

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

**Teorias de calibre supersimétricas
formuladas num espaço-tempo não-comutativo
tetradimensional***

Alysson Fábio Ferrari

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr. Horacio Oscar Girotti e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Porto Alegre, RS - Dezembro de 2004

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

DEDICATÓRIA

A minha família,
sem palavras.

AGRADECIMENTOS

- ao meu orientador, Horacio Oscar Girotti, pelo apoio constante, pela paciência, pela dedicação em ensinar o seu modo de ver e fazer física teórica;
- a Marcelo Gomes, Albert Petrov, Victor Rivelles e Adilson José da Silva pelas discussões estimulantes, pela hospitalidade nas minhas estadas no IF-USP;
- ao colega Anderson Alves Ribeiro, por ter acompanhado essa jornada, desde os tempos de graduação;
- aos colegas da sala M208, pela companhia em tantos almoços no RU, pelos churrascos, pelas tardes de trabalho dedicado (sic);
- a todos meus amigos, os distantes e os próximos, por terem feito de mim uma pessoa muito melhor ao longo desses anos; inútil seria qualquer tentativa de citar essas pessoas, por tantas serem e por serem tanto.

O autor agradece a toda a comunidade de código livre do Brasil e do mundo pela criação e manutenção dos programas que tornaram a editoração deste trabalho possível. O editor de textos utilizado foi o LyX (www.lyx.org) e, graças a ele, a escrita da tese inteira não exigiu a digitação de mais que uma dúzia de comandos \LaTeX para alguns ajustes. A distribuição do \LaTeX utilizada foi o teTeX (www.tug.org/teTeX). A formatação do texto e das referências bibliográficas em conformidade com as regras da ABNT foi implementado através do estilo ABNTEX (abntex.codigolivre.org.br), com pequenas modificações feitas pelo autor. O banco de dados de referências bibliográficas foi editado com o JabRef (jabref.sourceforge.net) e a maior parte das ilustrações produzidas com o JaxoDraw (altair.ific.uv.es/JaxoDraw) e o Xfig (www-epb.lbl.gov/xfig/).

Choro sobre as minhas páginas imperfeitas,
mas os vindouros, se as lerem, sentirão
mais com o meu choro do que sentiriam
com a perfeição, se eu a conseguisse, que
me privaria de chorar e portanto até de
escrever. O perfeito não se manifesta. O
santo chora, e é humano. Deus está calado.
Por isso podemos amar o santo mas não
podemos amar a Deus.

Fernando Pessoa

Resumo

A relação com a teoria das cordas renovou o interesse nas teorias quânticas de campo formuladas num espaço-tempo não-comutativo. O principal aspecto dessas teorias é o assim chamado "mecanismo UV/IR", segundo o qual divergências ultravioletas são parcialmente convertidas em infravermelhas. Para certos modelos, estas singularidades infravermelhas originadas do mecanismo UV/IR podem inviabilizar a solução perturbativa da teoria de campos. A questão principal, portanto, é encontrar teorias que sejam consistentes quando formuladas num espaço-tempo não-comutativo, sendo os modelos supersimétricos particularmente promissores neste sentido. Neste trabalho, examinamos as teorias de calibre supersimétricas Abelianas (NCSQED) e não-Abelianas com grupo de calibre $U(N)$ (NCSYM) formuladas num espaço-tempo não-comutativo de quatro dimensões. Em ambos os casos, calculamos as funções de vértice utilizando o formalismo covariante de supercampos que é tornado completamente operacional. Consideramos tanto as teorias $\mathcal{N} = 1$ quanto as com supersimetria estendida. Mostramos rigorosamente que, a um laço da teoria de perturbações, estes modelos são livres de singularidades infravermelhas UV/IR não-integráveis. Para a função de dois pontos da NCSQED esta afirmação vale em qualquer calibre, ao passo que, para a função de três pontos, as singularidades infravermelhas UV/IR perigosas se anulam num calibre particular. Já para a NCSYM, demonstramos que as correções quânticas às funções de vértice de dois e três pontos não apresentam os efeitos indesejáveis do mecanismo UV/IR graças a certas relações envolvendo traços dos geradores do grupo de calibre que, surpreendentemente, são satisfeitas apenas na representação fundamental do grupo $U(N)$. Como esperado, a função de dois pontos é também finita na teoria $\mathcal{N} = 4$.

Abstract

The relation with string theory has renewed the interest in quantum field theories defined on a noncommutative space-time. In these theories, the central role is played by the so called UV/IR mechanism, according to which ultraviolet divergences are partially transformed into infrared ones. It may well happen that, for certain field models, the infrared divergences arising from the UV/IR mechanism jeopardize the perturbative expansion. The main goal is then to find theories that remain consistent when formulated in a noncommutative space-time. The supersymmetric models appear to be particularly well suited for these purposes. This work deals with the formulation of Abelian (NCSQED) and $U(N)$ non Abelian (NCSYM) supersymmetric gauge theories formulated in a noncommutative four dimensional space-time. In both cases, we focused on the vertex functions of the gauge superfield. Our tool is the covariant superfield formalism which is turned fully operational. The $\mathcal{N} = 1$ and extended supersymmetric cases were considered. At the one-loop level, it was rigorously shown that these theories are free of nonintegrable UV/IR infrared divergences. For the two-point vertex function of NCSQED this turns out to be a gauge invariant statement, while for the three-point vertex function the harmful subleading UV/IR infrared singularities are absent in a particular gauge. As for the NCSYM theory, we demonstrate that the quantum corrections to the two- and three-point vertex functions do not suffer from the dangerous effects of the UV/IR mechanism due to some relations linking the traces of the generators of the gauge group, which, surprisingly, only appear to hold in the fundamental representation of the $U(N)$ gauge group. As expected, the two-point function is UV-finite in the $\mathcal{N} = 4$ theory.

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Histórico e motivação	6
1.2	Teorias quânticas de campo não-comutativas	8
1.2.1	O produto de Groenewold-Moyal	8
1.2.2	TQCNC como limites de baixas energias da teoria das cordas	10
1.2.3	A teoria escalar $\lambda\varphi^4$ não-comutativa	13
1.2.4	A mistura UV/IR	16
1.2.5	O problema da unitariedade	17
1.3	Teorias de calibre não-comutativas	18
1.4	Teorias de calibre supersimétricas não-comutativas	21
2	A QED supersimétrica não-comutativa	23
2.1	A ação da NCSQED	23
2.2	Acoplamento com a matéria	28
2.3	Regras de Feynman	29
2.4	Contagem de potências e divergências da ação efetiva	34
2.5	A função de vértice de dois pontos da NCSQED	36
2.6	A função de vértice de três pontos da NCSQED	41
3	A teoria de Yang-Mills supersimétrica não-comutativa	54
3.1	A ação da NCSYM e Regras de Feynman	55
3.2	A função de vértice de dois pontos da NCSYM	59
3.3	A função de vértice de três pontos da NCSYM	68

4	Conclusões	74
	Apêndice A - Convenções e definições	76
A.1	Espinores num espaço-tempo de quatro dimensões	76
A.2	Variáveis de Grassmann	77
A.3	Superespaço e supercampos	79
A.4	Supercampos quirais e vetoriais	81
A.5	Teorias quânticas de supercampos	83
	Apêndice B - O cálculo detalhado de um superdiagrama	85
	Referências	91

1 Introdução

1.1 Histórico e motivação

É esperado, a partir de uma série de argumentos que vão desde considerações semi-clássicas de relatividade geral até resultados de gravitação quântica canônica¹ e teoria de cordas [1–3], que o entendimento do espaço-tempo como uma variedade diferenciável deve ser abandonado em regiões da ordem da escala de Planck, $\ell_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} \sim 10^{-33}$ cm, quando efeitos quânticos da gravitação tornam-se importantes. Nessa escala, a noção de um ponto no espaço-tempo perde seu sentido operacional, como sugerido pelo seguinte raciocínio semi-clássico² [2]: a localização de uma partícula eletricamente carregada com uma incerteza de posição a muito pequena envolve, por exemplo, a interação desta com um fóton muito energético, com momento da ordem $1/a$. Este processo de medida concentra uma quantidade muito grande de energia num pequeno volume, deformando o espaço-tempo nesta região, segundo a equação de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\eta_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$. Para a suficientemente pequeno, ocorre a formação de um horizonte de eventos, impedindo a detecção da partícula e assim impossibilitando o processo de medida. Esta e várias outras análises deste problema [1] sugerem a existência de uma “relação de incerteza” que proíbe a localização precisa de eventos no espaço-tempo.

Uma das possibilidades para modelar o espaço-tempo na escala de Planck é promover as coordenadas a operadores hermitianos \mathbf{x}^μ que não comutam entre si,

$$[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (1.1.1)$$

com $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$, sendo $\theta^{\mu\nu}$ uma matriz real constante, antisimétrica, com dimensões de área, que parametriza a não-comutatividade. Essa “quantização do espaço-tempo” implica numa relação de incerteza para as medidas de coordenadas da forma

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \sim |\theta^{\mu\nu}|, \quad (1.1.2)$$

que expressa a impossibilidade da medição de qualquer fenômeno físico numa escala de dis-

¹Também chamada *loop quantum gravity*.

²Deste momento em diante estaremos sempre utilizando, nesta tese, o sistema natural de unidades, em que $c = \hbar = 1$.

tância abaixo de $|\theta^{\mu\nu}|^{1/2}$, consistentemente com as considerações do parágrafo precedente.

A idéia da quantização do espaço-tempo foi apresentada pela primeira vez por Snyder em 1947 [4,5] como uma possível maneira de regularizar as divergências ultravioletas encontradas nas correções radioativas das teorias quânticas de campo³. Uma relação de incerteza da forma (1.1.2) sugere que a interação não pode estar localizada em pontos mas sim em regiões finitas, o que poderia amenizar o comportamento ultravioleta das correções radioativas. No entanto, essa idéia foi deixada de lado possivelmente devido ao sucesso do programa de renormalização iniciado no final da década de 1940. Além disso, Filk [7] mostrou que, apesar da expectativa inicial, persistem as divergências ultravioletas nas funções de Green de teorias quânticas de campos formuladas num espaço-tempo cujas coordenadas não comutam.

Embora não atendendo sua motivação inicial, a idéia da não-comutatividade do espaço-tempo tem sido estudada sob outros pontos de vista e recebido uma série de importantes contribuições nos últimos anos. Do ponto de vista matemático, Connes [8] desenvolveu, no início da década de 1980, a idéia da *geometria não-comutativa* como uma generalização dos conceitos geométricos usuais – em [9], Connes e Lott estudaram implicações dessas idéias na física de partículas através da construção de uma extensão não-comutativa para o modelo padrão (ver [10,11] para revisões dessa área e sua relação com a física). A primeira conexão dessas idéias com a teoria de cordas surgiu em 1986 [12], mas o grande impulso para o estudo de teorias quânticas de campo formuladas num espaço tempo não-comutativo (TQCNC) veio ao se encontrar a teoria de Yang-Mills não-comutativa (NCYM) como um limite de baixas energias da teoria de cordas [13–16] na presença de um campo magnético de fundo. Na sub-seção 1.2.2 daremos mais detalhes sobre a relação das TQCNC com a teoria das cordas.

Desde que a teoria de cordas é uma teoria quântica livre de inconsistências, o fato de que as TQCNC dela emergem como um limite particular cria a expectativa de que essas teorias possam ser, também, consistentes – no sentido de serem renormalizáveis e atenderem a requisitos como unitariedade da matriz S e causalidade. De fato, nos últimos anos, muitos pesquisadores se dedicaram a estudar vários aspectos da dinâmica quântica de campos definidos num espaço-tempo não-comutativo – algumas revisões contendo referências a trabalhos no campo são [17–19]. Implicações fenomenológicas da não-comutatividade do espaço-tempo têm sido estudadas em conexão com uma variedade de fenômenos como a possibilidade da violação de simetria-CP e da simetria de Lorentz, raios cósmicos ultra-energéticos, além de implicações em modelos cosmológicos [20–23].

Por razões de simplicidade, de ora em diante passaremos a designar as teorias quânticas de campo formuladas num espaço tempo não-comutativo como *teorias quânticas de campo não-comutativas*, ou mesmo *teorias não-comutativas*.

³A sugestão de que a quantização do espaço-tempo poderia ser uma “cura” para o problema das divergências ultravioletas partiu originalmente de Heisenberg: ver comentários sobre a história em [6].

1.2 Teorias quânticas de campo não-comutativas

1.2.1 O produto de Groenewold-Moyal

Ao invés de utilizar diretamente a álgebra (1.1.1), seguimos Filk [7] e introduzimos a correspondência de Weyl [24] entre operadores \mathbf{f} e funções clássicas $f(x)$ para examinar os efeitos da não-comutatividade num espaço-tempo de d dimensões. Esta correspondência consiste numa relação \mathcal{W} ,

$$\mathbf{f} = \mathcal{W}[f] \equiv \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x f(x) \int d^d k e^{ik_\mu x^\mu} \mathbf{T}(k), \quad (1.2.1)$$

em que

$$\mathbf{T}(k) \equiv e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (1.2.2)$$

A hermiticidade de x^μ garante que $\mathbf{T}^\dagger(k) = \mathbf{T}(-k)$ enquanto que a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff permite escrever o produto de dois operadores \mathbf{T} como

$$\mathbf{T}(k) \mathbf{T}(q) = \mathbf{T}(k+q) e^{-ik \wedge q}, \quad (1.2.3)$$

onde

$$k \wedge q \equiv \frac{1}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} q_\nu. \quad (1.2.4)$$

A definição do traço de $\mathbf{T}(k)$, com uma normalização conveniente,

$$\text{Tr } \mathbf{T}(k) = (2\pi)^d \delta^d(k_\mu), \quad (1.2.5)$$

nos leva à seguinte forma para a inversa do mapeamento \mathcal{W} ,

$$f(x) = \mathcal{W}^{-1}[\mathbf{f}] = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{Tr}[\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}(k)], \quad (1.2.6)$$

onde \cdot denota o produto ordinário de operadores. Estamos agora em condições de introduzir o produto de Groenewold-Moyal [25, 26], ou produto-*, a partir de

$$\begin{aligned} f_1(x) * f_2(x) &\equiv \mathcal{W}^{-1}[\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2] \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{Tr}[\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{T}(k)], \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

mapeando $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2$ num produto associativo, porém não-comutativo, envolvendo as funções f_1 e f_2 tal que

$$\mathcal{W}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathcal{W}[f_1(x)] \mathcal{W}[f_2(x)] = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2. \quad (1.2.8)$$

De (1.2.7) segue imediatamente que

$$\int d^d x f_1(x) * f_2(x) = \text{Tr}(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2), \quad (1.2.9)$$

e a generalização para um número arbitrário de fatores é dada por

$$\int d^d x f_1(x) * f_2(x) * \cdots * f_n(x) = \text{Tr}(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_n), \quad (1.2.10)$$

devido à associatividade do produto-*. Observamos, finalmente, que a integral do produto-* de n fatores é invariante frente a permutações cíclicas.

O mapeamento (1.2.1) permite definir uma teoria quântica de campos não-comutativa através de uma Lagrangiana em que o produto usual de campos é substituído pelo produto-*. Um caso específico será apresentado na sub-seção 1.2.3.

É possível reescrever (1.2.7) da forma alternativa⁴

$$\begin{aligned} f_1(x) * f_2(x) &= f_1(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu} \theta^{\mu\nu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu}\right) f_2(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} [\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} f_1(x)] \theta^{\mu_1 \nu_1} \theta^{\mu_2 \nu_2} \cdots \theta^{\mu_n \nu_n} [\partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} f_2(x)], \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

exibindo explicitamente a não-localidade do produto-*. Esta expressão também é conveniente para mostrar que

$$x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu = i\theta^{\mu\nu}, \quad (1.2.12)$$

de forma que o comutador de Groenewold-Moyal, $[A, B]_* = A * B - B * A$, reproduz corretamente a álgebra (1.1.1).

Além disso, de (1.2.11) vem que

$$\int d^d x f_1(x) * f_2(x) = \int d^d x f_1(x) f_2(x), \quad (1.2.13)$$

assumindo, como usual, que podemos desprezar os termos de superfície. Outra expressão que será fundamental para a determinação dos vértices de uma teoria quântica não-comutativa é

$$\int d^d x f_1(x) * f_2(x) * \cdots * f_n(x) = \int \left(\prod_{j=1}^n d^d x_j \right) V(x_1, \dots, x_n) f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n), \quad (1.2.14)$$

onde

$$V(x_1, \dots, x_n) = \int \left(\prod_{j=1}^n \frac{d^d k_j}{(2\pi)^d} \right) e^{i \sum k_j x_j} V(k_1, \dots, k_n), \quad (1.2.15)$$

$$V(k_1, \dots, k_n) = (2\pi)^d \delta\left(\sum_1^n k_j\right) e^{-i \sum_{i < j} k_i \wedge k_j}. \quad (1.2.16)$$

⁴Ver [19] para detalhes da obtenção desta e das seguintes expressões.

1.2.2 TQCNC como limites de baixas energias da teoria das cordas

Para exemplificar o aparecimento de uma TQCNC a partir da teoria de cordas, seguimos [16] e consideramos a dinâmica de cordas bosônicas abertas na presença de Dp -branas, conforme ilustrado na figura 1, descrita pela ação

$$S[X, h] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\xi \left(\sqrt{h} h^{ab} g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - 2\pi i \alpha' B_{\mu\nu} \varepsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \right), \quad (1.2.17)$$

em que Σ é a superfície de universo da corda, parametrizada pelas variáveis $\xi^0 = \tau \in \mathbb{R}$ e $\xi^1 = \sigma \in [0, \pi]$. A constante α' , conhecida como declividade de Regge, está relacionada à escala de comprimento característica das cordas, $\alpha' = \ell_s^2$ [27]. Finalmente, h^{ab} é a métrica Euclidiana da superfície de universo. Os campos de fundo $g_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são constantes e, por simplicidade, supomos

$$B_{\mu\nu} = 0 \text{ para } \mu, \nu = p+1, \dots, 25 \quad (1.2.18)$$

e $g_{\mu\nu}$ diagonal por blocos,

$$g_{\mu\nu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \dots p & p+1 \dots 25 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ p \\ p+1 \\ \vdots \\ 25 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{\text{diagonal}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\text{diagonal}} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (1.2.19)$$

A invariância de Weyl da teoria permite escolher o calibre conforme, em que $h_{ab} = e^\phi \delta_{ab}$ e

$$S[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\xi \left(g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu - 2\pi i \alpha' B_{ij} \varepsilon^{ab} \partial_a X^i \partial_b X^j \right). \quad (1.2.20)$$

onde $i, j = 0, \dots, p$. O segundo termo do membro da direita de (1.2.20) pode também ser escrito como um termo de superfície,

$$-\frac{i}{2} B_{ij} \int_{\partial\Sigma} d\tau X^i \partial_\tau X^j, \quad (1.2.21)$$

que depende apenas do valor de B_{ij} nas Dp -branas⁵.

A presença do campo magnético de fundo $B_{\mu\nu}$ não modifica as equações de movimento obtidas a partir de (1.2.20),

$$\partial_a \partial^a X^\mu = 0, \quad (1.2.22)$$

mas as condições de fronteira passam a depender de $B_{\mu\nu}$ nas direções paralelas à Dp -brana,

$$g_{ij} \partial_\sigma X^j + 2i\pi\alpha' B_{ij} \partial_\tau X^j \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0. \quad (1.2.23)$$

No limite $B_{ij} \rightarrow 0$, (1.2.23) se reduz à condição de Neumann enquanto que, para $g_{ij} \rightarrow 0$ e/ou

⁵A expressão (1.2.21) é similar a ação que descreve o movimento de elétrons sujeitos a um campo magnético intenso, tal que seja possível supor que todos os elétrons estejam no primeiro nível de de Landau [28]. É possível encontrar interessantes relações entre a mecânica quântica de uma partícula num espaço-tempo não-comutativo e o problema de Landau [29,30].

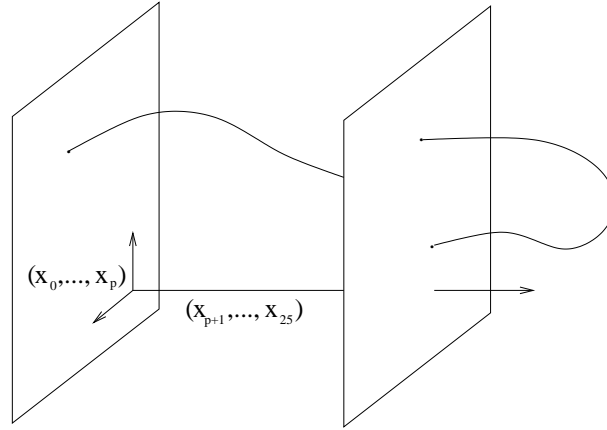


FIGURA 1: As Dp -branas são hipersuperfícies que se estendem nas direções x_0, \dots, x_p nas quais estão fixas as extremidades das cordas abertas.

$B_{ij} \rightarrow \infty$, (1.2.23) implica em $\partial_\tau X^j = 0$, de forma que as extremidades da corda estão fixas num ponto da Dp -brana.

Escrita em termos da variável complexa $z = e^{\tau+i\sigma}$, a função de Green $G^{ij}(z, z')$ "inclinação de slope" me pareceria natural, mas o Girotti acha horrível... o que lhe parece? e Green associada à equação (1.2.22) com a condição de fronteira (1.2.23) é [31–33]

$$G^{ij}(z, z') = -\alpha' \left[D^{ij} + g^{ij} \ln |z - z'| - g^{ij} \ln |z - \bar{z}'| + G^{ij} \ln |z - \bar{z}'|^2 + \frac{1}{2\pi\alpha'} \Theta^{ij} \ln \frac{z - \bar{z}'}{\bar{z} - z'} \right], \quad (1.2.24)$$

onde

$$G_{ij} = g_{ij} - 2\pi\alpha' (Bg^{-1}B)_{ij}, \quad (1.2.25a)$$

$$G^{ij} = \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} g \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{ij}, \quad (1.2.25b)$$

$$\Theta^{ij} = -(2\pi\alpha')^2 \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} B \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{ij}, \quad (1.2.25c)$$

e D^{ij} é uma constante cujo valor será convenientemente escolhido. A função de Green (1.2.24) define uma função monovalente se o corte de ramo da função logaritmo é tomado no semi-eixo real positivo.

O próximo passo é considerar uma amplitude de espalhamento de cordas abertas, no nível de árvore. Esta será dada por uma função de correlação dos operadores de vértice associados aos estados assintóticos das cordas, escritos genericamente como

$$V(k) = \int d\tau P[\partial X(\tau)] e^{ikX(\tau)}, \quad (1.2.26)$$

onde $P[\partial X(\tau)]$ é um polinômio nas derivadas de X^i . Estes operadores são inseridos na fronteira da superfície de universo, que corresponde ao eixo real de z . A função de Green (1.2.24) avaliada sobre o eixo real reduz-se a

$$G^{ij}(\tau, \tau') = -\alpha' G^{ij} \ln |\tau - \bar{\tau}'|^2 + \frac{i}{2} \Theta^{ij} \varepsilon(\tau - \tau'), \quad (1.2.27)$$

sendo ε a função sinal⁶. Uma amplitude de espalhamento será genericamente dada por

$$\int [\mathcal{D}X] [\mathcal{D}h] \prod_k V(k) e^{-S[X,h]} \equiv \left\langle \prod_k V(k) \right\rangle_{G,\Theta}. \quad (1.2.28)$$

No membro da direita de (1.2.28), indicamos explicitamente que a amplitude depende de G e Θ através da função de Green (1.2.24). Por ser constante exceto no ponto singular $\tau = \tau'$, o termo proporcional a Θ de $G^{ij}(\tau, \tau')$ pode ser fatorizado em (1.2.28), ou seja,

$$\left\langle \prod_k V(k) \right\rangle_{G,\Theta} = e^{-\frac{i}{2} \sum_{n>m} k_i^n \Theta^{ij} k_j^m} \left\langle \prod_k V(k) \right\rangle_{G,\Theta=0}. \quad (1.2.29)$$

Finalmente, nos perguntamos se uma teoria de campos é capaz de reproduzir as amplitudes calculadas através de (1.2.29) no limite $\alpha' \rightarrow 0$, que designamos como “limite de baixas energias”. Na situação em que $B = 0$ e portanto $\Theta = 0$, a resposta é bem conhecida [34]: quando $\alpha' \rightarrow 0$, as funções de correlação para operadores de vértice associados aos estados não-massivos da teoria de cordas são descritas por uma teoria de campos definida por uma Lagrangiana $L_{\text{lim}}(\Phi, \partial\Phi, \dots)$, onde Φ é uma designação genérica para os campos associados aos estados não-massivos. Neste sentido, dizemos que o limite de baixas energias da teoria das cordas corresponde a uma teoria de campos.

Já para $B \neq 0$, precisamos tomar um limite apropriado da amplitude (1.2.29),

$$\alpha' \sim \varepsilon^{1/2} \rightarrow 0, \quad (1.2.30a)$$

$$g_{ij} \sim \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.2.30b)$$

tal que

$$G_{ij} \rightarrow -(2\pi\alpha')^2 (B g^{-1} B)_{ij}, \quad (1.2.31a)$$

$$G^{ij} \rightarrow -\frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \left(\frac{1}{B} g \frac{1}{B} \right)^{ij}, \quad (1.2.31b)$$

$$\Theta^{ij} \rightarrow \left(\frac{1}{B} \right)^{ij}. \quad (1.2.31c)$$

Observe que tanto G quanto Θ tendem a valores finitos no limite (1.2.30). A função de

⁶Para chegar a (1.2.27), escolhemos $D^{ij} = -\frac{i}{2\alpha'} \Theta^{ij}$.

correlação (1.2.29), por sua vez, tende para

$$\left\langle \prod_k V(k) \right\rangle_{G, \Theta} \rightarrow e^{i \sum_{n>m} k^n \wedge k^m} \left\langle \prod_k V(k) \right\rangle_{G, \Theta=0}, \quad (1.2.32)$$

sendo o produto \wedge dado por (1.2.4) com a identificação $\theta^{ij} = -\Theta^{ij}$. Já conhecemos o comportamento de $\langle \prod_k V(k) \rangle_{G, \Theta=0}$ quando $\alpha' \rightarrow 0$: este fator é descrito por uma teoria de campos definida pela Lagrangiana $L_{\text{lim}}(\Phi, \partial\Phi, \dots)$. De (1.2.32) segue que a única alteração proporcionada pela presença do campo $B_{\mu\nu}$, neste limite, é a presença do fator de fase $e^{i \sum_{n>m} k^n \wedge k^m}$. Observando (1.2.16), constatamos que essa é precisamente a modificação induzida pela substituição dos produtos usuais de campo pelo produto- $*$ na Lagrangiana $L_{\text{lim}}(\Phi, \partial\Phi, \dots)$, o que define uma TQCNC. Isso significa que as amplitudes de espalhamento de cordas abertas, no limite definido por 1.2.30, reproduzem aquelas calculadas a partir de uma teoria quântica de campos não-comutativa definida através do produto- $*$.

1.2.3 A teoria escalar $\lambda\varphi^4$ não-comutativa

Para ilustrar os efeitos da não-comutatividade das coordenadas numa teoria de campos, consideramos o modelo escalar real com interação $\lambda\varphi^4$ em quatro dimensões espaço-temporais,

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \varphi(x) (\square + m^2) \varphi(x) - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x) \right], \quad (1.2.33)$$

onde λ é uma constante de acoplamento adimensional, e definimos o correspondente modelo não-comutativo pela ação

$$S_{\text{NC}}[\varphi] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \varphi(x) * (\square + m^2) \varphi(x) - \frac{\lambda}{4!} \varphi(x) * \varphi(x) * \varphi(x) * \varphi(x) \right]. \quad (1.2.34)$$

Sua quantização é feita através do método funcional, definindo um gerador de funções de Green conectadas $\mathcal{W}[j]$,

$$e^{i\mathcal{W}[j]} = N_0 \int [\mathcal{D}\varphi] e^{i S_{\text{NC}}[\varphi] + i \int d^4x \varphi(x) * j(x)}, \quad (1.2.35)$$

a partir do qual encontramos regras de Feynman para o cálculo perturbativo das funções de vértice. É imediato constatar que a ação (1.2.34) recai em (1.2.33) no limite $\theta \rightarrow 0$, de forma que classicamente a teoria definida por (1.2.34) tem um limite comutativo regular, fato que será alterado, como veremos a seguir, ao levarmos em conta as correções quânticas da teoria.

Segue de (1.2.13) que os termos quadráticos da ação (1.2.34) e, conseqüentemente, o propagador da teoria,

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (1.2.36)$$

não são modificados pela presença da não-comutatividade. O mesmo não acontece com o

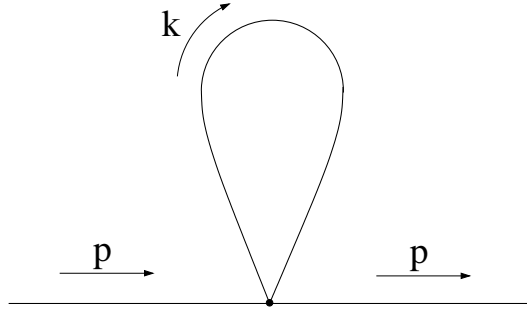


FIGURA 2: Primeira correção quântica à auto-energia do campo φ na teoria $\lambda\varphi^4$ não-comutativa.

vértice, que pode ser escrito no espaço de posição a partir de (1.2.14),

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int \left(\prod_{j=1}^4 dy_j \right) V(y_1, y_2, y_3, y_4) . \quad (1.2.37)$$

É conveniente trabalhar com um vértice que seja simétrico nas quatro linhas, ou seja,

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int \left(\prod_{j=1}^4 dy_j \right) \frac{1}{4!} \sum_{\pi} V(y_{\pi_1}, y_{\pi_2}, y_{\pi_3}, y_{\pi_4}) , \quad (1.2.38)$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações $\{\pi_i\}$ de $\{1, 2, 3, 4\}$. A expressão correspondente no espaço dos momentos é obtida a partir de (1.2.15) e (1.2.16) e pode ser escrita

$$-\frac{i\lambda}{3 \cdot 4!} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_i \right) [\cos(p_1 \wedge p_2 + p_1 \wedge p_3 + p_2 \wedge p_3) + \\ + \cos(p_1 \wedge p_2 + p_1 \wedge p_3 - p_2 \wedge p_3) + \cos(p_1 \wedge p_2 - p_1 \wedge p_3 - p_2 \wedge p_3)] , \quad (1.2.39)$$

expondo de maneira explícita a simetria do vértice nos momentos externos p_i . A presença dos fatores trigonométricos em (1.2.39) é a única alteração nas regras de Feynman introduzida pela não-comutatividade. No limite $\theta \rightarrow 0$, observamos que (1.2.39) é levado em

$$-\frac{i\lambda}{4!} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_i \right) , \quad (1.2.40)$$

que é vértice da teoria comutativa.

Podemos agora calcular a primeira correção quântica à função de vértice de dois pontos do campo φ ,

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p) , \quad (1.2.41)$$

sendo $\Sigma(p)$ a auto-energia do campo. O diagrama de ordem mais baixa da teoria de perturbações contribuindo a $\Sigma(p)$ é o laço da figura 2 e

$$-i \Sigma(p) = \frac{i\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [2 - \cos(2k \wedge p)] \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.2.42)$$

é a respectiva amplitude. Claramente, $\Sigma(p)$ pode ser dividida em duas partes,

$$\Sigma(p) = \Sigma^{(P)}(p) + \Sigma^{(NP)}(p). \quad (1.2.43)$$

Na parte planar, $\Sigma^{(P)}(p)$, o fator trigonométrico originado da não-comutatividade não depende do momento de integração (nesse caso particular, é uma constante). Já na parte não-planar, $\Sigma^{(NP)}(p)$, o fator trigonométrico depende de k e por isso modifica a integral de Feynman⁷. Tanto $\Sigma^{(P)}(p)$ quanto $\Sigma^{(NP)}(p)$ apresentam contagem de potências quadrática. A parte planar é efetivamente divergente no ultravioleta e pode ser calculada com a utilização da regularização dimensional,

$$\Sigma^{(P)}(p) = -\frac{\lambda m^2}{48\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi(2) - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \quad (1.2.44)$$

sendo $\varepsilon \equiv 2 - d/2$, μ a escala de massa introduzida pela regularização e $\psi(x) = d\Gamma(x)/dx$. Na parte não-planar, o fator trigonométrico torna a integral convergente,

$$\Sigma^{(NP)}(p) = \frac{\lambda m^2}{24\pi^2} \sqrt{\frac{1}{m^2 p \circ p}} K_1\left(\sqrt{m^2 p \circ p}\right), \quad (1.2.45)$$

onde K_1 é a função de Bessel modificada e

$$p \circ p \equiv p_\mu (\theta^2)^{\mu\nu} p_\nu. \quad (1.2.46)$$

A divergência ultravioleta é absorvida pela renormalização da massa

$$m_R^2 = m^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda}{48\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi(2) - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \right] \right\}, \quad (1.2.47)$$

levando à seguinte expressão para a função de vértice renormalizada,

$$\Gamma_R^{(2)}(p) = p^2 - m_R^2 - \frac{\lambda m_R^2}{24\pi^2} \sqrt{\frac{1}{m_R^2 p \circ p}} K_1\left(\sqrt{m_R^2 p \circ p}\right). \quad (1.2.48)$$

Para estudar (1.2.48) na região do infravermelho e também seu limite comutativo quando $\theta \rightarrow 0$, utilizamos o comportamento assintótico da função de Bessel modificada [36],

$$\sqrt{\frac{1}{m_R^2 p \circ p}} K_1\left(\sqrt{m_R^2 p \circ p}\right) \xrightarrow{p \circ p \rightarrow 0} \frac{1}{m_R^2 p \circ p} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{m_R^2 p \circ p}}{2}\right). \quad (1.2.49)$$

Percebemos a presença, em $\Gamma_R^{(2)}(p)$, de singularidades infravermelhas quadráticas e logarítmicas originadas da parte não-planar de $\Sigma(p)$. Esta é a chamada “mistura UV/IR”, típica de teorias não-comutativas: as contribuições não-planares têm seu comportamento ultravioleta amenizado pela não-comutatividade, tornando-se convergentes, mas em contrapartida desen-

⁷Os nomes “planar” e “não-planar” vêm da existência ou não de cruzamento de linhas quando se utiliza a notação de linha dupla de 't Hooft para esses diagramas, desnecessária aqui por estarmos trabalhando com um vértice simetrizado. Ver [35], por exemplo.

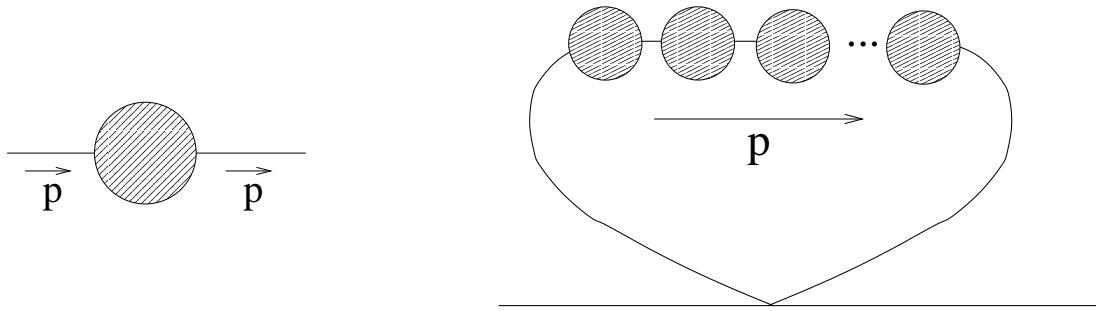


FIGURA 3: Inserções perigosas de singularidades infravermelhas UV/IR: o diagrama da esquerda, apresentando uma singularidade $\frac{1}{p\circ p} \sim \frac{1}{p^2\theta^2}$, é inserido várias vezes num diagrama de ordem superior, acumulando potências do momento de integração no denominador, tornando a correspondente integral divergente no infravermelho [35].

volvem singularidades infravermelhas. Estas sinalizam um limite $\theta \rightarrow 0$ singular, ao contrário do que acontece no nível clássico.

1.2.4 A mistura UV/IR

Além da surpresa que representa a existência de singularidades infravermelhas numa teoria massiva⁸, o mecanismo UV/IR pode apresentar-se como uma barreira intransponível do ponto de vista da consistência das TQCNC, inviabilizando sua solução perturbativa, conforme explicado num caso particular na figura 3.

No caso do modelo $\lambda\varphi^4$ não-comutativo, a renormalização foi explicitamente verificada até a aproximação de dois laços [37], mas a teoria é afetada por singularidades infravermelhas UV/IR. A renormalização a todas as ordens foi provada através do método de Polchinski [38], fundamentado no grupo de renormalização Wilsoniano, mas foi necessário o uso de um corte infravermelho nas integrais de momento para evitar o problema da mistura UV/IR [39]. Esse corte pode ser eventualmente removido se as divergências infravermelhas UV/IR forem resomadas [40], mas esse procedimento não pôde ser generalizado para outras teorias.

Uma alternativa para evitar os problemas induzidos pela mistura UV/IR é investigar teorias não-comutativas em que sejam geradas singularidades infravermelhas no máximo logarítmicas. Como qualquer potência de $\ln k$ é dominada pela medida de integração, inserções dessas singularidades na forma indicada pela figura 3 não causam problemas – em princípio – para a consistência perturbativa da teoria. Uma classe de teorias que é candidata natural a essa

⁸No caso de uma teoria envolvendo partículas de massa zero, singularidades em $p = 0$ são esperadas devido ao comportamento infravermelho dos propagadores e, para não confundir estas singularidades com as originadas do mecanismo UV/IR, as últimas serão sempre chamadas de “singularidades infravermelhas UV/IR”, ou simplesmente “singularidades UV/IR”.

investigação é a dos modelos supersimétricos.

De fato, a primeira TQCNC em quatro-dimensões cuja renormalizabilidade foi provada a todas as ordens da teoria de perturbações foi o modelo de Wess-Zumino (WZ) não-comutativo [41]. O modelo de WZ [42] é a generalização supersimétrica da teoria escalar $\lambda\phi^4$ e a renormalização de sua contrapartida não-comutativa segue pelas mesmas linhas da teoria comutativa [43]. Um ingrediente fundamental dessa prova é justamente o fato de que as divergências UV são logarítmicas – resultado do cancelamento de divergências dominantes típico de teorias supersimétricas – e por isso podem produzir singularidades UV/IR no máximo logarítmicas. Estas, por serem integráveis, não são capazes de prejudicar a consistência da teoria. O mesmo acontece em outros modelos supersimétricos, como o modelo sigma não-linear [44,45] e o modelo sigma linear $O(N)$ no limite $N \rightarrow \infty$ [46], ambos em três dimensões.

1.2.5 O problema da unitariedade

A mistura UV/IR não é o único fenômeno que pode comprometer a consistência das TQCNC. No caso de não-comutatividade espaço-temporal, ou seja, $\theta^{0i} \neq 0$, as regras de Cutkosky que refletem a unitariedade da matriz S são violadas tanto em modelos escalares [47] quanto em teorias de calibre [48]. Violações de causalidade também foram encontradas no espalhamento de pacotes de onda unidimensionais se $\theta^{0i} \neq 0$ [49]. Nenhum desses problemas aparece se nos restringimos à não-comutatividade espacial, $\theta^{0i} = 0$.

Estas dificuldades estão ligadas ao fato de que $\theta^{0i} \neq 0$ implica na presença de infinitas derivadas temporais no produto-*, de forma que a teoria se torna não-local no tempo. Embora formalmente seja possível definir uma funcional $\mathcal{W}[j]$ a partir de (1.2.35) e encontrar regras de Feynman através das manipulações convencionais na integral funcional, já não temos garantia de que existe uma teoria quântica bem definida nesta situação⁹ e não é surpreendente que as regras de Feynman assim obtidas definam uma teoria patológica.

Outra interessante visão deste problema vem da conexão TQCNC com a teoria das cordas. No caso puramente magnético, $B_{0i} = 0$, na sub-seção 1.2.2 mostramos um limite no qual as excitações massivas e de cordas fechadas desacoplam dos estados de massa zero da corda aberta, que são descritos por uma teoria de campos não-comutativa com $\theta^{0i} = 0$. Neste caso, a TQCNC, sendo um limite da teoria das cordas, respeita requerimentos básicos da mecânica quântica como a unitariedade da matriz S e causalidade. Por outro lado, na presença de um campo elétrico de fundo $B_{0i} \neq 0$ com $B_{ij} = 0$, pode-se mostrar que não é possível desacoplar os graus de liberdade massivos das cordas de forma a encontrar uma teoria de campos não-comutativa com $\theta^{0i} \neq 0$ descrevendo a dinâmica efetiva dos estados não-massivos¹⁰.

⁹Este fato está ligado à dificuldade de se definir um formalismo Hamiltoniano para uma teoria não-local no tempo.

¹⁰Ver [50] para uma discussão mais detalhada.

Sob um ponto de vista que priorize as TQCNC como limites de baixas energias da teoria das cordas, portanto, as patologias encontradas no caso de não-comutatividade espaço-temporal são consequência natural de não conseguir desacoplar os estados massivos quando $B_{0i} \neq 0$. Do ponto de vista da teoria de campos, a violação de unitariedade indica que a quantização através da integral funcional não é um procedimento consistente quando a Lagrangiana que define a teoria clássica envolve infinitas derivadas temporais¹¹. Por essas razões, assumiremos nesta tese que $\theta^{0i} = 0$, o que garante a aplicabilidade dos métodos usuais de quantização e a unitariedade da teoria quantizada através da integral funcional.

1.3 Teorias de calibre não-comutativas

Teorias de calibre não-comutativas podem ser obtidas a partir do acoplamento de um campo de calibre $A_\mu(x)$ com a superfície de universo Σ da corda aberta,

$$-i \int_{\partial\Sigma} d\tau A_\mu(x) \partial_\tau X^\mu, \quad (1.3.1)$$

na presença de um campo magnético de fundo $B_{\mu\nu}$ e após tomar-se um limite apropriado [16]. A teoria de campos assim encontrada é definida pela ação

$$S = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}, \quad (1.3.2)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]_* \quad (1.3.3)$$

é o tensor intensidade de campo e $D_\mu \cdot \equiv \partial_\mu \cdot + ig [A_\mu, \cdot]_*$ é a derivada covariante de calibre. A ação (1.3.2) é invariante frente à transformação

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = u(x) * A_\mu * u^{-1}(x) + iu(x) * \partial_\mu u^{-1}(x), \quad (1.3.4)$$

com

$$u(x) = e^{ig\omega(x)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(ig)^n}{n!} \left[\underbrace{\omega(x) * \omega(x) * \dots * \omega(x)}_{n \text{ vezes}} \right]. \quad (1.3.5)$$

Observamos que as teorias de calibre não-comutativas apresentam vértices de auto-interação para o campo de calibre mesmo no caso Abelian. Isso acontece porque o produto Moyal garante que comutadores da forma $[A_\mu, A_\nu]_*$ não se anulam.

Devido a relações de fatorização de amplitudes de espalhamento de cordas abertas, o acoplamento de campos não-Abelianos à teoria de cordas está sujeito a restrições [55,56] referentes não apenas à escolha do grupo de calibre, mas também à dimensionalidade da representa-

¹¹Têm sido sugeridas na literatura formulações alternativas que são capazes de quantizar a teoria com não-comutatividade espaço-temporal de forma consistente, preservando a unitariedade [51–54].

ção matricial dos respectivos geradores. Especificamente, apenas os grupos $U(N)$, $SO(N)$ e $USp(2N)$, nas suas representações fundamentais, podem ser utilizados. É interessante que essas restrições se transmitem às teorias de calibre não-comutativas não-Abelianas que, independente de serem entendidas como um limite de baixas energias da teoria das cordas, também só podem ser formuladas para esses grupos de calibre e apenas na representação fundamental [57–59].

De fato, consideramos um grupo de calibre não-Abeliano \mathcal{G} e seja \mathcal{A} sua correspondente álgebra de Lie, com geradores (em alguma representação) τ_a . A generalização não-comutativa natural para \mathcal{G} seria o conjunto das transformações

$$g(x) = e^{i\lambda^a(x)\tau_a} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left[\underbrace{(i\lambda^a(x)\tau_a) * (i\lambda^a(x)\tau_a) * \dots * (i\lambda^a(x)\tau_a)}_{n\text{-vezes}} \right]. \quad (1.3.6)$$

Este conjunto, contudo, não forma grupo por não conter necessariamente o produto de dois quaisquer de seus elementos. Considerando duas transformações $g_1 = e^{i\lambda_1^a T_a}$ e $g_2 = e^{i\lambda_2^b T_b}$, por exemplo, seu produto pode ser escrito através da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$g_1 * g_2 = e^{i(\lambda_1^a + \lambda_2^b)T_a - \frac{1}{2}[\lambda_1^a T_a, \lambda_2^b T_b]_* + \dots}, \quad (1.3.7)$$

e para que $g_1 * g_2$ seja da forma $e^{i\lambda^a \tau_a}$ é preciso, em particular, que

$$\begin{aligned} [\lambda_1^a \tau_a, \lambda_2^b \tau_b]_* &= \lambda_1^a * \lambda_2^b \tau_a \tau_b - \lambda_2^b * \lambda_1^a \tau_b \tau_a \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1^a * \lambda_2^b + \lambda_2^b * \lambda_1^a) [\tau_a, \tau_b] + \frac{1}{2}(\lambda_1^a * \lambda_2^b - \lambda_2^b * \lambda_1^a) \{\tau_a, \tau_b\} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

possa ser escrito como uma combinação linear dos τ_a ¹². A álgebra satisfeita pelos geradores garante que isso acontece com o termo envolvendo $[\tau_a, \tau_b]$ mas nem sempre o anticomutador $\{\tau_a, \tau_b\}$ pertence a \mathcal{A} . Para grupos $SU(N)$, por exemplo, podemos verificar que o anticomutador não será necessariamente uma matriz de traço nulo e, portanto, não pertence à correspondente álgebra de Lie, o que impede que estes grupos sejam implementados numa teoria de calibre não-comutativa.

A álgebra de Lie dos grupos $U(N)$, por sua vez, é composta por geradores hermitianos T_a , $a = 1, \dots, N^2$, que na representação fundamental formam uma base do espaço de matrizes $N \times N$ e portanto

$$\{T_a, T_b\} = d_{abc} T_c, \quad (1.3.9)$$

garantindo que $[\lambda_1^a \tau_a, \lambda_2^b \tau_b]_* \in \mathcal{A}$. O mesmo pode ser mostrado para os termos que não escrevemos explicitamente em (1.3.7). O grupo $U(N)$, na sua representação fundamental, pode ser consistentemente utilizado para se definir uma teoria de calibre não-comutativa, ao menos

¹²No caso comutativo, podemos escrever

$$[\lambda_1^a \tau_a, \lambda_2^b \tau_b] = \lambda_1^a \lambda_2^b \tau_a \tau_b - \lambda_2^b \lambda_1^a \tau_b \tau_a = \lambda_1^a \lambda_2^b [\tau_a, \tau_b] = i f_{ab}^c \lambda_1^a \lambda_2^b \tau_c,$$

garantindo que elementos da forma $e^{i\lambda^a \tau_a}$ formem grupo sempre que os τ_a pertencem a uma álgebra de Lie.

no nível clássico.

No que se refere às correções radioativas, a renormalizabilidade das teorias de calibre não-comutativas tem sido argumentada [60–63] com base no fato de que as divergências ultravioletas, calculadas a um laço da teoria de perturbações, podem ser eliminadas através de contra-termos com a mesma forma dos termos já presentes na Lagrangiana inicial. Mas, como discutido pela primeira vez em [61,62] no caso da eletrodinâmica quântica não-comutativa (NCQED), a presença de divergências infravermelhas UV/IR não-integráveis apresenta-se como uma séria dificuldade. Na correção de um laço à polarização de vácuo da NCSQED,

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) \sim i\frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{10}{3} (g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) \ln(p^2\tilde{p}^2) + 32\frac{\tilde{p}^\mu\tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^4} - \frac{4p^2}{3\tilde{p}^2}\tilde{p}^\mu\tilde{p}^\nu \right\}, \quad (1.3.10)$$

em que $\tilde{p}^\mu \equiv \theta^{\mu\nu}p_\nu$, observa-se o aparecimento de um pólo infravermelho quadrático devido ao mecanismo UV/IR. É interessante lembrar que, quando a regularização utilizada respeita a simetria de calibre, o grau de divergência dos diagramas quadraticamente divergentes por contagem de potências se reduz para logarítmico [64]. Apesar disso, a parte não-planar desses diagramas ainda é capaz de gerar singularidades infravermelhas UV/IR quadráticas. Como discutimos na sub-seção 1.2.4, essas últimas podem inviabilizar a solução perturbativa da teoria.

Teorias de calibre não-comutativas são de particular relevância não apenas por surgirem de um limite de baixas energias da teoria das cordas mas também por serem ingredientes naturais numa tentativa de generalização não-comutativa do modelo padrão [65] – que, por sua vez, seria uma forma de se procurar sinais fenomenológicos da não-comutatividade do espaço-tempo. Por essas razões, é de fundamental importância averiguar se é possível contornar o problema da mistura UV/IR nesta classe de modelos e assim construir teorias de calibre não-comutativas que sejam perturbativamente consistentes.

Novamente, a introdução da supersimetria pode ser uma maneira de preservar a teoria do mecanismo UV/IR. Como observado em [66], no caso da NCQED envolvendo N_b campos escalares e N_f espinores de Weyl, o pólo infravermelho quadrático da polarização de vácuo apresenta-se proporcional a

$$(N_b + 2 - 2N_f) \frac{\tilde{p}^\mu\tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^4}. \quad (1.3.11)$$

Numa teoria supersimétrica, o número de graus de liberdade bosônico e fermiônico é sempre o mesmo, de forma que o parênteses na equação (1.3.11) se anula. Esse fato sinaliza as teorias de calibre não-comutativas supersimétricas como candidatas a teorias de campo consistentes, no sentido de serem livres de divergências infravermelhas UV/IR não-integráveis. Essa é a motivação fundamental para os trabalhos descritos nessa tese.

1.4 Teorias de calibre supersimétricas não-comutativas

O foco da atenção desta tese é o exame da consistência da solução perturbativa de teorias de calibre supersimétricas não-comutativas em quatro dimensões espaço-temporais. Em particular, investigamos se a supersimetria é eficiente, como foi no caso escalar [41], em evitar o aparecimento de singularidades infravermelhas UV/IR não-integráveis que possam invalidar a teoria de perturbações em ordens mais altas, pelo mecanismo descrito na sub-seção 1.2.4. Empregamos o formalismo de supercampos para o estudo dessas teorias por este ser capaz de preservar explicitamente a supersimetria em todos os estágios do cálculo. Vamos nos ater ao caso em que a não-comutatividade modifica apenas a álgebra das coordenadas x^μ e não das coordenadas fermiônicas do superespaço θ^α , de forma que a generalização não-comutativa para teorias de campo definidas no superespaço é imediata [67]: substituímos o produto usual dos supercampos pelo produto-*, que apenas afeta os campos componentes¹³.

Utilizaremos o chamado formalismo covariante de supercampos, que nos permite calcular perturbativamente funções de vértice do supercampo de calibre. Teorias de calibre supersimétricas não-comutativas podem também ser estudadas através do formalismo de campo de fundo [71–73], que permite encontrar diretamente funções de vértice para o tensor intensidade de campo de fundo. Esta última metodologia apresenta algumas vantagens, como um menor número de diagramas a serem calculados e uma contagem de potências mais amena em relação ao formalismo covariante. No entanto, como argumentaremos na seção 2.6, isto não elimina a necessidade de garantir a segurança infravermelha¹⁴ das funções de vértice do supercampo de calibre para evitar que o mecanismo UV/IR possa invalidar o formalismo de campo de fundo nas ordens superiores da teoria de perturbações. Isto justifica nossa escolha do formalismo covariante para o cálculo perturbativo das funções de vértice.

O leitor pode referir-se a [74, 75] para introduções às teorias de calibre no superespaço. No que se refere à generalização supersimétrica da eletrodinâmica quântica, essa formulação não apresenta maiores dificuldades e podemos rapidamente encontrar uma ação no superespaço que corresponde, quando escrita em termos dos campos componentes, à ação encontrada por Wess e Zumino em [76]. Por outro lado, a formulação no superespaço de uma teoria de calibre não-Abeliana é muito mais complexa já que a ação invariante de calibre é não polinomial e a correspondente transformação de calibre é não-linear. Toda essa complexidade se transfere à formulação de supercampos da QED não-comutativa supersimétrica em quatro dimensões espaço-temporais (NCSQED).

Os capítulos 2 e 3 concentram os resultados originais apresentados nesta tese. Estudaremos

¹³Existem trabalhos na literatura considerando a possibilidade de que as coordenadas fermiônicas não anticomutem [68–70], uma situação que também pode-se relacionar à teoria das cordas, o que leva a teorias com “supersimetria $\mathcal{N} = 1/2$ ”.

¹⁴Por “segurança infravermelha” entendemos a ausência de singularidades infravermelhas UV/IR não-integráveis.

a consistência da formulação covariante de supercampos de teorias de calibre supersimétricas não-comutativas, calculando as funções de vértice de dois e três pontos do supercampo de calibre V .

No capítulo 2, analisaremos em detalhe as correções a um laço da NCSQED. Generalizando resultados já existentes na literatura referentes à função de vértice de dois pontos $\Gamma_{VV}^{(1)}$, mostraremos que esta é livre de singularidades infravermelhas UV/IR não-integráveis em qualquer calibre covariante. Logo após, estudaremos a função de três pontos $\Gamma_{VVV}^{(1)}$, quando nos depararmos com a necessidade de calcular todas os diagramas sub-dominantes que atuam como fontes de singularidades UV/IR não-integráveis. A existência de um calibre particular no qual estas se anulam será suficiente para mostrar que a NCSQED é uma teoria consistente nessa aproximação.

No capítulo 3 estenderemos nossa análise para o caso das teorias não-Abelianas. Mostraremos que a segurança infravermelha das correções radioativas da teoria de Yang-Mills supersimétrica não-comutativa (NCSYM) depende de relações envolvendo traços dos geradores do grupo, tanto na função de duas quanto na de três pontos. Consistentemente com as restrições impostas pela não-comutatividade no nível clássico, veremos que estas relações são satisfeitas para a representação fundamental do grupo $U(N)$. Além disso, a função de dois pontos $\Gamma_{VV}^{(1)}$ é finita para a teoria com supersimetria $\mathcal{N} = 4$.

Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos as conclusões e algumas perspectivas futuras.

2 A QED supersimétrica não-comutativa

2.1 A ação da NCSQED

A extensão do grupo de calibre $U(1)$ para o caso não comutativo, que designamos $\mathcal{U}(1)$, é imediata: escrevemos uma transformação $g[\Lambda] \in \mathcal{U}(1)$, parametrizada pelo supercampo quiral $\Lambda(z)$, como

$$g[\Lambda] = e^{-ig\Lambda} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left[\underbrace{(-igV) * (-igV) * \cdots * (-igV)}_{n \text{ vezes}} \right]. \quad (2.1.1)$$

A ação de $\mathcal{U}(1)$ sobre um supercampo real $V(z)$ é dada por $V(z) \rightarrow V'(z)$ tal que

$$e^{gV'} = g^\dagger[\Lambda] * e^{gV} * g[\Lambda] = e^{ig\bar{\Lambda}} * e^{gV} * e^{-ig\Lambda}. \quad (2.1.2)$$

Escrita em forma infinitesimal, a transformação (2.1.2) corresponde a

$$\delta V = iL_{\frac{g}{2}V} \left[-(\Lambda + \bar{\Lambda}) + \left(\coth L_{\frac{g}{2}V} \right) [\bar{\Lambda} - \Lambda] \right], \quad (2.1.3)$$

onde

$$L_A[B] \equiv [A, B]_* . \quad (2.1.4)$$

Em (2.1.3), a função cotangente hiperbólica deve ser entendida em termos de seu desenvolvimento em série de McLaurin,

$$\coth A = A^{-1} + \frac{A}{3} - \frac{A^3}{45} + \cdots, \quad (2.1.5)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \delta V &= iL_{\frac{g}{2}V} \left[-(\Lambda + \bar{\Lambda}) \right] + iL_{\frac{g}{2}V} \left[L_{\frac{g}{2}V}^{-1} [\bar{\Lambda} - \Lambda] + \frac{1}{3} L_{\frac{g}{2}V} [\bar{\Lambda} - \Lambda] + \cdots \right] \\ &= i(\bar{\Lambda} - \Lambda) - \frac{ig}{2} [V, \Lambda + \bar{\Lambda}]_* + \frac{ig^2}{12} [V, [V, \bar{\Lambda} - \Lambda]_*]_* + \cdots . \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Para justificar a introdução de (2.1.2), temos que investigar as transformações correspondentes para as componentes de $V(z)$, o que faremos mais adiante. Antes, porém, apresentamos

a ação da NCSQED,

$$S_V = \frac{1}{4g^2} \left(\int d^6z W^\alpha W_\alpha + \int d^6\bar{z} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right), \quad (2.1.7)$$

onde

$$W_\alpha \equiv \bar{D}^2 (e^{-gV} * D^\alpha e^{gV}) \quad (2.1.8)$$

é o *tensor intensidade de força* e $\bar{W}_{\dot{\alpha}} = (W_\alpha)^*$. Podemos mostrar que W_α é covariante frente à transformação (2.1.2). Partimos de

$$W'_\alpha = \bar{D}^2 (e^{-gV'} * D_\alpha e^{gV'}), \quad (2.1.9)$$

onde $e^{gV'}$ é dada por (2.1.2) e sua inversa por

$$e^{-gV'} = e^{ig\Lambda} * e^{-gV} * e^{-ig\bar{\Lambda}}. \quad (2.1.10)$$

Como Λ ($\bar{\Lambda}$) é um supercampo *quiral* (*antiquiral*), $\bar{D}(e^{ig\Lambda}) = D(e^{ig\bar{\Lambda}}) = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} W'_\alpha &= \bar{D}^2 \left[\left(e^{ig\Lambda} * e^{-gV} * e^{-ig\bar{\Lambda}} \right) * D_\alpha \left(e^{ig\bar{\Lambda}} * e^{gV} * e^{-ig\Lambda} \right) \right] \\ &= e^{ig\Lambda} * \bar{D}^2 \left[e^{-gV} * e^{-ig\bar{\Lambda}} * e^{ig\bar{\Lambda}} * D_\alpha \left(e^{gV} * e^{-ig\Lambda} \right) \right] \\ &= e^{ig\Lambda} * \bar{D}^2 \left[\left(e^{-gV} * D_\alpha e^{gV} \right) * e^{-ig\bar{\Lambda}} \right] + e^{ig\Lambda} * \bar{D}^2 \left[e^{-gV} * e^{gV} * D_\alpha e^{-ig\Lambda} \right] \\ &= e^{ig\Lambda} * W_\alpha * e^{-ig\bar{\Lambda}} + e^{ig\Lambda} * \bar{D}^2 D_\alpha e^{-ig\Lambda}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Por fim, $\bar{D}^2 D e^{-ig\Lambda} = 0$ devido à quiralidade de Λ . Concluimos assim que

$$W'_\alpha = e^{ig\Lambda} * W_\alpha * e^{-ig\bar{\Lambda}}, \quad (2.1.12)$$

o que garante que a ação (2.1.7) é *invariante* frente a (2.1.2). Utilizando a relação (A.4.5) podemos reescrever (2.1.7),

$$S_V = -\frac{1}{2g^2} \int d^8z \left(e^{-gV} * D^\alpha e^{gV} \right) * \bar{D}^2 \left(e^{-gV} * D_\alpha e^{gV} \right), \quad (2.1.13)$$

expressão que resulta mais adequada para encontrar as regras de Feynman da teoria.

Quando desenvolvida em potências de g , a ação (2.1.13) exibe infinitos vértices. Encontramos os primeiros termos desse desenvolvimento a partir de

$$\begin{aligned} e^{-gV} * D_\alpha e^{gV} &= gD_\alpha V - \frac{g^2}{2!} [V, D_\alpha V]_* + \frac{g^3}{3!} [V, [V, D_\alpha V]_*]_* - \frac{g^4}{4!} [V, [V, [V, D_\alpha V]_*]_*]_* \\ &\quad + \frac{g^5}{5!} [V, [V, [V, [V, D_\alpha V]_*]_*]_*]_* + \dots \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

aplicado a (2.1.13). Escrevemos assim

$$S_V = S_V^{(0)} + g S_V^{(1)} + g^2 S_V^{(2)} + g^3 S_V^{(3)} + \dots, \quad (2.1.15)$$

onde¹

$$S_V^{(0)} = \frac{1}{2} \int d^8z V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V, \quad (2.1.16)$$

$$S_V^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^8z \bar{D}^2 D^\alpha V * [V, D_\alpha V]_* , \bar{D}^2 D^\alpha V * [V, D_\alpha V]_* \quad (2.1.17)$$

$$S_V^{(2)} = - \int d^8z \left\{ \frac{1}{8} [V, D^\alpha V]_* * \bar{D}^2 [V, D_\alpha V]_* + \frac{1}{6} \bar{D}^2 D^\alpha V * [V, [V, D_\alpha V]_*]_* \right\}, \quad (2.1.18)$$

$$S_V^{(3)} = \frac{1}{12} \int d^8z \left\{ \frac{1}{2} \bar{D}^2 D^\alpha V * [V, [V, [V, D_\alpha V]_*]_*]_* \right. \\ \left. + [V, [V, D^\alpha V]_*]_* * \bar{D}^2 [V, D_\alpha V]_* \right\}. \quad (2.1.19)$$

Note o custo da formulação de uma teoria de calibre não-comutativa no superespaço: precisamos trabalhar com uma transformação de calibre não-linear, equação (2.1.2), e uma ação não-polinomial, equação (2.1.13). Faz-se necessário, portanto, clarificar a relação da teoria definida por (2.1.13) com a formulação tradicional de uma teoria de calibre, que consiste numa Lagrangiana envolvendo um termo bilinear $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor intensidade de campo eletromagnético, além do acoplamento do campo de calibre a campos escalares e espinoriais através de uma derivada covariante D_μ . Começamos substituindo $V(z)$ e $\Lambda(z)$ em (2.1.3) por suas expressões em termos de componentes (ver seção A.4),

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + [\theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\phi}(x)] + [\theta \theta j(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} j^*(x)] \\ + \theta^2 \bar{\theta} \left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2} \sigma^\mu \partial_\mu \phi \right] + \bar{\theta}^2 \theta \left[\lambda(x) + \frac{i}{2} \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\phi} \right] \\ + \bar{\theta}^2 \theta^2 \left[d(x) - \frac{1}{4} \square f(x) \right] \quad (2.1.20)$$

e

$$\Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\theta\bar{\theta}} [a(x) + \theta\chi(x) + \theta^2 h(x)]. \quad (2.1.21)$$

Procuramos a seguir o efeito da transformação (2.1.3) sobre as componentes de $V(z)$. Para o campo vetorial $A_\mu(x)$, encontramos

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \Omega(x) + ig [A_\mu(x), \Omega(x)]_* + \mathcal{O}(g^2), \quad (2.1.22)$$

onde $\Omega(x)$ é uma função real relacionada às componentes de $\Lambda(z)$. Reconhecemos a semelhança de (2.1.22) com a transformação de calibre para um campo não-Abeliano. Não encontramos

¹Nestas e em todas as expressões que seguirão, fica subentendido que as derivadas espinoriais covariantes atuam apenas no fator que está imediatamente a sua direita.

a transformação usual da QED, $\delta A_\mu = \partial_\mu \Omega$, por duas razões: a não-comutatividade faz com que comutadores como os que aparecem em (2.1.22) não se anulem e a não-linearidade da transformação (2.1.2) reflete-se na aparição das correções de ordens superiores em g .

Além da semelhança de (2.1.22) com uma transformação de calibre não-Abeliana, podemos efetivamente obter a formulação em componentes dessa teoria através de uma particular escolha de calibre. Para ver como isso acontece, escrevemos a ação de (2.1.2) sobre todas as componentes de $V(z)$:

$$\delta f = \frac{i}{2}(a^* - a) + \mathcal{O}[g], \quad (2.1.23a)$$

$$\delta \phi = -\frac{i}{2}\chi + \mathcal{O}[g], \quad (2.1.23b)$$

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{2}\partial_\mu(a^* + a) + \mathcal{O}[g], \quad (2.1.23c)$$

$$\delta j = -\frac{i}{2}h + \mathcal{O}[g], \quad (2.1.23d)$$

$$\delta \lambda = \mathcal{O}[g], \quad (2.1.23e)$$

$$\delta d = \mathcal{O}[g]. \quad (2.1.23f)$$

Sempre é possível escolher $h(x)$, $\chi(x)$ e $\mathfrak{A}(x)$ para realizar uma transformação que nos leve a um calibre onde $f(x)$, $\phi(x)$ e $j(x)$ se anulam. Isto define o calibre de Wess-Zumino. Nele o supercampo $V(z)$ se reduz a

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + \theta^2 \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2 \theta \lambda(x) + \bar{\theta}^2 \theta^2 d(x). \quad (2.1.24)$$

Dessa expressão pode-se rapidamente constatar que $V^3(z) = 0$, de forma que a ação (2.1.13) torna-se polinomial e, em termos de componentes, resulta ser igual a

$$S_{\text{GWZ}} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} - i\lambda * \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda} + 2d^2 \right], \quad (2.1.25)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \quad (2.1.26)$$

e $D_\mu \cdot \equiv \partial_\mu \cdot + ig[A_\mu, \cdot]$ é a derivada covariante de calibre.

Tendo escolhido $h(x)$, $\chi(x)$ e $\mathfrak{A}(x)$ para chegar ao calibre de Wess-Zumino, ainda nos resta uma liberdade de calibre residual dada por $\mathfrak{R}a(x)$, que é responsável pela transformação

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \Omega(x) + ig[A_\mu(x), \Omega(x)]_*, \quad (2.1.27)$$

onde $\Omega(x) = -\frac{1}{2}\mathfrak{R}a(x)$. Vemos que a escolha do calibre de Wess-Zumino reduz a teoria definida por (2.1.13) ao que reconhecemos como a generalização supersimétrica natural da NCQED. No entanto, o calibre de Wess-Zumino não é compatível com o formalismo de supercampos, pois uma transformação de supersimetria geral regenera as componentes $f(x)$, $\phi(x)$ e $j(x)$. É

possível contornar esse problema e definir uma transformação supersimétrica restrita que deixa a ação (2.1.25) invariante [74] mas, como queremos quantizar a teoria no superespaço, temos que usar uma fixação de calibre que seja compatível com a supersimetria.

O que chamamos de formulação covariante de supercampos corresponde à escolha de um calibre explicitamente supersimétrico [77], obtido ao se adicionar a S_V o termo

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{2a} \int d^8z V(z) \left\{ D^2, \bar{D}^2 \right\} V(z), \quad (2.1.28)$$

onde a é um parâmetro real que define uma família contínua de calibres. A expressão (2.1.28) não é invariante frente à transformação (2.1.2), o que é justamente o que se espera de um termo de fixação de calibre. A introdução de (2.1.28) na ação induz o aparecimento do determinante de Faddeev-Popov $\Delta^{-1}[V]$ na integral funcional, que pode ser escrito em termos de campos de fantasmas $c, \bar{c} = c^\dagger, c', \bar{c}' = c'^\dagger$, sendo c e c' supercampos quirais com paridade grassmaniana ímpar [75]. A expressão que usaremos para o determinante $\Delta^{-1}[V]$ é

$$\Delta^{-1}[V] = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}c' \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\bar{c}' e^{-\int d^8z [c(z) + \bar{c}(z)] \delta V(z) |_{\Lambda=c', \bar{\Lambda}=\bar{c}'}}, \quad (2.1.29)$$

onde $\delta V(z)$ é a transformação de calibre infinitesimal dada em (2.1.3). A equação (2.1.29) define a ação S_{gh} dos fantasmas, a partir da qual podem ser encontradas as correspondentes regras de Feynman. Substituindo δV por seu desenvolvimento em potências de g , podemos escrever

$$S_{\text{gh}} = S_{\text{gh}}^{(0)} + g S_{\text{gh}}^{(1)} + g^2 S_{\text{gh}}^{(2)} + \dots, \quad (2.1.30)$$

onde

$$S_{\text{gh}}^{(0)} = i \int d^8z (c + \bar{c}) (\bar{c}' - c'), \quad (2.1.31)$$

$$S_{\text{gh}}^{(1)} = -\frac{i}{2} \int d^8z (c + \bar{c}) [V, c' + \bar{c}']_*, \quad (2.1.32)$$

$$S_{\text{gh}}^{(2)} = \frac{i}{12} \int d^8z (c + \bar{c}) [V, [V, \bar{c}' - c']_{**}]. \quad (2.1.33)$$

Antes de concluirmos essa seção, é interessante relacionar a fixação de calibre (2.1.28) com o termo covariante $\int d^4x (\partial_\mu A^\mu)^2$ que exerce função análoga na QED. A condição de calibre imposta por (2.1.28) é

$$D^2 V(z) = 0, \quad (2.1.34)$$

que corresponde, para as componentes de $V(z)$, a

$$j(x) = 0, \quad (2.1.35a)$$

$$d(x) = \frac{1}{4} \square f(x), \quad (2.1.35b)$$

$$\lambda(x) = \frac{i}{2} \not{\partial} \bar{\psi}(x), \quad (2.1.35c)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.1.35d)$$

Vemos que (2.1.34) inclui a condição usual do calibre de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$.

2.2 Acoplamento com a matéria

É através do acoplamento com a matéria que podemos introduzir interações na QED supersimétrica comutativa. Em contrapartida, a NCSQED pura já apresenta auto-interação. Ainda assim, a introdução de campos de matéria, na forma de campos quirais $\Phi(z)$, permite o estudo de supersimetrias estendidas, $\mathcal{N} = 2, 4$, no formalismo de supercampos. Por exemplo, o acoplamento do supercampo quiral $\Phi(z)$ a $V(z)$ através da ação

$$S_m = \int d^8z \Phi * e^{-gV} * \bar{\Phi} * e^{gV}, \quad (2.2.1)$$

invariante sob as transformações de calibre (2.1.2) e

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{ig\Lambda} * \Phi * e^{-ig\Lambda}, \quad (2.2.2a)$$

$$\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi}' = e^{ig\bar{\Lambda}} * \bar{\Phi} * e^{-ig\bar{\Lambda}}, \quad (2.2.2b)$$

define uma teoria que realiza a supersimetria estendida $\mathcal{N} = 2$. A teoria $\mathcal{N} = 4$, por sua vez, corresponde à adição de três supercampos de matéria, interagindo com $V(z)$ através de (2.2.1), além de um vértice trilinear de auto-interação.

O desenvolvimento de (2.2.1) em série de potências g nos conduz a

$$S_m = S_m^{(0)} + g S_m^{(1)} + g^2 S_m^{(2)} + g^3 S_m^{(3)} + \dots, \quad (2.2.3)$$

onde

$$S_m^{(0)} = \int d^8z \bar{\Phi} \Phi, \quad (2.2.4)$$

$$S_m^{(1)} = - \int d^8z \bar{\Phi} * [V, \Phi]_*, \quad (2.2.5)$$

$$S_m^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^8z \bar{\Phi} * [V, [V, \Phi]_*]_* \quad (2.2.6)$$

e

$$S_m^{(3)} = -\frac{1}{6} \int d^8z \bar{\Phi} * [V, [V, [V, \Phi]_*]_*]_* . \quad (2.2.7)$$

2.3 Regras de Feynman

A partir da ação total dada pela soma de (2.1.15), (2.1.28), (2.1.30) e (2.2.3),

$$S_{\text{NCSQED}} = S_V + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_m, \quad (2.3.1)$$

podemos encontrar as regras de Feynman para o cálculo da ação efetiva $\Gamma[V(z)]$. O produto Moyal não modifica a parte quadrática nos campos de (2.3.1), $S_{\text{NCSQED}}^{(0)}$, e portanto o procedimento para encontrar os propagadores é idêntico ao da correspondente teoria comutativa.

A parte quadrática em $V(z)$ de $S_{\text{NCSQED}}^{(0)}$ vem da soma de (2.1.16) e (2.1.28),

$$S_V^{(0)} + S_{\text{gf}} = \frac{1}{2} \int d^8z V(z) \left[\square + \left(1 - \frac{1}{a}\right) \{D^2, \bar{D}^2\} \right] V(z) . \quad (2.3.2)$$

O propagador de $V(z)$ é a função $\Delta_{VV}(z-z')$ que satisfaz a equação

$$\left[\square + \left(1 - \frac{1}{a}\right) \{D^2, \bar{D}^2\} \right]_z \Delta_{VV}(z-z') = \delta^8(z-z') . \quad (2.3.3)$$

É possível verificar que

$$\Delta_{VV}(z-z') = \frac{i}{\square} \left[1 + (1-a) \frac{1}{\square} \{D^2, \bar{D}^2\} \right]_z \delta^8(z-z') \quad (2.3.4)$$

satisfaz (2.3.3) e portanto é o propagador procurado². O termo $1/\square^2$ em (2.3.4) merece comentários, o que será feito na seção 2.4.

Os propagadores para os supercampos de fantasmas e de matéria podem ser obtidos de maneira similar. Para os primeiros,

$$\Delta_{\bar{c}c'}(z_1 - z_2) = -\frac{i}{\square} D_z^2 \bar{D}_{z'}^2 \delta^8(z - z') \quad (2.3.5)$$

e

$$\Delta_{c\bar{c}'}(z_1 - z_2) = +\frac{i}{\square} \bar{D}_z^2 D_{z'}^2 \delta^8(z - z') , \quad (2.3.6)$$

com a seta indicando o fluxo de número de fantasma, enquanto que, para a matéria,

$$\Delta_{\Phi\bar{\Phi}}(z - z') = -\frac{i}{\square} \bar{D}_z^2 D_z^2 \delta^8(z - z') . \quad (2.3.7)$$

Os propagadores da NCSQED estão representados na figura 4.

Existem infinitos termos de interação em S_{NCSQED} . Na figura 5 da página 33 apresentamos

²O uso da prescrição de Feynman está subentendida em todos os propagadores.

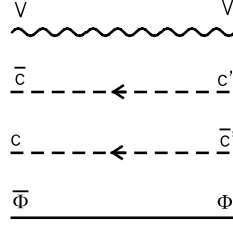


FIGURA 4: Propagadores livres da NCSQED.

aqueles que foram necessários para o cálculo das funções de vértice de dois e três pontos do supercampo de calibre $V(z)$ na aproximação de um laço. Usamos a notação genérica $\Gamma_{(DV)V\Phi}^{(0)}$ para representar os vértices elementares: o sobrescrito indica a elementaridade do vértice e o subscrito o campo a que corresponde cada linha, incluída a distribuição das derivadas espinoriais covariantes.

Isolamos da ação (2.1.15) aqueles vértices que serão necessários para nossos propósitos. Eles são

$$\Gamma_{(\bar{D}^2 DV)(DV)V}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = g \mathcal{V}_3(k_1, k_2, k_3), \quad (2.3.8)$$

$$\Gamma_{(\bar{D}^2 DV)(DV)VV}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{ig^2}{12} \mathcal{V}_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (2.3.9a)$$

$$\Gamma_{V(DV)(\bar{D}V)(\bar{D}DV)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = +ig^2 \mathcal{V}_4^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (2.3.9b)$$

$$\Gamma_{V(DV)(\bar{D}^2 V)(DV)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = +ig^2 \mathcal{V}_4^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (2.3.9c)$$

e

$$\Gamma_{(\bar{D}^2 DV)(DV)VVV}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = -\frac{g^3}{36} \mathcal{V}_5^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5), \quad (2.3.10a)$$

$$\Gamma_{VV(DV)(\bar{D}DV)(\bar{D}V)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = -\frac{2g^3}{3} \mathcal{V}_5^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5), \quad (2.3.10b)$$

$$\Gamma_{VV(DV)(\bar{D}^2 V)(DV)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = +\frac{ig^3}{12} \mathcal{V}_5^{(3)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5). \quad (2.3.10c)$$

Da ação dos fantasmas, equação (2.1.30),

$$\Gamma_{\bar{c}'Vc}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = +g \mathcal{V}_3(k_1, k_2, k_3), \quad (2.3.11a)$$

$$\Gamma_{c'V\bar{c}}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = +g \mathcal{V}_3(k_1, k_2, k_3), \quad (2.3.11b)$$

$$\Gamma_{c'Vc}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = -g \mathcal{V}_3(k_1, k_2, k_3), \quad (2.3.11c)$$

$$\Gamma_{\bar{c}'V\bar{c}}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = -g \mathcal{V}_3(k_1, k_2, k_3) \quad (2.3.11d)$$

e

$$\Gamma_{\bar{c}VVc}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{ig^2}{6} \mathcal{V}_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (2.3.12a)$$

$$\Gamma_{c'VV\bar{c}}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = +\frac{ig^2}{6} \mathcal{V}_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (2.3.12b)$$

$$\Gamma_{c'VVc}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = +\frac{ig^2}{6} \mathcal{V}_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (2.3.12c)$$

$$\Gamma_{\bar{c}VV\bar{c}}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{ig^2}{6} \mathcal{V}_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4). \quad (2.3.12d)$$

Por fim, do acoplamento da matéria com o supercampo V , equação (2.2.3), precisamos dos vértices

$$\Gamma_{\Phi V \Phi}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = 2g \mathcal{V}_3(k_1, k_2, k_3), \quad (2.3.13)$$

$$\Gamma_{\Phi V V \Phi}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = ig^2 \mathcal{V}_4(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (2.3.14)$$

e

$$\Gamma_{\Phi V V V \Phi}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = -\frac{g^3}{9} \mathcal{V}_5(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5). \quad (2.3.15)$$

O produto Moyal se manifesta nas regras de Feynman através do aparecimento de expressões trigonométricas, chamadas genericamente $\mathcal{V}(k)$, envolvendo os momentos entrando nos vértices. Em nosso caso, encontramos

$$\mathcal{V}_3(k_1, k_2, k_3) = \sin(k_1 \wedge k_2), \quad (2.3.16)$$

$$\mathcal{V}_4^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \cos(k_2 \wedge k_3) \cos(k_1 \wedge k_4) - \cos(k_1 \wedge k_2 - k_3 \wedge k_4), \quad (2.3.17)$$

$$\mathcal{V}_4^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{2} [\sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4) - \sin(k_1 \wedge k_4) \sin(k_2 \wedge k_3)], \quad (2.3.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_5^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) &= [2 \cos(k_4 \wedge k_5) \cos(k_3 \wedge k_4 + k_3 \wedge k_5) \\ &\quad + \cos(-k_3 \wedge k_4 + k_4 \wedge k_5 + k_3 \wedge k_5)] \sin(k_1 \wedge k_2) \\ &\quad + 3 [\cos(-k_2 \wedge k_3 + k_2 \wedge k_5 + k_3 \wedge k_5) \sin(k_1 \wedge k_4) \\ &\quad + \cos(-k_2 \wedge k_4 + k_4 \wedge k_5 + k_2 \wedge k_5) \sin(k_1 \wedge k_3) \\ &\quad + \cos(-k_2 \wedge k_4 - k_3 \wedge k_4 + k_2 \wedge k_3) \sin(k_1 \wedge k_5)], \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_5^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) &= 2 \sin(p_1 \wedge p_3) \sin(p_2 \wedge p_3) \cos(p_1 \wedge p_2) \\ &\quad + \sin(p_1 \wedge p_2) [\sin(p_2 \wedge p_3 - p_1 \wedge p_3)] \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_5^{(3)}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = & 2i \sin(p_1 \wedge p_2) \cos(p_2 \wedge p_4) \cos(p_3 \wedge p_5) \\
& + \exp(-ip_1 \wedge p_2) \cos(p_3 \wedge p_4 + p_3 \wedge p_5 + p_4 \wedge p_5) \\
& + \exp(-ip_1 \wedge p_4) \cos(p_3 \wedge p_2 + p_3 \wedge p_5 + p_2 \wedge p_5) \\
& - \exp(-ip_1 \wedge p_3) \cos(p_2 \wedge p_5 + p_2 \wedge p_4 - p_4 \wedge p_5) \\
& - \exp(-ip_1 \wedge p_5) \cos(p_2 \wedge p_3 + p_2 \wedge p_4 - p_3 \wedge p_4). \tag{2.3.21}
\end{aligned}$$

Os momentos são considerados positivos quando entram no vértice. Por fim, embora não explicitamente indicada, a conservação de momento é válida em todos os vértices.

Além de propagadores e vértices, temos que levar em conta as regras usuais do cálculo de superdiagramas no espaço de momentos, a saber³,

- ao i -ésimo vértice corresponde uma integral $\int d^4\theta_i$,
- ao i -ésimo laço corresponde uma integral $\int \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}$,
- a expressão associada ao supergráfico é multiplicada por um fator de conservação de momento $(2\pi)^4 \delta(\sum p_i)$ onde p_i designa, genericamente, um dos momentos que entram no supergráfico,
- para calcular a ação efetiva, calculamos os supergráficos próprios ou irredutíveis de uma partícula⁴ adequados, associando a cada linha externa um fator $\int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \Psi(p_i)$, onde Ψ é o supercampo correspondente à linha (em geral, vamos deixar subentendidas as integrações sobre momentos externos),
- fatores topológicos são determinados como em teorias de campo não-supersimétricas,
- por fim, o resultado do diagrama deve ser simetrizado em relação aos momentos externos.

³O leitor que verificar, por exemplo, o capítulo 6 da referência [75], encontrará uma diferença em relação às nossas: a ausência das derivadas covariantes que utilizamos nos propagadores quirais (2.3.5), (2.3.6) e (2.3.7). Isso porque os autores de [75] preferem colocar essas derivadas covariantes nos vértices quirais da teoria. Nós consideramos mais simples deixar essas derivadas nos propagadores, de forma que a todos os vértices da teoria correspondem integrais $\int d^8z$, indistintamente.

⁴Ou seja, aqueles que não podem ser divididos em dois pelo corte de uma única linha interna.

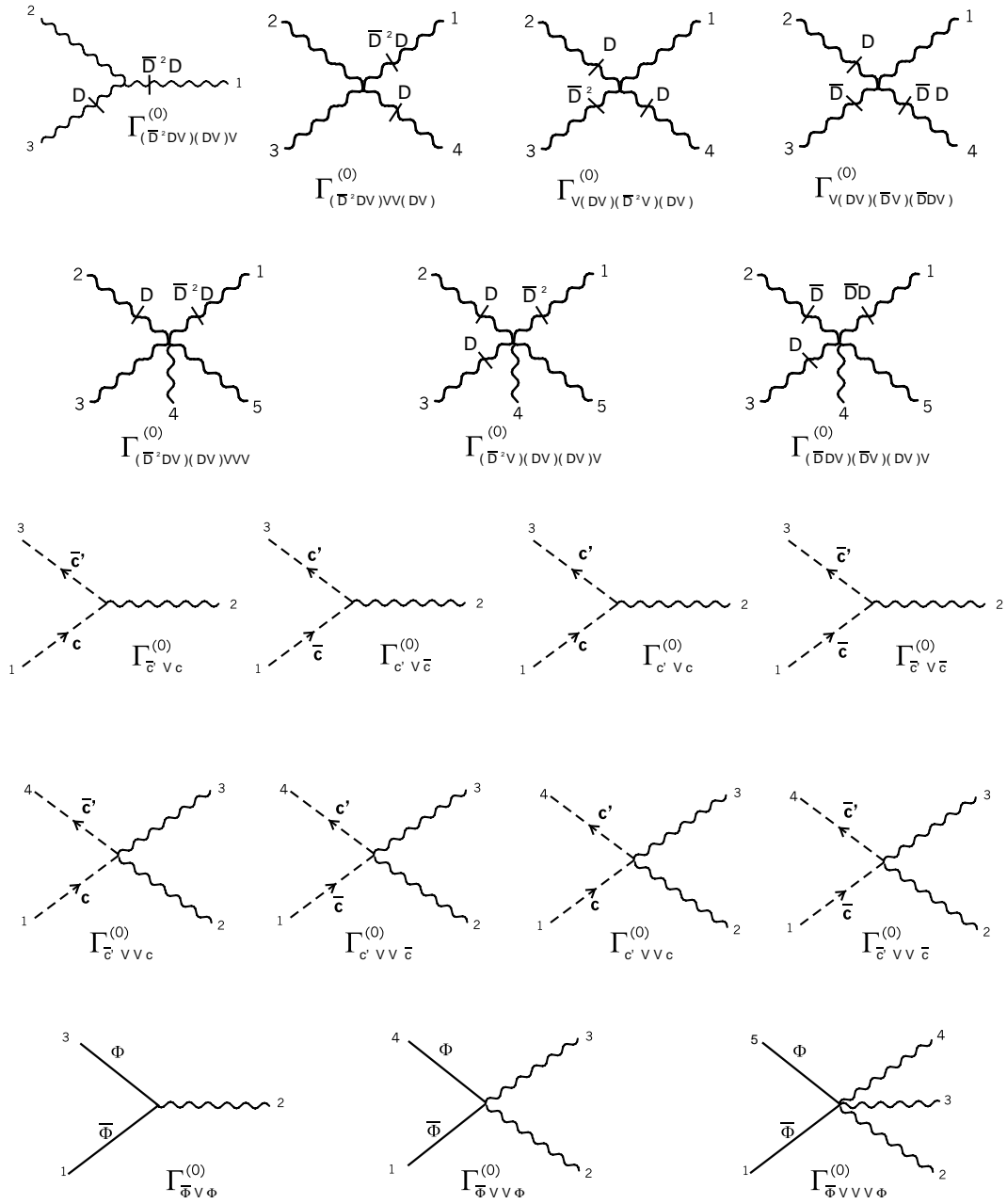


FIGURA 5: Vértices elementares da NCQED necessários para o cálculo a um laço das funções de dois e três pontos.

2.4 Contagem de potências e divergências da ação efetiva

A contagem de potências para teorias não-comutativas não apresenta diferença em relação ao caso comutativo. Vamos indicar por $\omega[\mathcal{S}]$ o grau de divergência superficial de um superdiagrama \mathcal{S} com L laços, V vértices envolvendo o supercampo de calibre, V_c vértices envolvendo campos quirais (matéria e fantasmas), P propagadores, E_c linhas externas de matéria e N_e derivadas espinoriais aplicadas nas linhas externas de V . As potências de momento aparecem explicitamente na medida de integração e propagadores e, de maneira implícita, nas derivadas espinoriais covariantes. Todas as D s e \bar{D} s que atuam nas linhas internas, exceto as utilizadas na relação $\delta D^2 \bar{D}^2 \delta = \delta$ que contrai um laço a um ponto, podem gerar potências de momento através da álgebra $\{D, \bar{D}\} \sim k$. Cada laço contribui com uma integral d^4k e, por outro lado, absorve duas potências de momento quando contraído a um ponto. Os vértices envolvendo o campo de calibre contribuem sempre com quatro derivadas, $D^2 \bar{D}^2 \sim k^2$. Os propagadores quirais possuem um fator D^2 e um \bar{D}^2 nas extremidades e cada vértice quiral se liga a dois propagadores, mas temos que descontar as E_c linhas externas de matéria, que não aplicam seu correspondente D^2 ou \bar{D}^2 no laço, e as N_e derivadas que atuam nas linhas externas de V . Por fim, levamos em conta o fator $1/k^2$ originado de cada propagador⁵. Portanto,

$$\omega[\mathcal{S}] = 4L - 2L + 2V + 2V_c - E_c - N_e/2 - 2P, \quad (2.4.1)$$

que após a utilização da relação topológica $L + (V + V_c) - P = 1$ se reduz a

$$\omega[\mathcal{S}] = 2 - N_e/2 - E_c \quad (2.4.2)$$

Estaremos interessados em calcular apenas funções de vértice de $V(z)$ e, para essas,

$$\omega[\mathcal{S}] = 2 - N_e/2. \quad (2.4.3)$$

É interessante ressaltar o que efetivamente significa o número $\omega[\mathcal{S}]$. Em teorias comutativas, a contagem de potências dá o máximo grau de divergência ultravioleta superficial para o superdiagrama \mathcal{S} . Já numa teoria não-comutativa, o superdiagrama \mathcal{S} terá, em geral, uma contribuição planar e uma não-planar. Na primeira, a interpretação de $\omega[\mathcal{S}]$ é como no caso comutativo. Já na contribuição não-planar, os fatores trigonométricos provenientes do produto Moyal fazem com que as integrais de momento sejam convergentes no ultravioleta, mas apresentem singularidades infravermelhas devido ao mecanismo UV/IR. Nesse contexto, $\omega[\mathcal{S}]$ corresponde à maior potência da divergência infravermelha UV/IR que o diagrama pode apresentar.

⁵Observe que mesmo o termo proporcional a $\{D^2, \bar{D}^2\}/k^4$ no propagador do supercampo V contribui com duas potências negativas de momento a $\omega[\mathcal{S}]$, graças à presença das derivadas espinoriais covariantes no numerador.

No que diz respeito a divergências infravermelhas, neste trabalho estaremos interessados unicamente naquelas originadas do mecanismo UV/IR. É necessário diferenciar essas divergências das usuais, cuja origem é a presença de partículas de massa zero. Em relação a este último ponto, o aparecimento de um termo proporcional a $1/\square^2$ no propagador (2.3.4) causa severos problemas na teoria⁶. Na verdade, uma das maiores dificuldades do uso da formulação covariante de supercampos é exatamente o aparecimento das divergências infravermelhas usuais já na aproximação de um laço se $a \neq 1$ e, mesmo para $a = 1$, em correções de ordem mais alta [78,79]. A análise dimensional é suficiente para nos alertar dessas dificuldades. Indicamos por $d[\mathcal{X}]$ a dimensão de massa de uma variável \mathcal{X} , de forma que $d[p] = +1$. Da álgebra $\{D, \bar{D}\} \sim \not{p}$ vemos que $d[D_\alpha] = d[\partial_\alpha] = \frac{1}{2}$ e, portanto, $d[\theta] = -\frac{1}{2}$. Como queremos que o campo vetorial A_μ em (2.1.20) tenha as dimensões do campo eletromagnético, $d[A_\mu] = +1$, e já que

$$V(z) = f(x) + \theta \not{A} \bar{\theta} + \dots, \quad (2.4.4)$$

concluimos que o supercampo $V(z)$ tem dimensão zero e, como conseqüência, $d[f(x)] = 0$. Isso significa que, em quatro dimensões, o campo $f(x)$ terá um propagador da forma $1/\square^2$, que não é integrável no infravermelho. Não é de se surpreender que, mesmo escolhendo o calibre de Feynman, problemas infravermelhos aparecerem em ordens mais altas devido à presença do campo componente $f(x)$ [78]. A escolha do calibre de Wess-Zumino, por sua vez, elimina o campo $f(x)$, sobrevivendo na teoria apenas campos com propagador proporcional a $1/\square$: estes poderão provocar problemas infravermelhos mais amenos, semelhantes aos encontrados na QED.

A diferença entre tais singularidades e as divergências infravermelhas UV/IR é que, para as primeiras, é possível eliminá-las modificando a estrutura da teoria introduzindo uma massa reguladora nos propagadores [80–82]⁷. Para as divergências infravermelhas UV/IR, contudo, tal tratamento não é possível. Por isso a importância de se estudar o possível cancelamento destas nas funções de vértice da teoria.

No que se segue, estaremos sempre considerando as divergências infravermelhas que são conseqüência da mistura UV/IR da teoria não-comutativa. Supomos que as outras singularidades infravermelhas podem ser contornadas pelos métodos já apresentados na literatura.

⁶Vale lembrar que termos proporcionais a $1/\square^2$ aparecem também em teorias de calibre não-supersimétricas, como por exemplo a QED no calibre de Landau.

⁷A introdução deste regulador infravermelho provoca uma quebra suave da supersimetria. Pode-se mostrar, via identidades de Ward, que grandezas físicas não irão depender do regulador e que a supersimetria continua operacional apesar de explicitamente violada.

2.5 A função de vértice de dois pontos da NCSQED

Nesta seção vamos calcular correções radiativas à função de vértice de dois pontos $\Gamma_{VV}^{(1)}$. Nosso objetivo é mostrar a ausência de pólos infravermelhos não-integráveis oriundos do mecanismo UV/IR. O cancelamento desses pólos, para $\Gamma_{VV}^{(1)}$, foi mostrado em [83] no calibre de Landau $a = 0$. Ampliaremos esse resultado para qualquer calibre covariante e para supersimetrias estendidas, $\mathcal{N} = 2, 4$. Essa generalização não é difícil e servirá para apresentar o método utilizado para calcular a função de três pontos, na seção 2.6. O leitor também pode referir-se ao apêndice B, onde apresentamos detalhes adicionais do cálculo de um dos diagramas apresentados nesta seção.

Observe que integrais linearmente divergentes por contagem de potências da forma

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k) \frac{k}{(k^2)^2}, \quad (2.5.1)$$

onde F é uma função par, se anulam devido à anti-simetria do integrando⁸. Por outro lado, veremos que todos os fatores trigonométricos originados da não-comutatividade, para a função de dois pontos, são funções *pares* do momentum de integração k . Isso significa que poderemos ter divergências – tanto UV quanto infravermelhas UV/IR – apenas originadas de integrais com contagem de potência quadrática ou logarítmica. Divergências infravermelhas UV/IR logarítmicas não são perigosas, pois qualquer potência de $\ln k$ é dominada pela medida de integração d^4k na vizinhança de $|k| = 0$. Nosso objetivo, portanto, será calcular os diagramas que podem contribuir às divergências quadráticas de $\Gamma_{VV}^{(1)}$ e, conforme (2.4.3), estes são os que não apresentam nenhuma derivada covariante atuando nas linhas externas, como mostrado na figura 6.

Conforme as regras de Feynman apresentadas na seção 2.3, a contribuição do diagrama 6a é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV;6a}^{(1)}(p) &= -\frac{g^2}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta_1 d^4\theta_2 \mathcal{V}_4^{(1)}(-k, p, -p, k) \times \\ &\times \frac{\delta_{12}}{k^2} \left(\overline{D}_1^2 D_1^\alpha D_{2\alpha} \delta_{12} \right) V(p, \theta_1) V(-p, \theta_2). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Já levamos em conta um fator 2 vindo da simetria do diagrama sobre a permutação das pernas externas. O termo proporcional a $(1 - a)$ no propagador de V não contribui nesse diagrama já que

$$\overline{D}_1^2 D_1^\alpha D_{2\alpha} \left\{ D_1^2, \overline{D}_1^2 \right\} \delta_{12} = -\overline{D}_1^2 D_1^\alpha \left(D_1^2 \overline{D}_1^2 + \overline{D}_1^2 D_1^2 \right) D_{1\alpha} \delta_{12} = 0, \quad (2.5.3)$$

⁸Essa afirmação certamente é válida para integrais convergentes. No caso de integrais divergentes, o enunciado aplica-se à versão regularizada das mesmas.

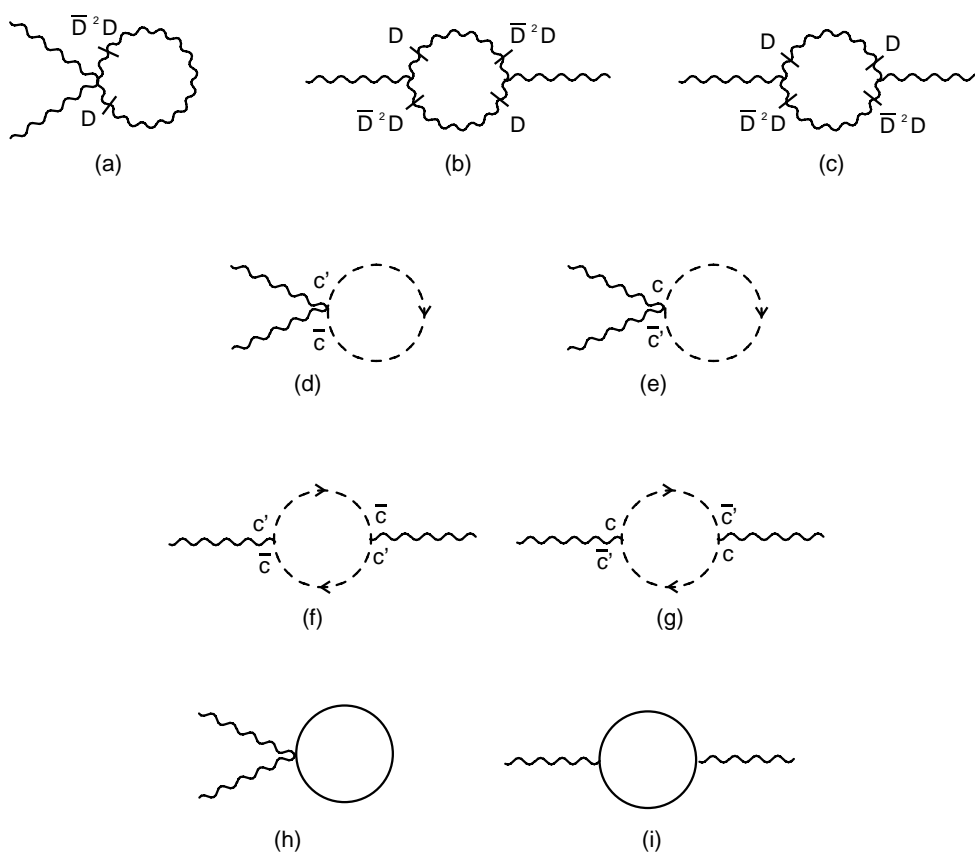


FIGURA 6: Correções de um laço à função de vértice de dois pontos de V .

consequência direta de $D^3 = 0$. O fator trigonométrico

$$\mathcal{V}_4^{(1)}(-k, p, -p, k) = 2 \sin^2(k \wedge p), \quad (2.5.4)$$

característico da não-comutatividade, é calculado de (2.3.17). A álgebra das D s é imediata e obtemos assim,

$$\Gamma_{VV;6a}^{(1)}(p) = \frac{2}{3} g^2 A, \quad (2.5.5)$$

onde

$$A \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta \frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2} V(p, \theta) V(-p, \theta). \quad (2.5.6)$$

A integral em (2.5.6) possui uma parte planar, cuja divergência UV quadrática é eliminada pelo uso da regularização dimensional, e uma parte não-planar que desenvolve uma singularidade infravermelha UV/IR quadrática.

Para os diagramas 6b e 6c, encontramos as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV;6b}^{(1)}(p) &= \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta_1 d^4 \theta_2 \mathcal{V}_3(k-p, p, -k) \mathcal{V}_3(k, -p, -k+p) \\ &\times \left(-\frac{1}{k^2(k+p)^2} \right) D_1^\alpha \bar{D}_2^2 D_2^\beta \delta_{12} D_{2\beta} \bar{D}_1^2 D_{1\alpha} \delta_{12} V(p, \theta_1) V(-p, \theta_2) + (p \rightarrow -p) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV;6c}^{(1)}(p) &= \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta_1 d^4 \theta_2 \mathcal{V}_3(k-p, p, -k) \mathcal{V}_3(-k+p, -p, k) \\ &\times \left(-\frac{1}{k^2(k+p)^2} \right) D_1^\alpha D_2^\beta \delta_{12} D_2^2 D_{2\beta} \bar{D}_1^2 D_{1\alpha} \delta_{12} V(p, \theta_1) V(-p, \theta_2) + (p \rightarrow -p). \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

O fator $\frac{1}{2}$ sinaliza que estamos na segunda ordem da teoria de perturbações. Após utilizar a álgebra das D s e calcular os fatores trigonométricos a partir de (2.3.16), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV;6b}^{(1)}(p) &= \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left[-\sin^2(k \wedge p) \right] \left(-\frac{1}{k^2(k+p)^2} \right) \\ &\times \left[-2 V(p, \theta) \left(k^2 + k_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha \right) V(-p, \theta) \right] + (p \rightarrow -p) + \mathcal{O}[\ln k] \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV;6c}^{(1)}(p) &= \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta \sin^2(k \wedge p) \left(-\frac{1}{k^2(k+p)^2} \right) \\ &\times \left[-2 k^2 V(p, \theta) V(-p, \theta) \right] + (p \rightarrow -p), \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

onde $\mathcal{O}[\ln k]$ contém termos com contagem de potências $\omega \leq 0$. Observamos que os termos proporcionais a k^2 nos colchetes de (2.5.9) e (2.5.10) se cancelam na soma $\Gamma_{VV;6b}^{(1)}(p) + \Gamma_{VV;6c}^{(1)}(p)$. Entretanto, o termo proporcional a k na equação (2.5.9) sobrevive e, por contagem de potências, poderia conter divergências lineares. Argumentamos, no início desta seção, que divergências

lineares não aparecem na função de dois pontos devido à paridade do fator trigonométrico $\sin^2(k \wedge p)$. No caso do diagrama 6b, a integral em questão é proporcional a

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sin^2(k \wedge p) \frac{k}{k^2(k+p)^2}, \quad (2.5.11)$$

cujo integrando não é uma função ímpar de k . Vamos isolar a divergência dominante desta integral realizando uma expansão de $(k+p)^{-2}$ em torno de $p=0$, ou seja⁹,

$$\frac{1}{(k \pm p)^2} = \frac{1}{k^2} \mp 2 \frac{k \cdot p}{(k^2)^2} + \frac{4(k \cdot p)^2 - k^2 p^2}{(k^2)^3} + \dots \quad (2.5.12)$$

Escrevemos assim a integral (2.5.11) como

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sin^2(k \wedge p) \frac{k}{(k^2)^2} - 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sin^2(k \wedge p) \frac{k(k \cdot p)}{(k^2)^4} + \text{TF}, \quad (2.5.13)$$

onde “TF” significa “termos finitos”. O primeiro termo de (2.5.13), com contagem de potências linear, se anula por ter um integrando ímpar em k . O segundo pode apresentar no máximo divergências logarítmicas. Em resumo,

$$\Gamma_{VV;6b}^{(1)}(p) + \Gamma_{VV;6c}^{(1)}(p) = \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.5.14)$$

Vamos nos concentrar agora nas contribuições à $\Gamma_{VV}^{(1)}$ envolvendo laços dos campos de fantasmas. É imediato ver que diagramas envolvendo vértices com duas linhas quirais ou antiquirais terão contribuições no máximo logaritmicamente divergentes. Isso ocorre porque a álgebra das Ds , aplicada a estes diagramas, não gera nenhuma potência de k no numerador. Por outro lado, esperamos encontrar divergências quadráticas nos diagramas 6d, 6e, 6f e 6g.

Das regras de Feynman aplicadas aos diagramas 6d e 6e vem diretamente que

$$\Gamma_{VV;6d}^{(1)}(p) = + \frac{g^2}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{\mathcal{V}_{(4)}(k, p, -p, -k)}{k^2} V(p, \theta) V(-p, \theta). \quad (2.5.15)$$

Além disso, $\Gamma_{VV;6e}^{(1)}(p) = \Gamma_{VV;6d}^{(1)}(p)$. Usando (2.5.4) concluímos que

$$\Gamma_{VV;6e}^{(1)}(p) + \Gamma_{VV;6d}^{(1)}(p) = \frac{4}{3} g^2 A. \quad (2.5.16)$$

⁹Claramente, essa operação apenas é válida se efetuada em integrais absolutamente convergentes e, por isso, deve ser aplicada à versão regularizada de (2.5.11). Fica sempre subentendido, nesta tese, o uso da regularização dimensional quando necessário.

Para os diagramas 6f e 6g, partimos de

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV;6f}^{(1)}(p) &= (-1) \times \frac{1}{2!} \times g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta_1 d^4\theta_2 \mathcal{V}_3(k, p, -p-k) \mathcal{V}_3(p+k, -p, -k) \times \\ &\times \left[i \left(\overline{D}^2 D^2 \right) \frac{\delta_{12}}{(k+p)^2} \right] \left[i \left(D^2 \overline{D}^2 \right) \frac{\delta_{12}}{k^2} \right] V(p, \theta_1) V(-p, \theta_2) + (p \rightarrow -p) \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

e $\Gamma_{VV;6g}^{(1)}(p) = \Gamma_{VV;6f}^{(1)}(p)$. Isolamos o fator (-1) devido à presença de um laço de um campo grassmaniano. O fator trigonométrico devido à não-comutatividade é dado por

$$\mathcal{V}_3(k, p, -p-k) \mathcal{V}_3(p+k, -p, -k) = -\sin^2(k \wedge p). \quad (2.5.18)$$

A contribuição dos diagramas 6f e 6g resulta ser muito similar à do diagrama 6b. Novamente, uma potencial divergência linear se anula devido à integração simétrica em k . O resultado final é

$$\Gamma_{VV;6f}^{(1)}(p) + \Gamma_{VV;6g}^{(1)}(p) = -2g^2 A + \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.5.19)$$

Finalmente, somando (2.5.5), (2.5.14), (2.5.16) e (2.5.19), temos que

$$\Gamma_{VV}^{(1)} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2 \right) g^2 A + \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.5.20)$$

Assim, a função de vértice de dois pontos é livre de divergências UV quadráticas e pólos infravermelhos UV/IR quadráticos, para supersimetria $\mathcal{N} = 1$. Este enunciado foi provado em [83] no calibre da Landau mas, como acabamos de mostrar [84], é válido num calibre covariante arbitrário. Vamos, em seguida, generalizá-lo para o caso de supersimetrias estendidas.

Consideramos agora a teoria de calibre acoplada a um campo quiral de matéria, que corresponde a uma supersimetria estendida $\mathcal{N} = 2$. As contribuições dos diagramas 6h e 6i da figura 6 são

$$\Gamma_{VV;6h}^{(1)}(p) = 2 (ig^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \mathcal{V}_4(k, p, -p, -k) \left[i \left(\overline{D}^2 D^2 \right) \frac{\delta_{11}}{k^2} \right] V(-p, \theta) V(p, \theta) \quad (2.5.21)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV;6i}^{(1)}(p) &= \frac{1}{2} (-2g)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta_1 d^4\theta_2 \mathcal{V}_3(-p-k, p, k) \mathcal{V}_3(-k, -p, p+k) \\ &\times \left[i \left(\overline{D}^2 D^2 \right) \frac{\delta_{12}}{(k+p)^2} \right] \left[i \left(D^2 \overline{D}^2 \right) \frac{\delta_{12}}{k^2} \right] V(p, \theta_1) V(-p, \theta_2) + (p \rightarrow -p). \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Usando (2.5.4) e (2.5.18), chegamos a

$$\Gamma_{VV;6h}^{(1)}(p) = -4g^2 A \quad (2.5.23)$$

e

$$\Gamma_{VV;6i}^{(1)}(p) = +4g^2 A + \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.5.24)$$

Portanto,

$$\Gamma_{VV;6h}^{(1)}(p) + \Gamma_{VV;6i}^{(1)}(p) = \mathcal{O}[\ln k], \quad (2.5.25)$$

de forma que não existem divergências UV quadráticas ou pólos infravermelhos UV/IR não integráveis no setor de matéria. Esse resultado claramente não irá mudar se acoplarmos três campos quirais à ação da teoria $\mathcal{N} = 1$ e, portanto, concluímos que $\Gamma_{VV}^{(1)}$ é livre de divergências UV/IR não-integráveis para $\mathcal{N} = 1, 2, 4$ ¹⁰.

2.6 A função de vértice de três pontos da NCSQED

Nesta seção estudaremos a primeira correção quântica à função de vértice de três pontos $\Gamma_{VVV}^{(1)}$. Vamos mostrar que a estrutura das divergências da NCSQED formulada no superespaço é bastante mais complexa daquela encontrada em componentes por Matusis *et al* [66]. Nossa abordagem também será diferente da adotada por Zanon *et al* [71–73, 85], que utiliza o formalismo de campo de fundo para calcular a função de três e quatro pontos do tensor intensidade de campo de fundo \mathcal{W}_α . Ao utilizar um método que preserva explicitamente a invariância frente a transformações de calibre do campo de fundo, Zanon *et al* estão particularmente preocupados em estudar a invariância de calibre da teoria, que se torna não-trivial no caso da função de quatro pontos [72, 86–88]. Pouca atenção é dada, contudo, à existência de singularidades infravermelhas UV/IR e possíveis conseqüências destas para a consistência da teoria. No formalismo de campo de fundo, as linhas internas dos diagramas são sempre linhas de $V(z)$ e, portanto, as funções de vértice do supercampo $V(z)$ participam como subdiagramas nas correções de ordem mais alta da teoria de perturbações para a ação efetiva de \mathcal{W}_α , fato representado esquematicamente na figura 7. Por isso, é fundamental estudar os efeitos do mecanismo UV/IR na ação efetiva de V . Tal análise apresenta uma particular dificuldade, quando comparada com os trabalhos de Zanon *et al*: no formalismo de campo de fundo esperamos no máximo divergências UV e infravermelhas UV/IR *logarítmicas* e apenas na função de dois pontos, devido ao fato de que \mathcal{W}_α é um supercampo quiral. Isso significa que apenas a parte dominante de cada diagrama pode ser divergente. No nosso caso, todas as funções de vértice possuem contagem de potência quadrática, o que significa que precisamos também calcular divergências *subdominantes*, em particular lineares. Graças à paridade dos fatores trigonométricos que encontramos no cálculo da função de dois pontos $\Gamma_{VV}^{(1)}$, não precisamos lidar com divergências subdominantes no capítulo anterior. No caso de $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ essa simplificação não irá ocorrer e veremos que o estudo completo das divergências de uma função de vértice do formalismo covariante é uma tarefa bastante complexa.

No que concerne à parte planar das contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$, encontraremos divergências UV

¹⁰A teoria $\mathcal{N} = 4$, além de três campos quirais acoplados a V como em (2.2.1), possui um vértice de auto-interação proporcional a $\varepsilon_{ijk} \int d^6z \text{Tr} \Phi^i \Phi^j \Phi^k$. Este vértice não contribui para a ação efetiva de V na aproximação de um laço.

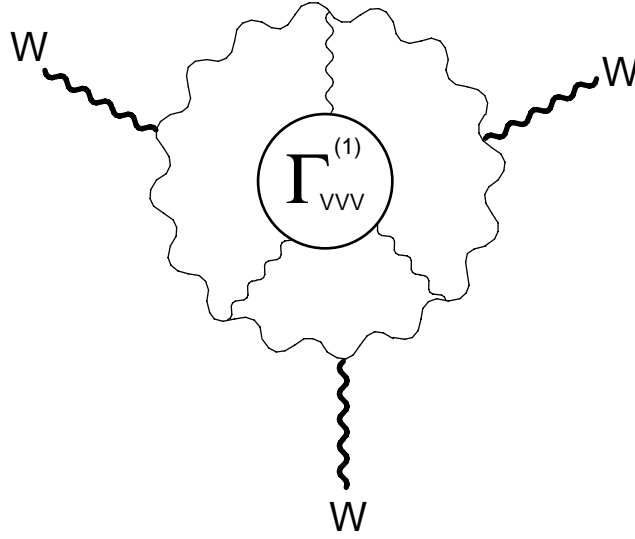


FIGURA 7: Inserção de $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ numa correção a ordem mais alta do formalismo de campo de fundo.

quadráticas e logarítmicas; as primeiras podem ser eliminadas pela regularização dimensional, ao passo que as últimas devem ser absorvidas por renormalização. Divergências ultravioletas lineares não aparecem graças à integração simétrica de momento. Já na parte não-planar de $\Gamma_{VVV}^{(1)}$, mostraremos que os fatores de fase provenientes da não-comutatividade provocarão um amortecimento de divergências infravermelhas, de modo que integrais não-planares com contagem de potência quadrática apresentarão singularidades infravermelhas UV/IR no máximo lineares. No caso de integrais com contagem de potência linear, algumas contribuições resultarão de fato numa singularidade UV/IR linear, enquanto que outras serão amortecidas para logarítmicas. Não nos preocuparemos com as últimas por serem integráveis.

Para exemplificar esse mecanismo de amortecimento de divergências infravermelhas, consideramos a integral

$$I^\mu(p_1, p_2, p_3) \equiv -\frac{1}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\sin(2k \wedge p_1) + \sin(2k \wedge p_2) + \sin(2k \wedge p_3)] \frac{k^\mu}{k^4}, \quad (2.6.1)$$

que é convergente e, na proximidade de $p_i = 0$, resulta ser igual a

$$I^\mu(p_1, p_2, p_3) \xrightarrow{p_1, p_2, p_3 \rightarrow 0} \frac{i}{32\pi^2} \theta^{\mu\nu} \left(\frac{p_{1\nu}}{p_1 \circ p_1} + \frac{p_{2\nu}}{p_2 \circ p_2} + \frac{p_{3\nu}}{p_3 \circ p_3} \right), \quad (2.6.2)$$

onde

$$p \circ p \equiv p^\mu (\theta^2)_{\mu\nu} p^\nu. \quad (2.6.3)$$

Claramente, $I^\mu(p_1, p_2, p_3)$ apresenta uma singularidade infravermelha linear. O ponto é que encontraremos contribuições não-planares a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ proporcionais a

$$\sin(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3), \quad (2.6.4)$$

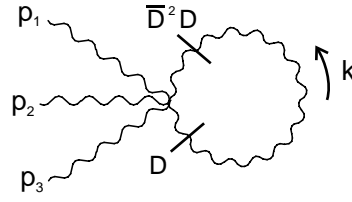


FIGURA 8: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$: gráfico com um vértice de cinco linhas. Por convenção, os momentos externos estão entrando no vértice nesta e nas próximas figuras.

que é uma expressão *finita* se apenas um dos momentos vai a zero e se anula se todos os momentos vão a zero simultaneamente. A função seno presente em (2.6.4) é responsável por essa diminuição do grau da divergência. Por outro lado, contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ proporcionais a

$$\cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3), \quad (2.6.5)$$

exibirão uma divergência linear, e portanto não-integrável, quando $p_i \rightarrow 0$. Veremos que todas as contribuições não-planares a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ contendo uma integral com contagem de potência quadrática irão desenvolver uma singularidade infravermelha UV/IR linear devido ao efeito de amortecimento acima descrito.

Vamos agora calcular os diagramas capazes de gerar pólos infravermelhos UV/IR não-integráveis na função de vértice $\Gamma_{VVV}^{(1)}$. Levando em conta a posição das D s, a paridade do integrando e o mecanismo de amortecimento que pode amenizar as singularidades UV/IR, podemos desconsiderar vários deles. Os restantes serão tratados no que se segue.

A estrutura geral da contribuição à função de vértice $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ correspondente a um determinado supergráfico será a seguinte,

$$\Gamma_{VVV}^{(1)} = \left[\frac{1}{n!} \right] \times [t] \times [v] \times \int \left[\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d\theta \right] \times [F_T] \times [PR] \times \mathbb{D}_\theta + \text{permutações}, \quad (2.6.6)$$

onde $1/n!$ indica a ordem da teoria de perturbação na qual estamos trabalhando, t é o peso topológico do diagrama, v é o fator numérico associado aos vértices, $d\theta$ é a medida de integração fermiônica, F_T é o fator trigonométrico proveniente da não-comutatividade, PR é o produto dos fatores independente de θ dos propagadores e \mathbb{D}_θ é a parte dependente de θ do integrando. Por fim, como a função de vértice deve ser simétrica nas linhas externas, temos que somar sobre as permutações pertinentes dos momentos externos do diagrama.

Para o diagrama da figura 8, temos $n = t = 1$, $v = -g^3/36$,

$$\begin{aligned} F_{T;8} &= \mathcal{V}_8^{(1)}(k, -k, p_1, p_2, p_3) \\ &= 3 \cos [p_1 \wedge (p_3 - k) + p_3 \wedge k] \sin (k \wedge p_2) \\ &\quad + 3 \cos [p_2 \wedge (p_3 - k) + p_3 \wedge k] \sin (k \wedge p_1) \\ &\quad + 3 \cos [p_2 \wedge (p_1 - k) + p_1 \wedge k] \sin (k \wedge p_3) , \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

como podemos ver de(2.3.19), $PR = -i/k^2$ e

$$\mathbb{D}_\theta = \delta_{12} \left[\overline{D}_1^2 D_1^\alpha D_{2\alpha} \delta_{12} \right] V(p_1, \theta_1) V(p_2, \theta_1) V(p_3, \theta_1) , \quad (2.6.8)$$

já que novamente o termo do propagador de V proporcional a $(1 - a)$ não contribui devido a (2.5.3). Escrevemos assim

$$\Gamma_{VVV;8}^{(1)}(p_1, p_2, p_3) = -\frac{ig^3}{18} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{F_{T;8}}{k^2} V(p_1, \theta) V(p_2, \theta) V(p_3, \theta) + TP, \quad (2.6.9)$$

onde “ TP ” significa a soma sobre todas as permutações dos momentos externos. Por contagem de potências, a integral em $\Gamma_{VVV;8}^{(1)}$ é quadraticamente divergente, mas como a parte planar de (2.6.7) se anula, esse diagrama não possui divergências ultravioletas. Usando

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\sin(2k \wedge p)}{k^2} = 0, \quad (2.6.10a)$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2} = \frac{1}{4\pi^2 p \circ p}, \quad (2.6.10b)$$

encontramos para a parte não planar de $\Gamma_{VVV;8}^{(1)}$ o resultado

$$\begin{aligned} \Gamma_{VVV;8}^{(1)}(p_1, p_2, p_3) &= -\frac{i}{8\pi^2} \left\{ \sin(p_1 \wedge p_3) \left[\frac{1}{p_3 \circ p_3} - \frac{1}{p_1 \circ p_1} \right] \right. \\ &\quad + \sin(p_2 \wedge p_3) \left[\frac{1}{p_3 \circ p_3} - \frac{1}{p_2 \circ p_2} \right] \\ &\quad \left. + \sin(p_2 \wedge p_1) \left[\frac{1}{p_1 \circ p_1} - \frac{1}{p_2 \circ p_2} \right] \right\} B + TP + \mathcal{O}[\ln k], \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

onde

$$B \equiv g^3 \int d^4\theta V(p_1, \theta) V(p_2, \theta) V(p_3, \theta) . \quad (2.6.12)$$

Efetuada a permutação sobre os momentos externos e usando a conservação de momento, todas as singularidades infravermelhas UV/IR em (2.6.11) se cancelam, de forma que

$$\Gamma_{VVV;8}^{(1)}(p_1, p_2, p_3) = \mathcal{O}[\ln k] . \quad (2.6.13)$$

Os diagramas topologicamente análogos que envolvem os restantes vértices de cinco linhas de V apresentam contagem de potência linear. Para eles encontramos um fator trigonométrico

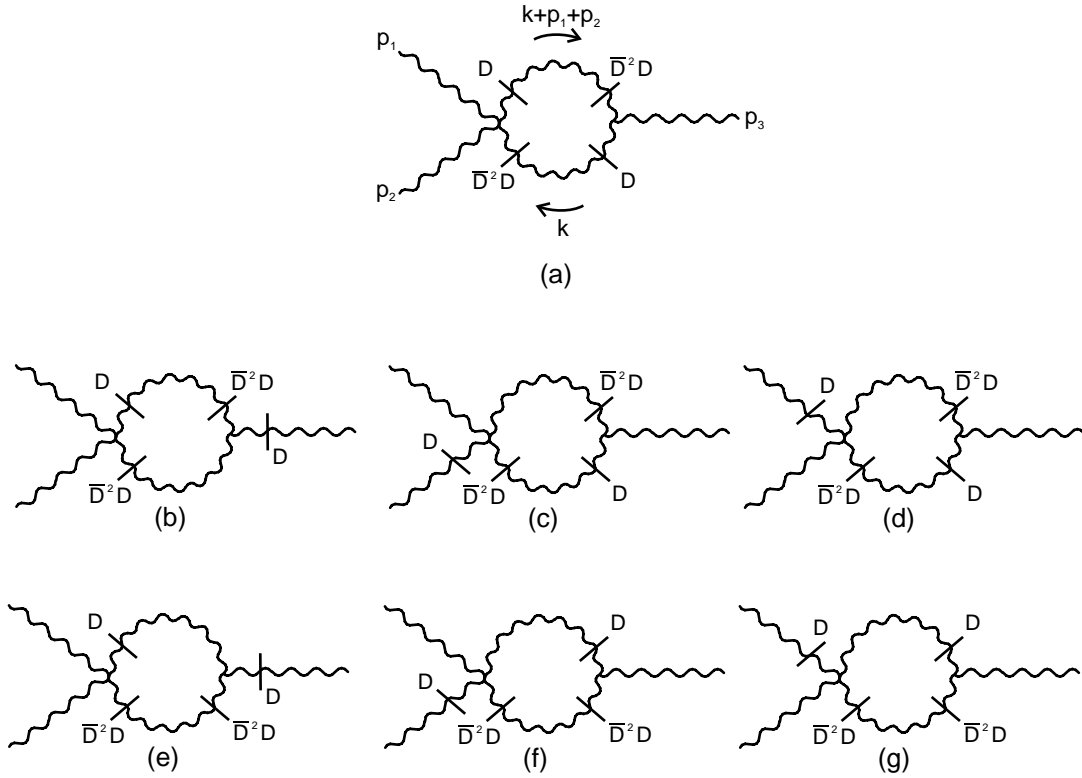


FIGURA 9: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$: gráficos com um vértice $\Gamma_{(\bar{D}^2 DV)(DV)VV}^{(0)}$.

proporcional ao seno dos momentos externos. Como explicado no início dessa seção, as singularidades infravermelhas UV/IR resultantes serão amortecidas, tornando-se logarítmicas e, portanto, inofensivas.

Os diagramas da figura 9 envolvem o vértice $\Gamma_{(\bar{D}^2 DV)(DV)VV}^{(0)}$. Para o diagrama 9a, que possui contagem de potência quadrática, temos $n = 2$, $t = 4$, $v = -ig^3/12$ e

$$PR = \frac{(-i)^2}{k^2 (k - p_3)^2}. \quad (2.6.14)$$

O fator trigonométrico é dado por

$$F_{T;9a} = -2 \cos(p_1 \wedge p_2) F_T^{\text{impar}} + 2 \sin(p_1 \wedge p_2) F_{T;9a}^{\text{par}}, \quad (2.6.15)$$

onde

$$F_T^{\text{impar}} = -\frac{1}{4} [\sin(2k \wedge p_1) + \sin(2k \wedge p_2) + \sin(2k \wedge p_3)], \quad (2.6.16a)$$

$$F_{T;9a}^{\text{par}} = -\frac{1}{4} [\cos(2k \wedge p_1) - \cos(2k \wedge p_2)]. \quad (2.6.16b)$$

Após usar a álgebra das D s, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\theta,9a} = & -2 \left[(k-p_3)^2 V(p_3, \theta_2) + (\not{k} - \not{p}_3)_{\alpha\dot{\alpha}} \left(\overline{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha V(p_3, \theta_2) \right) + \dots \right] \\ & \times \delta_{12} V(p_1, \theta_1) V(p_2, \theta_1) + \mathcal{O}[\ln k] . \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

Novamente, o termo proporcional a $(1-a)$ no propagador de V não contribui. O fator trigonométrico (2.6.15) não contém uma parte planar e, por isso, $\Gamma_{VVV;9a}^{(1)}$ não apresenta divergências ultravioletas.

Para estudar a estrutura das divergências infravermelhas UV/IR geradas na parte não-planar, começamos desenvolvendo (2.6.14) em torno de $p_3 = 0$, o que conduz a

$$\begin{aligned} \Gamma_{VVV;9a}^{(1)} = & \frac{i g^3}{6} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d\theta F_{T;9a} \left[\frac{1}{(k^2)^2} + 2 p_3^\mu \frac{k_\mu}{(k^2)^3} + \dots \right] \\ & \times \left[(k-p_3)^2 V(p_3, \theta) + (\not{k} - \not{p}_3)_{\alpha\dot{\alpha}} \left(\overline{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha V(p_3, \theta) \right) + \dots \right] \\ & \times V(p_1, \theta) V(p_2, \theta) + PC + \mathcal{O}[\ln k] , \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

onde “PC” significa a soma sobre as permutações cíclicas dos momentos externos. Após, coletamos termos com a mesma potência do momento de integração¹¹,

$$\Gamma_{VVV;9a}^{(1)} = \gamma_{9a}^{[2]} + \gamma_{9a}^{[1]} + \mathcal{O}[\ln k] , \quad (2.6.19)$$

onde

$$\gamma_{9a}^{[2]} = \left(\frac{i g^3}{6} \right) 2 \sin(p_1 \wedge p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d\theta F_{T;9a}^{\text{par}} \frac{1}{k^2} V(p_1, \theta) V(p_2, \theta) V(p_3, \theta) + PC \quad (2.6.20)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_{9a}^{[1]} = & - \left(\frac{i g^3}{6} \right) 2 \cos(p_1 \wedge p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d\theta F_T^{\text{impar}} \frac{k_{\alpha\dot{\alpha}}}{(k^2)^2} \\ & \times \left(\overline{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha V(p_3, \theta) \right) V(p_1, \theta) V(p_2, \theta) + PC . \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

O índice nas γ s indica a ordem de k na correspondente expressão. A presença de um fator trigonométrico ímpar proveniente da não-comutatividade faz com que a integral em $\gamma^{[1]}$, com

¹¹Deve-se notar que, ao expandir (2.6.14) e realizar a separação conforme a potência do momento de integração k , dois termos proporcionais a

$$p_3^\mu \cos(p_1 \wedge p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F_T^{\text{impar}} \frac{k_\mu}{(k^2)^2} B ,$$

aparecerem em $\Gamma_{VVV;9a}^{(1)}$. No presente caso, esses dois termos cancelam um ao outro. Contudo, notamos que individualmente eles também se anulam já que, efetuando a simetriação dos momentos externos, a expressão acima é levada em

$$(p_1 + p_2 + p_3)^\mu \cos(p_1 \wedge p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} F_T^{\text{impar}} \frac{k_\mu}{(k^2)^2} B ,$$

que se anula devido a conservação de momento. Termos desse tipo não precisam ser levados em conta, portanto, quando efetuarmos a separação em potências de k nos próximos diagramas.

contagem de potência linear, não se anule por integração simétrica, como aconteceria numa teoria comutativa.

Efetuosmos as integrais de momento nas equações (2.6.20) e (2.6.21) e usamos a álgebra das D s para chegar a

$$\gamma_{9a}^{[2]} = - \left(\frac{i}{12} \right) \sin(p_1 \wedge p_2) \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{p_1 \circ p_1} - \frac{1}{p_2 \circ p_2} \right) B + PC, \quad (2.6.22)$$

$$\gamma_{9a}^{[1]} = 4 \left(\frac{i}{6} \right) \cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3) N_\mu(p_1, p_2, p_3), \quad (2.6.23)$$

onde

$$N_\mu(p_1, p_2, p_3) \equiv g^3 (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \int d\theta \left(D^\alpha V(p_1, \theta) \bar{D}^{\dot{\alpha}} V(p_3, \theta) V(p_2, \theta) + TP \right), \quad (2.6.24)$$

e I^μ foi definido em (2.6.1).

Finalmente, efetuando a simetrização e utilizando conservação de momento, concluímos que

$$\gamma_{9a}^{[2]} = 0, \quad (2.6.25)$$

mas a divergência infravermelha linear em (2.6.23) permanece.

Os diagramas 9b, 9c e 9d são calculados de forma semelhante. Em todos eles, o termo proporcional a $(1 - a)$ do propagador de V não contribui. Como $F_{T,9b} = -F_{T,9a}$, o gráfico 9b não possui parte planar. Já 9c e 9d têm divergências UV logarítmicas na parte planar, que devem ser renormalizadas. Para todos eles, a contribuição $\gamma^{[2]}$ se anula. Somando as contribuições do tipo $\gamma^{[1]}$, encontramos

$$\sum_{j=9b}^{9d} \gamma_j^{[1]} = 3 \left(\frac{i}{6} \right) \cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3) N_\mu(p_1, p_2, p_3). \quad (2.6.26)$$

Já os diagramas 9e, 9f e 9g são proporcionais a $(1 - a)$. Enquanto 9e não possui parte planar, 9f e 9g são logaritmicamente divergentes no ultravioleta. Novamente, $\sum \gamma^{[2]} = 0$ e

$$\sum_{j=9e}^{9g} \gamma_j^{[1]} = (1 - a) \left(\frac{ig^3}{6} \right) \cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3) N_\mu(p_1, p_2, p_3). \quad (2.6.27)$$

A soma total dos diagramas na figura 9 é dada por

$$\sum_{j=9a}^{9g} \Gamma_{VVV;j}^{(1)} = (8 - a) \left(\frac{i}{6} \right) \cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3) N_\mu(p_1, p_2, p_3) + \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.6.28)$$

Para os diagramas da figura 10, envolvendo o vértice $\Gamma_{V(DV)(\bar{D}V)(\bar{D}DV)}^{(0)}$, chegamos aos seguintes resultados: as partes planares apresentam divergências ultravioletas logarítmicas, já a

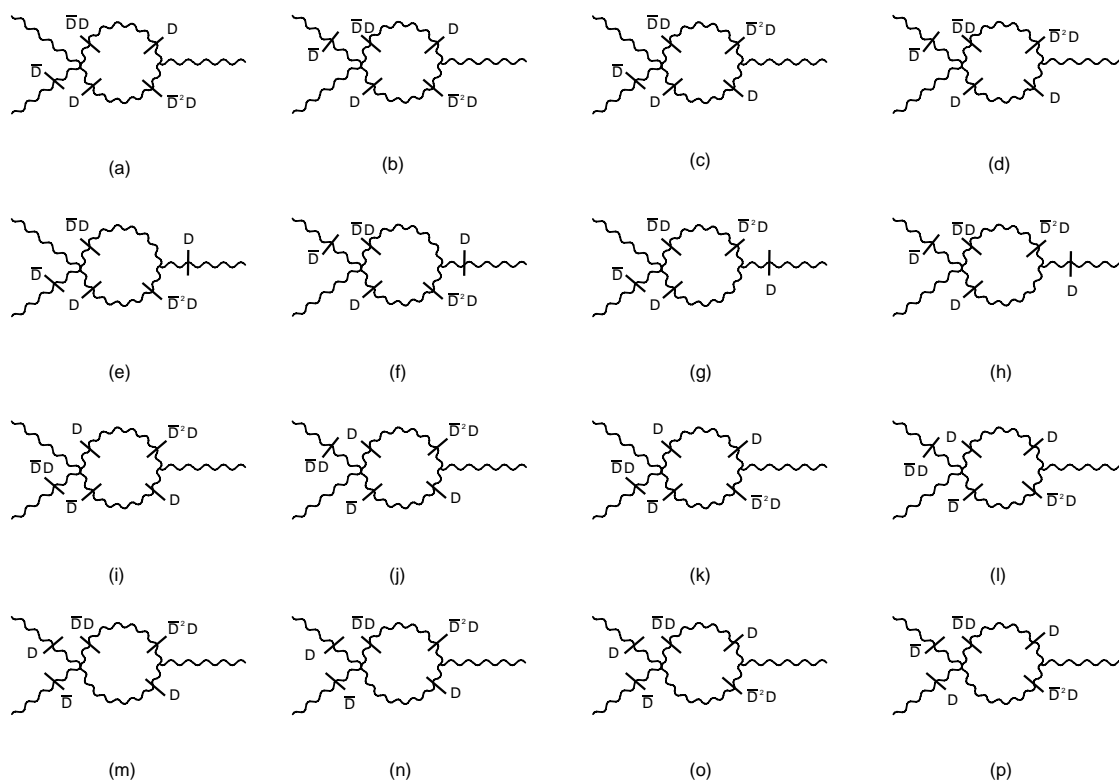


FIGURA 10: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$: gráficos com um vértice $\Gamma_{V(DV)(\bar{D}V)(\bar{D}DV)}^{(0)}$.

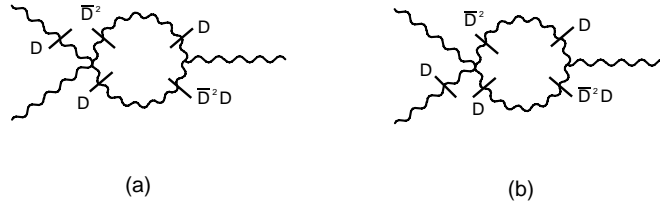


FIGURA 11: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$: gráficos com um vértice $\Gamma_{V(DV)(\bar{D}^2V)(DV)}^{(0)}$.

parte não-planar de cada diagrama desenvolve uma singularidade infravermelha UV/IR linear, que se cancela quando somamos todos os diagramas, ou seja,

$$\sum_{j=10a}^{10p} \Gamma_{VVV;j}^{(1)} = \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.6.29)$$

O mesmo não acontece quando consideramos os diagramas na figura 11. Na parte planar a situação é a mesma encontrada nos diagramas anteriores, entretanto, as divergências infravermelhas UV/IR da parte não-planar sobrevivem,

$$\Gamma_{VVV;11a}^{(1)} + \Gamma_{VVV;11b}^{(1)} = -6a \left(\frac{i}{6} \right) \cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3) N_\mu(p_1, p_2, p_3) + \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.6.30)$$

Vamos agora considerar os gráficos da figura 12, contendo três vértices trilineares. Todos eles têm em comum, a menos de um sinal, o fator trigonométrico

$$F_{T;12} = \cos(p_1 \wedge p_2) F_T^{\text{impar}} + \sin(p_1 \wedge p_2) F_{T;12}^{\text{par}}, \quad (2.6.31)$$

onde F_T^{impar} é o mesmo definido em (2.6.16a) e

$$F_{T;12}^{\text{par}} = -\frac{1}{4} [1 - \cos(2k \wedge p_1) + \cos(2k \wedge p_2) - \cos(2k \wedge p_3)]. \quad (2.6.32)$$

Observamos que $F_{T;12}^{\text{par}}$ possui uma parte planar não-nula, de modo que divergências ultravioletas aparecem nos diagramas da figura 12 e são tratadas como nos casos anteriores. Os diagramas 12a até 12d possuem contagem de potência quadrática e portanto desenvolvem, através de $F_{T;12}^{\text{par}}$, singularidades infravermelhas UV/IR que resultam lineares pela presença do fator seno em (2.6.31). Para cada um desses diagramas, essas singularidades são da forma

$$\sin(p_1 \wedge p_2) \left(\frac{1}{p_1 \circ p_1} - \frac{1}{p_2 \circ p_2} + \frac{1}{p_3 \circ p_3} \right), \quad (2.6.33)$$

expressão que se anula quando efetuamos a simetria dos momentos externos p_i .

Finalmente, em cada um dos diagramas na figura 12, sobrevive uma divergência infravermelha que surge de integrais com contagem de potência linear, devido ao fator F_T^{impar} em

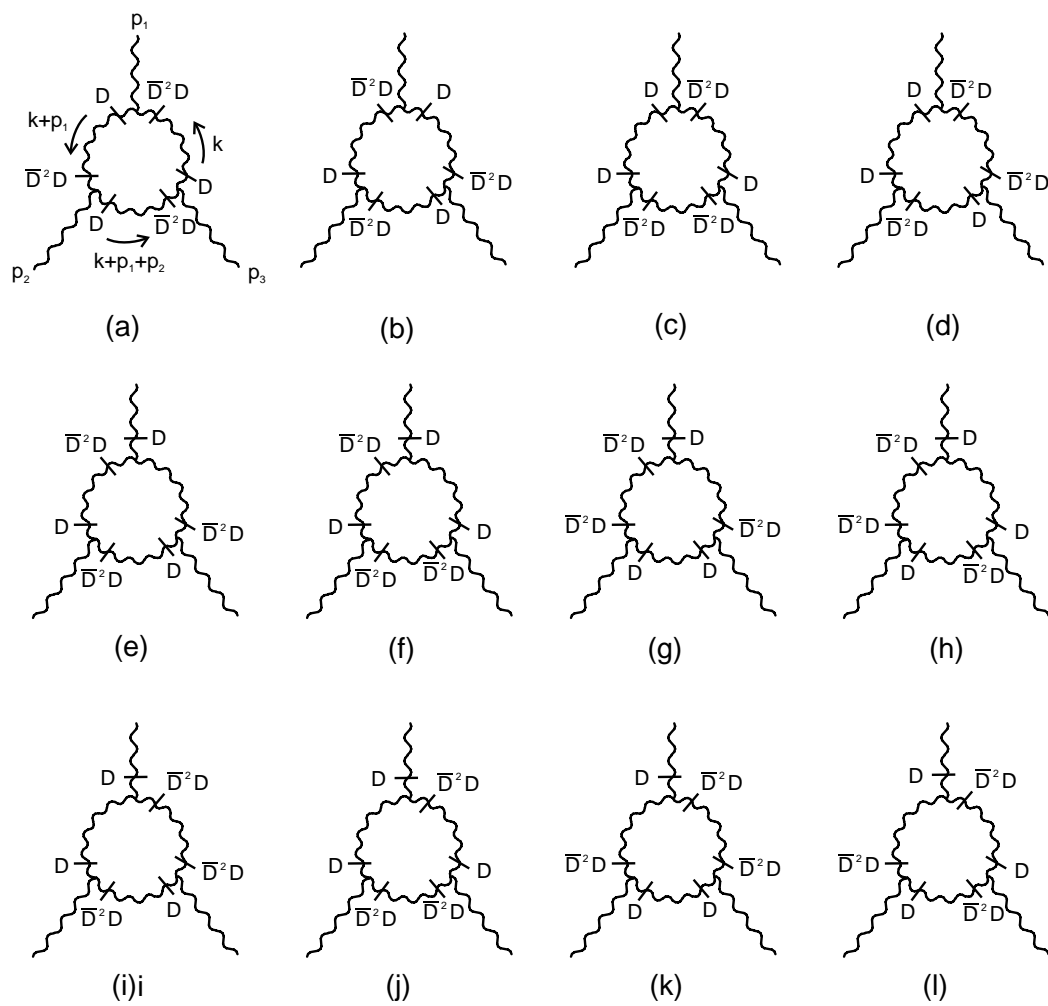


FIGURA 12: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$: gráficos com três vértices trilineares.

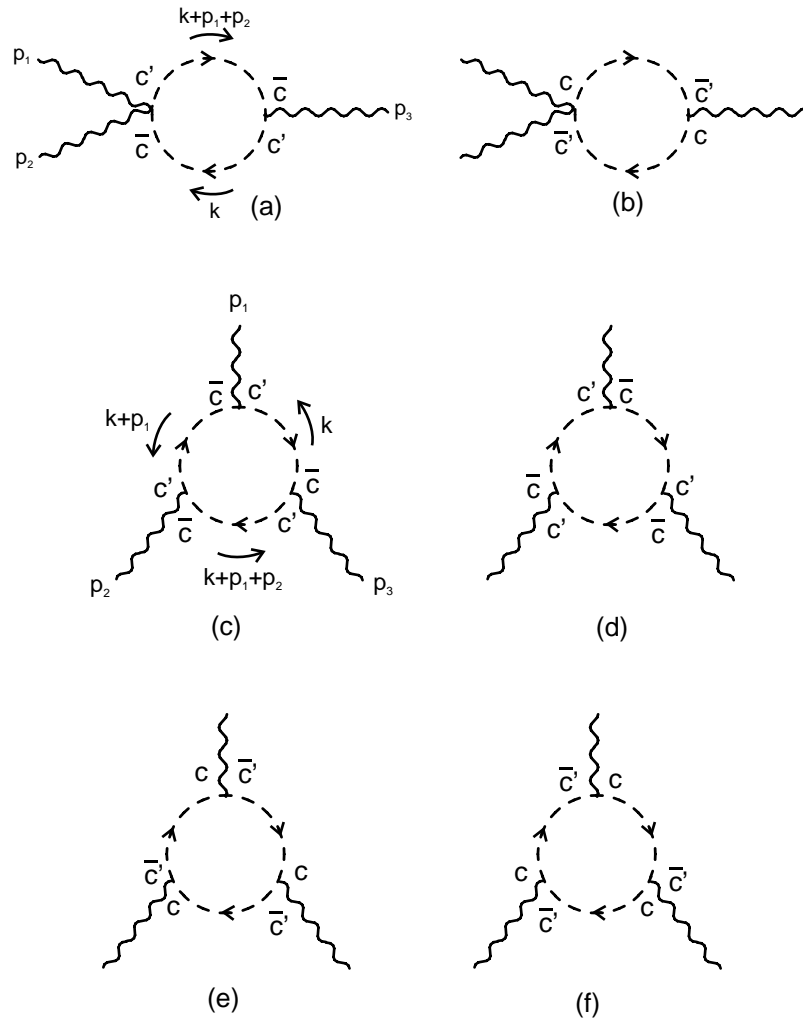


FIGURA 13: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$: laços de fantasmas.

(2.6.31); essas, no entanto, se anulam quando efetuada a soma de todos os supergráficos.

Passamos agora aos supergráficos envolvendo laços dos fantasmas, exibidos na figura 13. Para os diagramas 13a e 13b encontramos os fatores trigonométricos

$$F_{T;13a} = F_{T;13b} = -2 \cos(p_1 \wedge p_2) F_T^{\text{impar}} + 2 \sin(p_1 \wedge p_2) F_{T;9a}^{\text{par}} \quad (2.6.34a)$$

$$= F_{T;9a}. \quad (2.6.34b)$$

enquanto que, para a outra topologia,

$$F_{T;13c} = F_{T;13d} = F_{T;13e} = F_{T;13f} \quad (2.6.35a)$$

$$= -\cos(p_1 \wedge p_2) F_T^{\text{impar}} - \sin(p_1 \wedge p_2) F_{T;12}^{\text{par}} \quad (2.6.35b)$$

$$= -F_{T;12}. \quad (2.6.35c)$$

Como nos diagramas da figura 9 e 12, divergências infravermelhas lineares surgem de integrais com contagem de potências quadrática, mas se anulam separadamente para cada gráfico como

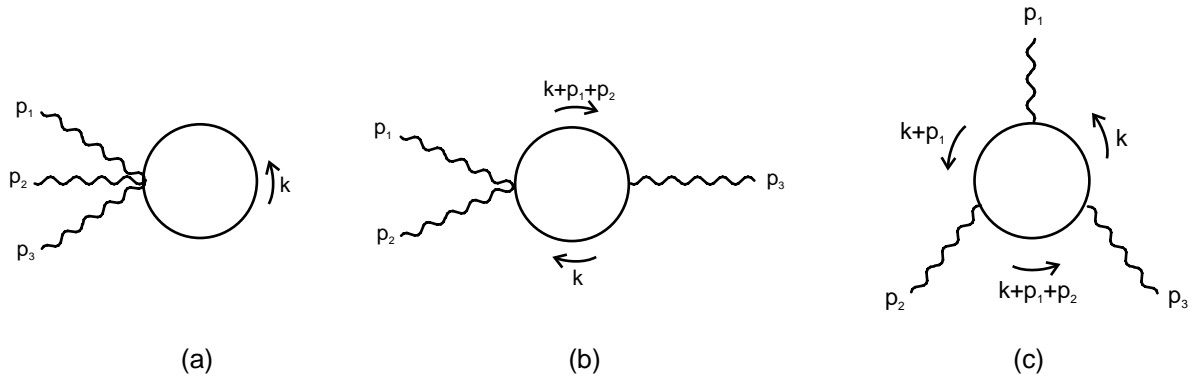


FIGURA 14: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$: laços de matéria.

resultado da simetrização dos momentos externos. Além disso, cada gráfico também exibe uma divergência infravermelha UV/IR linear induzida pela presença de $F_T^{\text{ímpar}}$ em (2.6.34a) e (2.6.35b). A soma destas é dada por

$$\sum_{j=13a}^{13f} \Gamma_{VVV;j}^{(1)} = -4 \left(\frac{i}{6} \right) \cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3) N_\mu(p_1, p_2, p_3) + \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.6.36)$$

Coletando agora os resultados apresentados em (2.6.13), (2.6.28), (2.6.29), (2.6.30) e (2.6.36), concluímos que na função de vértice $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ da NCSQED sobrevive uma divergência infravermelha linear, originada do mecanismo UV/IR, da forma

$$\Gamma_{VVV}^{(1)} = (4 - 7a) \left(\frac{i}{6} \right) \cos(p_1 \wedge p_2) I^\mu(p_1, p_2, p_3) N_\mu(p_1, p_2, p_3) + \mathcal{O}[\ln k]. \quad (2.6.37)$$

Por ser não integrável, essa divergência é perigosa para a consistência da teoria. Porém, percebemos que existe um calibre particular, $a = 4/7$, em que $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ torna-se livre de singularidades infravermelhas não-integráveis.

Esta conclusão não é alterada pela inclusão de matéria na teoria. De fato, para cada supercampo quiral acoplado a V através da ação (2.2.1), temos que considerar os três supergráficos da figura 14. A contribuição do diagrama 14a é proporcional à do diagrama correspondente na figura 8 e, portanto, não produz divergências infravermelhas. Já 14b e 14c são proporcionais aos diagramas com a mesma topologia na figura 13. Como vimos, divergências infravermelhas UV/IR provenientes de integrais com contagem de potência quadrática se anulam para cada gráfico individualmente. Verificamos também que as divergências infravermelhas UV/IR provenientes de integrais com contagem de potência linear, proporcionais à apresentada em (2.6.37), se cancelam entre os dois diagramas.

Concluímos, assim, que as divergências infravermelhas UV/IR lineares que aparecem na NCSQED, expressas em (2.6.37), desaparecem num particular calibre, esse resultado valendo para $N = 1, 2, 4$. A presença dessa singularidade num calibre $a \neq 4/7$ é um “efeito de calibre”

que não deve aparecer no cálculo de grandezas físicas. É interessante citar aqui a similaridade da situação que encontramos com o que acontece na QED em quatro dimensões. Devido à massa zero do fóton, grandezas dependentes de calibre, como as funções de Green, são afetadas pelas divergências infravermelhas usuais. Teoremas bem conhecidos garantem que o cálculo de seções de choque inclusivas não serão afetadas por essas divergências, mas as funções de Green precisam de um regulador infravermelho para serem calculadas [64, 89]. Porém, existe um calibre em que as funções de Green se apresentam livres de divergências infravermelhas, que é o chamado calibre de Yennie [90]. É bastante surpreendente que o mesmo tenha acontecido com as funções de vértice da NCSQED, que se tornam livres de divergências infravermelhas UV/IR não-integráveis em um calibre particular.

Esse efeito não aparece no formalismo de campo de fundo estudado a um laço em [72, 73], mostrando que a segurança infravermelha da NCSQED a ordens mais altas da teoria de perturbações é altamente não trivial. Nosso estudo prova que, pelo menos para as funções de vértice de dois e três pontos, corrigidas a um laço, o mecanismo UV/IR não produz singularidades não-integráveis, garantindo a consistência da teoria nessa aproximação.

3 *A teoria de Yang-Mills supersimétrica não-comutativa*

A generalização natural da análise das divergências infravermelhas que aparecem na formulação covariante da NCSQED devido à mistura UV/IR, apresentada no capítulo 2, é o estudo do mesmo problema numa teoria de calibre supersimétrica não-comutativa com um grupo de calibre não-Abeliano, que faremos nesse capítulo.

Como explicamos na seção 1.3, é possível construir uma generalização não-comutativa para os grupos unitários $U(N)$, desde que seus geradores $T_a, a = 1, \dots, N^2$, estejam na representação fundamental¹. Neste capítulo, vamos considerar uma teoria de Yang-Mills supersimétrica não-comutativa (NCSYM), invariante frente ao grupo de calibre não-comutativo $\mathcal{U}(N)$, composto por transformações da forma

$$g[\Lambda] = e^{-ig\Lambda^a T_a}, \quad (3.0.1)$$

com parâmetros quirais Λ^a . Nosso objetivo será mostrar que a escolha da representação fundamental para os geradores, mandatária no nível clássico, também atuará decisivamente para garantir a segurança infravermelha das correções quânticas à ação efetiva da teoria. Para isso, iremos calcular as funções de vértice de dois e três pontos do supercampo de calibre V , tanto no caso $\mathcal{N} = 1$ quanto para supersimetrias estendidas.

Começamos citando que os geradores T_a são matrizes $N \times N$ hermitianas, satisfazendo a álgebra

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c, \quad (3.0.2)$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura de $U(N)$. Uma escolha conveniente que podemos fazer é $T_0 \propto \mathbf{1}$ e $\text{Tr } T_a = 0$ para $a \neq 0$. Além disso, na representação fundamental, os geradores T_a são normalizados segundo

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (3.0.3)$$

Finalmente, vamos encontrar uma relação que nos será útil mais adiante, conseqüência do fato do conjunto $\{T_a, a = 1, \dots, N^2\}$ formar base do correspondente espaço de matrizes. Partindo

¹Os grupos $SO(N)$ e $Sp(N)$ também possuem generalizações não-comutativas, mas sua construção não é tão direta [91]. Por isso, o grupo $\mathcal{U}(N)$ foi a escolha mais natural para a generalização não-Abeliana dos nossos resultados referentes à NCSQED, apresentados no capítulo 2.

de uma matriz $N \times N$ arbitrária, M_{ij} , escrita em termos da base $\{T_a\}$,

$$M_{ij} = M_a (T_a)_{ij} , \quad (3.0.4)$$

multiplicando por T_b pela esquerda e tomando o traço, podemos concluir que

$$M_a = 2 M_{ij} (T_a)_{ji} , \quad (3.0.5)$$

o que, inserido de volta em (3.0.4), leva a

$$M_{ij} = M_{lk} \left[2 (T_a)_{kl} (T_a)_{ij} \right] . \quad (3.0.6)$$

Para essa relação ser satisfeita com M_{ij} arbitrário, é preciso que as matrizes T_a satisfaçam

$$(T_a)_{ij} (T_a)_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{jk} \delta_{il} , \quad (3.0.7)$$

que é a relação que estávamos procurando.

3.1 A ação da NCSYM e Regras de Feynman

Nesta seção iremos definir a ação da NCSYM, bem como extrair dela as regras de Feynman para o cálculo da ação efetiva. Começamos apresentando a ação invariante de calibre para um supercampo vetorial $V(z)$,

$$S_V = -\frac{1}{2g^2} \int d^8z \text{Tr} \left(e^{-gV} * D^\alpha e^{gV} \right) * \bar{D}^2 \left(e^{-gV} * D_\alpha e^{gV} \right) , \quad (3.1.1)$$

sendo que $V(z)$ toma valores na álgebra de Lie de $\mathcal{U}(N)$,

$$V(z) = V_a(z) T_a . \quad (3.1.2)$$

A transformação de calibre que deixa (3.1.1) invariante tem a mesma forma que (2.1.2), exceto que agora $\Lambda(z) = \Lambda_a(z) T_a$. A menos da presença do traço, a ação (3.1.1) é formalmente idêntica à utilizada para definir a NCSQED, equação (2.1.13). Essa similaridade entre teorias Abelianas e não-Abelianas é típica das teorias de calibre não-comutativas.

Trabalharemos novamente num calibre covariante arbitrário, implementado pela adição a S_V do termo

$$S_{gf} = -\frac{a}{2} \int d^8z \text{Tr} V \left\{ D^2, \bar{D}^2 \right\} V , \quad (3.1.3)$$

onde a é uma constante real parametrizando uma família contínua de calibres. O determinante de Faddeev-Popov correspondente pode ser escrito em termos de campos de fantasmas na forma

$$\Delta^{-1} [V] = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}c' \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\bar{c}' e^{iS_{gh}[c,c',\bar{c},\bar{c}']} . \quad (3.1.4)$$

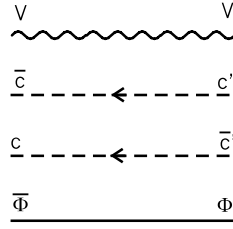


FIGURA 15: Propagadores livres da NCSYM.

Os campos de fantasmas também assumem valores na álgebra de Lie de $\mathcal{U}(N)$, $c(z) = c_a(z)T_a$ e assim por diante. A forma explícita para S_{gh} é dada por

$$S_{gh} = i \text{Tr} [c + \bar{c}] L_{\frac{g}{2}V} \left[-(c' + \bar{c}') + \left(\coth L_{\frac{g}{2}V} \right) [\bar{c}' - c'] \right]. \quad (3.1.5)$$

As teorias com supersimetrias estendidas $\mathcal{N} = 2, 4$ são obtidas pela adição de supercampos quirais de matéria $\Phi^i(z) = \Phi_a^i(z) T_a$, interagindo com $V(z)$ através da ação

$$S_m^i = \int d^8z \text{Tr} \bar{\Phi}^i * e^{-gV} * \Phi^i * e^{gV}. \quad (3.1.6)$$

Lembramos que a auto-interação entre os três supercampos quirais Φ^i do modelo com supersimetria $\mathcal{N} = 4$ não participa dos diagramas que necessitaremos calcular e, portanto, o termo correspondente na ação foi omitido.

Da parte quadrática da ação $S_V + S_{gf} + S_{gh} + S_m$ obtemos os propagadores livres do campo de calibre, fantasmas e campos de matéria,

$$\Delta_{V_a V_b}(z_1 - z_2) = +\delta_{ab} \frac{2i}{\square} \left[1 + (1-a) \frac{1}{\square} \{D_1^2, \bar{D}_1^2\} \right] \delta^8(z_1 - z_2), \quad (3.1.7a)$$

$$\Delta_{\bar{c}_a c'_b}(z_1 - z_2) = -\delta_{ab} \frac{2i}{\square} D_1^2 \bar{D}_2^2 \delta^8(z_1 - z_2), \quad (3.1.7b)$$

$$\Delta_{c_a \bar{c}'_b}(z_1 - z_2) = +\delta_{ab} \frac{2i}{\square} \bar{D}_1^2 D_2^2 \delta^8(z_1 - z_2), \quad (3.1.7c)$$

$$\Delta_{\Phi_a^i \bar{\Phi}_b^j}(z_1 - z_2) = -\delta^{ij} \delta_{ab} \frac{2i}{\square} \bar{D}_1^2 D_2^2 \delta^8(z_1 - z_2), \quad (3.1.7d)$$

respectivamente. Eles estão representados graficamente na figura 15.

Os vértices que serão necessários para nossos cálculos, exibidos na figura 16, são obtidos da parte de interação da ação total $S_V + S_{gf} + S_{gh} + S_m$. Utilizando a mesma notação da seção 2.3, eles podem ser escritos

$$\Gamma_{(\bar{D}^2 DV_a) V_b (DV_c)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = \frac{ig}{2} \mathcal{V}_{3abc}(k_1, k_2, k_3), \quad (3.1.8a)$$

$$\Gamma_{\bar{c}_a V_b c'_c}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = \Gamma_{c_a V_b \bar{c}'_c}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = \frac{ig}{2} \mathcal{V}_{3abc}(k_1, k_2, k_3), \quad (3.1.8b)$$

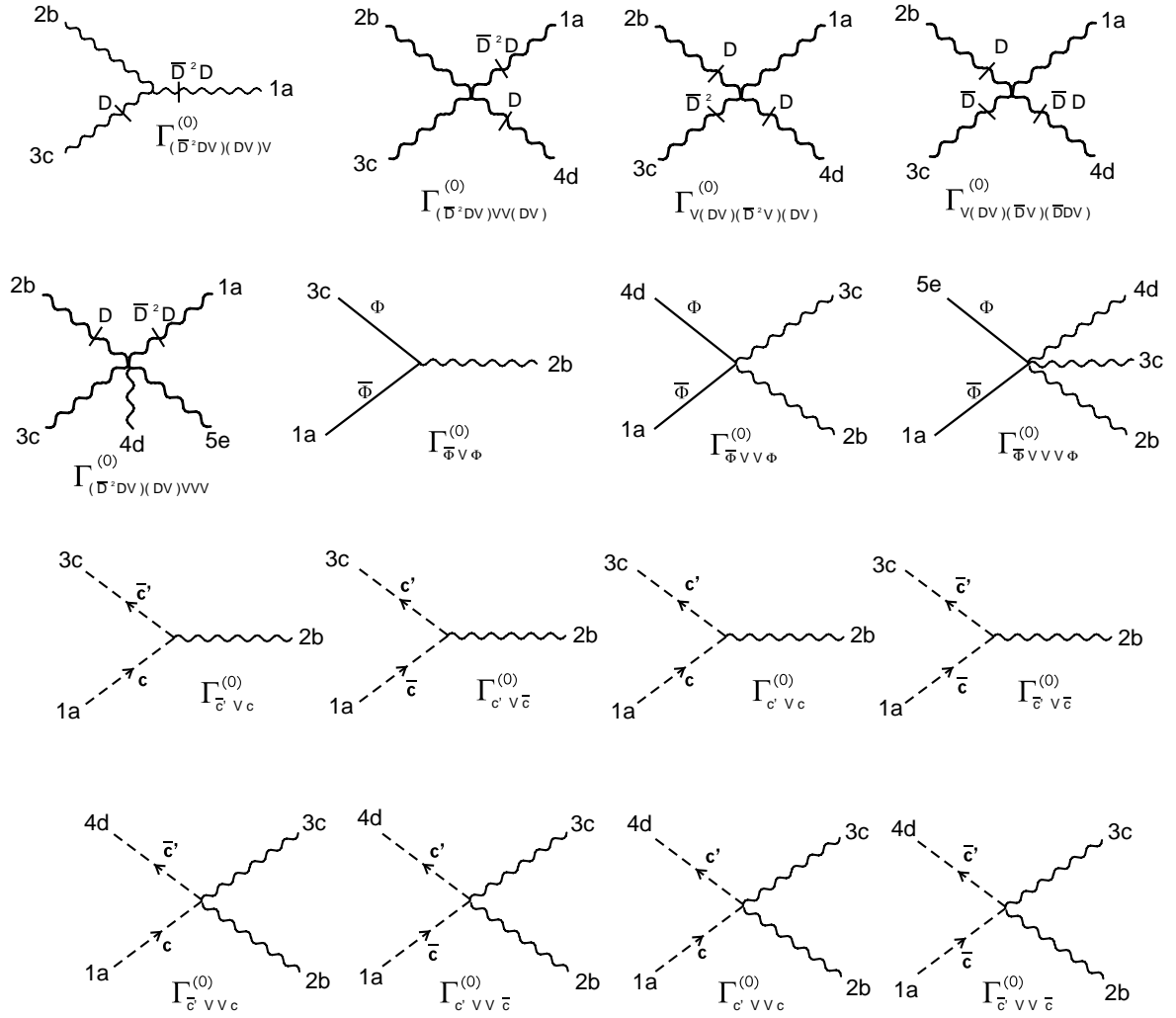


FIGURA 16: Vértices elementares da NCSYM necessários para os cálculos que consideraremos a seguir.

$$\Gamma_{c_a V_b c'_c}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = \Gamma_{\bar{c}_a V_b \bar{c}'_c}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = -\frac{ig}{2} \mathcal{V}_{3abc}(k_1, k_2, k_3), \quad (3.1.8c)$$

$$\Gamma_{\bar{\Phi}_a V_b \Phi_c}^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = -ig \mathcal{V}_{3abc}(k_1, k_2, k_3), \quad (3.1.8d)$$

$$\Gamma_{(\bar{D}^2 DV_a) V_b V_c (DV_d)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{ig^2}{24} \mathcal{V}_{4abcd}^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.1.8e)$$

$$\Gamma_{V_a DV_b DV_c (\bar{D}^2 V_d)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{g^2}{4} \mathcal{V}_{4abcd}^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.1.8f)$$

$$\Gamma_{V_a DV_b \bar{D} DV_c (\bar{D} V_d)}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{g^2}{4} \mathcal{V}_{4abcd}^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.1.8g)$$

$$\Gamma_{c_a V_b V_c \bar{c}'_d}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \Gamma_{\bar{c}_a V_b V_c c'_d}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{ig^2}{12} \mathcal{V}_{4abcd}^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.1.8h)$$

$$\Gamma_{\bar{c}_a V_b V_c c'_d}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \Gamma_{c_a V_b V_c \bar{c}'_d}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = +\frac{ig^2}{12} \mathcal{V}_{4abcd}^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.1.8i)$$

$$\Gamma_{\bar{\Phi}_a V_b V_c \Phi_d}^{(0)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{ig^2}{2} \mathcal{V}_{4abcd}^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.1.8j)$$

$$\Gamma_{\bar{D}^2 DV_a V_b V_c V_d DV_e}^{(0)}(k, p_1, p_2, p_3, -k) = -\frac{ig^3}{24} \mathcal{V}_{5abcde}(k, p_1, p_2, p_3, -k), \quad (3.1.8k)$$

$$\Gamma_{\bar{\Phi}_a V_b V_c V_d \Phi_e}^{(0)}(k, p_1, p_2, p_3, -k) = -\frac{ig^3}{6} \mathcal{V}_{5abcde}(k, p_1, p_2, p_3, -k), \quad (3.1.8l)$$

onde os fatores trigonométricos agora são

$$\mathcal{V}_{3abc}(k_1, k_2, k_3) \equiv e^{-ik_2 \wedge k_3} A_{abc} - e^{ik_2 \wedge k_3} A_{acb}, \quad (3.1.9a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{4abcd}^{(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &\equiv e^{-i(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} A_{abcd} - 2e^{-i(k_1 \wedge k_2 + k_4 \wedge k_3)} A_{abdc} \\ &\quad + e^{-i(k_1 \wedge k_4 + k_2 \wedge k_3)} A_{adbc}, \end{aligned} \quad (3.1.9b)$$

$$\mathcal{V}_{4abcd}^{(2)}(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv \sin(k_1 \wedge k_2) \left[e^{-ik_3 \wedge k_4} A_{abcd} - e^{ik_3 \wedge k_4} A_{adcb} \right]. \quad (3.1.9c)$$

Quanto a \mathcal{V}_{5abcde} , só iremos precisar de sua expressão com dois índices contraídos,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{5abc}(k, p_1, p_2, p_3, -k) &\equiv A_{dabcd} e^{-ip_2 \wedge p_3} - A_{dabdc} e^{-ip_2 \wedge p_3} - \\ &\quad - 3 \left[A_{dabdc} e^{-ip_2 \wedge p_3} e^{2ik \wedge p_3} - A_{dadbc} e^{-ip_2 \wedge p_3} e^{-2ik \wedge p_1} \right], \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

onde $\mathcal{V}_{5abc} \equiv \mathcal{V}_{5dabcd}$.

Em todas essas expressões, os momentos são considerados positivos ao entrarem no vértice, e além disso a conservação de momento não é indicada mas aplica-se a todos os vértices.

Também introduzimos a notação

$$A_{a_1 \dots a_n} \equiv \text{Tr}(T_{a_1} \dots T_{a_n}). \quad (3.1.11)$$

Todas as demais regras de Feynman para o cálculo das funções de vértice são as mesmas do caso Abelian, apresentadas na seção 2.3.

3.2 A função de vértice de dois pontos da NCSYM

Passamos agora a calcular a primeira correção quântica à função de vértice de dois pontos do supercampo V , denotada por $\Gamma_{VV}^{(1)}$.

Na figura 17 mostramos os diagramas envolvendo um vértice quártico de V que contribuem a $\Gamma_{VV}^{(1)}$. Não desenharemos os diagramas que se anulam devido à álgebra das D s. Utilizando as regras de Feynman da seção 3.1, escrevemos a contribuição do diagrama $A1$

$$\Gamma_{A1} = \left(-\frac{ig^2}{24} \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta (F^{A1})_{abcd} \left(-\delta^{ad} \frac{2i}{k^2} \right) \mathbb{D}_\theta^{A1} + (\text{sim}) , \quad (3.2.1)$$

onde F^{A1} é o fator trigonométrico originado da não-comutatividade, \mathbb{D}_θ é a parte dependente de θ do integrando e (sim) significa a simetrização com respeito às pernas externas que, neste caso, implica na adição de um segundo termo idêntico ao primeiro, exceto pela troca $p \rightarrow -p$ e $b \leftrightarrow c$.

O cálculo de \mathbb{D}_θ^{A1} é imediato e fornece

$$\mathbb{D}_\theta^{A1} = -2 V^b(p) V^c(-p) \quad (3.2.2)$$

enquanto que o fator trigonométrico F^{A1} é calculado a partir de (3.1.8e) e (3.1.9b). Assim,

$$\Gamma_{A1} = \left(\frac{g^2}{3} \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{1}{k^2} (F_T)_{bc} V^b(p) V^c(-p) , \quad (3.2.3)$$

onde

$$(F_T)_{bc} = (A_{abc} + A_{acb}) - 2 \cos(2k \wedge p) A_{bac} . \quad (3.2.4)$$

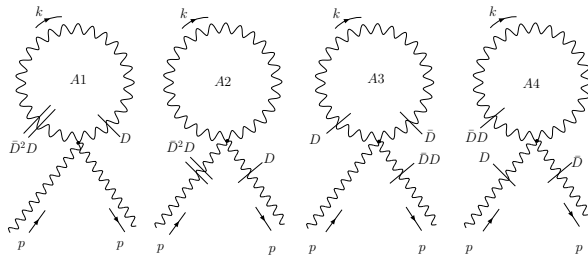


FIGURA 17: Gráficos envolvendo um vértice quártico de V .

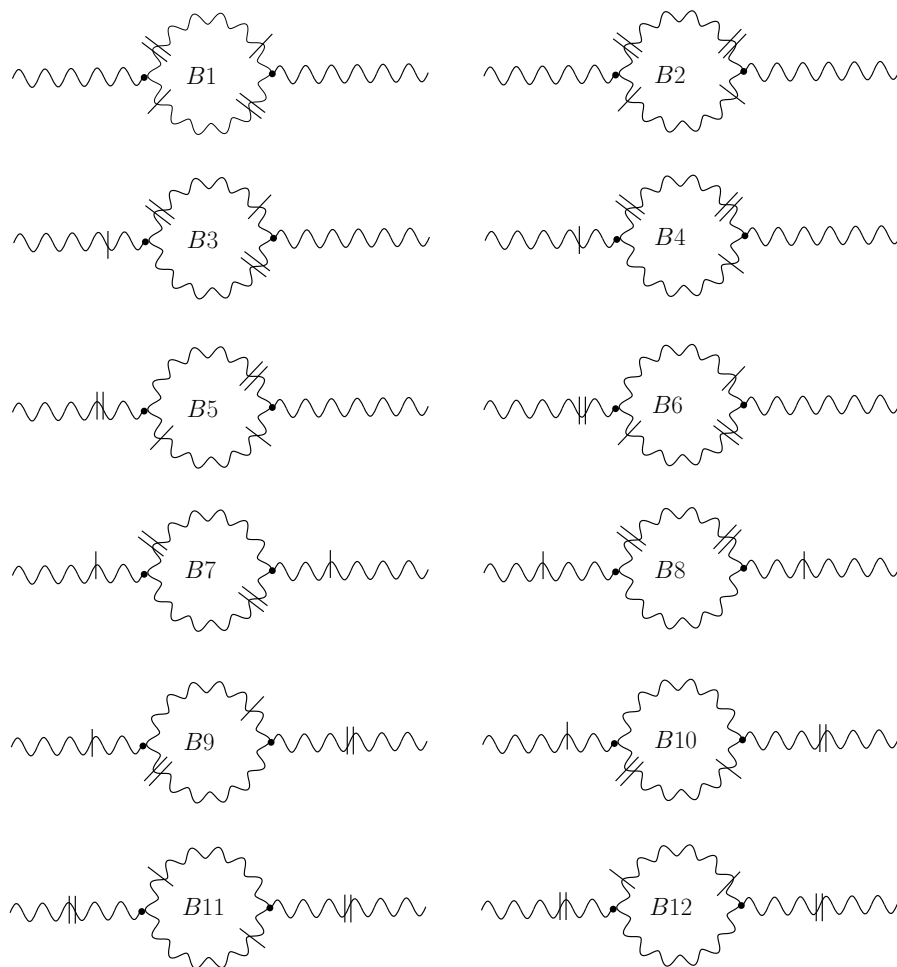


FIGURA 18: Gráficos envolvendo dois vértices trilineares de V . As linhas simples significam um fator D enquanto que as duplas um fator $\overline{D}^2 D$.

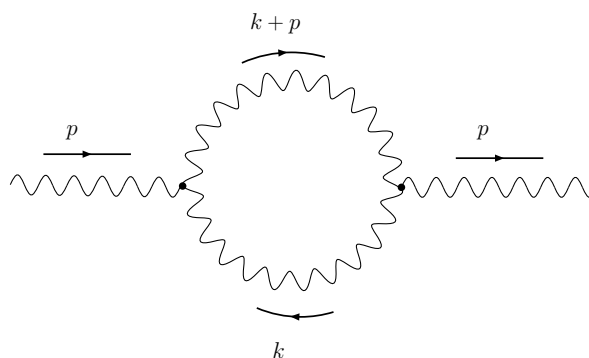


FIGURA 19: Fluxo de momentos para os diagramas B .

É conveniente agora introduzir a definição

$$Q_0 = -g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta \frac{1}{k^2} (F_T)_{bc} V^b(p) V^c(-p), \quad (3.2.5)$$

que nos permite compactar (3.2.3) na forma

$$\Gamma_{A1} = -\frac{1}{3} Q_0. \quad (3.2.6)$$

Da equação (3.2.4) vemos que F_T possui uma parte planar (P) e uma não-planar (NP). Correspondentemente, $Q_0 = Q_0^P + Q_0^{NP}$. A contribuição planar Q_0^P possui uma divergência quadrática UV que é eliminada pelo uso da regularização dimensional, ao passo que a contribuição não-planar Q_0^{NP} desenvolve uma singularidade infravermelha UV/IR quadrática.

Consideramos agora o gráfico A2. Levando em conta que

$$\mathbb{D}_\theta^{A2} = -\frac{2}{k^2} (1-a) \bar{D}^2 DV^a(p) DV^d(-p), \quad (3.2.7)$$

e

$$(F^{A2})_{abcd} \delta^{bc} = (A_{ccda} + A_{ccad}) - 2e^{-2ik \wedge p} A_{acdc}, \quad (3.2.8)$$

encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma_{A2} &= (1-a) \left(\frac{g^2}{6} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta [(F^{A2})_{abcd} \delta^{bc}] \frac{1}{(k^2)^2} \bar{D}^2 DV^a(p) DV^d(-p) \\ &+ (\text{sim}). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Vemos que Γ_{A2} é dependente de calibre e contem no máximo divergências logarítmicas. Para implementar a simetrização com respeito às linhas externas, partimos da relação

$$D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V(p) = (-\not{p} D \bar{D} + 2D^2 \bar{D}^2) V(p) = (+\not{p} \bar{D} D + 2\bar{D}^2 D^2) V(p), \quad (3.2.10)$$

onde $\not{p} D \bar{D} = \not{p}_{\alpha\dot{\alpha}} D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}}$. Além disso, após perceber que

$$(F^{A2})_{abcd} \delta^{bc} + (\text{sim}) = 2(F_T)_{ad} \quad (3.2.11)$$

chegamos a

$$\Gamma_{A2} = -\left(\frac{g^2}{3} \right) (1-a) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta (F_T)_{ad} \frac{1}{(k^2)^2} V^d(-p) \left[-\not{p} D \bar{D} + 2D^2 \bar{D}^2 \right] V^a(p). \quad (3.2.12)$$

Essa expressão ainda não parece ser simétrica sob a troca $p \rightarrow -p$ e $a \leftrightarrow d$. Para obter uma

expressão explicitamente simétrica, escrevemos

$$\begin{aligned} & \int d^4\theta V^d(-p) \left[-\not{p} D\bar{D} + 2D^2\bar{D}^2 \right] V^a(p) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4\theta V^d(-p) \left[-\not{p} D\bar{D} + 2D^2\bar{D}^2 \right] V^a(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4\theta V^a(p) \left[+\not{p} D\bar{D} + 2D^2\bar{D}^2 \right] V^d(-p) , \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

o que, após integração por partes no segundo termo do membro da direita,

$$\begin{aligned} & \int d^4\theta V^d(-p) \left[-\not{p} D\bar{D} + 2D^2\bar{D}^2 \right] V^a(p) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4\theta V^d(-p) \left[-\not{p} \{D, \bar{D}\} + 2 \{D^2, \bar{D}^2\} \right] V^a(p) , \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

e utilizando $\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} V(p) = \not{p}_{\alpha\dot{\alpha}} V(p)$ e $\not{p}_{\alpha\dot{\alpha}} \not{p}^{\dot{\alpha}\alpha} = 2p^2$, nos leva a

$$\begin{aligned} & \int d^4\theta V^d(-p) \left[-\not{p} D\bar{D} + 2D^2\bar{D}^2 \right] V^a(p) = \\ &= \int d^4\theta V^d(-p) \left[-p^2 + \{D^2, \bar{D}^2\} \right] V^a(p) . \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Finalmente, chegamos à forma explicitamente simétrica para Γ_{A2} ,

$$\Gamma_{A2} = \left(\frac{g^2}{3} \right) (1-a) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta (F_T)_{ad} \frac{1}{(k^2)^2} V^d(-p) \left[p^2 - \{D^2, \bar{D}^2\} \right] V^a(p) , \quad (3.2.16)$$

que pode ser escrita

$$\Gamma_{A2} = \frac{1}{3} (1-a) L_0 \quad (3.2.17)$$

após introduzir a definição

$$L_0 = g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta (F_T)_{ad} \frac{1}{(k^2)^2} V^d(-p) \left[p^2 - \{D^2, \bar{D}^2\} \right] V^a(p) . \quad (3.2.18)$$

Já para os diagramas A3 e A4, a álgebra das D 's implica num integrando *ímpar* em k , proporcional a k/k^4 . Por outro lado, o correspondente fator trigonométrico é, para ambos os gráficos, uma função *par* de k . Portanto, a integração simétrica em k garante que

$$\Gamma_{A3} = \Gamma_{A4} = 0. \quad (3.2.19)$$

Partimos para o cálculo dos diagramas envolvendo dois vértices trilineares de V . Como não queremos calcular apenas as divergências dominantes, temos que levar em conta todas as diferentes distribuições das derivadas D e \bar{D} nas linhas de cada vértice, o que nos leva aos doze diagramas desenhados na figura 18. Detalharemos a seguir o cálculo daquele chamado B1, para os restantes, apenas citaremos o resultado final.

O fluxo de momento que utilizamos para calcular todos os diagramas da figura 18 está indicado na figura 19. As regras de Feynman da seção 3.1 associam ao diagrama $B1$ a amplitude

$$\Gamma_{B1} = - \left(\frac{g^2}{2} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta_1 d^4 \theta_2 (F^{B1})_{abcdef} \delta^{af} \delta^{cd} \left[\frac{(i)^2}{k^2 (k+p)^2} \right] \mathbb{D}_\theta^{B1} + (\text{sim}) . \quad (3.2.20)$$

O fator trigonométrico F^{B1} é obtido de (3.1.9a),

$$(F^{B1})_{abcdef} \delta^{af} \delta^{cd} = 2 (F_L)_{be} , \quad (3.2.21)$$

onde definimos

$$(F_L)_{be} \equiv A_{abc} A_{cea} - \cos(2k \wedge p) A_{abc} A_{aec} . \quad (3.2.22)$$

Este fator trigonométrico é comum a todos os diagramas desta topologia. Repare que $(F_L)_{be}$ é simétrico tanto com respeito ao momento k quanto aos índices de cor.

Da simplificação de \mathbb{D}_θ , utilizando a álgebra das D s, resulta

$$\mathbb{D}_\theta^{B1} = -2\delta_{12} V_2^e(-p) \left[k^2 + \not{k} D \bar{D} + D^2 \bar{D}^2 \right] V_1^b(p) . \quad (3.2.23)$$

Utilizando (3.2.23) e (3.2.21) em (3.2.20) e efetuando a simetrização indicada, encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma_{B1} = & - 2g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta (F_L)_{be} \left\{ k^2 \left(\frac{V^b(p) V^e(-p)}{k^2 (k+p)^2} + \frac{V^e(-p) V^b(p)}{k^2 (k-p)^2} \right) \right. \\ & + \not{k} \left(\frac{D \bar{D} V^b(p) V^e(-p)}{k^2 (k+p)^2} + \frac{D \bar{D} V^e(-p) V^b(p)}{k^2 (k-p)^2} \right) \\ & \left. + \left(\frac{D^2 \bar{D}^2 V^b(p) V^e(-p)}{k^2 (k+p)^2} + \frac{D^2 \bar{D}^2 V^e(-p) V^b(p)}{k^2 (k-p)^2} \right) \right\} . \quad (3.2.24) \end{aligned}$$

Queremos isolar termos de (3.2.24) conforme a potência do momento de integração k . Para isso, expandimos $(k \pm p)^{-2}$ em torno de $p = 0$ (equação (2.5.12)) e, após algumas manipulações envolvendo as integrais em θ , encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma_{B1} = & - 2g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta (F_L)_{be} V^e(-p) \times \\ & \times \left[\frac{2}{k^2} + \frac{4(k \cdot p)^2 - k^2 p^2}{(k^2)^3} - 4 \frac{(k \cdot p)^2}{(k^2)^3} + \frac{1}{(k^2)^2} \left\{ D^2, \bar{D}^2 \right\} \right] V^b(p) + TF , \quad (3.2.25) \end{aligned}$$

onde “TF” significa “termos finitos”. Para compactar a escrita de Γ_{B1} , introduzimos as definições

$$Q_1 \equiv - 2g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta \frac{1}{k^2} (F_L)_{be} V^b(p) V^e(-p) \quad (3.2.26)$$

e

$$L_1 \equiv 2g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta (F_L)_{be} \frac{1}{(k^2)^2} V^e(-p) \\ \times \left[\frac{4(k \cdot p)^2 - k^2 p^2}{(k^2)} - 4 \frac{(k \cdot p)^2}{(k^2)} + \{D^2, \bar{D}^2\} \right] V^b(p), \quad (3.2.27)$$

em termos das quais

$$\Gamma_{B1} = 2Q_1 - L_1 + TF. \quad (3.2.28)$$

Observamos que Q_1 e L_1 apresentam contagem de potências quadrática e logarítmica, respectivamente. Além disso, na parte planar de L_1 podemos utilizar a relação

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 f(k^2), \quad (3.2.29)$$

o que implica em

$$L_1^P \equiv -2g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{1}{(k^2)^2} (F_L^P)_{be} V^e(-p) \left(p^2 - \{D^2, \bar{D}^2\} \right) V^b(p). \quad (3.2.30)$$

A parte não-planar L_1^{NP} desenvolve uma singularidade infravermelha UV/IR que, por ser integrável, não é perigosa e será considerada como “termo finito”. A forma final de Γ_{B1} é, portanto,

$$\Gamma_{B1} = 2Q_1 - L_1^P + TF. \quad (3.2.31)$$

A regularização dimensional elimina a divergência ultravioleta quadrática contida na parte planar de Q_1 , enquanto que a parte não-planar desta quantidade desenvolve uma singularidade infravermelha UV/IR quadrática. Como podemos ver de (3.2.30), L_1^P é logaritmicamente divergente no ultravioleta.

Procedemos com a mesma metodologia para os restantes diagramas da figura 18 e encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma_{B2} &= -2Q_1, & \Gamma_{B3} &= L_2^P - 2L_1^P + TF, & \Gamma_{B4} &= 0, \\ \Gamma_{B5} &= 2L_1^P + TF, & \Gamma_{B6} &= -2L_1^P + TF, & \Gamma_{B7} &= L_1^P + TF, \\ \Gamma_{B8} &= -2(1-a)L_1^P, & \Gamma_{B9} &= -2aL_1^P + TF, & \Gamma_{B10} &= -2aL_1^P + TF, \\ \Gamma_{B11} &= TF, & \Gamma_{B12} &= TF, \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

onde

$$L_2^P \equiv -2g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{p^2}{(k^2)^2} (F_L^P)_{be} V^e(-p) V^b(p). \quad (3.2.33)$$

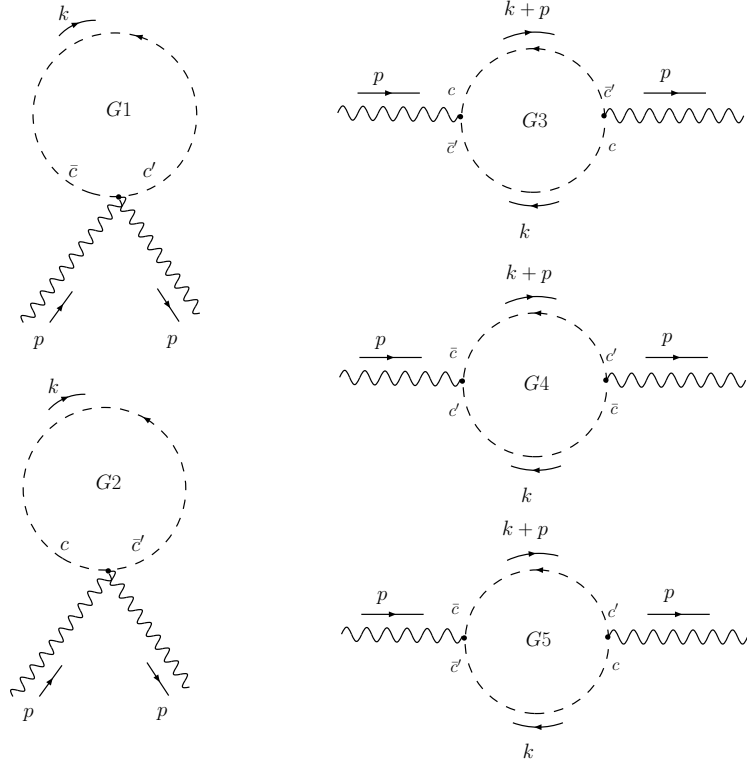


FIGURA 20: Laços de fantasmas contribuindo a $\Gamma_{VV}^{(1)}$.

Somando as expressões (3.2.6), (3.2.17), (3.2.19), (3.2.31) e (3.2.32), chegamos a

$$\Gamma_A + \Gamma_B = -\frac{1}{3}Q_0 + \frac{1}{3}(1-a)L_0 - 2(2+a)L_1^P + L_2^P + TF. \quad (3.2.34)$$

As contribuições dos fantasmas a $\Gamma_{VV}^{(1)}$ vêm dos gráficos desenhados na figura 20. Consideramos, primeiro, os diagramas envolvendo um vértice quártico. Da aplicação direta das regras de Feynman a G1 e G2 vem que

$$\Gamma_{G1} = (-1) \left(\frac{ig^2}{12} \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta (F^{G1})_{abcd} \left(\frac{\delta^{ad} 2i}{k^2} \right) \mathbb{D}_\theta^{G1} + (\text{sim}) \quad (3.2.35)$$

e

$$\Gamma_{G2} = (-1) \left(-\frac{ig^2}{12} \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta (F^{G2})_{abcd} \left(-\frac{\delta^{ad} 2i}{k^2} \right) \mathbb{D}_\theta^{G2} + (\text{sim}). \quad (3.2.36)$$

Como $F^{G1} = F^{G2}$ e $\mathbb{D}_\theta^{G1} = \mathbb{D}_\theta^{G2}$, vemos que $\Gamma_{G1} = \Gamma_{G2}$. Não é difícil verificar que

$$\Gamma_{G1} + \Gamma_{G2} = -\frac{2}{3}Q_0. \quad (3.2.37)$$

Quanto aos diagramas que envolvem dois vértices trilineares, concluímos que Γ_{G3} e Γ_{G4} são muito similares a Γ_{B1} . De fato, $\Gamma_{G3} = \Gamma_{G4}$ e $\Gamma_{G3} + \Gamma_{G4} = \Gamma_{B1}$. Portanto, segundo (3.2.31),

$$\Gamma_{G3} + \Gamma_{G4} = 2Q_1 - L_1^P + TF. \quad (3.2.38)$$

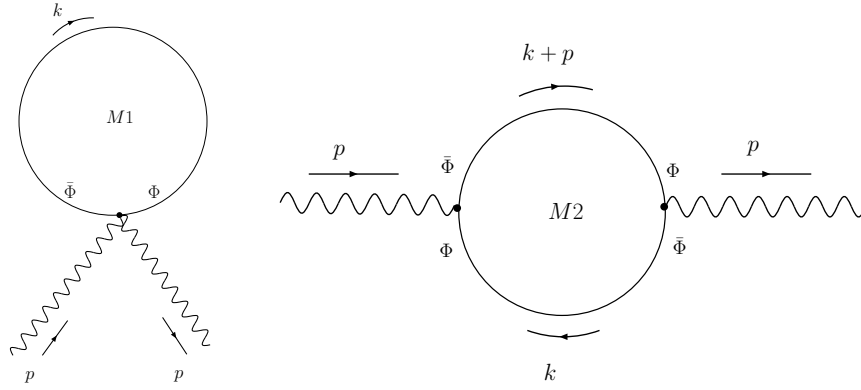


FIGURA 21: Contribuições de matéria a $\Gamma_{VV}^{(1)}$.

Resta calcular a contribuição do gráfico G5. Como

$$\mathbb{D}_{\theta}^{G5} = D^2 \bar{D}^2 \delta_{12} D^2 \bar{D}^2 \delta_{12} V^b(p) V^e(-p) = \delta_{12} \bar{D}^2 D^2 V^b(p) V^e(-p), \quad (3.2.39)$$

ela pode conter, no máximo, divergências logarítmicas. O peso topológico para esse diagrama é 2. Concluimos assim que

$$\Gamma_{G5} = L_3^P + TF, \quad (3.2.40)$$

onde

$$L_3^P \equiv 2g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta \frac{1}{(k^2)} (F_L^P)_{be} V^e(-p) \left\{ \bar{D}^2, D^2 \right\} V^b(p). \quad (3.2.41)$$

A contribuição total dos fantasmas a $\Gamma_{VV}^{(1)}$ é a soma de (3.2.37), (3.2.38) e (3.2.40),

$$\Gamma_G = -\frac{2}{3} Q_1 - L_1^P + L_3^P + TF. \quad (3.2.42)$$

Vale ressaltar que as integrais logaritmicamente divergentes que definimos até agora, (3.2.30), (3.2.33) e (3.2.41), obedecem à seguinte relação,

$$L_1^P = L_2^P + L_3^P. \quad (3.2.43)$$

Vamos agora calcular as contribuições da matéria à $\Gamma_{VV}^{(1)}$. Os diagramas correspondentes aparecem na figura 21. Exceto por fatores numéricos, seu cálculo é idêntico ao dos correspondentes diagramas de fantasmas, já que $c, c', (\bar{c}, \bar{c}')$ e $\Phi^i (\bar{\Phi}^i)$ são supercampos quirais (antiquirais). A amplitude associada ao diagrama M1 é

$$\Gamma_{M1} = 2Q_0. \quad (3.2.44)$$

Já para M2, encontramos $\Gamma_{M2} = -4\Gamma_{G3} = -2\Gamma_{B1}$, ou seja,

$$\Gamma_{M2} = -4Q_1 + 2L_1^P + TF. \quad (3.2.45)$$

Portanto, cada supercampo de matéria contribui

$$\Gamma_{M1} + \Gamma_{M2} = 2(Q_0 - 2Q_1 + L_1^P) + TF \quad (3.2.46)$$

a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$. Em particular, na teoria com supersimetria estendida $\mathcal{N} = 4$, temos três campos de matéria e, por isso, a contribuição total da matéria a $\Gamma_{VV}^{(1)}$ é

$$\Gamma_M = 3 \times (\Gamma_{M1} + \Gamma_{M2}). \quad (3.2.47)$$

Podemos agora discutir a estrutura das divergências que encontramos em $\Gamma_{VV}^{(1)}$. Começamos enfocando as divergências ultravioletas, apenas encontradas na parte planar de $\Gamma_{VV}^{(1)}$. No que se refere a estas, as quadráticas são eliminadas por qualquer regularização que preserve a simetria de calibre e as lineares por integração simétrica. O que resta são divergências UV logarítmicas que, para $\mathcal{N} = 1, 2$, devem absorvidas por renormalização. Já para $\mathcal{N} = 4$, vemos de (3.2.34), (3.2.42), (3.2.47) e (3.2.43) que

$$\left[\Gamma_{VV}^{(1)} \right]_{UV \text{ logarítmica}} = 2(1 - a)L_1^P + \frac{1}{3}(1 - a)L_0. \quad (3.2.48)$$

Como no caso comutativo [79, 92], a teoria com supersimetria $\mathcal{N} = 4$ torna-se livre de divergências ultravioletas no calibre de Feynman ($a = 1$).

Vamos nos concentrar agora na parte não-planar de $\Gamma_{VV}^{(1)}$ que, devido à não-comutatividade, não apresenta divergências ultravioletas mas desenvolve singularidades infravermelhas UV/IR. Como no modelo $U(1)$ [84], o fator trigonométrico associado a cada diagrama é uma função par do momento de integração k e, portanto, $\Gamma_{VV}^{(1)}$ não apresenta divergências UV/IR lineares.

As únicas divergências infravermelhas UV/IR perigosas são as quadráticas, contidas nas partes não-planares de Q_1 e Q_0 . Somando as contribuições dos laços de V e de fantasmas (equações (3.2.34) e (3.2.42)), concluímos que

$$\left[\Gamma_A^{NP} + \Gamma_B^{NP} + \Gamma_G^{NP} \right]_{UV/IR \text{ quadrática}} = -Q_0^{NP} + 2Q_1^{NP}, \quad (3.2.49)$$

enquanto que, para *cada* campo quiral de matéria (equação (3.2.46)),

$$\left[\Gamma_{M1}^{NP} + \Gamma_{M2}^{NP} \right]_{UV/IR \text{ quadrática}} = 2Q_0^{NP} - 4Q_1^{NP}. \quad (3.2.50)$$

Vemos que a função de dois pontos se torna livre de divergências infravermelhas UV/IR se

$$\frac{1}{2}Q_0^{NP} = Q_1^{NP}, \quad (3.2.51)$$

tanto para $\mathcal{N} = 1$ quanto para a teoria com supersimetria estendida. Em vista de (3.2.5) e

(3.2.26), a relação (3.2.51) é equivalente a

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (F_T^{NP})_{be} \int d^4\theta V^b(p) V^e(-p) = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (F_L^{NP})_{be} \int d^4\theta V^b(p) V^e(-p). \quad (3.2.52)$$

De acordo com (3.2.4) e (3.2.22), uma condição suficiente para que (3.2.52) seja satisfeita é

$$\text{Tr}(T_a T_b T_a T_e) = 2 \text{Tr}(T_a T_b T_c) \text{Tr}(T_a T_e T_c). \quad (3.2.53)$$

Utilizando a relação (3.0.7), podemos facilmente concluir que (3.2.53) é de fato verificada como uma identidade.

O principal resultado que obtivemos nesta seção [93] é que o cancelamento de singularidades infravermelhas UV/IR nas correções quânticas a $\Gamma_{VV}^{(1)}$ depende de uma relação entre traços dos geradores, expressa pela equação (3.2.53). Vemos que a escolha da representação fundamental para os geradores do grupo de calibre, mandatária para garantir o fechamento da álgebra do grupo no nível clássico, garante também a segurança infravermelha das correções quânticas. Verificamos explicitamente que (3.2.53) é violada em duas representações de dimensionalidade maior que $N \times N$ para $U(2)$ e $U(3)$. Acreditamos que a representação fundamental é a única que satisfaz (3.2.53), embora não foi possível obter uma prova geral desse fato.

A pergunta natural é se novas relações entre traços dos geradores do grupo serão necessárias para o cancelamento de divergências infravermelhas UV/IR nas restantes funções de vértice da teoria – e se todas essas relações serão satisfeitas na representação fundamental. Uma resposta completa a esse problema parece impraticável, mas podemos investigar a função de vértice de três pontos de V para obter ao menos uma resposta parcial. É isso que faremos na próxima seção.

3.3 A função de vértice de três pontos da NCSYM

Nesta seção, iremos analisar as divergências infravermelhas UV/IR que aparecem em $\Gamma_{VVV}^{(1)}$, a primeira correção quântica à função de vértice de três pontos de V . Devido à complexidade do cálculo, só levaremos em consideração os termos que apresentam divergências dominantes – ou seja, contagem de potências quadrática. Uma abordagem completa exigiria, como mostramos para o caso $U(1)$ na seção 2.6, o estudo das divergências subdominantes. Esse cálculo, no caso da NCSYM, não parece ser possível sem o auxílio do computador. Já durante o trabalho apresentado nesta seção, os fatores trigonométricos associados aos superdiagramas que consideramos foram calculados manualmente e posteriormente comparados com o resultado de um programa escrito numa linguagem de programação adequada para manipulações simbólicas [94].

As topologias envolvendo um laço do supercampo V que contribuem a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ são apresen-

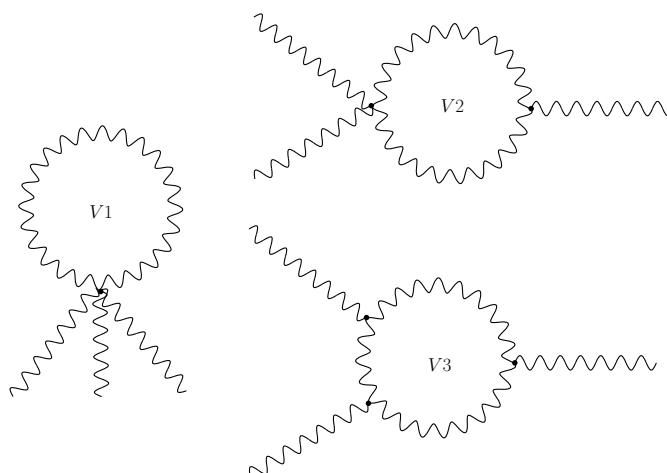


FIGURA 22: Contribuições a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$ envolvendo um laço do supercampo V .

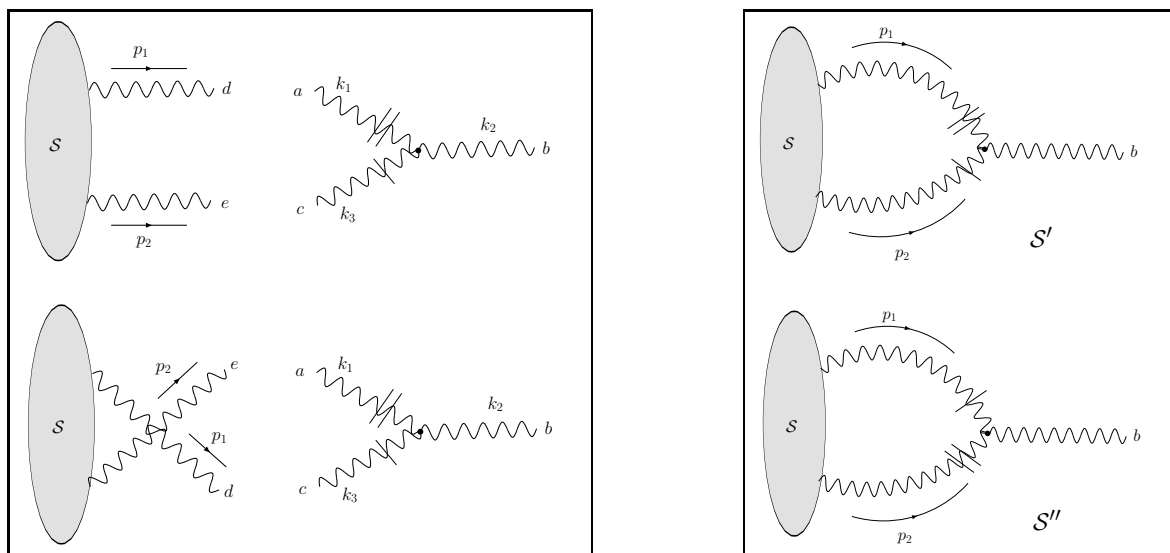


FIGURA 23: Propriedade anti-simétrica envolvendo o vértice $(\overline{D}^2 DV^a)V^b(DV^c)$: à esquerda, as duas formas de contrair S com o referido vértice, à direita, os dois diagramas finais assim obtidos. As singularidades dominantes de S' e S'' diferem apenas por um sinal.

tadas na figura 22: como vamos nos restringir às contribuições com contagem de potências quadrática, só temos que considerar aqueles em que todas as derivadas espinoriais covariantes estão aplicadas nas linhas internas (ver equação (2.4.3)). Isso reduz drasticamente o número de diagramas que precisamos considerar. Por exemplo, considerando a topologia V_1 da figura 22 encontramos uma contribuição da forma

$$\Gamma_{V_1} = \left(-\frac{ig^3}{24}\right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta (F_{V_1})_{abcde} \left(-\delta^{ae} \frac{2i}{k^2}\right) \mathbb{D}_\theta^{V_1} + TP. \quad (3.3.1)$$

O fator trigonométrico F_{V_1} pode ser calculado de (3.1.10). A parte não planar de F_{V_1} , responsável pelo aparecimento de singularidades infravermelhas UV/IR, é proporcional a

$$e^{-ip_2 \wedge p_3} \left[A_{dabdc} e^{2ik \wedge p_3} - A_{dadbc} e^{-2ik \wedge p_1} \right]. \quad (3.3.2)$$

Com o auxílio da integral

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{2ik \wedge p}}{k^2} = \frac{1}{4\pi^2 p \circ p}, \quad (3.3.3)$$

após simetrização nos momentos externos, concluímos que as singularidades infravermelhas UV/IR quadráticas originadas de Γ_{V_1} se cancelam.

Para as topologias V_2 e V_3 da figura 22, a ausência de singularidades infravermelhas UV/IR dominantes é consequência de uma propriedade de anti-simetria do vértice trilinear $(\overline{D}^2 DV^a) V^b (DV^c)$: a troca das duas linhas contraídas com os fatores que contêm derivadas do referido vértice, num dado superdiagrama, implica numa mudança de sinal da parte dominante da amplitude correspondente. Essa propriedade permite, por exemplo, concluir imediatamente que

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \\ + \\ \text{Diagrama 2} \end{array} \right]_{\text{UV/IR dominantes}} = 0, \quad (3.3.4)$$

devido à diferença na posição das derivadas covariantes no vértice da direita.

Para entender a origem dessa anti-simetria, considere um (sub)supergráfico \mathcal{S} com duas linhas, $V^d(p_1)$ e $V^e(p_2)$, que serão contraídas com o vértice $(\overline{D}^2 DV^a) V^b (DV^c)$ (ver a parte da esquerda da figura 23). A amplitude associada a \mathcal{S} será esquematicamente escrita como

$$(\dots)_{de} V^d(p_1) V^e(p_2). \quad (3.3.5)$$

Como estamos considerando divergências dominantes, vamos contrair $V^d(p_1)$ e $V^e(p_2)$ apenas com os fatores envolvendo derivadas do vértice trilinear, caso contrário sobriariam derivadas espinoriais covariantes nas linhas externas do superdiagrama final, o que implicaria numa redução do grau de divergência. Existem duas formas de realizar esta operação, conforme indicado na figura 23:

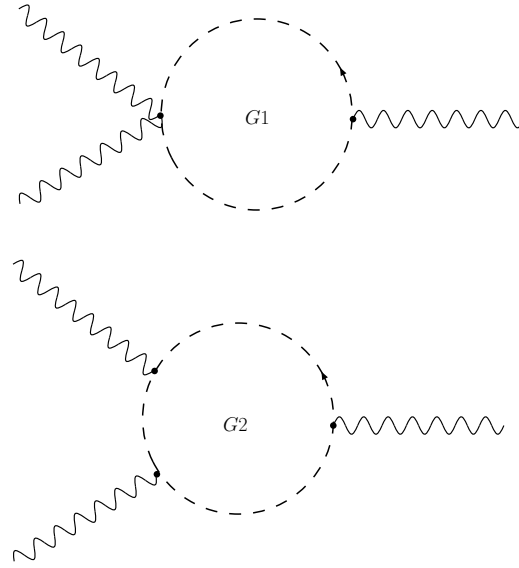


FIGURA 24: Contribuições de fantasmas a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$.

1. V^d é contraído com $\overline{D}^2 DV^a$ e V^e com DV^c . A amplitude do diagrama resultante \mathcal{S}' é

$$[\dots]_{de} \delta^{da} \delta^{ec} \left[e^{ip_1 \wedge p_2} A_{abc} - e^{-ip_1 \wedge p_2} A_{acb} \right] = [\dots]_{de} \left[e^{ip_1 \wedge p_2} A_{dbe} - e^{-ip_1 \wedge p_2} A_{deb} \right]. \quad (3.3.6)$$

2. V^d é contraído com DV^c e V^e com $\overline{D}^2 DV^a$. A amplitude do diagrama resultante \mathcal{S}'' é

$$[\dots]_{de} \delta^{dc} \delta^{ea} \left[e^{ip_2 \wedge p_1} A_{abc} - e^{-ip_2 \wedge p_1} A_{acb} \right] = -[\dots]_{de} \left[e^{ip_1 \wedge p_2} A_{dbe} - e^{-ip_1 \wedge p_2} A_{deb} \right]. \quad (3.3.7)$$

É possível mostrar que a mudança de sinal de (3.3.6) para (3.3.7) é a única diferença entre os termos dominantes das amplitudes associadas aos diagramas \mathcal{S}' e \mathcal{S}'' . Todas as divergências dominantes associadas às topologias $V2$ e $V3$ da figura 22 se cancelam aos pares por serem originadas de diagramas que diferem entre si pela posição das derivadas espinoriais covariantes nos vértices trilineares, como acontece na equação (3.3.4).

Quanto às contribuições dos fantasmas às divergências dominantes de $\Gamma_{VVV}^{(1)}$, elas se originam das topologias indicadas na figura 24 e se cancelam aos pares como consequência direta das regras de Feynman apresentadas na seção 3.1.

Vamos agora considerar laços de matéria que podem contribuir com divergências quadráticas a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$. A amplitude associada a $M1$ é proporcional àquela correspondendo a $V1$ da figura 22 e, como já vimos, sua parte não-planar se anula.

Para a parte não-planar do fator trigonométrico corresponde à topologia $M2$ encontramos

$$\begin{aligned} (F_{M2})_{eabdec} &= e^{-i(2k \wedge p_3 + p_1 \wedge p_2)} A_{cabd} A_{ecd} - e^{-i(-2k \wedge p_3 + p_1 \wedge p_2)} A_{dabe} A_{dce} \\ &- 2e^{-i(-2k \wedge p_1 - p_1 \wedge p_2)} A_{eadb} A_{ecd} + 2e^{-i(2k \wedge p_2 - p_1 \wedge p_2)} A_{eadb} A_{dce}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

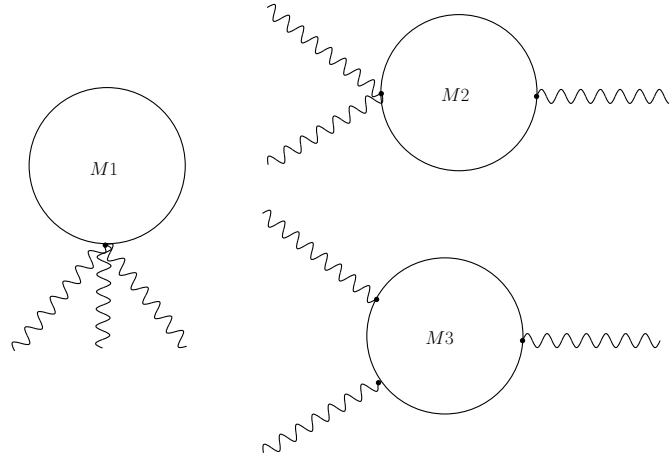


FIGURA 25: Contribuições de matéria a $\Gamma_{VVV}^{(1)}$.

A soma dos dois primeiros termos é uma função ímpar do momento de integração k e, portanto, não pode contribuir para as divergências dominantes². Estas vêm apenas dos dois últimos termos. A parte não-planar da amplitude correspondente a $M2$, contendo singularidades UV/IR dominantes, portanto, é proporcional a

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \left(e^{-i(2k \wedge p_1 - p_1 \wedge p_2)} A_{eadb} A_{ecd} - e^{-i(2k \wedge p_2 - p_1 \wedge p_2)} A_{eadb} A_{dce} \right) + TP = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} e^{i p_1 \wedge p_2} \left(\frac{A_{eadb} A_{ecd}}{p_1 \circ p_1} - \frac{A_{eadb} A_{dce}}{p_2 \circ p_2} \right) + TP. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Após efetuar a simetrização dos momentos externos, chegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2\pi^2} \sin(p_1 \wedge p_2) \left[\frac{1}{p_1 \circ p_1} (A_{eadb} A_{ecd} - A_{eadc} A_{ebd}) + \frac{1}{p_2 \circ p_2} (A_{ebdc} A_{ead} - A_{ebda} A_{ecd}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{p_3 \circ p_3} (A_{ecda} A_{ebd} - A_{ecdb} A_{ead}) \right] \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

para o membro direito de (3.3.9). Percebemos que as correspondentes singularidades infravermelhas UV/IR se anulam se

$$\text{Tr}(T_d T_a T_e T_b) \text{Tr}(T_d T_c T_e) = \text{Tr}(T_d T_a T_e T_c) \text{Tr}(T_d T_b T_e). \quad (3.3.11)$$

Novamente, é possível constatar, usando (3.0.7), que (3.3.11) é satisfeita quando os geradores do grupo de calibre estão na representação fundamental de $U(N)$.

Finalmente, para a topologia $M3$, envolvendo três vértices trilineares de matéria, o mecanismo UV/IR não origina singularidades infravermelhas dominantes devido a um mecanismo semelhante ao descrito em conexão a $V2$ e $V3$ da figura 22.

Concluimos que a ausência das divergências infravermelhas UV/IR dominantes de $\Gamma_{VVV}^{(1)}$

²Mas teria que ser levada em conta numa análise que incluísse singularidades subdominantes.

depende de uma relação envolvendo traços dos geradores do grupo de calibre, equação (3.3.11). Observe que essa relação é bastante diferente da obtida na função de vértice de dois pontos, equação (3.2.53). Em ambos os casos, a escolha da representação fundamental garante a segurança infravermelha das correções quânticas à ação efetiva.

4 *Conclusões*

O interesse pelas TQCNC teve um grande impulso com a descoberta de sua relação com a teoria de cordas. Dentre os muitos modelos não-comutativos estudados na literatura recente, as teorias de calibre são de particular relevância pela possibilidade de definir uma generalização não-comutativa para o modelo padrão [65], mas muito ainda está por se entender sobre a consistência das teorias de calibre não-comutativas. Uma questão fundamental ainda não esclarecida é se a mistura UV/IR pode invalidar a teoria de perturbações, pois singularidades infravermelhas UV/IR não-integráveis são encontradas em modelos de calibre não-comutativos tanto Abelianos quanto não-Abelianos [61, 63] e nenhuma prova de renormalizabilidade a todas as ordens foi apresentada até o momento. Um caminho bastante promissor para evitar que a mistura UV/IR inviabilize a definição perturbativa da teoria de campos é a introdução da supersimetria, já que a renormalizabilidade de vários modelos supersimétricos já foi provada tanto em três [44–46] quanto em quatro [41] dimensões espaço-temporais. Por isso o objeto de estudo desta tese são as teorias de calibre supersimétricas não-comutativas.

Passamos agora a comentar algumas das contribuições originais apresentadas nesta tese. Elas estão contidas nos capítulos 2 e 3, onde apresentamos um estudo detalhado das correções quânticas de um laço às funções de vértice de dois e três pontos da teoria de calibre supersimétrica não-comutativa Abeliana (NCSQED) [84] e da teoria não-Abeliana com grupo de calibre $\mathcal{U}(N)$ (NCSYM) [93], em quatro dimensões espaço-temporais.

Do ponto de vista técnico, destacamos a implementação sistemática da formulação covariante de supercampos em nossos cálculos. Como explicamos na seção 2.6, a utilização deste formalismo é fundamental para esclarecer a estrutura das singularidades infravermelhas UV/IR e também mostrou-se consideravelmente mais complexo do que a adoção do método de campo de fundo em trabalhos já existentes na literatura [71–73]. Isto acontece porque as funções de vértice do tensor intensidade de campo de fundo apresentam contagem de potências no máximo logarítmica. No nosso caso, todas as funções de vértice possuem contagem de potência quadrática, implicando na necessidade de calcular divergências dominantes e subdominantes, em particular lineares. A existência destas singularidades infravermelhas UV/IR lineares e suas conseqüências na teoria não haviam sido, até então, percebidas.

Do ponto de vista conceitual, nossos resultados indicam que a supersimetria é um ingrediente essencial para garantir a consistência perturbativa de modelos de calibre não-comutativos. Mostramos que as singularidades infravermelhas UV/IR não-integráveis nas funções de vértice de dois e três pontos se cancelam na NCSQED. No caso da função de três pontos, esse cancelamento acontece num calibre particular e notamos a similaridade deste resultado com um conhecido fato da eletrodinâmica quântica, em que as funções de Green têm seu comportamento infravermelho melhorado no calibre de Yennie. Na teoria não-Abeliana, mostramos que a ausência de singularidades UV/IR indesejáveis nas correções quânticas depende crucialmente da escolha do grupo de calibre e de sua representação. A escolha da representação fundamental de $U(N)$, que é compatível com os requerimentos já conhecidos no nível clássico [59], garante a eliminação dos problemas devidos à mistura UV/IR. Também verificamos explicitamente que a função de dois pontos na teoria com supersimetria estendida $\mathcal{N} = 4$ é livre de divergências ultravioletas, no calibre de Feynman. Isso está de acordo com as expectativas de que essas teorias, assim como no caso comutativo, sejam finitas [95, 96].

Embora ainda não seja possível dar uma palavra definitiva quanto a renormalizabilidade desses modelos a todas as ordens da teoria de perturbações, os resultados obtidos a um laço são promissores. O cálculo, dentro do formalismo covariante de supercampos, de funções de vértice de mais pontos seria uma extensão natural desses estudos. Seria importante averiguar se estas também são livres de singularidades infravermelhas UV/IR não-integráveis no mesmo calibre encontrado na seção 2.6 em relação à função de três-pontos. Na teoria não-Abeliana, novas relações envolvendo traços dos geradores do grupo de calibre, a exemplo das que foram encontradas na seção 3, também são esperados, e elas precisam ser satisfeitas pela representação fundamental de $U(N)$. A invariância de calibre da função de quatro pontos no formalismo de campo de fundo é não-trivial [85] e por isso o estudo das identidades de Ward na formulação covariante também seria desejável. A complexidade dos cálculos envolvidos, porém, exigirá o uso sistemático de algoritmos computacionais como os que já foram utilizados para verificar algumas das expressões que obtivemos no caso da NCSYM.

A ausência de singularidades UV/IR não-integráveis nas teorias de calibre supersimétricas não-comutativas que apresentamos fortalece a idéia de que modelos supersimétricos são candidatos promissores a TQCNC consistentes – no sentido de serem renormalizáveis, satisfazendo condições básicas como unitariedade e causalidade, e livres das graves conseqüências da mistura UV/IR em ordens mais altas da teoria de perturbações. Por fim, para estudos similares aos apresentados nesta tese, considerando teorias de calibre supersimétricas não-comutativas num espaço-tempo de três dimensões, citamos [97, 98].

APÊNDICE A – Convenções e definições

Como não existe uniformidade na escolha de convenções na literatura básica disponível sobre o superespaço [74,75], julgamos adequado apresentar, neste apêndice, uma listagem das definições e convenções adotadas nos cálculos apresentados nesta tese.

A.1 Espinores num espaço-tempo de quatro dimensões

Representamos por \mathcal{L}_+^\uparrow o grupo de Lorentz restrito, ou seja, o grupo das transformações com determinante unitário que deixam a forma quadrática $x_\mu x^\mu$ invariante [99]. Assumimos a métrica do espaço-tempo como sendo $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, de forma que $x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - (\vec{x})^2$. Em quatro dimensões, \mathcal{L}_+^\uparrow é isomorfo ao grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e possui duas representações bidimensionais não-equivalentes [100],

$$\begin{cases} D^{(\frac{1}{2}, 0)}(\omega, \nu) = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\omega} - i\nu\vec{v})\right) \\ D^{(0, \frac{1}{2})}(\omega, \nu) = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\omega} + i\nu\vec{v})\right) \end{cases} \quad (A.1.1)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli e ω_i e ν_i são parâmetros para as rotações tridimensionais e *boosts*, respectivamente. Designamos uma coleção de dois campos, ψ ($\alpha = 1, 2$), um espinor de Weyl desde que o vetor coluna

$$\begin{bmatrix} \psi(1) \\ \psi(2) \end{bmatrix} \quad (A.1.2)$$

se transforme sob \mathcal{L}_+^\uparrow com uma das matrizes (A.1.1),

$$\begin{bmatrix} \psi(1) \\ \psi(2) \end{bmatrix}' = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\omega} \mp i\nu\vec{v})\right) \begin{bmatrix} \psi(1) \\ \psi(2) \end{bmatrix}. \quad (A.1.3)$$

Temos, portanto, duas espécies de espinores, chamados de *pontuados* ou *não-pontuados*, que se transformam segundo

$$\psi'_\alpha = \left[D^{(\frac{1}{2}, 0)}(\omega, \nu) \right]_\alpha^\beta \psi_\beta \quad (A.1.4a)$$

$$\bar{\psi}'^{\dot{\alpha}'} = \left[D^{(0, \frac{1}{2})}(\omega, \nu) \right]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad (A.1.4b)$$

Pode-se mostrar, a partir da relação $(D^{(\frac{1}{2},0)})^\dagger = (D^{(0,\frac{1}{2})})^{-1}$, que espinores pontuados se transformam como o complexo conjugado de espinores não-pontuados e vice-versa. Escolheremos sempre letras gregas do princípio do alfabeto para indicar índices espinoriais.

Utilizaremos para subir e descer índices espinoriais o tensor anti-simétrico $\varepsilon^{\alpha\beta}$, normalizado segundo

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon^{12} = -1, \quad (\text{A.1.5})$$

de forma a satisfazer

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta} = \varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon^{\gamma\alpha} = \delta^\alpha_\beta. \quad (\text{A.1.6})$$

A nossa convenção para a subida e descida de índices é [74, 101],

$$\begin{cases} \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \\ \psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \end{cases}. \quad (\text{A.1.7})$$

O tensor $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, encarregado de subir e descer índices de espinores pontuados, é definido de maneira análoga, com $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\beta}$.

Precisaremos também dos símbolos

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} = (\mathbf{1}, \vec{\sigma}), \quad (\text{A.1.8})$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} = (\mathbf{1}, -\vec{\sigma}), \quad (\text{A.1.9})$$

envolvendo as matrizes de Pauli $\vec{\sigma} \equiv (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$. A partir deles introduzimos as notações

$$k_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}k_\mu, \quad (\text{A.1.10})$$

$$k^{\dot{\alpha}\alpha} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}k_\mu. \quad (\text{A.1.11})$$

Por fim, da relação

$$\text{Tr}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.12})$$

vem que

$$k_{\alpha\dot{\alpha}}k^{\dot{\alpha}\alpha} = 2k^2. \quad (\text{A.1.13})$$

A.2 Variáveis de Grassmann

Estaremos sempre trabalhando com espinores que realizam uma álgebra de Grassmann [102],

$$\theta_\alpha\theta_\beta = -\theta_\beta\theta_\alpha \quad (\text{A.2.1a})$$

$$(\theta_\alpha\theta_\beta)^* = \theta_\beta^*\theta_\alpha^* \quad (\text{A.2.1b})$$

Em nosso caso, $\alpha, \beta = 1, 2$. Uma consequência direta de (A.2.1) é que $(\theta_\alpha)^2 = 0$ e, portanto,

$$\theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \dots \theta^{\alpha_n} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}_1} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}_2} \dots \bar{\theta}^{\dot{\alpha}_n} = 0 \quad \forall n > 2. \quad (\text{A.2.2})$$

Construímos um escalar não-nulo a partir de um espinor da seguinte maneira,

$$\theta^2 \equiv \theta\theta \equiv \frac{1}{2} \theta^\alpha \theta_\alpha, \quad (\text{A.2.3a})$$

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}\bar{\theta} \equiv \frac{1}{2} \theta_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.2.3b})$$

A derivada numa álgebra de Grassmann é definida pelas relações,

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \theta_\alpha} \theta_\beta = \theta_\beta \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha} = \delta^\alpha_\beta, \quad (\text{A.2.4a})$$

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \theta^\alpha} \theta^\beta = \theta^\beta \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^\alpha} = \delta^\beta_\alpha, \quad (\text{A.2.4b})$$

e pela regra de Leibnitz. Usualmente usaremos a notação abreviada $\vec{\partial}_\alpha = \frac{\vec{\partial}}{\partial \theta^\alpha}$ e $\overleftarrow{\partial}_\alpha = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\alpha}$ para indicar a derivação pela esquerda e pela direita, respectivamente. Definições idênticas são aplicadas para espinores pontuados.

As integrais sobre variáveis de Grassmann são, por definição, translacionalmente invariantes e dependem linearmente do integrando. Adotando a normalização de Berezin [103] temos que¹

$$\int d\theta_\alpha = 0, \quad (\text{A.2.5a})$$

$$\int d\theta_\alpha \theta_\alpha = 1. \quad (\text{A.2.5b})$$

Note que, com esta normalização, a integral sobre variáveis de Grassmann é equivalente à correspondente derivada,

$$\int d\theta_\alpha f(\theta_\alpha, \theta_\beta, \dots) = \frac{\vec{\partial}}{\partial \theta_\alpha} f(\theta_\alpha, \theta_\beta, \dots). \quad (\text{A.2.6})$$

Funções delta são definidas pela relação,

$$\int d\theta_\alpha f(\theta_\alpha, \theta_\beta, \dots) \delta(\theta_\alpha) = f(\theta_\alpha = 0, \theta_\beta, \dots), \quad (\text{A.2.7})$$

que admite como solução

$$\delta(\theta_\alpha) = \theta_\alpha. \quad (\text{A.2.8})$$

¹Repare que, nesta e nas expressões seguintes, os índices repetidos *não estão* somados.

Finalmente, a integração por partes decorre de (A.2.6) e da regra de Leibnitz,

$$\int d\theta_\alpha \Lambda \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \theta_\alpha} \Omega \right) = -(-1)^{n_\Lambda} \int d\theta_\alpha \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \theta_\alpha} \Lambda \right) \Omega. \quad (\text{A.2.9})$$

A.3 Superespaço e supercampos

A álgebra supersimétrica, que na sua forma mais simples ($\mathcal{N} = 1$, sem cargas centrais) é dada por [101, 104]

$$[Q_\alpha, L_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \quad (\text{A.3.1a})$$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = 0, \quad (\text{A.3.1b})$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad (\text{A.3.1c})$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \quad (\text{A.3.1d})$$

pode ser realizada através de operadores diferenciais no superespaço, que é uma variedade diferenciável parametrizada pelas supercoordenadas z^A ,

$$z^A = (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}), \quad (\text{A.3.2})$$

em que x^μ é um tetra-vetor, θ_α um espinor de Weyl e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = (\theta^\alpha)^*$. O gerador de supersimetria no superespaço é escrito como

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu. \quad (\text{A.3.3})$$

Funções arbitrárias da supercoordenada z^A são chamadas de supercampos. O efeito de uma transformação supersimétrica sobre o supercampo $F(z) = F(x, \theta, \bar{\theta})$ é dado por

$$F'(z') = e^{i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})} F(z). \quad (\text{A.3.4})$$

A transformação (A.3.4) corresponde a uma translação $z \rightarrow z'$, onde

$$x'^\mu = x^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \quad (\text{A.3.5a})$$

$$\theta' = \theta + \xi, \quad (\text{A.3.5b})$$

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\xi}. \quad (\text{A.3.5c})$$

Um supercampo arbitrário $F(x, \theta, \bar{\theta})$ possui um desenvolvimento em potências de θ e $\bar{\theta}$,

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta h(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} j(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta} g_\mu(x) \\ & + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\eta(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta d(x), \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

com um número finito de termos em vista da propriedade (A.2.2). Os coeficientes de cada

termo são funções de x conhecidas como *campos componentes* de F .

As derivadas espinoriais covariantes²

$$D_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \theta^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right), \quad (\text{A.3.7a})$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\partial_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \right), \quad (\text{A.3.7b})$$

são definidas de forma a satisfazer a álgebra

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{D_{\dot{\alpha}}, D_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (\text{A.3.8a})$$

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = -i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \partial_\mu = -i\bar{\partial}_{\alpha\dot{\beta}}, \quad (\text{A.3.8b})$$

$$\{D_\alpha, Q_\alpha\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 0. \quad (\text{A.3.8c})$$

Consistentemente com (A.2.3), escrevemos

$$D^2 = \frac{1}{2} D^\alpha D_\alpha, \quad (\text{A.3.9a})$$

$$\bar{D}^2 = \frac{1}{2} \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.3.9b})$$

e conseqüentemente,

$$D^\alpha D_\beta = \delta_\beta^\alpha D^2, \quad (\text{A.3.10a})$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{D}^2. \quad (\text{A.3.10b})$$

Além disso, da álgebra (A.3.8) vêm as relações

$$[D^2, \bar{D}_{\dot{\alpha}}] = -i\bar{\partial}_{\alpha\dot{\alpha}} D^\alpha, \quad (\text{A.3.11a})$$

$$[\bar{D}^2, D_\alpha] = +i\bar{\partial}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.3.11b})$$

$$[D^2, \bar{D}^2] = -\square + i\bar{\partial}_{\alpha\dot{\alpha}} D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.3.11c})$$

$$[\bar{D}^2, D^2] = -\square + i\bar{\partial}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^\alpha, \quad (\text{A.3.11d})$$

as quais jogam um papel fundamental no cálculo de superdiagramas (veja apêndice B).

Para definir a integração no superespaço é conveniente introduzir as seguintes medidas,

$$d^2\theta = -\frac{1}{2} d\theta^\alpha d\theta_\alpha, \quad (\text{A.3.12a})$$

$$d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{2} d\theta_{\dot{\alpha}} d\theta^{\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.3.12b})$$

²Quando não houver risco de confusão, vamos também chamá-las simplesmente de derivadas covariantes.

normalizadas de forma que

$$\int \delta^2(\theta) d^2\theta = \int \theta^2 d^2\theta = 1, \quad (\text{A.3.13a})$$

$$\int \delta^2(\bar{\theta}) d^2\bar{\theta} = \int \bar{\theta}^2 d^2\bar{\theta} = 1. \quad (\text{A.3.13b})$$

Também é convencional introduzir a função delta no superespaço,

$$\delta^8(z-z') \equiv \delta^4(x-x') \delta^2(\theta-\theta') \delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}'), \quad (\text{A.3.14})$$

que satisfaz

$$\int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \delta^8(z-z') = 1. \quad (\text{A.3.15})$$

Finalmente, dada uma função arbitrária \mathcal{F} do supercampo $F(z)$ e de suas derivadas,

$$\int d^8z \mathcal{F} \left[F(z), \partial_\mu F(z), \partial_\mu \partial_\nu F(z), \dots, D_\alpha F(z), \bar{D}^{\dot{\alpha}} F(z), \dots \right] \quad (\text{A.3.16})$$

define a sua integral no superespaço. Esta operação naturalmente define um invariante supersimétrico. Lembrando que a integral sobre uma variável de Grassmann é equivalente à correspondente derivada e substituindo $F(z)$ por seu desenvolvimento em campos componentes, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d^8z \mathcal{F} [F(z)] &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \right) \mathcal{F} [F(z)] \\ &= \int d^4x \mathcal{L} [f(x), \phi(x), \bar{\chi}(x), \dots], \end{aligned} \quad (\text{A.3.17})$$

onde \mathcal{L} depende *unicamente* dos campos componentes e não de θ ou $\bar{\theta}$. Desse modo, \mathcal{L} pode ser entendida como uma Lagrangiana que especifica a dinâmica dos campos componentes $f(x)$, $\phi(x)$, etc... Como o membro da esquerda da equação (A.3.17) é um invariante frente às transformações de supersimetria (A.3.4), a ação $\int d^4x \mathcal{L} [f(x), \phi(x), \bar{\chi}(x), \dots]$ define uma teoria supersimétrica para as componentes de $F(z)$.

A.4 Supercampos quirais e vetoriais

O supercampo geral da equação (A.3.6) carrega uma representação redutível da supersimetria $\mathcal{N} = 1$. Podemos reduzir os graus de liberdade de um supercampo impondo vínculos que sejam compatíveis com a supersimetria. Uma possibilidade é considerar a condição $V(z) = V^*(z)$ já que um supercampo real, após uma transformação supersimétrica, permanece

real. A partir de (A.3.6) podemos mostrar que a forma mais geral para $V(z)$ é

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + [\theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\phi}(x)] + [\theta \theta j(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} j^*(x)] \\ & + \theta^2 \bar{\theta} \left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2} \sigma^\mu \partial_\mu \phi \right] + \bar{\theta}^2 \theta \left[\lambda(x) + \frac{i}{2} \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\phi} \right] \\ & + \bar{\theta}^2 \theta^2 \left[d(x) - \frac{1}{4} \square f(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.4.1})$$

onde $A_\mu(x)$, $f(x)$ e $d(x)$ são funções reais. Por conter um campo vetorial real como um de seus componentes, $V(z)$ é apropriado para a construção de uma teoria de calibre no superespaço.

Por outro lado, um supercampo $\Phi(z)$ que satisfaz

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(z) = 0, \quad (\text{A.4.2})$$

pode ser escrito como

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\theta \partial \bar{\theta}} [a(x) + \theta \chi(x) + \theta^2 h(x)] \quad (\text{A.4.3})$$

e é chamado de *supercampo quiral*. Um supercampo anti-quiral $\bar{\Xi}(z)$, por sua vez, satisfaz³

$$D_\alpha \bar{\Xi}(z) = 0. \quad (\text{A.4.4})$$

Campos quirais e anti-quirais carregam a menor representação da álgebra (A.3.1) em quatro dimensões. Eles são utilizados para acoplar matéria à teoria de calibre definida no superespaço.

De (A.3.7) pode-se mostrar que, a menos de termos de superfície,

$$\int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} = \int d^4x d^2\theta (-\bar{D}^2), \quad (\text{A.4.5})$$

e portanto

$$\int d^8z \Phi(z) = \int d^4x d^2\theta (-\bar{D}^2) \Phi(z) = 0, \quad (\text{A.4.6})$$

ou seja, a integral no superespaço de um supercampo quiral se anula. Para definir invariantes supersimétricos a partir de supercampos quirais, é convencional introduzir a medida de integração

$$d^6z \equiv d^4x d^2\theta, \quad (\text{A.4.7})$$

de tal forma que, se $C[F(z)]$ for uma função genérica do supercampo $F(z)$ satisfazendo

³Pode-se mostrar que, com a escolha de coordenadas $z = (x, \theta, \bar{\theta})$ que fizemos para o superespaço, o conjugado complexo de um supercampo quiral é anti-quiral e vice-versa. Dessa forma, a barra sobre um supercampo irá indicar indistintamente sua anti-quiralidade e o fato de ser o conjugado complexo de um supercampo quiral, $\bar{\Phi}(z) = \Phi^*(z)$.

$\overline{DC} [F(z)] = 0$, a expressão

$$\int d^6z C [F(z)] \equiv \int d^4x d^2\theta C [F(z)] , \quad (\text{A.4.8})$$

define um invariante supersimétrico. De forma similar, podemos definir uma medida de integração $d^6\overline{z} \equiv d^4x d^4\overline{\theta}$ que permite integrar uma função anti-quiral $\overline{C} [F(z)]$.

A.5 Teorias quânticas de supercampos

A quantização de uma teoria definida no superespaço geralmente é feita através do método funcional, que pode ser generalizado para o caso de teorias definidas no superespaço [74]. Neste método de quantização, o principal objeto de interesse é a ação efetiva. Podemos encontrar um conjunto de regras de Feynman para o cálculo da ação efetiva de uma teoria definida por um funcional ação $S [F]$ da forma

$$S [F] = \int d^8z \left(\frac{1}{2} F(z) \mathcal{O}(z) F(z) + \lambda \mathcal{L}_{\text{int}} [F(z), \partial F(z), DF(z), \dots] \right), \quad (\text{A.5.1})$$

onde \mathcal{O} é um operador diferencial que pode envolver derivadas espaço-temporais e/ou derivadas espinoriais covariantes e $\lambda \ll 1$ é uma constante de acoplamento adimensional.

O funcional gerador das funções de Green conectadas, $\mathcal{W} [J]$, é definido por

$$e^{i\mathcal{W}[J]} = N_0 \int [\mathcal{D}F] e^{iS[F] + i \int d^8z F(z) J(z)}, \quad (\text{A.5.2})$$

onde o supercampo $J(z)$ faz o papel da fonte de $F(z)$, $[\mathcal{D}F]$ é a medida da integração funcional e N_0 é uma constante de normalização escolhida tal que

$$\mathcal{W} [0] = 0. \quad (\text{A.5.3})$$

Para obter a ação efetiva, começamos definindo o campo clássico

$$F_c(z) \equiv F_c [J|z] \equiv \frac{\delta \mathcal{W} [J]}{\delta J(z)}, \quad (\text{A.5.4})$$

onde a notação $F_c [J|z]$ indica que F_c depende funcionalmente de J e ao mesmo tempo é uma função da supercoordenada z . Supomos que seja possível inverter a relação (A.5.4) e obter J como um funcional de F_c ,

$$J_c(z) = J_c [F_c|z]. \quad (\text{A.5.5})$$

Obtemos assim a ação efetiva, denotada por Γ , como a transformação de Legendre de $\mathcal{W} [J]$,

$$\Gamma [F_c] = \mathcal{W} [J_c] - \int d^8z_1 J_c(z) F_c(z). \quad (\text{A.5.6})$$

A funcional $\Gamma [F_c]$ tem a propriedade fundamental de gerar os diagramas próprios (ou

irredutíveis de uma partícula⁴) da teoria. Se consideramos $\Gamma [F_c]$ em termos de seu desenvolvimento⁵

$$\Gamma [F_c] = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \int dz_1 \cdots dz_n \Gamma^{(n)}(z_1, \cdots, z_n) F_c(z_1) \cdots F_c(z_n), \quad (\text{A.5.7})$$

o coeficiente $\Gamma^{(n)}(z_1, \cdots, z_n)$ será chamado função de vértice de n -pontos do supercampo F_c .

É possível relacionar as funções de vértices da teoria com as funções de Green conectadas [64] e dessa relação obtemos um método para o cálculo perturbativo da ação efetiva Γ : para calcular uma função de vértice de n -pontos, começamos somando todos os diagramas irredutíveis de uma partícula que contribuem à função conectada de n -pontos. Após, cada linha externa é amputada, multiplicando-se pela inversa do propagador correspondente, e é multiplicada por um fator $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} F_c(p)$, onde F_c é o supercampo clássico que corresponde àquela linha. A vantagem desse procedimento é que as regras de Feynman para o cálculo das funções conectadas podem ser lidas diretamente da ação de partida (A.5.1). Este método é justamente o que empregaremos para calcular a ação efetiva de teorias definidas no superespaço.

⁴Também chamados usualmente de diagramas 1PI, de *one particle irreducible*.

⁵Note que o desenvolvimento começa em $n = 2$ devido a (A.5.3) e à equação de movimento para Γ na ausência de fontes, $\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta F_c} \right|_{J=0} = 0$.

APÊNDICE B – O cálculo detalhado de um superdiagrama

Nesta seção detalharemos o cálculo do superdiagrama 6b apresentado na seção 2.5, exibindo assim as peculiaridades do cálculo da ação efetiva na formulação covariante de supercampos. Por simplicidade, trabalharemos no calibre de Feynman¹, no qual a ação da NCSQED escreve-se

$$S = \frac{1}{2} \int d^8z V \square V + \frac{g}{2} \int d^8z \bar{D}^2 D^\alpha V * [V, D_\alpha V]_* + \dots, \quad (\text{B.0.1})$$

omitindo todos os termos que não contribuem a esse cálculo em particular.

As regras de Feynman no espaço de configuração podem ser lidas diretamente da ação (B.0.1), sendo o propagador dado por

$$\Delta_{VV}(z_1 - z_2) = \frac{i}{\square} \delta^8(z_1 - z_2). \quad (\text{B.0.2})$$

Já para o vértice, fazemos uso da relação (1.2.14) da página 9 para escrever

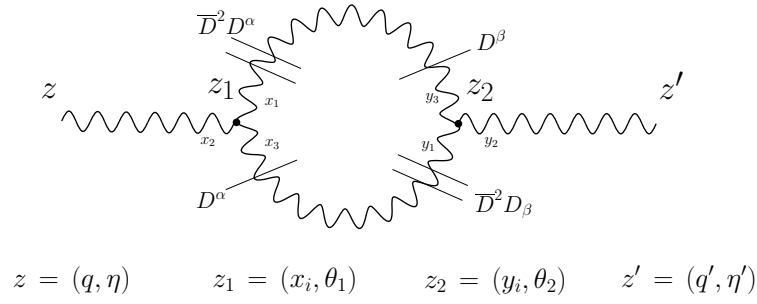
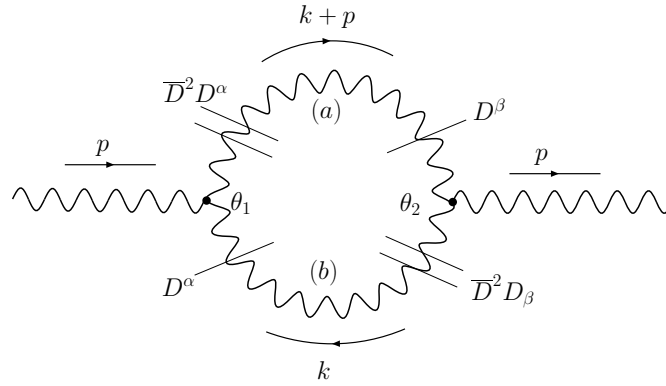
$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4\theta \bar{D}^2 D^\alpha V * [V, D_\alpha V]_* = \\ & = \int \left(\prod_{i=1}^3 d^4x_i \right) d^4\theta V(x_1, x_2, x_3) \left(\bar{D}^2 D^\alpha V(x_1) V(x_2) D_\alpha V(x_3) - \bar{D}^2 D^\alpha V(x_1) D_\alpha V(x_2) V(x_3) \right) \\ & = \int \left(\prod_{i=1}^3 d^4x_i \right) d^4\theta \hat{\mathcal{V}}_3(x_1, x_2, x_3) \bar{D}^2 D^\alpha V(x_1) V(x_2) D_\alpha V(x_3), \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

onde

$$\hat{\mathcal{V}}_3(x_1, x_2, x_3) \equiv V(x_1, x_2, x_3) - V(x_1, x_3, x_2). \quad (\text{B.0.4})$$

Devido ao fato do vértice não ser simétrico, o cálculo da amplitude associada a uma topologia como a da figura 26 envolve a soma de vários superdiagramas, correspondendo a todas as formas de contrair as linhas de cada vértice. Para essa topologia em particular, são doze permutações, como indicado na figura 18 da página 60. Vamos nos concentrar em particular no superdiagrama que chamamos de 6b na seção 2.5, reproduzido novamente na figura 26. A contribuição deste à função conectada de dois pontos, no espaço de configuração, é obtida

¹Na seção 2.5 mostramos que este diagrama é, de fato, independente de calibre.


FIGURA 26: Diagrama 6b, espaço de configuração.

FIGURA 27: Diagrama 6b, espaço dos momentos.

diretamente a partir das regras de Feynman,

$$\begin{aligned}
 G_2 = & \frac{1}{2} \left(\frac{ig}{2} \right)^2 \int \left(\prod_{i=1}^3 dx_i \right) d^4\theta_1 \left(\prod_{i=1}^3 dy_i \right) d^4\theta_2 \hat{\mathcal{V}}_3(x_1, x_2, x_3) \hat{\mathcal{V}}_3(y_1, y_2, y_3) \times \\
 & \times \bar{D}_1^2 D_1^\alpha D_2^\beta \Delta_{VV}(z_1 - z_2) \bar{D}_2^2 D_{\beta 2} D_{\alpha 1} \Delta_{VV}(z_2 - z_1) \Delta_{VV}(z - z_1) \Delta_{VV}(z' - z_1) \\
 & + (z \leftrightarrow z'), \quad (\text{B.0.5})
 \end{aligned}$$

onde fica subentendido que as derivadas espinoriais covariantes atuam apenas na função que está imediatamente a sua direita e na variável indicada pelo sub-índice².

Para escrever a expressão (B.0.5) no espaço dos momentos utilizamos que

$$\Delta_{VV}(z - z') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \Delta_{VV}(k, \theta - \theta'), \quad (\text{B.0.6})$$

$$\hat{\mathcal{V}}_3(x_1, x_2, x_3) = \int \left(\prod_{i=1}^3 \frac{d^4q_i}{(2\pi)^4} \right) e^{i \sum q_i x_i} \hat{\mathcal{V}}_3(k_1, k_2, k_3), \quad (\text{B.0.7})$$

²Teríamos um fator adicional (-1) se a ordem em que essas derivadas são escritas for uma permutação ímpar da ordem em que elas apareciam originalmente na ação. Em termos práticos, contamos quantas trocas de posição são necessárias para levar a seqüência de derivadas que escrevemos a uma em que todos os índices espinoriais saturados estejam adjacentes e contraídos na ordem convencional, de cima para baixo no caso de espinores não-pontuados, e de baixo para cima, no caso de espinores pontuados: se este número for ímpar, o fator (-1) tem que ser incluído.

onde

$$\Delta_{VV}(k, \theta - \theta') = -\frac{i}{k^2} \delta^4(\theta - \theta') \quad (\text{B.0.8})$$

e

$$\begin{aligned} \hat{V}_3(k_1, k_2, k_3) &= (2\pi)^4 \delta\left(\sum k_i\right) \left[e^{-ik_1 \wedge k_2} - e^{-ik_2 \wedge k_1} \right] \\ &= (2\pi)^4 \delta\left(\sum k_i\right) (-2i \sin k_1 \wedge k_2). \end{aligned} \quad (\text{B.0.9})$$

Como, ao efetuarmos a transformação de Fourier dos propagadores, as derivadas espinoriais covariantes que neles atuam passam a depender dos momentos, introduzimos a notação

$$D_\alpha(k) \equiv \partial_\alpha - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \not{k}_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\text{B.0.10a})$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(k) \equiv -\partial_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \not{k}_{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (\text{B.0.10b})$$

Após efetuar as transformações de Fourier chegamos a

$$G_2(z - z') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(q - q')} G_2(p), \quad (\text{B.0.11})$$

onde

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta_1 d^4 \theta_2 \left(-\sin^2 k \wedge p \right) \bar{D}_1^2 D_1^\alpha(k + p) D_2^\beta(-k - p) \Delta_{VV}(k + p, \theta_1 - \theta_2) \times \\ &\quad \times \bar{D}_2^2 D_{\beta 2}(k) D_{\alpha 1}(-k) \Delta_{VV}(k, \theta_2 - \theta_1) \Delta_{VV}(p, \eta - \theta_1) \Delta_{VV}(-p, \eta' - \theta_2) + (p \rightarrow -p) \end{aligned} \quad (\text{B.0.12})$$

é a amplitude do diagrama 6b no espaço dos momentos. Para encontrar a correspondente contribuição à função de vértice de dois pontos, cada linha externa é truncada, multiplicada pelo campo correspondente e, ao final, integramos no momento externo. Fazendo também uso de (B.0.8), chegamos a

$$\Gamma_2 = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Gamma_2(p), \quad (\text{B.0.13})$$

em que

$$\begin{aligned} \Gamma_2(p) &= \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta_1 d^4 \theta_2 \left[\frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 (k + p)^2} \right] \bar{D}_1^2 D_1^\alpha(k + p) D_2^\beta(-k - p) \delta_a^4(\theta_1 - \theta_2) \times \\ &\quad \times \bar{D}_2^2 D_{\beta 2}(k) D_{\alpha 1}(-k) \delta_b^4(\theta_2 - \theta_1) V(p, \theta_1) V(-p, \theta_2) + (p \rightarrow -p). \end{aligned} \quad (\text{B.0.14})$$

Observamos que a expressão acima pode ser obtida diretamente a partir do diagrama no espaço de momentos, figura 27, através das regras de Feynman listadas na figura 28.

O passo seguinte consiste em explorar a álgebra das derivadas covariantes para simplificar (B.0.14). Para isso, é conveniente antes levar todas elas a atuarem na mesma variável, o que

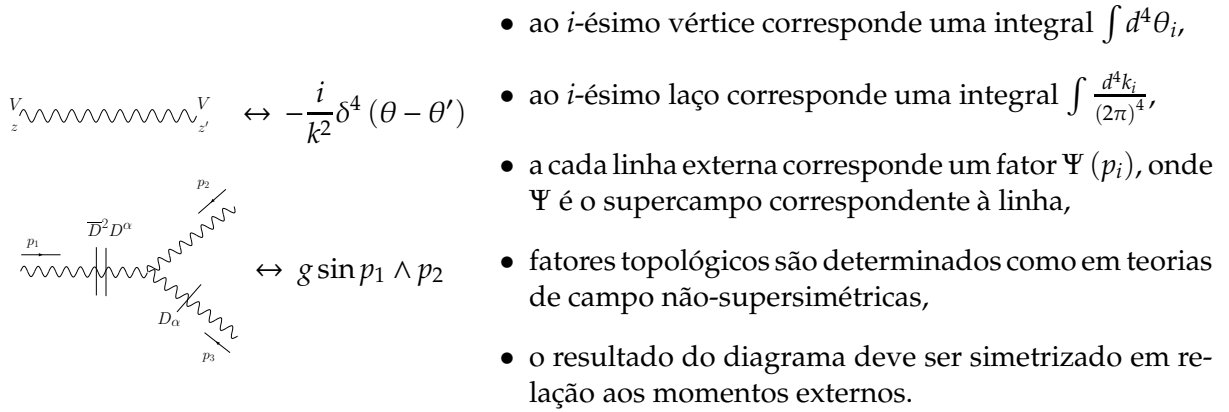


FIGURA 28: Regras de Feynman no espaço dos momentos.

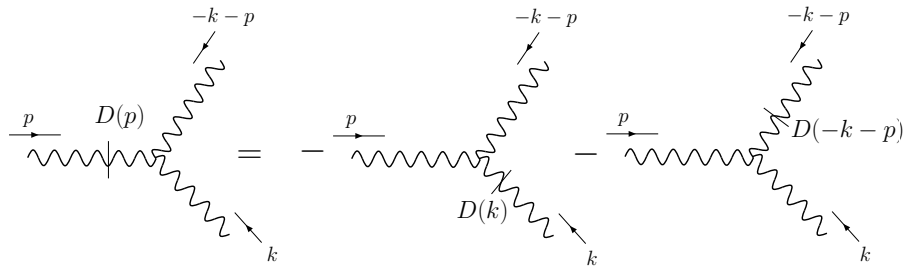


FIGURA 29: Integração por partes de uma derivada covariante no espaço dos momentos.

é feito utilizando-se as propriedades³

$$D_1^\alpha(k) \delta^4(\theta_1 - \theta_2) = -D_2^\alpha(-k) \delta^4(\theta_1 - \theta_2) , \quad (\text{B.0.16})$$

$$D_1^2(k) \delta^4(\theta_1 - \theta_2) = +D_2^2(-k) \delta^4(\theta_1 - \theta_2) , \quad (\text{B.0.17})$$

e similarmente para \bar{D} . Naturalmente, precisaremos também integrar por partes. A conservação de momento garante que a dependência das derivadas covariantes no momento da linha em que atuam é preservada nesta operação, ou seja,

$$\int d^4\theta [D_\alpha(p) V(p)] V(k) V(-k-p) = - \int d^4\theta V(p) [D_\alpha(k) V(k)] V(-k-p) - \int d^4\theta V(p) V(k) [D_\alpha(-k-p) V(-k-p)] , \quad (\text{B.0.18})$$

relação representada graficamente na figura 29. Resumindo: em todas as operações que faremos, as derivadas espinoriais covariantes carregam o momento da linha em que estão atuando e por isso vamos, de ora em diante, suprimir sua dependência explícita nesta variável. Para

³Assim como as derivadas espaço-temporais, a derivada grassmaniana também satisfaz

$$\partial_1^\alpha \delta^4(\theta_1 - \theta_2) = -\partial_2^\alpha \delta^4(\theta_1 - \theta_2) . \quad (\text{B.0.15})$$

distinguir a qual linha corresponde cada função delta em (B.0.14) utilizamos os índices (a), (b). Além disso, introduzimos a notação

$$\delta_{12}^{(i)} \equiv \delta_i^4 (\theta_1 - \theta_2) , \quad (\text{B.0.19})$$

onde $i = a, b$.

Lembrando que as derivadas espinoriais covariantes que atuam em variáveis diferentes anticomutam, podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{D}_1^2 D_1^\alpha D_2^\beta \delta_{12}^{(a)} \bar{D}_2^2 D_{\beta 2} D_{\alpha 1} \delta_{21}^{(b)} &= \bar{D}_1^2 D_1^\alpha \left[-D_1^\beta \right] \delta_{12}^{(a)} \left[+D_{\alpha 1} D_{\beta 1} \bar{D}_1^2 \right] \delta_{21}^{(b)} \\ &= -\delta_\beta^\alpha \delta_a^b \bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^{(a)} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} \\ &= -2 \bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^{(a)} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} , \end{aligned} \quad (\text{B.0.20})$$

onde usamos (A.3.10) na linha intermediária. Chegamos assim a

$$\begin{aligned} \Gamma_2(p) &= \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 \theta_1 d^4 \theta_2 \left[\frac{\sin^2(k \wedge p)}{k^2 (k+p)^2} \right] \left[-2 \bar{D}_1^2 D_1^2 \delta_{12}^{(a)} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} \right] \times \\ &\quad \times V(p, \theta_1) V(-p, \theta_2) + (p \rightarrow -p) . \end{aligned} \quad (\text{B.0.21})$$

A seguir, integramos por partes as derivadas que atuam em $\delta_{12}^{(a)}$. Quando essas derivadas se aplicam em $D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)}$, geram potências de momento no numerador através das relações

$$\bar{D}_1 D_1 D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} = \{ \bar{D}_1, D_1 \} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} = \not{k} D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} , \quad (\text{B.0.22a})$$

$$\bar{D}_1^2 D_1^2 D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} = \left[\bar{D}_1^2, D_1^2 \right] D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} = k^2 D_1^2 \bar{D}_1^2 \delta_{21}^{(b)} , \quad (\text{B.0.22b})$$

conseqüências diretas da álgebra (A.3.8) e de (A.3.11)⁴. Note que $+k$ é precisamente o momento associado à linha (b) no vértice 1. Após liberar $\delta_{21}^{(a)}$ de todas as derivadas, a relação

$$\begin{aligned} \delta^4 (\theta_1 - \theta_2) D^m \bar{D}^n \delta^4 (\theta_2 - \theta_1) &= \\ &= \delta^4 (\theta_1 - \theta_2) \bar{D}^m D^n \delta^4 (\theta_2 - \theta_1) = \begin{cases} \delta^4 (\theta_1 - \theta_2) , & m = n = 2 \\ 0 , & \text{outros casos} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.0.23})$$

nos deixa com uma delta livre, que pode ser utilizada para efetuar a integração em $d^4 \theta_2$. Fica restando uma única integração em θ , de forma que a contribuição que calculamos à ação efetiva é local em θ , propriedade comum a todas as funções de vértice calculadas no formalismo covariante de supercampos⁵. Dizemos que a equação (B.0.23) nos permite reduzir um laço de

⁴Adotamos a seguinte convenção: sempre que não indicarmos explicitamente, os índices de \not{k} estão abaixados. Assim, por exemplo, $\not{k} D \bar{D} \equiv k_{\alpha\dot{\alpha}} D^\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}}$.

⁵Este é o chamado *teorema de não-renormalização* das teorias formuladas no superespaço.

variáveis θ a um ponto. O resultado final a que chegamos é, portanto,

$$\Gamma_2(p) = \frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \sin^2(k \wedge p) \left[\frac{1}{k^2 (k+p)^2} \right] \times \\ \times \left[-2V(-p, \theta) \left(k^2 + \not{k} D\bar{D} + D^2\bar{D}^2 \right) V(p, \theta) \right] + (p \rightarrow -p), \quad (\text{B.0.24})$$

que coincide com a expressão (2.5.9) da seção 2.5.

Referências

- [1] GARAY, L. Quantum gravity and minimum length. *Int. J. Mod. Phys. A.*, Singapore, v. 10, n. 2, p. 145–166, Jan. 1995.
- [2] DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. E. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.*, Heidelberg, v. 172, n. 1, p. 187–220, Aug. 1995.
- [3] YONEYA, T. String theory and space-time uncertainty principle. *Prog. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 103, n. 6, p. 1081–1125, June 2000.
- [4] SNYDER, H. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, Ridge, v. 71, n. 1, p. 38–41, Jan. 1947.
- [5] SNYDER, H. The electromagnetic field in quantized space-time. *Phys. Rev.*, Ridge, v. 72, n. 1, p. 68–71, July 1947.
- [6] JACKIW, R. Physical instances of noncommuting coordinates. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, Amsterdam, v. 108, p. 30–36, Apr. 2002.
- [7] FILK, T. Divergencies in a field theory on quantum space. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 376, n. 1, p. 53–58, May 1996.
- [8] CONNES, A. *Noncommutative geometry*. London: Academic Press, 1994.
- [9] CONNES, A.; LOTT, J. Particle models and non commutative geometry. *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.*, Amsterdam, v. 18, n. 2, p. 29–47, Jan. 1991.
- [10] GRACIA-BONDIA, J. M. Noncommutative geometry and fundamental interactions: the first ten years. *Annalen Phys.*, Berlin, v. 11, n. 7, p. 479–495, Aug. 2002.
- [11] BIGATTI, D. Non-commutative spaces in physics and mathematics. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0006012>>. Acesso em: 1 nov. 2004.
- [12] WITTEN, E. Non-commutative geometry and string field theory. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 268, n. 2, p. 253–294, May 1986.
- [13] DOUGLAS, M.; HULL, C. D-branes and the noncommutative torus. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 2, 8 5p., Feb. 1998.
- [14] ARDALAN, F.; ARFAEI, H.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative geometry from strings and branes. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 2, 16 20p., Feb. 1999.
- [15] CHU, C. S.; HO, P. M. Noncommutative open string and d-brane. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 550, n. 1-2, p. 151–168, June 1999.
- [16] SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 9, 32 99p., Sept. 1999.
- [17] SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rept.*, Ridge, v. 378, n. 4, p. 207–299, May 2003.

- [18] DOUGLAS, M. R.; NEKRASOV, N. A. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, v. 73, n. 4, p. 977–1029, Oct. 2001.
- [19] GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum field theories. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0301237>>. Acesso em: 01 set. 2004.
- [20] LIZZI, F.; MANGANO, G.; MIELE, G.; SPARANO, G. Inflationary cosmology from non-commutative geometry. *Int. J. Mod. Phys. A*, Singapore, v. 11, n. 16, p. 2907–2930, June 1996.
- [21] CHU, C.-S.; GREENE, B. R.; SHIU, G. Remarks on inflation and noncommutative geometry. *Mod. Phys. Lett. A*, Singapore, v. 16, n. 34, p. 2231–2240, Oct. 2001.
- [22] CARMONA, J. M.; CORTES, J.; GAMBOA, J.; MENDEZ, F. Noncommutativity in field space and lorentz invariance violation. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 565, p. 222–228, July 2003.
- [23] HINCHLIFFE, I.; KERSTING, N.; MA, Y. Review of the phenomenology of noncommutative geometry. *Int. J. Mod. Phys. A*, Singapore, v. 19, n. 2, p. 179–204, Jan. 2004.
- [24] WEYL, H. *The theory of groups and QM*. Princeton: Dover, 1950.
- [25] GROENEWOLD, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, New York, v. 12, n. 7, p. 405–460, Oct. 1946.
- [26] MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, New York, v. 45, n. 1, p. 99–124, 1949.
- [27] POLCHINSKI, J. *String Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [28] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics*. New York: Pergamon, 1958.
- [29] MAGRO, G. Noncommuting coordinates in the landau problem. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0302001>>. Acesso em: 1 nov. de 2004.
- [30] GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum mechanics. *Am. J. Phys.*, Kalamazoo, v. 72, n. 1, p. 1–5, Jan. 2004.
- [31] FRADKIN, E. S.; TSEYTLIN, A. A. Non-linear electrodynamics from quantized strings. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 163, n. 1-4, p. 123–130, Nov. 1985.
- [32] ABOUELSAOOD, A.; CALLAN, C. G.; NAPPI, C. R.; YOST, S. A. Open strings in background gauge fields. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 280, n. 4, p. 599–624, Apr. 1987.
- [33] CALLAN, C. G.; LOVELACE, C.; NAPPI, C. R.; YOST, S. A. String loop corrections to beta functions. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 288, n. 3-4, p. 525–550, July 1987.
- [34] GREEN, M. B.; SCHARWZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [35] MINWALLA, S.; RAAMSDONK, M. V.; SEIBERG, N. Noncommutative perturbative dynamics. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 2, 20 30p., Feb. 2000.
- [36] GRADSHTEYN, I. S.; RYSHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. London: Academic Press, 1980.
- [37] AREF'EVA, I. Y.; BELOV, D. M.; KOSHELEV, A. S. Two-loop diagrams in noncommutative ϕ^4 theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 476, n. 3-4, p. 431–436, Mar. 2000.

- [38] POLCHINSKI, J. Renormalization and effective lagrangians. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 231, n. 2, p. 269–295, Jan. 1984.
- [39] GRIGUOLO, L.; PIETRONI, M. Wilsonian renormalization group and the non-commutative IR/UV connection. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 5, 32 27p., May 2001.
- [40] GRIGUOLO, L.; PIETRONI, M. Hard non-commutative loops resummation. *Phys. Rev. Lett. B*, Ridge, v. 88, n. 7, p. 071601, Feb. 2002.
- [41] GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; RIVELLES, V. O.; DA SILVA, A. J. A consistent noncommutative field theory: The Wess-Zumino model. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 587, n. 1-3, p. 299–310, Oct. 2000.
- [42] WESS, J.; ZUMINO, B. Supergauge transformations in four dimensions. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 70, n. 1, p. 39–50, Feb. 1974.
- [43] ILIOPOULOS, J.; ZUMINO, B. Broken supergauge symmetry and renormalization. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 76, n. 2, p. 310–332, July 1974.
- [44] GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIVELLES, V. O.; DA SILVA, A. J. The three-dimensional noncommutative nonlinear sigma model in superspace. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 521, n. 1-2, p. 119–126, Nov. 2001.
- [45] GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; RIVELLES, V. O.; DA SILVA, A. J. The noncommutative supersymmetric nonlinear sigma model. *Int. J. Mod. Phys. A.*, Singapore, v. 17, n. 11, p. 1503–1516, Apr. 2002.
- [46] GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIVELLES, V. O.; DA SILVA, A. J. Spontaneous symmetry breaking in noncommutative field theories. *Phys. Rev. D.*, Ridge, v. 67, n. 12, 125003 12p., June 2003.
- [47] GOMIS, J.; MEHEN, T. Space-time noncommutative field theories and unitarity. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 591, n. 1-2, p. 265–276, Dec. 2000.
- [48] BASSETTO, A.; L.GRIGUOLO; NARDELLI, G.; VIAN, F. On the unitarity of quantum gauge theories on non-commutative spaces. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 7, 8 27p., July 2001.
- [49] SEIBERG, N.; SUSSKIND, L.; TOUMBAS, N. Space/time non-commutativity and causality. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 6, 44 19p., June 2000.
- [50] AHARONY, O.; GOMIS, J.; MEHEN, T. On theories with light-like noncommutativity. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 9, 23 15p., Sept. 2000.
- [51] BAHNS, D.; DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; PIACITELLI, G. On the unitarity problem in space/time noncommutative theories. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 533, n. 1-2, p. 178–181, May 2002.
- [52] LIAO, Y.; SIBOLD, K. Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime: basic rules. *Eur. Phys. J. C*, Hamburg, v. 25, n. 3, p. 469–477, Oct. 2002.
- [53] LIAO, Y.; SIBOLD, K. Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime ii: unitarity. *Eur. Phys. J. C*, Hamburg, v. 25, n. 3, p. 479–486, Oct. 2002.
- [54] MORITA, K.; OKUMURA, Y.; UMEZAWA, E. Lorentz invariance and unitarity problem in non-commutative field theory. *Progr. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 110, n. 5, p. 989–1001, Nov. 2003.
- [55] MARCUS, N.; SAGNOTTI, A. Tree-level constraints on gauge groups for type I superstrings. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 119, n. 1-3, p. 97–99, Dec. 1982.

- [56] SCHWARZ, J. Superstring theory. *Phys. Rept.*, v. 89, n. 3, p. 223–322, Sept. 1982.
- [57] MATSUBARA, K. Restrictions on gauge groups in noncommutative gauge theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 482, n. 4, p. 417–419, June 2000.
- [58] TERASHIMA, S. A note on superfields and noncommutative geometry. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 482, n. 1-3, p. 276–282, June 2000.
- [59] CHAICHIAN, M.; PRESNAJDER, P.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Noncommutative gauge field theories: A no-go theorem. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 526, n. 1-2, p. 132–136, Jan. 2002.
- [60] SHEIKH-JABBARI, M. M. Renormalizability of the supersymmetric yang-mills theories on the noncommutative torus. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 6, 15 16p., June 1999.
- [61] HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on \mathbb{R}^4 . *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 478, n. 1-3, p. 394–400, Apr. 2000.
- [62] HAYAKAWA, M. Perturbative ultraviolet and infrared dynamics of noncommutative quantum field theory. Disponível em: <<http://arxiv.org/hep-th/0009098>>. Acesso em: 01 ago. 2004.
- [63] BONORA, L.; SALIZZONI, M. Renormalization of noncommutative $U(N)$ gauge theories. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 504, n. 1, p. 80–88, Apr. 2001.
- [64] ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [65] CHAICHIAN, M.; PRESNAJDER, P.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Noncommutative standard model: Model building. *Eur. Phys. J. C*, Hamburg, v. 29, n. 3, p. 413–432, July 2003.
- [66] MATUSIS, A.; SUSSKIND, L.; TOUMBAS, N. The IR/UV connection in the noncommutative gauge theories. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 12, 2 17p., Dec. 2000.
- [67] CHU, C.-S.; ZAMORA, F. Manifest supersymmetry in non-commutative geometry. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 2, 22 18p., Feb. 2000.
- [68] SEIBERG, N. Noncommutative superspace, $N=1/2$ supersymmetry, field theory and string theory. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 6, 10 19p., June 2003.
- [69] GRISARU, M. T.; PENATI, S.; ROMAGNONI, A. Two-loop renormalization for nonanti-commutative $N=1/2$ supersymmetric WZ model. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 8, 3 36p., Oct. 2003.
- [70] LUNIN, O.; REY, S.-J. Renormalizability of non(anti)commutative gauge theories with $N=1/2$ supersymmetry. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 9, 45 21p., Sept. 2003.
- [71] ZANON, D. Noncommutative perturbation in superspace. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 504, n. 1-2, p. 101–108, Apr. 2001.
- [72] SANTAMBROGIO, A.; ZANON, D. One-loop four-point function in noncommutative $N=4$ Yang-Mills theory. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 1, 24 14p., Jan. 2001.
- [73] ZANON, D. Noncommutative $N=1,2$ super $U(N)$ Yang-Mills: UV/IR mixing and effective action results at one loop. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 502, n. 1-4, p. 265–273, Mar. 2001.

- [74] BUCHBINDER, I. L.; KUZENKO, S. M. *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity*. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1995.
- [75] GRISARU, M. T.; GATES JR., S. J.; ROCEK, M.; SIEGEL, W. *Superspace or One thousand and one lessons in supersymmetry*. New York: Benjamin/Cummings, 1983. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0108200>>. Acesso em: 01 Aug. 2004.
- [76] WESS, J.; ZUMINO, B. Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 78, n. 1, p. 1–13, Aug. 1974.
- [77] FERRARA, S.; PIGUET, O. Perturbation theory and renormalization of supersymmetric Yang-Mills theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 93, n. 2, p. 261–302, July 1975.
- [78] CLARK, T. E.; PIGUET, O.; SIBOLD, K. Renormalization theory in superspace. *Ann. of Phys.*, New York, v. 109, n. 2, p. 418–467, Dec. 1977.
- [79] JUER, J. W.; STOREY, D. One-loop renormalization of superfield Yang-Mills theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 216, n. 1, p. 185–208, Apr. 1983.
- [80] PIGUET, O.; SIBOLD, K. The off-shell infrared problem in N=1 supersymmetric Yang-Mills theories. I, Pure super Yang Mills. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 248, n. 2, p. 336–364, Dec. 1984.
- [81] PIGUET, O.; SIBOLD, K. Gauge independence in N=1 supersymmetric Yang-Mills theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 248, n. 2, p. 301–335, Dec. 1984.
- [82] PIGUET, O.; SIBOLD, K. The off-shell infrared problem in N=1 supersymmetric Yang-Mills theories. II, General massless models. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 249, n. 3, p. 396–412, Jan. 1985.
- [83] BICHL, A. A.; ERTL, M.; GERHOLD, A.; GRIMSTRUP, J. M.; GROSSE, H.; POPP, L.; PUTZ, V.; SCHWEDA, M.; WULKENHAAR, R. Non-commutative U(1) super-Yang-Mills theory: Perturbative self-energy corrections. *Int. J. Mod. Phys. A*, Singapore, v. 19, n. 25, p. 4231–4250, Oct. 2004.
- [84] FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V.; DA SILVA, A. J. Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric QED₄. *Phys. Rev. D*, Ridge, v. 69, n. 2, 025008 15p., Jan. 2004.
- [85] PERNICI, M.; SANTAMBROGIO, A.; ZANON, D. The one-loop effective action of non-commutative N=4 super Yang-Mills is gauge invariant. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 504, n. 1-2, p. 131–140, Apr. 2001.
- [86] LIU, H.; MICHELSON, J. *-Trek: The one-loop N=4 noncommutative SYM action. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 614, n. 1-2, p. 279–304, Oct. 2001.
- [87] LIU, H. *-Trek II: *n operations, open Wilson lines and the Seiberg-Witten map. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 614, n. 1-2, p. 305–329, Oct. 2001.
- [88] LEVELL, J.; TRAVAGLINI, G. Effective actions, Wilson lines and the IR/UV mixing in noncommutative supersymmetric gauge theories. *J. High En. Phys.*, Bristol, v. 3, 21 17p., Mar. 2004.
- [89] YENNIE, D. R.; FRAUTSCHI, S. C.; SUURA, H. The infrared divergence phenomena and high-energy processes. *Ann. of Phys.*, New York, v. 13, n. June, p. 379–452, 3 1961.

- [90] ADKINS, G.; LYMBEROPOULOS, M.; VELKOV, D. One-loop vertex functions in Yennie gauge QED. *Phys. Rev.*, Ridge, v. 50, n. 6, p. 4194–4200, Sept. 1994.
- [91] BONORA, L.; SCHNABL, M.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TOMASIELLO, A. Noncommutative $SO(n)$ and $Sp(n)$ gauge theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 589, n. 1-2, p. 461–474, Nov. 2000.
- [92] STOREY, D. General gauge calculations in $N=4$ super Yang-Mills theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 105, n. 2-3, p. 171–173, Oct. 1981.
- [93] FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V.; DA SILVA, A. J. Towards a consistent noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory: Superfield covariant analysis. *Phys. Rev. D*, Ridge, v. 70, n. 8, 085012 11p., Oct. 2004.
- [94] VERMASEREN, J. A. M. New features of FORM. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/math-ph/0010025>>. Acesso em: 01 set. 2004.
- [95] JACK, I.; JONES, D. R. T. Ultraviolet finite noncommutative theories. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 514, n. 3-4, p. 401–406, Aug. 2001.
- [96] JACK, I.; JONES, D. R. T. Ultra-violet finiteness in noncommutative supersymmetric theories. *New J. Phys.*, Bristol, v. 3, p. 19, Nov. 2001.
- [97] FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; DA SILVA, A. J. On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED₃ in the covariant superfield formulation. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 577, n. 1-2, p. 83–92, Dec. 2003.
- [98] FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; DA SILVA, A. J. On the consistency of the three-dimensional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 601, n. 1-2, p. 88–92, Oct. 2004.
- [99] STREATER, R. F.; WIGHTMAN, A. S. *PCT, Spin & Statistics, and all that*. New York: W. A. Benjamin, 1964.
- [100] RAMOND, P. *Field Theory: a modern primer*. New York: Addison-Wesley, 1998.
- [101] WESS, J.; BAGGER, J. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton: Princeton University Press, 1982.
- [102] SUNDERMEYER, K. *Constrained Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- [103] BEREZIN, F. A. *The method of second quantization*. New York: Academic Press, 1966.
- [104] HAAG, R.; LOPUSZANSKI, J. T.; SOHNIUS, M. All possible generators of supersymmetries of the S-matrix. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 88, n. 2, p. 257–274, Mar. 1975.