^2 + 4x^4 + 2x^4 + x^2 - 1 \right\} \\ &= \frac{8x^2 (1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = 4x^2 \sqrt{1+x^2}, \end{aligned} \tag{G.2}$$

e a derivada procurada fica

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= -\frac{9}{4x^4} \left[x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] + \frac{3}{4x^3} \left[4x^2 \sqrt{1+x^2} \right] \\
&= -\frac{9}{4x^3} \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1+x^2} + \frac{3}{x} \sqrt{1+x^2} + \frac{9}{8x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \left\{ -\frac{9}{4x^2} \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) + 3 \right\} + \frac{9}{8x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (\text{G.3}) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{9}{8x^2} \right\} + \frac{9}{8x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= \frac{3}{8x^3} \sqrt{1+x^2} (2x^2 - 3) + \frac{9}{8x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) .
\end{aligned}$$

Nos cálculos acima, utilizamos o resultado

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} . \quad (\text{G.4})$$

Derivada segunda de $f(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2f(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{3}{8x^3} \sqrt{1+x^2} (2x^2 - 3) + \frac{9}{8x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \\
&= \frac{-9}{8x^4} \sqrt{1+x^2} (2x^2 - 3) + \frac{3}{8x^3} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (2x^2 - 3) + \frac{3}{8x^3} \sqrt{1+x^2} 4x \quad (\text{G.5}) \\
&\quad - \frac{36}{8x^5} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{9}{8x^4} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .
\end{aligned}$$

Tratamos separadamente os termos proporcionais a $1/x^4$,

$$\begin{aligned}
\frac{-9}{8x^4} \sqrt{1+x^2} (2x^2 - 3) + \frac{9}{8x^4} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{9}{8x^4} \left\{ -\frac{(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} (2x^2 - 3) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right\} \\
&= \frac{9(-2x^4 + x^2 + 4)}{8x^4 \sqrt{1+x^2}} , \quad (\text{G.6})
\end{aligned}$$

e os termos proporcionais a $1/x^3$,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8x^3} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (2x^2 - 3) + \frac{3}{8x^3} \sqrt{1+x^2} 4x &= \frac{3}{8x^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (2x^2 - 3) + 4\sqrt{1+x^2} \right\} \\
&= \frac{3(6x^2 + 1)}{8x^2 \sqrt{1+x^2}} = \frac{3x^2(6x^2 + 1)}{8x^4 \sqrt{1+x^2}} . \quad (\text{G.7})
\end{aligned}$$

Agrupando os resultados (G.6) e (G.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \left[\frac{9(-2x^4 + x^2 + 4)}{8x^4 \sqrt{1+x^2}} \right] + \left[\frac{3x^2(6x^2 + 1)}{8x^4 \sqrt{1+x^2}} \right] - \frac{9}{2x^5} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= \frac{12(x^2 + 3)}{8x^4 \sqrt{1+x^2}} - \frac{9}{2x^5} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= \frac{3(x^2 + 3)}{2x^4 \sqrt{1+x^2}} - \frac{9}{2x^5} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) .
\end{aligned} \tag{G.8}$$

Combinação $4df/dx + xd^2f/dx^2$

$$\begin{aligned}
4\frac{df}{dx} + x\frac{d^2f}{dx^2} &= 4 \left[\frac{3}{8x^3} \sqrt{1+x^2} (2x^2 - 3) + \frac{9}{8x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \\
&\quad + x \left[\frac{3(x^2 + 3)}{2x^4 \sqrt{1+x^2}} - \frac{9}{2x^5} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \\
&= \frac{3}{2x^3} \sqrt{1+x^2} (2x^2 - 3) + \frac{9}{2x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&\quad + \frac{3(x^2 + 3)}{2x^3 \sqrt{1+x^2}} - \frac{9}{2x^4} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} .
\end{aligned} \tag{G.9}$$

Derivada de $M(v)$ em relação a v

A expressão da massa de uma sacola em função do seu volume é dada por (4.1). A derivada procurada é

$$\frac{\partial M(v)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (kv^{-1/3} + Bv) = -\frac{1}{3}kv^{-4/3} + B \tag{G.10}$$

Derivada de $k'_{F\alpha}$ em relação a v

A quantidade $k'_{F\alpha}$ está definida em (4.13). Antes de calcular esta derivada, obtemos o resultado

$$\frac{\partial \rho'}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{1 - b\rho v} \right) = -\frac{\rho}{(1 - b\rho v)^2} (-b\rho) = \frac{b\rho^2}{(1 - b\rho v)^2} = b\rho'^2 . \tag{G.11}$$

Agora calculamos

$$\frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(3\pi^2 \frac{\alpha}{A} \rho' \right)^{1/3} \right] = \frac{1}{3} \left(3\pi^2 \frac{\alpha}{A} \rho' \right)^{-2/3} 3\pi^2 \frac{\alpha}{A} \frac{\partial \rho'}{\partial v} \tag{G.12}$$

O resultado obtido é

$$\frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial v} = \frac{1}{3} \frac{k'_{F\alpha}}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial v} = \frac{1}{3} \frac{k'_{F\alpha}}{\rho'} [b\rho'^2] = \frac{b\rho' k'_{F\alpha}}{3}. \quad (\text{G.13})$$

Lembramos que α pode assumir os valores Z ou N . No primeiro caso, $\alpha/A = x + 1/2$, e no segundo, $\alpha/A = -x + 1/2$. Assim, o quociente α/A não tem dependência nem em ρ nem em v .

Derivada de y_α em relação a v

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_\alpha}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{k'_{F\alpha}}{M(v)} \right) = \frac{1}{M(v)} \left[\frac{b\rho' k'_{F\alpha}}{3} \right] - \frac{k'_{F\alpha}}{M^2(v)} \frac{\partial M(v)}{\partial v} \\ &= \frac{b\rho' y_\alpha}{3} - \frac{y_\alpha}{M(v)} \frac{\partial M(v)}{\partial v} \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

Derivada de $k'_{F\alpha}$ em relação a ρ

Antes, calculamos a derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{1 - b\rho v} \right) = \frac{1}{1 - b\rho v} - \frac{\rho}{(1 - b\rho v)^2} (-bv) \\ &= \frac{1 - b\rho v}{(1 - b\rho v)^2} + \frac{b\rho v}{(1 - b\rho v)^2} = \frac{1}{(1 - b\rho v)^2}. \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Agora, a derivada procurada é

$$\begin{aligned} \frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(3\pi^2 \frac{\alpha}{A} \rho' \right)^{1/3} \right] = \frac{1}{3} \left(3\pi^2 \frac{\alpha}{A} \rho' \right)^{-2/3} 3\pi^2 \frac{\alpha}{A} \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} \\ &= \frac{1}{3} \frac{k'_{F\alpha}}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = \frac{1}{3} \frac{k'_{F\alpha}}{\rho'} \left[\frac{1}{(1 - b\rho v)^2} \right] = \frac{k'_{F\alpha}}{3\rho(1 - b\rho v)}. \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

Derivada de y_α em relação a ρ

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{k'_{F\alpha}}{M(v)} \right) = \frac{1}{M(v)} \frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial \rho} = \frac{y_\alpha}{3\rho(1 - b\rho v)}. \quad (\text{G.17})$$

Derivada de $k'_{F\alpha}$ em relação a x

Neste caso, fazemos dois cálculos separados, porque a dependência de $k'_{F\alpha}$ em x depende de α .

$$\begin{aligned}\frac{\partial k'_{FZ}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(3\pi^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \rho' \right)^{1/3} \right] = \frac{1}{3} \left(3\pi^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \rho' \right)^{-2/3} 3\pi^2 \rho' \\ &= \frac{k'_{FZ}}{3 \left(x + \frac{1}{2} \right)},\end{aligned}\tag{G.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial k'_{FN}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(3\pi^2 \left(-x + \frac{1}{2} \right) \rho' \right)^{1/3} \right] = \frac{1}{3} \left(3\pi^2 \left(-x + \frac{1}{2} \right) \rho' \right)^{-2/3} [-3\pi^2 \rho'] \\ &= -\frac{k'_{FN}}{3 \left(-x + \frac{1}{2} \right)}.\end{aligned}\tag{G.19}$$

Derivada de y_α em relação a x

$$\frac{\partial y_Z}{\partial x} = \frac{y_Z}{3 \left(x + \frac{1}{2} \right)} \quad ; \quad \frac{\partial y_N}{\partial x} = -\frac{y_N}{3 \left(-x + \frac{1}{2} \right)}.\tag{G.20}$$

Apêndice H

Cálculos para o Modelo

Desenvolvido no Capítulo 6

Neste apêndice, a exemplo do que foi feito no apêndice G, apresentamos cálculos intermediários relativos ao modelo para a matéria nuclear desenvolvido no capítulo 6. O objetivo é que estes cálculos sirvam de consulta, pois não são essenciais para a compreensão do modelo em si. Alguns são idênticos àqueles do apêndice G, e nestes casos, apenas apresentamos o resultado final.

Derivada de $f(x)$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{3}{8x^3} \sqrt{1+x^2} (2x^2 - 3) + \frac{9}{8x^4} \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) . \quad (\text{H.1})$$

Derivada de E' em relação a λ , a partir da equação de autovalores

Este cálculo já foi apresentado no capítulo 5 sobre o modelo de sacola difusa. O resultado final está em (5.33),

$$\frac{dE'}{d\lambda} = \frac{9}{(E' - m')(3E' + m')} . \quad (\text{H.2})$$

Derivada da massa do núcleon $M(\lambda)$ em relação a λ

A massa do núcleon está dada em (6.1). A derivada procurada é

$$\begin{aligned} \frac{dM(\lambda)}{d\lambda} &= 3 \frac{dE'}{d\lambda} - \frac{4\pi B}{\lambda^2} = 3 \left[\frac{9}{(E' - m')(3E' + m')} \right] - 4\pi B \left[\frac{81 (E' + m')^2}{(E'^2 - m'^2)^4} \right] \\ &= \frac{27}{(E' - m')} \left(\frac{1}{(3E' + m')} - \frac{12\pi B}{(E'^2 - m'^2)^2 (E' - m')} \right), \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

onde utilizamos a equação de autovalores (5.61) para substituir λ .

Derivada do raio quadrático médio em relação a E'

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\langle r^2 \rangle)}{\partial E'} &= \frac{\partial}{\partial E'} \left(\frac{3}{2} \frac{(11E' + m')}{(E'^2 - m'^2)(3E' + m')} \right) \\ &= \frac{33}{2(E'^2 - m'^2)(3E' + m')} - \frac{6E'(11E' + m')}{2(E'^2 - m'^2)^2(3E' + m')} \\ &\quad - \frac{9(11E' + m')}{2(E'^2 - m'^2)(3E' + m')^2} \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Derivada de $k'_{F\alpha}$ em relação a λ

Lembramos que $k'_{F\alpha} = (3\pi^2 (\alpha/A) \rho')^{1/3}$ só depende de λ via $v(\lambda)$, então podemos utilizar o resultado (G.11) para o modelo de Kagiyaama,

$$\frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial \lambda} = \frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda} = \left[\frac{b\rho' k'_{F\alpha}}{3} \right] \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} \quad (\text{H.5})$$

Derivada de y_α em relação a λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_\alpha}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{k'_{F\alpha}}{M(\lambda)} \right) = -\frac{k'_{F\alpha}}{M^2(\lambda)} \frac{\partial M(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{1}{M(\lambda)} \frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial \lambda} \\ &= -\frac{y_\alpha}{M(\lambda)} \frac{\partial M(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{b\rho' y_\alpha}{3} \frac{dv(\lambda)}{d\lambda} \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Derivada de $k'_{F\alpha}$ em relação a ρ

$$\frac{\partial k'_{F\alpha}}{\partial \rho} = \frac{k'_{F\alpha}}{3\rho(1 - b\rho v(\lambda))} \quad (\text{H.7})$$

Derivada de y_α em relação a ρ

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial \rho} = \frac{y_\alpha}{3\rho(1 - b\rho v(\lambda))} \quad (\text{H.8})$$

Derivada de $k'_{F\alpha}$ em relação a x

$$\frac{\partial k'_{FZ}}{\partial x} = \frac{k'_{FZ}}{3(x + \frac{1}{2})} \quad ; \quad \frac{\partial k'_{FN}}{\partial x} = -\frac{k'_{FN}}{3(-x + \frac{1}{2})} \quad (\text{H.9})$$

Derivada de y_α em relação a x

$$\frac{\partial y_Z}{\partial x} = \frac{y_Z}{3(x + \frac{1}{2})} \quad ; \quad \frac{\partial y_N}{\partial x} = -\frac{y_N}{3(-x + \frac{1}{2})} \quad (\text{H.10})$$

Referências

- [1] CALLAN Jr., C. G.; DASHEN, R. F.; GROSS, D. J. A theory of hadronic structure. *Physical Review D*, New York, v. 19, n. 6, p. 1826-1855, Mar. 1979.
- [2] NIELSEN, N. K. Asymptotic Freedom as a spin effect. *American Journal of Physics*, New York, v. 49, n. 12, p. 1171-1178, Dec. 1981.
- [3] KAKU, M. *Quantum field theory: a modern introduction*. New York: Oxford University Press, 1993.
- [4] BODMANN, B. E. J.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; DILLIG, M. A single quark effective potential model. In: HERSCOVITZ, V. E.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; FERREIRA, E. (Eds.). *Hadron physics 94: topics on the structure and interaction of hadronic systems*. Singapore: World Scientific, 1995, p. 326-329.
- [5] FRIEDBERG, R.; LEE, T. D. Quantum chromodynamics and the soliton model of hadrons. *Physical Review D*, New York, v. 18, n. 7, p. 2623-2631, Oct. 1978.
- [6] DETAR, C. E.; DONOGHUE, J. F. Bag models of hadrons. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Palo Alto, v. 33, p. 235-264, 1983.
- [7] CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. F. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, New York, v. 9, n. 12, p. 3471-3495, June 1974.
- [8] PILOTTO, F. G. *Modelo de sacola difusa modificado*, 1995. 114 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

- [9] PILOTTO, F. G. *Modelo de sacola quiral com superfície difusa: um estudo das propriedades dos hádrons*, 2002. 151 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
- [10] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. Washington: National Bureau of Standards, 1966.
- [11] KAGIYAMA, S.; NAKAMURA, A.; OMODAKA, T. A compressible bag model and equation of state for high density nuclear matter. *Zeitschrift für Physik C*, Berlin, v. 53, n. 1, p. 163-167, Jan. 1992.
- [12] OBERT, E. F. *Thermodynamics*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- [13] SEROT, B. D.; WALECKA, J. D. The relativistic nuclear many body problem. In: NEGELE, J. W.; VOGT, E. (Eds.). *Advances in nuclear physics*. New York: Plenum, 1986, v. 16, p. 1-77.
- [14] RINDLER, W. *Introduction to special relativity*. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [15] KRANE, K. S. *Introductory nuclear physics*. New York: John Wiley, 1988.
- [16] CALLEN, H. B. *Thermodynamics: an introduction to the physical theories of equilibrium thermostatics and irreversible thermodynamics*. New York: John Wiley, 1960.
- [17] NOGAMI, Y.; SUZUKI, A.; YAMANISHI, N. Fuzzy bag model: nucleon self-energy due to pion interaction. *Canadian Journal of Physics*, Ottawa, v. 62, n. 6, p. 554-561, June 1984.
- [18] PILOTTO, F. The fuzzy bag and baryonic properties with center of mass and recoil corrections. *European Physics Journal C*, Berlin, v. 28, n. 4, p. 535-543, June 2003.
- [19] PILOTTO, F.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; COELHO, H. T. The fuzzy bag model revisited. *Modern Physics Letters A*, Singapore, v. 17, n. 9, p. 543-553, Mar. 2002.
- [20] VASCONCELLOS, C. A. Z.; COELHO, H. T.; PILOTTO, F. G.; BODMANN, B. E. J.; DILLIG, M.; RAZEIRA, M. A chiral bag model with a soft surface: structure

and solutions of the fuzzy and the modified fuzzy bag model. *European Physics Journal C*, Berlin, v. 4, n. 1, p. 115-127, June 1998.

- [21] COELHO, H. T.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J.; PILOTTO, F. A chiral bag model with a soft surface. In: DILLENBURG, D.; JACOB, G.; KITCHING, P.; VASCONCELLOS, C. A. Z. (Eds.). *Current topics in nuclear physics and quantum field theory: festschrift for Th. A. J. Maris*. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 1994, p. 241-262.
- [22] BJORKEN, J.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1964.
- [23] BHADURI, R. K. *Models of the nucleon: from quarks to soliton*. New York: Addison-Wesley, 1988.
- [24] ROSE, M. E. *Relativistic electron theory*. New York: John Wiley, 1961.