

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Uma Nova Assinatura para Glueballs *

Mário Luiz Lopes da Silva

Dissertação realizada sob orientação do Professor Dr. César Augusto Zen Vasconcellos (IF-UFRGS) e co-orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichief (IFM-UFPEL) e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
Maio de 2004.

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Este trabalho é dedicado

a meus pais, Zilá e Boneval,
pelo apoio e incentivo que
sempre me deram,

agradeço antes de tudo a Deus.

Agradecimentos

★ Ao meu orientador Prof. Cesar Augusto Zen Vasconcellos, pela confiança no meu trabalho, pelos questionamentos e discussões que foram muito importantes para a realização deste trabalho.

★ Ao meu amigo e co-orientador Prof. Dimiter Hadjimichef, pela ajuda com o formalismo de Fock-Tani e na organização desta dissertação, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

★ À minha família pelo apoio, amor e principalmente compreensão pela minha ausência.

★ Aos amigos que fiz durante a graduação na UFPel.

★ Aos meus amigos da sala M204 e das demais salas que contribuíram para uma agradável convivência no IF-UFRGS.

★ Aos meus amigos não-físicos.

★ Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFPel, que deram todo o incentivo para que este sonho se tornasse realidade.

★ Aos professores e funcionários do IF-UFRGS, que de alguma forma contribuíram para a minha formação e para a realização deste trabalho.

Muito Obrigado

Resumo

A representação de Fock-Tani é um formalismo de teoria de campos para tratar problemas envolvendo simultaneamente partículas compostas e seus constituintes. O formalismo foi originalmente desenvolvido para tratar problemas de física atômica e mais tarde estendido para problemas da física hadrônica. Nesta dissertação, inicialmente apresentamos uma revisão da Cromodinâmica Quântica e dos modelos de quarks e de glúons constituintes. Revisamos também a representação de Fock-Tani para mésons e buscamos estendê-la para estados exóticos, mais precisamente para glueballs. Neste formalismo uma mudança de representação é implementada através de um operador unitário, tal que estados de glueballs no espaço de Fock, compostos por um par glúon-glúon, sejam descritos em termos de operadores de campo de glueballs elementares em um espaço de Hilbert estendido. A aplicação do operador unitário a um Hamiltoniano microscópico de gluons leva a um Hamiltoniano efetivo que descreve todos os possíveis processos envolvendo glúons e glueballs. Esse Hamiltoniano efetivo é utilizado para estudar as interações entre glueballs à baixa energia em um modelo de glúons constituintes, que interagem através da troca de um glúon virtual e são confinados por um potencial fenomenológico.

O méson $J^{PC} = 0^{++}$ pode ser descrito de duas formas completamente diferentes. Na primeira forma ele é descrito da maneira usual como sendo composto por um par $q\bar{q}$. Na segunda abordagem este mesmo méson é descrito como sendo constituído por dois glúons (glueball). Também estudamos nesta dissertação o méson 2^{++} no mesmo contexto.

Os resultados obtidos nesta dissertação indicam que o méson $q\bar{q}$ precisaria ter um raio quase igual ao dobro do respectivo raio do glueball para que suas seções de choque de espalhamento elástico fossem equivalentes. As diferenças acentuadas encontradas nas seções de choque de espalhamento elástico méson-méson e glueball-glueball, podem ser interpretadas como uma nova assinatura de glueballs.

Abstract

Fock-Tani is a field theory formalism appropriated for the simultaneous treatment of composite particles and their constituents. The formalism was originally developed for the treatment of problems in atomic physics and it was extended later on to the treatment of problems on hadron physics. In this dissertation, we initially present a review of Quantum Chromodynamics and the constituent quarks and gluons models. We also review the Fock-Tani representation for mesons and then we extend this representation to describe exotic states, more precisely glueballs. In this formalism, a change of representation is implemented through an unitary operator, in order to describe, in the Fock space, glueballs composed by gluon pairs in terms of elementary glueball fields in an extended Hilbert space. The application of the unitary operator to a gluonic microscopic Hamiltonian leads to an effective Hamiltonian which describes all processes involving gluons and glueballs. This effective Hamiltonian is used in the study of low energy interactions between glueballs using a constituent interacting gluon model, within a phenomenological confinement potential and one virtual gluon exchange.

The $J^{PC} = 0^{++}$ meson may be described in two different pictures. In the first one, it is described, as usual, as composed by a $c\bar{c}$ pair. In the second one, this meson is assumed as composed by two gluons (glueball). We also have studied, in this dissertation, the 2^{++} meson in the same context.

Our results indicate that the $q\bar{q}$ meson should have a radius almost equal to twice the glueball radius in order the meson-meson and glueball-glueball elastic scattering cross-sections become equivalent. The differences in the results for the cross-sections are interpreted, in this dissertation, as a new signature of glueballs.

Índice

| | |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1. A Física de Mésons e os Modelos Constituintes | 8 |
| 1.1 Introdução | 8 |
| 1.2 Os Mésons e os seus Números Quânticos | 9 |
| 1.3 Modelos constituintes | 12 |
| 1.4 Modelo de Quarks Constituintes | 14 |
| 1.5 Modelo de Gluon Constituinte | 18 |
| 2. O Formalismo de Fock-Tani para Mésons: uma revisão | 25 |
| 2.1 A Representação de Fock-Tani. | 25 |
| 2.1.1 Espaço de Vetores de Estado Ideais | 28 |
| 2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais | 30 |
| 2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores. | 32 |
| 2.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores | 32 |
| 2.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento” | 33 |
| 2.3 O Hamiltoniano na representação Fock-Tani. | 40 |
| 3. Formalismo de Fock-Tani para Glueballs | 48 |
| 3.1 Representação de Fock-Tani | 48 |
| 3.2 Transformação dos Operadores | 50 |
| 3.3 Transformação de Fock-Tani Generalizada | 55 |
| 3.4 Hamiltoniano de Fock-Tani | 60 |
| 3.4.1 Inexistência de um Novo Estado Ligado | 60 |
| 3.4.2 Interação Glueball-Gluon | 63 |
| 3.4.3 Interação Glueball-Glueball | 64 |
| 4. Aplicações do Formalismo de Fock-Tani | 67 |
| 4.1 Amplitude de Espalhamento Glueball-Glueball | 67 |

| | | |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2 | Massa dos Glueballs | 73 |
| 4.3 | Seção de Choque Glueball-Glueball | 78 |
| 4.4 | Potencial Glueball-Glueball V_{GG} | 80 |
| Conclusões e Perspectivas | | 84 |
| A. Unidades, Notação, Convenções | | 87 |
| B. Método de Segunda Quantização | | 91 |
| B.1 | Operadores Criação e Destruição | 92 |
| C. Cálculo de Comutadores | | 95 |
| C.1 | Cálculo de $[G_\alpha, G_\beta]$ | 95 |
| C.2 | Cálculo de $[G_\alpha, G_\beta^\dagger]$ | 96 |
| C.3 | Cálculo de $[a_{\mu'}, G_\alpha^\dagger]$ | 97 |
| C.4 | Calculo de $[a_{\mu'}, G_\alpha]$ | 97 |
| C.5 | Cálculo de $[\Delta_{\gamma\beta}, G_\alpha^\dagger]$ | 98 |
| C.6 | Cálculo de $[a_{\mu'}, \Delta_{\alpha\beta}]$ | 98 |
| C.7 | Cálculo de $[G_\alpha, \Delta_{\rho\gamma}]$ | 98 |
| D. Função de Onda | | 100 |
| D.1 | Função de Onda do Méson | 100 |
| D.2 | Função de Onda do Glueball | 103 |
| E. Potencial de Troca de um Glúon | | 106 |
| F. Representação do SU(3) | | 109 |
| G. Variáveis de Mandelstam e a Aproximação Local do Potencial | | 110 |
| Referências | | 116 |

Introdução

A física de mésons assim como o estudo da interação forte estão profundamente conectados desde o advento do méson pí, introduzido teoricamente por Yukawa (1935) e detectado experimentalmente por Lattes, Occhialini e Powell (1947).

O conhecimento que se tem sobre a interação forte tem sofrido revisões ao longo do tempo. Atualmente considera-se que a teoria fundamental da interação forte é uma teoria de campos de calibre, não-Abeliana, chamada de Cromodinâmica Quântica (CDQ) e que descreve as interações entre quarks e glúons.

Murray Gell-Mann (1929-) e Yuval Ne'eman (1925-) propuseram em 1961 um esquema de classificação e ordenamento da, já então extraordinária, quantidade de bárions e mésons conhecidos na natureza, denominado de Método dos Octetos (Eightfold Way). Este método, baseado na teoria matemática do grupo de simetria $SU(3)$ (o S significa *Special*, o U significa *Unitary* e o três designando a quantidade de elementos básicos da teoria), tinha como propósito descrever a estrutura intrínseca das partículas fortemente interagentes em termos de entidades fundamentais, os blocos elementares de construção de mésons e bárions.

Alguns anos mais tarde, Gell-Mann denominou estes blocos elementares de quarks, adotando o termo após a leitura de um trecho do romance “Finnegans Wake”, de James Joyce (1882-1941). Na proposta, um quark tinha carga elétrica $2/3$ da carga do próton e os outros dois quarks $-1/3$. Entre 1967 e 1973, usando o Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), Jeromes Isaac Frideman (1930-), Henri W. Kendall (1926-) e Richard E. Taylor (1929-) notaram que o espalhamento de elétrons por prótons e nêutrons indicava que estes eram compostos por partículas menores, com valores para suas cargas elétricas consistentes com a teoria de quarks. Os três receberam o prêmio Nobel de física, em 1990, pela descoberta. Gell-Mann então identificou na teoria de grupos $SU(3)$ o elemento três como o número de sabores dos quarks fundamentais e se buscou à época confirmar, de maneira indireta, através de operações lógicas envolvendo esta teoria, a existência dos quarks. Com aquela identificação do papel dos quarks como elementos do grupo $SU(3)$, tornou-se possível, através da atribuição *a priori* de algumas propriedades físicas fundamentais aos quarks (como por exemplo cargas fracionárias, caráter fermiônico entre outros), a determinação de propriedades físicas dos hádrons então conhecidos a partir da composição das respectivas propriedades de seus elementos constituintes. Por exemplo, o caráter fermiônico atribuído aos

quarks, isto é, spins intrínsecos semi-inteiros; a partir da adição vetorial dos spins de três quarks constituintes é possível determinar-se o spin do hádron correspondente. Através de procedimentos desta natureza, e da comparação das predições físicas com os dados experimentais de propriedades intrínsecas aos hádrons, o número de quarks e algumas de suas propriedades, como por exemplo sua massa, puderam ser então inferidas.

Gell-Mann postulou então que havia três sabores de quarks na natureza, designados u , d e s , com cargas elétricas fracionárias. Os quarks u e d compõem a matéria ordinária (formada por prótons e nêutrons) enquanto que os quarks s compõem, por exemplo, o méson *kaon*, bem como uma enorme quantidade de outras partículas de vida curta encontradas nos raios cósmicos ou produzidas em reações de altas energias. O s designa, na literatura inglesa, a palavra *strangeness*, e foi introduzido para caracterizar o fato, não usual, que certas partículas, como o *kaon*, sejam produzidas em reações envolvendo a interação forte, mas só decaem através de processos que envolvem a interação fraca, mesmo que nestes processos de decaimento, são produzidos hádrons, as únicas partículas da natureza que interagem via interação forte. De maneira independente, e no mesmo ano, George Zweig (1937-) desenvolveu uma teoria similar à de Gell-Mann e denominou os elementos fundamentais da teoria de azes (assim como três azes formam uma trinca no jogo de pôquer, três quarks formariam um triado elementar no interior de um bárion).

A presença da cor originou uma teoria que apresenta similaridades, em muitos aspectos, com a Eletrodinâmica Quântica (EDQ). Nesta última, a presença de partículas carregadas origina uma interação mediada por partículas neutras, de massa nula, denominadas de fótons. Similarmente, a interação entre os quarks se dá através da troca de partículas, também de massa nula, que carregam cor e anti-cor, bem como carga de cor, denominadas de glúons (da palavra inglesa *glue* = cola). Evidentemente cor e carga de cor são nomenclaturas que não têm nada a ver com as cores do espectro eletromagnético. Estes nomes estão associados a um tipo de carga forte cuja natureza, embora ainda não bem compreendida, apresenta algumas características especiais: quarks e glúons são, aparentemente, absolutamente confinados no interior dos bárions e mésons em condições normais; jamais foram observados como partículas livres na natureza, independentemente da intensidade da interação externa utilizada para isolá-los. Apenas para exemplificar, prótons e nêutrons, constituídos por três quarks elementares, fazem parte da família dos bárions, enquanto os mésons, do qual o pión é a partícula mais conhecida, são constituídos de pares quark-antiquark. A existência destes quarks é inferida de maneira indireta através de experiências especiais, como por exemplo em processos de colisões de elétrons altamente energéticos com prótons ou nêutrons e que envolvem, neste caso, a observação da distribuição angular dos elétrons espalhados. Os resultados experimentais são compatíveis, nestes casos, com a presença, no interior dos prótons e nêutrons, de três centros pontuais de espalhamento. Em

síntese, em nível sub-nuclear, prótons e nêutrons revelam assim ricas estruturas interiores, sendo constituídos então por três quarks que carregam cores e cargas de cor, e interagem através da troca de glúons.

As denominações cor e carga de cor foram propostas em 1965 por Moo-Young Han (1934–) e Yoichiro Nambu (1921–) em que quarks poderiam possuir uma de três cores fundamentais, vermelho, verde e azul e as suas antipartículas, os anti-quarks, as anti-cores anti-vermelha (ou ciano), anti-verde (ou majenta) e anti-azul (ou amarelo). Estas designações são utilizadas para caracterizar o fato de que, devido ao confinamento, a propriedade da cor não é observada quando mésons e bárions são tratados como partículas elementares. Similarmente à cor branca, formada pelas três cores fundamentais do espectro eletromagnético, as cores de três quarks, formando um bárion elementar, ou de um par quark-antiquark, formando um méson elementar, se recombinariam originando uma cor neutra para os bárions e os mésons. Neutros em cor, bárions e mésons elementares não seriam suscetíveis à troca de glúons.

Os diferentes tipos (sabores) de quarks hoje conhecidos são representados pelas letras u, d, c, s, t, b, para designar, na nomenclatura inglesa, as palavras: *up* (u), *down* (d), *charm* (c), *strange* (s), *top* (t) e *bottom* (b). Os quarks t e b são também denominados de truth (verdade) e beauty (beleza). Quarks são assim partículas com sabor, charme, estranheza, beleza, verdade e cor...

A CDQ é presentemente a mais importante candidata à teoria fundamental da interação forte. A interação forte em nível sub-nuclear, envolvendo portanto cargas de cor, é uma das quatro interações fundamentais encontradas na natureza juntamente com as interações gravitacional, fraca e eletromagnética. A CDQ prediz que a interação forte apresenta, adicionalmente ao confinamento, uma característica única na natureza, a liberdade assintótica. Esta predição da CDQ, experimentalmente confirmada, indica que os quarks são assintoticamente livres (para grandes valores de momentum transferidos ou, equivalentemente, quando muito próximos uns dos outros).

Diferente da eletrodinâmica quântica (EDQ), onde a força eletromagnética decresce com a separação das cargas elétricas, a CDQ descreve um tipo de força que aumenta de intensidade à medida que os quarks se afastam e diminui assim que eles se aproximam. Desta forma, na região de altas energias (distâncias pequenas), os quarks encontram-se essencialmente livres, condição conhecida como *liberdade assintótica*. Este fato permite o uso de técnicas perturbativas para testar a teoria neste limite. Na região de baixas energias (distâncias longas), e que corresponde ao domínio da física nuclear, os quarks apresentam-se em estados fortemente ligados e os hádrons aparecem como singletos de cor, ocorrendo então o fenômeno conhecido como *confinamento de cor*. Os mésons apresentam-se como os graus de liberdade ideais para o estudo de regimes fortemente acoplados e não-perturbativos

da interação forte, pois diretamente da CDQ pouco é conhecido sobre os estados físicos da teoria.

O nosso conhecimento sobre a física hadrônica, em larga escala, é baseada em modelos fenomenológicos, em particular no chamado *modelo de quarks constituintes*. A espectroscopia de mésons e bárions é surpreendentemente bem descrita se considerarmos os hádrons como compostos por estes tipos de quarks (também chamados de quarks de valência). Entretanto a maioria dos modelos baseados na CDQ prevêem a existência de outros tipos de hádrons que possuem explicitamente os graus de liberdade de glúons. Estes graus de liberdade são também chamados de *glue* e os hádrons que são formados apenas por glue são chamados de glueballs. Nas figuras (0.1) e (0.2) vemos exemplos de glueballs com dois ou três glúons. Em outras palavras os glueballs são hádrons, mas não possuem quarks na sua constituição. Um outro tipo de hádron previsto em teoria é um que mistura graus de liberdade de quarks constituintes com graus de liberdade de glúons. Estes hádrons são denominados de *híbridos*; na figura (0.3) vemos um exemplo de um méson híbrido. Tanto os glueballs quanto os hádrons híbridos representam o que é classificado de novos estados hadrônicos ou muitas vezes apresentados na literatura sob o nome *hádrons exóticos*. Sabe-se que as reações onde podem ser produzidos glueballs são:

1. Decaimentos radiativos de J/ψ .
2. Reações com troca de carga como
 - $\pi p \longrightarrow nX$, onde $X \longrightarrow KK$ ou $\phi\phi$
 - $Kp \longrightarrow \pi\pi\Lambda$
3. Em reações de altas energias, colisões periféricas de íons podem ser formadas em x_F pequenos. As colisões próton-próton resultantes pode produzir colisões entre glúons e conseqüentemente glueballs.
4. Outra possibilidade para produção de glueballs inclui aniquilação entre núcleons e antinúcleons.

Desta forma, resumidamente, vemos que os “ambientes” mais prováveis para se encontrar glueballs são aqueles ricos em glúons como é o caso das colisões entre íons pesados.

Nesta dissertação faremos um estudo exploratório sobre a possibilidade de interação destes novos estados, em particular, interações entre glueballs. Como os glueballs são estados ligados entre glúons, nas interações entre estas partículas a informação sobre a sua estrutura interna não pode ser desconsiderada. Há muitos exemplos de sistemas nos quais os graus de liberdade internos de partículas compostas não podem ser desprezados. Para estes sistemas o formalismo em segunda quantização da mecânica quântica torna-se uma

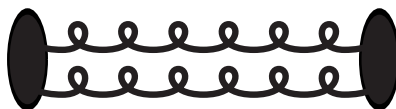


Fig. 0.1: *Glueball de dois glúons*

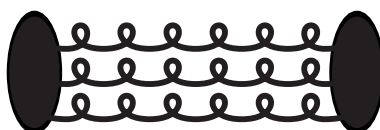


Fig. 0.2: *Glueball de três glúons.*

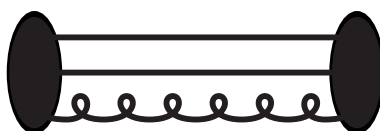


Fig. 0.3: *Méson híbrido*

ferramenta matemática muito difícil de ser usada uma vez que a presença de estados ligados torna mais complexa a aplicação direta do teorema de Wick, bem como o cálculo de funções de Green entre outros aspectos.

Por isso foi desenvolvida a idéia de fazer um mapeamento do espaço de Hilbert físico para um espaço de Hilbert ideal onde as partículas compostas são representadas por operadores elementares ideais, obedecendo regras de comutação canônicas. A informação sobre a sua estrutura interna é transferida para um Hamiltoniano de interação efetivo. O desenvolvimento posterior de uma transformação capaz de realizar este mapeamento foi conseguido por S. Tani e generalizado por M. D. Girardeau. Esta transformação generalizada construída por Girardeau e colaboradores, sendo por eles denominada de *transformação de Fock-Tani*, está relacionada com o método de quasi-partícula de Weinberg, onde os estados ligados são subtraídos do problema, restando apenas uma interação residual fraca.

Vamos utilizar o formalismo de Fock-Tani, que é um método da teoria de campos, porque este já vem sendo estudado pelo nosso grupo a algum tempo, e também devido a aplicação deste formalismo ao problema da interação hadrônica ter se mostrado promissora. E por ter apresentado resultados que estão de acordo com os obtidos com a utilização de outros

métodos.

Os operadores de criação e destruição de partículas compostas não obedecem relações de (anti)comutação canônicas, devido à presença da estrutura interna. Após realizar a transformação unitária de Fock-Tani U sobre o operador de criação do estado ligado, um novo estado ligado é obtido sendo definido como a aplicação de um operador de criação ideal sobre o vácuo. Os operadores ideais obedecem a relações de (anti)comutação canônicas. Além de se transformar o estado também se efetua a transformação dos operadores da teoria (operadores de quarks, mésons, bárions, glueballs, entre outras partículas) obtendo-se, de forma iterativa, uma expansão em potências da função de onda. Com estes operadores efetivos torna-se possível construir quantidades efetivas em termos das quantidades fundamentais. Uma destas quantidades efetivas importantes que podem ser construídas é o Hamiltoniano $H_{efetivo} = U^{-1}HU$ que possui, entre outras estruturas, diagramas correspondendo a espalhamentos hadrônicos com troca de constituintes.

Pretendeu-se estudar, neste trabalho de mestrado, as possíveis interações entre os glueballs com troca de constituintes. Para este estudo o ponto de partida foi o potencial microscópico entre os glúons. Pretendeu-se construir uma transformação de Fock-Tani, que faz o mapeamento, por exemplo, de estados do tipo $|gg\rangle$ (glueball-glueball) para estados ideais. Após a obtenção desta transformação, procedeu-se a transformação dos operadores de glúons e de glueballs. A construção do potencial de Fock-Tani mostra-se, neste formalismo, direta, consistindo em efetuar-se o produto dos operadores transformados, de maneira conveniente a formar um potencial de interação de dois corpos. A partir deste potencial pode-se obter, por exemplo, os elementos de matriz h_{fi} para espalhamento elástico entre glueballs. As seções de choque e potencial de interação entre glueballs decorrem do conhecimento de h_{fi} .

A motivação para este trabalho reside no fato de o méson $J^{PC} = 0^{++}$ poder ser descrito de duas formas completamente diferentes. Na primeira forma ele é descrito da maneira usual como sendo composto por um par $q\bar{q}$. Na segunda abordagem este mesmo méson é descrito como sendo constituído por dois glúons (glueball). Estuda-se a diferença nas seções de choque de interação méson-méson nas duas descrições e interpreta-se o resultado como constituindo uma nova assinatura para a existência de glueballs. Também estudamos nesta dissertação o méson 2^{++} no mesmo contexto.

A divisão dos capítulos é a seguinte: no capítulo 1 apresentamos uma revisão da Cromodinâmica Quântica e dos modelos constituintes, tanto de quarks quanto de glúons. O capítulo 2 é destinado a uma revisão do formalismo de Fock-Tani para mésons. Esta revisão teve uma importância considerável, pois a partir deste exemplo obtivemos a seção de choque entre mésons do tipo $s\bar{s}$, no formalismo de Fock-Tani. No capítulo 3, é apresentado a parte inédita desenvolvida nesta dissertação onde apresentamos a dedução do potencial

de Fock-Tani geral para glueballs. O capítulo 4, teve como enfoque principal a aplicação do potencial de Fock-Tani para glueballs obtido no capítulo anterior, tendo como base o modelo microscópico de glúons constituintes discutido no capítulo 1. Há muitas incertezas sobre a real constituição de muitos mésons discutidos, hoje em dia, na literatura. Desta forma um dos objetivos deste estudo é a comparação entre seções de choque: considerando o méson como sendo composto apenas por quarks (em particular como foi dito acima, um estado $s\bar{s}$) com a seção de choque para este mesmo méson sendo constituído apenas por glúons. Um outro resultado é a obtenção do potencial de interação V_{GG} entre glueballs. Após o capítulo 4 apresentamos as conclusões, apêndices e bibliografia consultada.

Capítulo 1

A Física de Mésons e os Modelos Constituintes

1.1 Introdução

A CDQ baseia-se no postulado de simetria local (invariância de gauge) associada à simetria unitária $SU(3)$ de carga de cor. O Lagrangiano é definida na CDQ na forma

$$\mathcal{L}_{\text{CDQ}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

onde $\psi_\xi(x)$ representa os campos dos quarks, $\xi \equiv (f, s, c)$ simboliza os índices de sabor, spin e cor dos quarks; γ^μ ($\mu = (0, 1, 2, 3)$) são as matrizes de Dirac e m a matriz de massa dos quarks. Na expressão (1.1) os índices $\xi \equiv (f, s, c)$ foram suprimidos por simplicidade formal. A derivada covariante D_μ é definida na forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu \quad (1.2)$$

com ∂_μ simbolizando a derivada espaço-temporal, μ , g a constante de acoplamento da interação forte e

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2} \lambda^a A_\mu^a(x) \quad (1.3)$$

onde A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) representa os campos dos glúons e λ^a denota as matrizes de Gell-Mann (foi utilizado a convenção de Einstein de soma para índices repetidos). O tensor de campo gluônico é dado por

$$G_{\mu\nu}^a(x) = F_{\mu\nu}^a(x) - gf^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x), \quad (1.4)$$

onde f_{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(3)$ e

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x). \quad (1.5)$$

A forma usual de tratar teorias com interações locais é mediante a expansão em potências da constante de acoplamento. Porém, quando estas forem maiores do que a unidade este tipo de procedimento é infrutífero quando aplicado à CDQ pelo fato de técnicas perturbativas não serem aplicáveis neste caso.

Entre as propriedades mais importantes da CDQ a baixas energias estão a quebra dinâmica da simetria quiral e o confinamento da cor. Estes dois fenômenos são essencialmente não - perturbativos, não podem ser obtidos mesmo somando-se toda a série perturbativa e estão relacionados com o fato do valor esperado no vácuo de certos operadores que são funções escalares dos campos de glúons (condensados de glúons) e de quarks (condensados de quarks) ser diferente de zero. Na teoria de perturbação os valores esperados destes condensados seriam nulos em qualquer ordem. Acredita-se que o fato do condensado de glúons ser diferente de zero está relacionado com o aumento da energia de interação entre os quarks com a distância de separação entre eles, contrastando com o que acontece com a energia coulombiana entre duas cargas elétricas. O valor diferente de zero para o condensado de quarks dá origem aos bósons de Goldstone e fornece uma massa dinâmica aos quarks da ordem de centenas de MeV a qual, para os quarks de sabor u e d , é muito maior do que as correspondentes massas que aparecem na Lagrangiana da CDQ que são da ordem de uma dezena de MeV.

Para entender o espectro de massa hadrônico a partir da CDQ bem como as propriedades de interação entre os hádrons, é necessário saber algo sobre a força de longo alcance responsável pelo confinamento dos quarks nos mésons e bárions. No entanto, não existe nenhuma descrição completamente satisfatória para esta região de energias da CDQ. Algumas informações podem ser extraídas diretamente da formulação da CDQ na rede. Nesta formulação, os quarks estão localizados nos sítios de uma rede do espaço-tempo, e os campos de calibre são associados às ligações entre sítios vizinhos. As simetrias de calibre do modelo são as rotações independentes da simetria $SU(3)$ nos sítios da rede. Apesar de em princípio não haver dificuldade em se calcular propriedades hadrônicas usando esta técnica, a limitação está na tecnologia atual dos supercomputadores que impede o uso de redes de tamanhos realistas e impõe restrições ao alcance do método. Neste sentido, a construção de modelos fenomenológicos é parte essencial para o entendimento das interações fortes a baixas energias.

1.2 Os Mésons e os seus Números Quânticos

Com a consolidação do modelo de quarks constituintes, tornou-se possível estudar a estrutura hadrônica. Por exemplo, o estudo da chamada *espectroscopia mesônica* passa, em primeiro lugar, pela identificação dos números quânticos relevantes dos mésons, considerados

como partículas compostas por quarks constituintes. Desta forma faremos uma breve revisão dos números quânticos importantes na caracterização destes estados.

Os quarks possuem spin S igual a $1/2$ e número bariônico B igual a $1/3$; os *antiquarks*, por sua vez, têm spin $1/2$; porém o seu número bariônico é $-1/3$. Desta forma os quarks e *antiquarks* podem se combinar para formar os chamados *mésons convencionais* (com $B = 0$) e spin total 1 ou 0. O momento angular total \vec{J} é obtido, obedecendo às regras usuais de soma de momento angular da Mecânica Quântica, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Os mésons como objetos do tipo *quark-antiquark*, isto é, $q\bar{q}$ podem ter as seguintes propriedades

1. **Paridade-P:** $P = (-1)^{L+1}$.

A paridade é um operador de reflexão de coordenadas espaciais em torno da origem e, se a função de onda for um auto-estado do operador paridade, então

$$P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \eta_P \psi(\vec{r}), \quad (1.6)$$

onde η_P representa o auto-valor correspondente. Ao aplicar-se duas vezes o operador P a Φ , o estado original é recuperado; conseqüentemente os autovalores η_P podem assumir apenas os valores ± 1 . Frequentemente podemos separar a função de onda ψ em uma parte radial, $R(r)$, e em outra angular, $Y_{LM}(\theta, \phi)$,

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y_{LM}(\theta, \phi). \quad (1.7)$$

Neste caso, a operação de paridade P_{orb} sobre a função de onda espacial não modifica a parte radial, mas transforma a parte angular na forma $Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi)$, em que

$$P_{orb}Y_{LM}(\theta, \phi) = Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^L Y_{LM}(\theta, \phi). \quad (1.8)$$

Ademais, quarks e *antiquarks* têm paridades intrínsecas opostas, assim $P_q \cdot P_{\bar{q}} = -1$ o que leva a uma paridade total $P = P_{orb}P_qP_{\bar{q}}$:

$$P|q\bar{q}\rangle = (-1)^L(-1)|q\bar{q}\rangle = (-1)^{L+1}|q\bar{q}\rangle. \quad (1.9)$$

2. **Paridade-C :** $C = (-1)^{L+S}$.

A conjugação de carga C muitas vezes é chamada de paridade- C e representa a operação matemática que simula a transformação de uma partícula na sua respectiva antipartícula. Esta operação reverte propriedades intrínsecas da partícula como a sua carga elétrica e seu momento magnético. Uma partícula neutra representa um auto-estado do operador C ; por exemplo, pode-se considerar o pión π^0

$$C|\pi^0\rangle = \eta_C|\pi^0\rangle \quad (1.10)$$

onde $\eta_C = \pm 1$. Se um méson for constituído, por exemplo, por quarks do tipo u , então $|q\bar{q}\rangle = u\bar{u}$ e a função de onda total, contendo a parte de spin $\chi(\vec{S})$, caso possa ser expressa em uma forma separável, torna-se

$$\psi(\vec{r}, \vec{S}) = R(r)Y_{LM}(\theta, \phi)\chi(\vec{S}), \quad (1.11)$$

onde \vec{r} é a coordenada relativa de separação entre os quarks.

Desta forma o efeito do operador C sobre o par $u\bar{u}$ será a troca $u \longleftrightarrow \bar{u}$ o que efetivamente corresponde a realizar a troca $\vec{r} \longleftrightarrow -\vec{r}$, ou seja, uma operação de paridade sobre o sistema. Assim a conjugação de carga introduz um fator igual ao obtido para a paridade, isto é $(-1)^{L+1}$. Esta operação também inverte o spin na função de onda de spin, o que resulta em um fator (-1) para o caso $\vec{S} = 0$ e em um fator $(+1)$ se $\vec{S} = 1$, ou seja, um fator geral $(-1)^{S+1}$. Este resultado, quando combinado com o fator correspondente que vem da contribuição do momento angular orbital \vec{L} fornece

$$C|q\bar{q}\rangle = (-1)^{L+S}|q\bar{q}\rangle. \quad (1.12)$$

3. Paridade-G: $G = (-1)^{L+S+I}$.

Ficou claro da discussão anterior que partículas carregadas não podem ser auto-estados de C , por exemplo,

$$C|\pi^+\rangle = \eta|\pi^-\rangle. \quad (1.13)$$

Entretanto, se aplicarmos o operador C em um estado de partícula carregada seguido de uma rotação no espaço de isospin, sendo o operador rotado representado por $R = \exp(i\pi I_2)$, tal que

$$|I, I_z\rangle \longrightarrow |I, -I_z\rangle, \quad (1.14)$$

então partículas carregadas podem ser auto-estados deste novo operador. Vamos definir o operador de paridade- G como

$$G = C R. \quad (1.15)$$

Desta definição não é difícil ver que, para um sistema do tipo $q\bar{q}$, temos que $G = C \cdot (-1)^I$, ou seja,

$$G = (-1)^{L+S+I}. \quad (1.16)$$

Pode-se resumir as relações deduzidas recentemente como

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}; \quad P = (-1)^{L+1}; \quad (1.17)$$

$$C = (-1)^{L+S}; \quad G = (-1)^{L+S+I}. \quad (1.18)$$

Estes operadores geram então números quânticos que são importantes pois representam quantidades conservadas em processos que envolvem a interação forte. Utilizando estas relações podemos construir os valores admissíveis da grandeza J^{PC} , pelo modelo de quarks, para os mésons:

$$0^{-+}, 0^{++}, 1^{--}, 1^{+-}, 1^{-+}, 2^{--}, 2^{-+}, 2^{++}, 3^{--}, 3^{-+}, 3^{++}, \dots \quad (1.19)$$

Olhando com cuidado para a seqüência de números contidos na expressão (1.19) nota-se que há uma seqüência de valores de J^{PC} que não são admissíveis em um sistema do tipo $q\bar{q}$

$$0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+}, \dots \quad (1.20)$$

Os números quânticos apresentados em (1.20) são conhecidos como números quânticos *explicitamente exóticos*. Sendo encontrado um estado com estes números quânticos, pode-se afirmar que foi encontrado algo diferente do que um sistema do tipo $q\bar{q}$. Os números quânticos expressos em (1.19) também podem representar um sistema não- $q\bar{q}$; no entanto, neste caso, o estado geral que representa o méson será dado pela seguinte sobreposição:

$$|\text{méson}\rangle = |q\bar{q}\rangle + |\text{não-}q\bar{q}\rangle. \quad (1.21)$$

Numa investigação para encontrar novos estados da matéria, estados que não são puros como (1.21) apresentam a dificuldade adicional de avaliar-se o grau de mistura dos estados $|q\bar{q}\rangle$ e $|\text{não-}q\bar{q}\rangle$.

1.3 Modelos constituintes

Nas próximas seções deste capítulo iremos discutir aspectos gerais sobre os chamados modelos constituintes, tanto para quarks quanto para glúons. Muitas vezes usa-se uma nomenclatura informal e resumida, chamando o modelo de quarks constituintes, por exemplo, apenas como “o modelo de quarks”. Historicamente o modelo de quarks precedeu ao desenvolvimento da CDQ e da idéia de glúons. A descoberta da simetria $SU(3)$ de sabor dos bárions e mésons abriu o caminho para criar-se modelos de quarks, cuja versão mais simples foi a de um modelo não-relativístico (sem cor) introduzido para explicar os números quânticos dos espectros bariônicos e mesônicos de baixa energia [1, 2]. Este modelo foi estendido para tratar outras propriedades dos hádrons utilizando-se das hipóteses dinâmicas mais

simples [3]. Os resultados obtidos para a aniquilação núcleon-antinúcleon, desdobramentos de massa dos hádrons, propriedades eletromagnéticas, entre outras estavam, surpreendentemente, em boa concordância com os resultados da espectroscopia hadrônica. O grau de liberdade de cor foi introduzido em modelos de quarks fenomenológicos em 1973 para dar conta do Princípio de Pauli em determinados estados hadrônicos [4].

Após a descoberta da liberdade assintótica e a introdução do conceito do confinamento da cor na CDQ, A. De Rújula, H. Georgi e S. L. Glashow (DGG) propuseram a introdução destas idéias no modelo de quarks [5]. Eles atribuíram a dependência em spin da interação de dois corpos à parte dependente de spin da interação de troca de um glúon. Estes autores foram motivados pela formulação da CDQ na rede, onde a energia de interação entre dois quarks estáticos é escrita como uma expansão do inverso da potência da constante de acoplamento *quark-gluon*, α_s , que é considerada como sendo grande para longas distâncias. O termo principal nesta expansão é proporcional à N , o número de ligações excitadas da rede entre os quarks. A energia de interação do tipo spin-spin, a qual é essencial para a explicação por exemplo do desdobramento das massas do núcleon e da ressonância Δ , decresce com α_s^{-N} , o que leva à conclusão que a interação spin-spin é de curto alcance. Deste modo, em um cálculo das massas hadrônicas no modelo de quarks, uma interação efetiva de curto alcance pode se originar da troca de um glúon. Isto explicou pela primeira vez o sinal do desdobramento hiperfino, isto é, porque a partícula Δ é mais pesada do que o núcleon e relacionou as respectivas magnitudes do desdobramento hiperfino às massas dos quarks.

As principais características do modelo são:

1. Os graus de liberdade fundamentais dos hadrons são quarks não-relativísticos de massas m_q , e a massa do estado fundamental do hadron m_h é aproximadamente $m_h \sim 3 m_q$.
2. Em uma primeira aproximação, os hádrons podem ser classificados em multipletos de $SU(6)$ de sabor.
3. Os quarks são confinados por forças de longo alcance que são independentes de sabor.
4. A liberdade assintótica justifica o emprego de um potencial dependente de spin de curto alcance através da redução não-relativística do diagrama correspondente à troca de um glúon, analogamente à obtenção do potencial de Fermi-Breit no caso coulombiano.

1.4 Modelo de Quarks Constituintes

No estudo que será realizado a seguir sobre a interação entre mésons com troca de quarks teremos que partir de um modelo microscópico. Tradicionalmente, o modelo de quarks constituintes com troca de um glúon constitui-se no ponto de partida para estudos deste tipo.

Para o que segue nos próximos capítulos, vamos deduzir o potencial de Fermi-Breit de interação entre os quarks, potencial este resultante da troca de um glúon perturbativo como representado na figura (1.1).

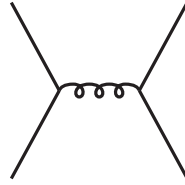


Fig. 1.1: Interação de troca de um glúon perturbativo entre quarks.

Para tal, partimos de um Hamiltoniano relativístico que envolve a interação entre os campos dos quarks, da forma:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{qq}} &= T_{\text{qq}} + V_{\text{qq}} \\
 &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \left[-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi(\vec{x}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int d^3x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\lambda^a/2\gamma^\mu\psi(x)$ define a corrente de cor, $D_{\mu\nu}$ é o propagador do glúon e $\psi(x)$ representa os campos de Dirac dos quarks podendo ser expandido em um dado instante de tempo ($t = 0$), em termos de contribuições de frequências positivas e negativas:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s \left[u_s(\vec{p})q_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p})\bar{q}_s^\dagger(-\vec{p}) \right]; \tag{1.23}$$

nesta expressão, utilizandi-se a notação do apêndice A, temos $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$,

$$u_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{pmatrix} \Upsilon_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + m} \Upsilon_s \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

$$v_s(-\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + m} \Upsilon_s^c \\ \Upsilon_s^c \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

representam espinores de Pauli definidos de forma que $\Upsilon_s^c = -i\sigma^2\Upsilon_s^*$, sendo estas grandezas normalizadas na forma

$$\Upsilon_s^*\Upsilon_{s'} = \Upsilon_s^{c*}\Upsilon_{s'}^c = \delta_{ss'}. \quad (1.26)$$

Os operadores q^\dagger e q denotam, respectivamente os operadores de criação e destruição de quarks, e sendo \bar{q}^\dagger e \bar{q} respectivamente os operadores de criação e destruição de *antiquarks*, os quais, obedecem às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{q_{tsc}(\vec{p}), q_{t's'c'}(\vec{p}')\} &= \{\bar{q}_{tsc}(\vec{p}), \bar{q}_{t's'c'}(\vec{p}')\} = 0, \\ \{q_{tsc}(\vec{p}), q_{t's'c'}^\dagger(\vec{p}')\} &= \{\bar{q}_{tsc}(\vec{p}), \bar{q}_{t's'c'}^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{tt'} \delta_{ss'} \delta_{cc'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Para obter o Hamiltoniano não - relativístico respectivo, escrevemos o campo dos quarks¹ $\psi(\vec{x})$ em termos de uma expansão em potências do operador $\vec{\nabla}$, como:

$$\psi(\vec{x}) \approx \left[1 + i\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}}{2m} + \frac{\vec{\nabla}^2}{8m^2} \right] \psi'(\vec{x}) \quad (1.28)$$

onde $\psi'(\vec{x})$ representa um operador não - relativístico dado por

$$\psi'_{tc}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s \left[q_{tsc}(\vec{p}) \begin{pmatrix} \Upsilon_s \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{q}_{tsc}^\dagger(-\vec{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ \Upsilon_s^c \end{pmatrix} \right]; \quad (1.29)$$

nesta expressão, os índices s , t e c representam as grandezas de spin, isospin e cor respectivamente. Esta expansão pode ser obtida através da transformação de Foldy-Wouthuysen [6] ou, equivalentemente, expandindo-se os espinores $u_s(\vec{p})$ e $v_s(-\vec{p})$ apresentados atualmente até a ordem $(\vec{p}/m)^2$, o que resulta em

$$u_s(\vec{p}) \approx \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{p^2}{8m^2} \right] \Upsilon_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m} \Upsilon_s \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

$$v_s(-\vec{p}) \approx \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m} \Upsilon_s^c \\ \left[1 - \frac{p^2}{8m^2} \right] \Upsilon_s^c \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Após combinar a expressão reduzida (1.28) e sua respectiva expressão conjugada com (1.22), a parte livre, T_{qq} , do Hamiltoniano fica

$$\begin{aligned} T_{\text{qq}} &\approx \psi^{\dagger'}(\vec{x}) \left[1 - i\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}}{2m} + \frac{\vec{\nabla}^2}{8m^2} \right] [-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m] \left[1 + i\beta \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}}{2m} + \frac{\vec{\nabla}^2}{8m^2} \right] \psi'(\vec{x}) \\ &= \psi^{\dagger'}(\vec{x}) \left[\beta m - \beta \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} \right] \psi'(\vec{x}) = \psi^{\dagger'}(\vec{x}) \beta T(\vec{x}) \psi'(\vec{x}), \end{aligned} \quad (1.32)$$

¹ Nota-se que neste formalismo os campos dos quarks, Ψ , representam operadores de segunda quantização.

sendo $T(\vec{x})$, o termo de energia cinética do par *quark-quark*, definido como

$$T(\vec{x}) \equiv m - \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}. \quad (1.33)$$

Usaremos a seguinte forma para as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

e para as matrizes de Dirac

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Desta maneira, podemos usar as equações (1.29) e (1.35) para completar o cálculo do Hamiltoniano livre em (1.32) obtendo a seguinte expressão para T_{qq} , no espaço de momentum linear

$$T_{\text{qq}} = \sum_{tsc} \int d^3p T_t(\vec{p}) \left[q_{tsc}^\dagger(\vec{p}) q_{tsc}(\vec{p}) - \bar{q}_{tsc}(\vec{p}) \bar{q}_{tsc}^\dagger(\vec{p}) \right]. \quad (1.36)$$

O cálculo da parte do Hamiltoniano que envolve a interação contém o produto entre duas correntes quadrivetoriais na forma $J^\mu(x) J_\mu(x)$ originando uma contribuição não local. Lembrando que

$$\vec{p} = -i\vec{\nabla} \quad (1.37)$$

$$\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

e usando a expansão (1.23) para o campo de Dirac, a corrente quadrivetorial dos quarks pode ser escrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} J(\vec{x}) &= \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma^0 \Gamma \psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{-i\vec{x} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})} \sum_{ss'} \left[u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 \Gamma u_s(\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}') q_s(\vec{p}) \right. \\ &+ u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 \Gamma v_s(-\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\vec{p}) + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \gamma^0 \Gamma u_s(\vec{p}) \bar{q}_{s'}(-\vec{p}') q_s(\vec{p}) \\ &\left. + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \gamma^0 \Gamma v_s(-\vec{p}) \bar{q}_{s'}(-\vec{p}') \bar{q}_s^\dagger(-\vec{p}) \right], \quad (1.39) \end{aligned}$$

onde $\Gamma = \{\mathbf{1}, \beta, \vec{\alpha}, \vec{\gamma}\} \times \lambda/2$.

Deste modo, por exemplo, para $\Gamma = \mathbf{1}$ temos

$$u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 u_s(\vec{p}) \approx \left[1 - \frac{\vec{P}^2}{8m^2} - i \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} \times \vec{p})}{4m^2} \right] \delta_{ss'};$$

$$\begin{aligned}
 u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) &\approx -\Upsilon_{s'}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}}{2m} \Upsilon_s^c; \\
 u_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \gamma^0 u_s(\vec{p}) &\approx -\Upsilon_{s'}^{c*} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}}{2m} \Upsilon_s; \\
 u_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) &\approx - \left[1 - \frac{\vec{P}}{8m^2} - i \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} \times \vec{p})}{4m^2} \right] \delta_{ss'}, \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

onde por conveniência não explicitamos a matriz de cor $\lambda/2$, e $\vec{P} = \vec{p} + \vec{p}'$. As demais combinações que envolvem outros valores de Γ podem ser encontradas na literatura [7]. Desta forma, o Hamiltoniano de interação para a interação entre os quarks resulta na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= \frac{1}{2} \sum_{s_n, i_m} \int d^3 p_1 \dots d^3 p_4 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta_{t_1 t_2} \delta_{t_3 t_4} \\
 &\times \left[J_{I_1 I_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{00}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \right. \\
 &\left. + J_{I_1 I_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{ij}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^j(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \right] q_{I_1}^\dagger(\vec{p}_1) q_{I_2}(\vec{p}_2) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}_3) q_{I_4}(\vec{p}_4) \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

com $I \equiv (t, s, c)$ e onde $D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y})$ representa a transformada de Fourier

$$D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) = \int d\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} D_{\mu\nu}(\vec{p}) \quad (1.42)$$

do propagador de glúons. Note-se que nas expressões acima foi feita a aproximação estática, a qual consiste em desprezar a componente temporal do momentum linear transferido no propagador.

A determinação de maneira completa do potencial de Fermi-Breit para a troca de um glúon requer a explicitação do propagador do glúon $D_{\mu\nu}(\vec{p})$, o qual é fixado no calibre de Coulomb como

$$D_{00}(\vec{p}) = -\frac{4\pi \alpha_s}{\vec{p}^2}, \quad D_{0i}(\vec{p}) = 0 \quad (1.43)$$

$$D_{ij}(\vec{p}) = \frac{4\pi \alpha_s}{\vec{p}^2} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2} \right). \quad (1.44)$$

Utilizando-se a convenção de soma de Einstein, incluindo agora índices contínuos, obtemos para $V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}}$ a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}} &= 4\pi \alpha_s \left[\frac{1}{\vec{q}^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{m_1 m_2 \vec{q}^2} + \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{q})(\vec{p}_2 \cdot \vec{q})}{m_1 m_2 \vec{q}^4} \right. \\
 &+ \frac{i}{\vec{q}^2} \left\{ \frac{\vec{S}_1 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_1)}{2m_1^2} - \frac{\vec{S}_1 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_2)}{m_1 m_2} - \frac{\vec{S}_2 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_2)}{2m_2^2} + \frac{\vec{S}_2 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_1)}{m_1 m_2} \right\} \\
 &\left. - \frac{2}{3m_1 m_2} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \frac{1}{m_1 m_2} \left\{ \frac{1}{\vec{q}^2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{q})(\vec{S}_2 \cdot \vec{q}) - \frac{1}{3} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right\} \right]. \quad (1.45)
 \end{aligned}$$

Na obtenção desta equação usamos a notação

$$V_{\text{qq}}(\mu\nu; \sigma\rho) \equiv \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \delta_{t_\mu t_\rho} \delta_{t_\nu t_\sigma} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}}(\mu\nu; \sigma\rho) \quad (1.46)$$

com os índices μ, ν, \dots representando as componentes de momentum linear, spin, isospin e cor, e $\mathcal{F}^a = \lambda^a/2$; ademais m_i , é massa do i -ésimo quark, e $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$. No potencial de Fermi - Breit (1.45) destacamos a força spin-spin entre os quarks

$$V_{\text{ss}} = - \frac{8\pi\alpha_s}{3 m_i m_j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (1.47)$$

força esta que é a responsável por uma categoria muito importante de desdobramento de massa como, por exemplo, o desdobramento de massa $\Delta - N$ nos bárions e os desdobramentos $\rho - \pi$ e $K^* - K$ nos mésons. Ademais uma força da forma

$$V_{SO}(\vec{r}) \sim \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (1.48)$$

é chamada de força spin - órbita e descreve, no modelo de quarks, desdobramentos do tipo $L - S$. O espaçamento não - uniforme dos níveis $L = 1$ e $S = 1$ pode ser compreendido se pensarmos em termos de um potencial tensorial do tipo

$$V_T(\vec{r}) \sim \frac{3(\vec{S}_i \cdot \vec{r})(\vec{S}_j \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j. \quad (1.49)$$

O Hamiltoniano do modelo de quarks não - relativístico, em segunda quantização, resulta então na seguinte expressão

$$\begin{aligned} H = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma. \end{aligned} \quad (1.50)$$

1.5 Modelo de Gluon Constituinte

Nesta seção iremos descrever o modelo de glúon constituinte que irá servir como modelo microscópico para a interação efetiva de Fock-Tani a ser estudada no capítulo 4. Como no caso do modelo de quarks constituintes, que foi aproximado por uma interação de troca de um glúon perturbativo, neste novo modelo será feito algo similar. Consideremos como ponto de partida a expressão para o tensor de campo gluônico em (1.4). Desta expressão pode-se escrever um lagrangiano de interação para o setor de glúons, que será a base do nosso modelo de glúons constituintes, dado por

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} G^{a\mu\nu}(x) G_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a(x) A^{a\mu}(x) \quad (1.51)$$

onde em (1.51) foi explicitado o índice de cor a . Nesta expressão nota-se também que o glúon possui uma massa m , logo trata-se de um glúon efetivo. Este tipo de glúon tem sido estudado exaustivamente na literatura ([8-10]). Usando as definições (1.4) e (1.5) obtemos, após algumas manipulações formais, a seguinte estrutura para o Lagrangiano (1.51)

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x) \quad (1.52)$$

onde

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a(x) A^{a\mu}(x) \quad (1.53)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(x) = & -g f^{abc} A^{a\mu}(x) A^{b\nu}(x) \partial_\mu A_\nu^c(x) \\ & -\frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) A^{d\mu}(x) A^{e\nu}(x). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Sabemos que o Hamiltoniano de interação, $\mathcal{H}_I(x)$, e o Lagrangeano de interação, $\mathcal{L}_I(x)$, obedecem a $\mathcal{H}_I(x) = \Pi^{d\alpha} \partial_0 A_\alpha^d - \mathcal{L}_I(x)$ [11]; desta forma obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I(x) = & -g f^{abc} A^{a0}(x) A^{b\nu}(x) \partial_0 A_\nu^c(x) + g f^{abc} A^{a\mu}(x) A^{b\nu}(x) \partial_\mu A_\nu^c(x) \\ & + \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) A^{d\mu}(x) A^{e\nu}(x). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Podemos escrever a matriz- S de espalhamento na notação de Mandl e Shaw [11] na forma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\}. \quad (1.56)$$

onde T representa o operador ordenamento temporal entre os campos dos glúons. Como estamos interessados em uma interação de mais baixa ordem que consiste na troca de apenas um glúon, similarmente ao tratamento adotado no modelo de quarks constituintes, a expansão da matriz- S (1.56) é truncada de forma a conter apenas diagramas de Feynman de ordem 2 nos campos dos glúons:

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & -i \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} \int d^4x_1 T\{A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) A^{d\mu}(x) A^{e\nu}(x)\} \\ & + \frac{(-i)^2 g^2}{2} f^{abc} f^{a'b'c'} \int d^4x_1 d^4x_2 \\ & \times T\{A^{a\mu}(x_1) A^{b\nu}(x_1) \partial_\mu A_\nu^c(x_1) A^{a'\mu'}(x_2) A^{b'\nu'}(x_2) \partial_{\mu'} A_{\nu'}^{c'}(x_2)\}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Os campos de glúons $A_\mu^a(x)$ podem ser escritos como

$$A_\mu^a(x) = \sum_{kr} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \left[\varepsilon_{\mu r}(\vec{k}) a_r^a(\vec{k}) e^{-ikx} + \varepsilon_{\mu r}^*(\vec{k}) a_r^{a\dagger}(\vec{k}) e^{ikx} \right] \quad (1.58)$$

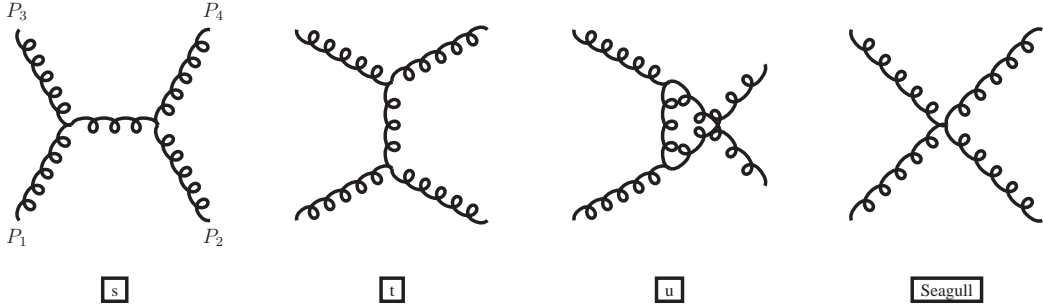


Fig. 1.2: Interação de troca de um glúon perturbativo entre os glúons constituintes.

onde ε é o vetor de polarização, a^\dagger e a são os operadores de criação e destruição de glúons, respectivamente. O propagador para o campo $A_\mu^a(x)$ é

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i\delta^{ab}(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2})}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.59)$$

No limite não-relativístico, expandimos o momentum linear do glúon massivo e o vetor de polarização até ordem $|\vec{k}|^2$:

$$k^\mu \approx \left(m + \frac{\vec{k}^2}{2m}, \vec{k} \right) \quad (1.60)$$

$$\varepsilon^\mu(k) \approx \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{e}}{m}, \vec{e} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{e}}{2m} \frac{\vec{k}}{k} \right). \quad (1.61)$$

Para o glueball de dois glúons os diagramas correspondentes de troca de um glúon virtual denominados de *ordem árvore* são apresentados na figura (1.2). Vemos que quatro diagramas são obtidos a partir da expressão (1.57), diagramas estes associados aos canais de troca de um glúon contendo os números quânticos s, t e u ; também temos um diagrama chamado de *seagull*.

O potencial correspondente a estes diagramas pode ser extraído a partir da amplitude de Feynman, \mathcal{M}_{fi} ,

$$V(\vec{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{i e^{i\vec{q}\vec{r}}}{4\sqrt{E_{1f}E_{2f}E_{1i}E_{2i}}} i\mathcal{M}_{fi} \quad (1.62)$$

onde \vec{q} é o momento transferido do sistema. As contribuições relevantes para \mathcal{M}_{fi} podem ser escritas na forma

$$i\mathcal{M}_{fi} = i\mathcal{M}_{fi}^{(1)} + i\mathcal{M}_{fi}^{(2)} \quad (1.63)$$

com

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(1)} = -ig^2 f^{ace} f^{bde} \langle 3|J_\rho|1\rangle \frac{1}{t-m^2} \langle 4|J^\rho|2\rangle \quad (1.64)$$

onde

$$\langle 3|J_\rho|1\rangle = \varepsilon_3^* \cdot \varepsilon_1 (p_1 + p_3)_\rho - 2\varepsilon_{3\rho}^* p_3 \cdot \varepsilon_1 - 2\varepsilon_{1\rho} p_1 \cdot \varepsilon_3^* \quad (1.65)$$

$$\langle 4|J^\rho|2\rangle = \varepsilon_4^* \cdot \varepsilon_2 (p_2 + p_4)^\rho - 2\varepsilon_4^{*\rho} p_4 \cdot \varepsilon_2 - 2\varepsilon_2^\rho p_2 \cdot \varepsilon_4^* \quad (1.66)$$

e também

$$i\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3^* \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_4^*) + f^{ace} f^{bde} (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \varepsilon_3^* \cdot \varepsilon_4^* - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_4^* \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3^*) \right]. \quad (1.67)$$

Como o glúon é uma partícula de spin 1 é conveniente introduzir as matrizes de spin do glúon na amplitude de espalhamento, semelhantemente ao que foi realizado para o modelo de quarks. Desta forma pode-se obter um potencial com termos a serem identificados com interações do tipo spin-spin, spin-órbita, tensorial entre outros. Vamos inicialmente definir o operador de spin $\vec{S}_m = (S_m^1, S_m^2, S_m^3)$ para o m -ésimo glúon, que em uma representação matricial assume a forma

$$S_m^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad S_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_m^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Estas matrizes podem ser resumidas em uma expressão compacta

$$(S_m^k)_{ij} = -i \epsilon^{ijk}, \quad (1.69)$$

onde ϵ^{ijk} é o tensor antissimétrico de Levi-Civita. Desta forma, pode-se verificar que as matrizes S^i satisfazem a álgebra de $SU(2)$. Utilizando-se a relação

$$A_i B_j = \left[\vec{A} \cdot \vec{B} - (\vec{S}_m \cdot \vec{B})(\vec{S}_m \cdot \vec{A}) \right]_{ij}, \quad (1.70)$$

e transferindo os vetores de polarização para o interior da função de onda do glueball a ser definida mais adiante, calculamos os elementos de matriz no referencial do centro de massa. Para isso utilizamos a seguinte identificação

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &\equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \\ \vec{p}_f &\equiv \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \\ \vec{q} &\equiv \vec{p}_3 - \vec{p}_1 = \vec{p}_f - \vec{p}_i, \end{aligned} \quad (1.71)$$

obtendo

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{fi}^{(1)} &= \frac{ig^2 f^{ace} f^{bde}}{q^2 + m^2} \left[4m^2 + 3\vec{q}^2 - 2\vec{S}^2 \vec{q}^2 + 2(\vec{S} \cdot \vec{q})^2 + 6i\vec{S} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}_i) \right] \\ i\mathcal{M}_{fi}^{(2)} &= ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} - f^{ace} f^{bde} \left(\frac{1}{2} \vec{S}^2 - 2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.72)$$

onde o vetor \vec{S} é dado por

$$\vec{S} \equiv \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \quad (1.73)$$

que será o spin total do glueball constituído de dois glúons com spin \vec{S}_1 e \vec{S}_2 respectivamente. Como foi mencionado, a amplitude de espalhamento dará origem a um potencial que agora assume um carácter operatorial, sendo que o conteúdo de spin está contido na função de onda do glueball a ser definida mais tarde. Desta forma há uma semelhança muito grande com a dedução do potencial de quarks. Colocando a expressão (1.72) em (1.62), obtemos a forma final para o potencial de interação entre dois glúons

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} f^{ace} f^{bde} \left\{ \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \vec{S}^2 + \frac{3}{2m^2} (\vec{L} \cdot \vec{S}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2m} \left((\vec{S} \cdot \vec{\nabla})^2 - \frac{1}{3} \vec{S}^2 \vec{\nabla}^2 \right) \right] \frac{e^{-mr}}{r} + \left(1 - \frac{5}{6} \vec{S}^2 \right) \frac{\pi}{m^2} \delta^3(\vec{r}) \right\}. \quad (1.74)$$

Somado a este potencial em (1.74) há o seguinte termo que é obtido diretamente nesta dedução

$$V_0 = \frac{g^2}{4\pi} f^{abe} f^{cde} \frac{\pi}{m^2} \delta^3(\vec{r}). \quad (1.75)$$

Entretanto, devido à característica do fator de cor $f^{abe} f^{cde}$ global este termo não contribui, quando contraído com a função de onda do glueball; portanto ele não será considerado no que segue. O potencial (1.74) apresenta um termo do tipo spin-órbita,

$$V_{LS}(r) \sim \frac{3}{2m^2} (\vec{L} \cdot \vec{S}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-mr}}{r} \right) \quad (1.76)$$

e um termo tensorial

$$V_{\text{Tensor}}(r) \sim -\frac{1}{2m} \left((\vec{S} \cdot \vec{\nabla})^2 - \frac{1}{3} \vec{S}^2 \vec{\nabla}^2 \right) \left(\frac{e^{-mr}}{r} \right). \quad (1.77)$$

Nesta dissertação, o estudo a ser realizado será restrito a estados com $\vec{L} = 0$. Os únicos estados existentes, nesta situação são os estados $J^{PC} = 0^{++}$ e $J^{PC} = 2^{++}$, pois como $\vec{L} = 0$ temos

$$\vec{J} = \vec{S}. \quad (1.78)$$

Como o glúon tem spin 1, um glueball formado por dois glúons, pela regras de soma de momentum angular, pode apenas apresentar valores de \vec{J} iguais a 0 ou 2. Deste modo, os termos de spin-órbita e tensorial, do potencial (1.74), não irão contribuir; o potencial resultante, que chamaremos de $V_{2g}(r)$, será dado por

$$V_{2g}(r) = f^{ace} f^{bde} V_{2g}^{OGEP} \quad (1.79)$$

onde

$$V_{2g}^{OGEP} = -\frac{\lambda}{3} \left[\omega_1 \frac{e^{-mr}}{r} + \omega_2 \frac{\pi}{m^2} \delta^3(\vec{r}) \right] \quad (1.80)$$

e

$$\lambda = \frac{3g^2}{4\pi} \quad (1.81)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \vec{S}^2 \quad (1.82)$$

$$\omega_2 = 1 - \frac{5}{6} \vec{S}^2. \quad (1.83)$$

O parâmetro λ é determinado pela CDQ [8]

$$\lambda = \frac{N}{4\pi} \left[\frac{11N}{48\pi^2} \ln \left(\frac{4m^2}{\Lambda_{CDQ}} \right) \right]^{-1}, \quad (1.84)$$

para o grupo $SU(N)$. Para $N = 3$, e tomando a massa do glúon da ordem de $m \sim 600$ MeV, $\Lambda_{CDQ} \sim 350$ MeV, encontramos $\lambda \sim 1.4$. Nesta dissertação iremos usar uma faixa de valores para λ compreendido entre 1.0 a 2.0 [12]. Este potencial (1.79) é de curto alcance e não pode levar em conta os efeitos associados a distâncias mais longas, isto é, o confinamento dos glúons. Portanto, torna-se necessário a inclusão de um termo com estas características. Adicionaremos um potencial de *string*

$$V_S(r) = \frac{1}{3} f^{ace} f^{bde} V_{str} \quad (1.85)$$

onde

$$V_{str} = 2m (1 - e^{-\beta m r}). \quad (1.86)$$

No potencial V_S , a blindagem dos glúons — característica central do confinamento — é simulada por uma corda (*string*) que rompe quando há energia suficiente armazenada para formar um par de glúons. O parâmetro β mede a intensidade da “tensão da corda”. Esta forma de potencial de *string* simula com sucesso o potencial intergluônico resultante de estudos de CDQ na rede [13, 14].

Assim obtemos o potencial microscópico de interação entre os glúons para o modelo que estudaremos no capítulo 4

$$V_{aa}(r) = f^{ace} f^{bde} \left[V_{2g}^{OGEP}(r) + \frac{1}{3} V_{str}(r) \right]. \quad (1.87)$$

Para realizar um cálculo em busca de estados ligados com este potencial é necessário somar um termo cinético e o Hamiltoniano resultante é

$$H_{aa} = 2m - \frac{1}{m} \vec{\nabla}^2 + V_{aa}. \quad (1.88)$$

O estudo deste Hamiltoniano revela um fato importante na situação $\vec{S} = 0$. Há um problema sério neste caso, devido ao efeito atrativo da função δ , que implica na inexistência de um estado ligado. Interpreta-se este “canal de máxima atração” à condensação de glúons que é responsável pelo confinamento. Em [8] o termo em δ foi tratado como uma perturbação. Já em [12, 15] a função δ é substituída por uma função que possa representar com mais suavidade esta condensação de glúons

$$D(r) = \frac{k^3 m^3}{\pi^{3/2}} e^{-k^2 m^2 r^2}. \quad (1.89)$$

Ainda vemos que recuperamos o comportamento da δ para k grande, isto é,

$$D(r) \longrightarrow \delta^3(r) \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty. \quad (1.90)$$

O Hamiltoniano (1.88) pode ser escrito em segunda quantização como o respectivo Hamiltoniano (1.50) do modelo de quarks constituintes

$$H_{aa} = T_{aa}(\mu) a_\mu^\dagger a_\mu + \frac{1}{2} V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) a_\mu^\dagger a_\nu^\dagger a_\rho a_\sigma. \quad (1.91)$$

No capítulo seguinte veremos o formalismo de Fock-Tani aplicado aos mésons. Na primeira seção veremos a representação de Fock-Tani para mésons. Na segunda seção veremos como realizar a transformação de Fock-Tani sobre os operadores da teoria. E na terceira e última seção vamos obter o Hamiltoniano para mésons na representação de Fock-Tani.

Capítulo 2

O Formalismo de Fock-Tani para Mésons: uma revisão

Neste capítulo será apresentada uma revisão dos aspectos gerais do formalismo de Fock-Tani e a sua aplicação às interações entre mésons. Inicialmente, o formalismo de Fock-Tani foi desenvolvido por M. Girardeau e colaboradores [16-25] (com base no trabalho de S. Tani [26]) nas décadas de '70 e '80 para estudar interações entre átomos para energias nas quais os seus graus de liberdade internos, de elétrons e prótons, não podiam ser desprezados. Este formalismo está relacionado com o método de quasi-partícula de Weinberg [27, 28], onde os estados ligados são subtraídos do problema, restando apenas interação residual fraca.

Este formalismo foi estendido para a física dos hádrons [29], no estudo de bárions no trabalho de doutorado de Dimiter Hadjimichef (IFT/1995) [30], no estudo de mésons no trabalho de doutorado de Sérgio Szpigel (USP/1995) [31] e em publicações posteriores com a presença de sistemas mistos com interações entre bósons e férmions como, por exemplo, no sistema káon-núcleon [32]. Nesta dissertação iremos seguir a notação utilizada no trabalho dos mésons realizado por Sérgio Szpigel, pois tanto os mésons quanto os *glueballs* são bósons. Os aspectos a serem discutidos a seguir neste capítulo serão fundamentais mais adiante nos capítulos seguintes, pois o desenvolvimento da transformação de Fock-Tani para *glueballs* segue, com grande semelhança, aquela utilizada na transformação dos mésons.

2.1 A Representação de Fock-Tani.

No formalismo de Fock-Tani (FT) partimos da representação do sistema no espaço de Fock, usando operadores de criação e aniquilação para as partículas constituintes elementares.

Consideremos um sistema contendo quarks e antiquarks (constituintes elementares) que podem formar estados ligados (mésons compostos). Nesta representação, os estados de um méson podem ser construídos a partir de operadores de criação de mésons aplicados

ao vácuo, operadores estes que podem ser definidos em termos de combinações lineares de produtos de operadores de criação de quarks e antiquarks.

Consideremos o estado de um méson composto por um quark e um antiquark. O vetor de estado $|\alpha\rangle$ no espaço de Fock, \mathcal{F} , que descreve esse méson, de acordo com o apresentado no apêndice B, é dado por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (2.1)$$

onde M_α^\dagger é o operador de criação de um méson composto no estado α e $|0\rangle$ é o estado de vácuo, definido por:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0; \quad (2.2)$$

nesta representação q_μ representa o operador aniquilação de um quark contendo números quânticos representados por μ e \bar{q}_ν denota o operador aniquilação de um antiquark com números quânticos representados por ν ; o operador M_α^\dagger é definido como:

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (2.3)$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do estado ligado do méson sendo q_μ^\dagger e \bar{q}_ν^\dagger os correspondentes conjugados hermitianos de q_μ e \bar{q}_ν . O índice α representa, de uma maneira compacta, os números quânticos do méson: $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$. Os índices μ e ν identificam os números quânticos de quarks e antiquarks: $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$. É conveniente ademais trabalhar com funções de onda orto-normalizadas:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

Os operadores de quark e antiquark satisfazem relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0, \\ \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando estas relações de anticomutação, juntamente com a condição de orto-normalização apresentada na equação (2.4), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos (ver Apêndice C):

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0 \quad , \quad [M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (2.7)$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O termo $\Delta_{\alpha\beta}$ apresentado na Eq. (2.7) e que aparece na relação não-canônica (2.6) é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons. A presença deste termo é indicativo do alto nível de complexidade que surge no tratamento de problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos, tais como a utilização de funções de Green, do teorema de Wick, entre outros, aplicam-se a operadores que satisfazem relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato de que os comutadores $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$ e $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$ não se anulam expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson, M_α e M_α^\dagger , não são variáveis dinâmicas convenientes.

A idéia do formalismo de Fock-Tani é fazer uma mudança de representação, de forma que os operadores das partículas compostas sejam redescritos por operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Naturalmente, as complicações da natureza composta dos mésons aparecerão em algum outro ponto do formalismo. A mudança de representação é realizada por meio de um operador unitário, U , de modo que os estados de um méson composto sejam redescritos por estados de um méson ideal, descritos por operadores de destruição e criação de partículas “ideais”, m_α e m_α^\dagger . Em outras palavras, queremos efetuar a seguinte substituição

$$\boxed{
 \begin{array}{ll}
 M_\alpha^\dagger|0\rangle & \implies m_\alpha^\dagger|0\rangle \\
 \text{Méson} & \text{méson} \\
 \text{físico} & \text{ideal}
 \end{array}
 } \tag{2.9}$$

Dessa forma, se $|\alpha\rangle$ representa um estado de um méson composto, ele será redescrito por um méson elementar “ideal” sob a transformação

$$|\alpha\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger|0\rangle . \tag{2.10}$$

Note-se que na nova representação, onde os estados de mésons elementares ideais são representados por “bras” e “kets” circulares ao invés de angulares. O estado $|0\rangle$ representa o vácuo para os graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons “ideais” na nova representação e operadores de méson “ideal”, m_α^\dagger e m_α , satisfazem, por definição, relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned}
 [m_\alpha, m_\beta] &= 0 , \\
 [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} ,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

e são cinematicamente independentes dos operadores de quarks e antiquarks

$$[q_\mu, m_\alpha] = [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha^\dagger] = 0. \quad (2.12)$$

2.1.1 Espaço de Vetores de Estado Ideais

Seja $|\Omega\rangle$ um vetor de estado arbitrário em segunda quantização e O um operador arbitrário, ambos expressos em termos dos operadores de quarks e antiquarks, $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$, da representação de Fock original e $|\Omega\rangle$ e O_{FT} as quantidades correspondentes na nova representação:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\longrightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \\ O &\longrightarrow O_{\text{FT}} = U^{-1}OU. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O operador U deve ser unitário, pois assim as normas dos produtos escalares entre os vetores de estado bem como os elementos de matriz (valores esperados) dos operadores serão preservados sob a mudança de representação:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\Omega\rangle &= (\Omega|\Omega), \\ \langle\Omega|O|\Omega\rangle &= (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

O operador unitário U é construído expandindo-se o espaço de Fock original de modo que os estados de méson “ideal” sejam incluídos. Consideremos o espaço de Fock físico, indicado por \mathcal{F} . Esse é o espaço de estados gerado por todas as combinações lineares de operadores de quarks e antiquarks, atuando no vácuo físico na forma

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0\rangle, \quad (2.15)$$

onde l e m são parâmetros arbitrários. Definimos um espaço de Hilbert \mathcal{M} , o espaço de mésons ideais, independente do espaço de Fock físico \mathcal{F} , como o espaço gerado por todas as combinações lineares de estados constituídos de operadores de “méson ideal”,

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (2.16)$$

onde $|0\rangle_{\mathcal{M}}$ é o vácuo de \mathcal{M} , definido por

$$m_\alpha |0\rangle_{\mathcal{M}} = 0. \quad (2.17)$$

Agora, define-se um novo espaço de Hilbert, chamado “espaço de estados ideais”, como o produto direto dos espaços de Fock físico \mathcal{F} e de mésons ideais \mathcal{M} ,

$$\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}, \quad (2.18)$$

onde o símbolo \otimes representa produto interno.

As relações de comutação das Eqs. (2.6)-(2.8), inicialmente definidas em \mathcal{F} , como também as da Eq. (2.11), inicialmente definidas em \mathcal{M} , são válidas também em \mathcal{I} . Por definição, os operadores de quark e de méson ideal são cinematicamente independentes e, portanto, também satisfazem a Eq. (2.12) em \mathcal{I} .

O vácuo de \mathcal{I} é dado pelo produto direto dos vácuos de \mathcal{M} e \mathcal{F} ,

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle_{\mathcal{M}}. \quad (2.19)$$

Dessa forma, $|0\rangle$ é o vácuo dos graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons ideais:

$$q_\mu|0\rangle = \bar{q}_\nu|0\rangle = m_\alpha|0\rangle = 0. \quad (2.20)$$

Note-se porém que os operadores de quarks e antiquarks atuam no vácuo físico $|0\rangle$ e os operadores de mésons ideais atuam no vácuo ideal de mésons $|0\rangle_{\mathcal{M}}$ na Eq. (2.19).

Estabelecemos, assim, uma correspondência um-para-um entre os estados do espaço de Fock físico \mathcal{F} e os estados de um sub-espaço de \mathcal{I} . Em \mathcal{I} , existe um sub-espaço \mathcal{I}_0 que é isomórfico ao espaço de Fock original \mathcal{F} e consiste dos estados $|\Omega\rangle \in \mathcal{F}$ sem mésons ideais,

$$m_\alpha|\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha, \quad \text{ou} \quad N_m|\Omega\rangle = 0, \quad (2.21)$$

onde N_m é o operador número total de mésons ideais

$$N_m = \sum_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha. \quad (2.22)$$

A Eq. (2.21) passa a ser um vínculo a ser satisfeito pelos estados permitidos em \mathcal{I} .

A equação de vínculo, ou condição subsidiária, exige que em \mathcal{I}_0 os mésons ideais sejam modos redundantes, ou seja, correspondam a estados totalmente desocupados. Esta condição é necessária para evitar múltipla contagem de graus de liberdade.

O operador unitário U atua sobre estados de \mathcal{I} e não pode ser definido apenas em \mathcal{F} . Contudo, U está definido em \mathcal{I}_0 , que é isomórfico a \mathcal{F} . Definimos, então, o espaço de Fock-Tani \mathcal{F}_{FT} como o espaço imagem de \mathcal{I}_0 :

$$\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1}\mathcal{I}_0. \quad (2.23)$$

Assim, o espaço \mathcal{F}_{FT} é o sub-espaço de \mathcal{I} cujos vetores de estado, representados por $|\Omega\rangle$ na nova representação estão relacionados aos vetores de estado de \mathcal{I}_0 por

$$|\Omega\rangle = U|\Omega\rangle \Rightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle. \quad (2.24)$$

Qualquer cálculo efetuado no espaço físico \mathcal{F} é equivalente ao cálculo no espaço de Fock-Tani. Para dois vetores de estados quaisquer, $|\Omega\rangle$ e $|\Omega'\rangle$, e para qualquer observável $O \in \mathcal{F}$, temos

$$\langle\Omega|O|\Omega'\rangle = (\Omega|U^{-1}OU|\Omega') = (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega'). \quad (2.25)$$

É claro que em \mathcal{F}_{FT} , a condição que garante que não há dupla contagem,

$$U^{-1}m_\alpha U|\Omega\rangle = 0, \quad (2.26)$$

deve sempre ser satisfeita.

A vantagem de trabalhar em \mathcal{F}_{FT} é que neste espaço todos os operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de comutação ou anti-comutação canônicas. No entanto, a natureza composta dos mésons será transferida para outro lugar. Os operadores transformados,

$$O_{\text{FT}} = U^{-1}OU, \quad (2.27)$$

dão origem a séries infinitas que fisicamente representam, de algum modo, uma expansão na densidade do sistema [29].

O método apresentado será eficiente para cálculos práticos se forem necessários poucos termos da série para descrever as interações entre os mésons e os quarks. A obtenção de forças efetivas de muitos corpos entre os mésons requer uma expansão até altas ordens na função de onda do méson. No entanto, interações efetivas entre dois mésons podem ser obtidas em ordens relativamente baixas.

Outra complicação potencial relaciona-se com a condição subsidiária anteriormente apresentada em (2.21). Em problemas envolvendo muitos mésons deve-se tomar cuidado para não violar esse vínculo. Para um estado contendo vários mésons compostos, $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = M_{\alpha_1}^\dagger \cdots M_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$, a transformação através do operador U não resulta, em geral, em um estado produto de mésons ideais, pois $U^{-1}M_\alpha^\dagger U$ difere de m_α^\dagger por uma série infinita contendo operadores de quarks. No entanto, é possível mostrar que um estado em \mathcal{F}_{FT} da forma $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$ satisfaz a condição subsidiária Eq. (2.26) e, portanto, pode representar um estado físico. A imagem deste estado em \mathcal{I}_0 é um estado complexo contendo quarks, antiquarks e mésons. Para processos de espalhamento, a matriz- S é definida em termos de estados assintóticos, os quais, por definição, não se superpõem, de forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \rightarrow U^{-1}|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle &= |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \\ &= m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Portanto, para estados assintóticos, a condição subsidiária é trivialmente satisfeita.

2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais

Uma forma de implementar a substituição (2.9) consiste em definir um novo operador

$$f_0 = m_\alpha^\dagger M_\alpha \quad (2.29)$$

que atua sobre o estado mesônico composto; combinando-o com as expressões (2.1) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} f_0 |\beta\rangle &= m_\alpha^\dagger M_\alpha |\beta\rangle = m_\alpha^\dagger M_\alpha M_\beta^\dagger |0\rangle = m_\alpha^\dagger (M_\beta^\dagger M_\alpha + \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}) |0\rangle \\ &= m_\beta^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Desta expressão vemos que a atuação de f_0 sobre o estado composto produz efetivamente um estado elementar “ideal” na forma buscada.

Podemos construir, a partir de (2.29), um operador F_0 , anti-hermitiano, $F_0^\dagger = -F_0$, da seguinte forma

$$F_0 = f_0 - f_0^\dagger = m_\alpha^\dagger M_\alpha - M_\alpha^\dagger m_\alpha, \quad (2.31)$$

onde a atuação de F_0 sobre os estados composto e elementar resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned} F_0 |\alpha\rangle &= m_\alpha^\dagger |0\rangle \\ F_0 m_\alpha^\dagger |0\rangle &= -|\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Finalmente, podemos construir, a partir da definição (2.31) do operador anti-hermitiano F_0 , uma transformação unitária capaz de implementar a substituição expressa na equação (2.9), isto é, podemos definir

$$U(t) = \exp(tF_0) \quad (2.33)$$

onde o operador F_0 , o gerador da transformação buscada, depende de um parâmetro real, t , como será visto a seguir (t representa na realidade um ângulo de rotação no espaço de Hilbert). Utilizando (2.32), podemos obter as expressões para as potências de F_0 aplicadas aos estados composto (físico) e elementar (ideal), respectivamente:

$$\begin{aligned} F_0^2 M_\alpha^\dagger |0\rangle &= -M_\alpha^\dagger |0\rangle & F_0^2 m_\alpha^\dagger |0\rangle &= -m_\alpha^\dagger |0\rangle \\ F_0^3 M_\alpha^\dagger |0\rangle &= -m_\alpha^\dagger |0\rangle & F_0^3 m_\alpha^\dagger |0\rangle &= M_\alpha^\dagger |0\rangle \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Desta forma, podemos realizar a transformação unitária completa sobre o estado composto

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) M_\alpha^\dagger |0\rangle &= \left(1 - tF_0 + \frac{t^2}{2!} F_0^2 - \frac{t^3}{3!} F_0^3 + \dots \right) M_\alpha^\dagger |0\rangle \\ &= \left(1 + \frac{t^2}{2!} F_0^2 + \frac{t^4}{4!} F_0^4 + \dots \right) M_\alpha^\dagger |0\rangle \\ &\quad - \left(tF_0 + \frac{t^3}{3!} F_0^3 + \frac{t^5}{5!} F_0^5 + \dots \right) M_\alpha^\dagger |0\rangle \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) M_\alpha^\dagger |0\rangle - \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) m_\alpha^\dagger |0\rangle \\ &= (\cos t) M_\alpha^\dagger |0\rangle - (\sin t) m_\alpha^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se tomarmos $t = -\pi/2$ obtemos o estado transformado

$$U^{-1} M_\alpha^\dagger |0\rangle = m_\alpha^\dagger |0\rangle \equiv |\alpha\rangle. \quad (2.36)$$

2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores.

2.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores

O primeiro passo na implementação do método requer a transformação dos operadores básicos do modelo em estudo. À primeira vista, a transformação unitária poderia ser avaliada com uma expansão em múltiplos comutadores envolvendo todas as ordens de produtos dos operadores de criação e destruição de mésons físicos e ideais. A transformação de um operador de méson, por exemplo, seria da seguinte forma

$$M_\alpha^\dagger(t) = U^{-1}(t) M_\alpha^\dagger U(t) = \exp(-tF_0) M_\alpha^\dagger \exp(tF_0) = M_\alpha^\dagger + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} [M_\alpha^\dagger, F_0]_j \quad (2.37)$$

onde $[M_\alpha^\dagger, F_0]_j$ denota o múltiplo comutador de ordem j definido de maneira recursiva por

$$\begin{aligned} [M_\alpha^\dagger, F_0]_1 &= [M_\alpha^\dagger, F_0] & ; & & [M_\alpha^\dagger, F_0]_2 &= [[M_\alpha^\dagger, F_0]_1, F_0] \\ \dots [M_\alpha^\dagger, F_0]_{j+1} &= [[M_\alpha^\dagger, F_0]_j, F_0]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Através da relação operatorial simples

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (2.39)$$

podemos calcular $[M_\alpha^\dagger, F_0]_j$ para diferentes valores de j . De (2.31) temos, por exemplo, para o termo de primeira ordem

$$[M_\alpha^\dagger, F_0] = [M_\alpha^\dagger, m_\beta^\dagger M_\beta - M_\beta^\dagger m_\beta] = m_\beta^\dagger (\Delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.40)$$

Nos demais termos das ordens subsequentes aparecem potências das mais diferentes ordens em $\Delta_{\alpha\beta}$. Se desprezarmos os termos envolvendo potências de $\Delta_{\alpha\beta}$ o cálculo fica simplificado. No entanto estamos, com isso, eliminando do problema os efeitos da estrutura interna dos mésons. Este caso, apenas para efeito ilustrativo, é mostrado abaixo (um procedimento mais elaborado será mostrado mais adiante).

$$\begin{aligned} [M_\alpha^\dagger, F_0]_1 &\approx -m_\alpha^\dagger & , & & [M_\alpha^\dagger, F_0]_2 &\approx -M_\alpha^\dagger \\ [M_\alpha^\dagger, F_0]_3 &\approx m_\alpha^\dagger & , & & [M_\alpha^\dagger, F_0]_4 &\approx M_\alpha^\dagger \\ [M_\alpha^\dagger, F_0]_5 &\approx -m_\alpha^\dagger & , & & [M_\alpha^\dagger, F_0]_6 &\approx -M_\alpha^\dagger \\ & & & & & \vdots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Destas expressões encontramos

$$M_{\alpha}^{\dagger}(t) \approx (\cos t) M_{\alpha}^{\dagger} - (\sin t) m_{\alpha}^{\dagger}; \quad (2.42)$$

em particular quando $t = -\pi/2$ temos

$$M_{\alpha}^{\dagger}(t) \approx m_{\alpha}^{\dagger}. \quad (2.43)$$

A expansão em múltiplos comutadores (2.37) usada para determinar a transformação de operadores não é do ponto de vista prático muito útil. A razão disto reside no fato de até a aproximação de “ordem zero” (Eq. (2.42)) envolver uma série infinita. À medida que levarmos em conta o termo operatorial $\Delta_{\alpha\beta}$, a série gerada pela expansão em múltiplos comutadores torna-se muito mais complexa. Há nestes termos, devido à sua complexidade, pouca esperança em reconhecermos termos gerais da série relevante e procedermos na busca de efetuar a sua soma de maneira fechada. Então, torna-se uma necessidade desenvolvermos um método consistente e eficiente para avaliarmos os operadores transformados.

Na próxima subseção mostraremos uma técnica chamada de *método das equações de movimento*, que servirá para construir a transformação de Fock-Tani dos operadores de maneira iterativa.

2.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento”

Os operadores básicos de um determinado modelo aplicado a física de mésons compostos, tais como o operador Hamiltoniano, correntes eletromagnéticas, entre outros, são expressos em termos de operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks. Dessa forma, para obtermos os operadores do modelo na nova representação, aquela que, envolve mésons ideais, necessitamos dos operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks transformados. Apresentamos abaixo os operadores de destruição de quarks e antiquarks na nova representação simbolizados respectivamente por q_{FT} e \bar{q}_{FT}

$$\begin{aligned} q_{\text{FT}} &= U^{-1}qU \\ \bar{q}_{\text{FT}} &= U^{-1}\bar{q}U. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os operadores de criação correspondentes são obtidos de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (2.44) e lembrando que $U^{-1} = U^{\dagger}$.

Os cálculos dessas expressões pelo método de multicomutadores é complexo, envolvendo em geral séries infinitas e não podem, em geral, ser expressos em uma forma fechada. No entanto, as transformações destes operadores podem ser obtidas iterativamente através do método denominado de “equações de movimento”, sugerido por Girardeau [17]. Para qualquer operador O , define-se:

$$O(t) = \exp(-tF_0)O \exp(tF_0). \quad (2.45)$$

Diferenciando-se a expressão acima com relação a t , obtemos a equação de movimento para o operador O :

$$\frac{dO(t)}{dt} = [O(t), F_0], \quad (2.46)$$

com a “condição inicial”:

$$O(t=0) = O. \quad (2.47)$$

Os operadores transformados de Fock-Tani são obtidos das soluções das Eqs. (2.46)-(2.47) para $t = -\frac{\pi}{2}$:

$$O_{\text{FT}}(t) |_{t=-\pi/2} = U^{-1}(t) O U(t) |_{t=-\pi/2} = O(-\pi/2). \quad (2.48)$$

Deste modo, usando a Eq. (2.46) e o gerador da transformação dado na Eq. (2.31), obtemos as equações de movimento para os operadores de quarks e antiquarks:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu(t)}{dt} &= [q_\mu(t), F_0] \\ &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger(t) m_\alpha(t), \end{aligned} \quad (2.49)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_\nu(t)}{dt} &= [\bar{q}_\nu(t), F_0] \\ &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger(t) m_\alpha(t). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Uma vez que as equações de movimento para q e \bar{q} envolvem $m_\alpha(t)$, é necessário obter também a equação de movimento para $m_\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F_0] \\ &= M_\alpha(t). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{dM_\alpha(t)}{dt} &= [M_\alpha(t), F_0] \\ &= -[\delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}(t)] m_\beta(t). \end{aligned} \quad (2.52)$$

As Eqs. (2.49)-(2.52), juntamente com suas equações conjugadas hermitianas, formam um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, e que apresentam um grau elevado de complexidade no que se refere a sua resolução, comparável à técnica de multi-comutadores. No entanto, essas equações podem ser resolvidas de maneira direta através do método de iteração.

Partindo de uma aproximação de ordem zero, onde é desprezado o termo $\Delta_{\alpha\beta}$, coletamos os termos de mesma ordem na função de onda do estado ligado, Φ_α e Φ_α^* . Dessa forma,

escrevemos os operadores criação e destruição como uma expansão

$$\begin{aligned} q_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_\mu^{(i)}(t), & \bar{q}_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(t), \\ m_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(t), & M_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} M_\alpha^{(i)}(t), \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde (i) indica a ordem nas funções de onda. Para que se tenha uma contagem de potências consistente, como pode ser visto nas Eqs. (2.55) a seguir, a presença implícita das funções de onda na definição dos operadores M_α e M_α^\dagger via Eq. (2.3), não devem entrar na contagem. Desta forma, as expansões da Eq. (2.53) pode ser entendidas como expansões na densidade do sistema[17].

Assim, as equações de movimento em ordem zero nas funções de onda são obtidas desprezando-se os termos $\Delta_{\alpha\beta}(t)$ e Φ_α nas Eqs. (2.49)-(2.52):

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} &= 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(t)}{dt} = 0 ; \\ \frac{dM_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(0)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(0)}(t) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Usando as condições iniciais da Eq. (2.47), as soluções resultam em

$$\begin{aligned} q_\mu^{(0)}(t) &= q_\mu \quad ; \quad \bar{q}_\nu^{(0)}(t) = \bar{q}_\nu ; \\ m_\alpha^{(0)}(t) &= m_\alpha \cos t + M_\alpha \sin t \quad ; \quad M_\alpha^{(0)}(t) = M_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Deve-se notar que as condições iniciais foram impostas sobre o termo de ordem zero na expansão da Eq. (2.53). Assim, para que esta expansão seja consistente com a Eq. (2.47), devemos ter como condições iniciais para os termos de ordem $i \geq 1$ que:

$$q_\mu^{(i)}(t=0) = \bar{q}_\mu^{(i)}(t=0) = m_\alpha^{(i)}(t=0) = M_\alpha^{(i)}(t=0) = 0, \text{ para } i \geq 1. \quad (2.56)$$

Uma vez que o termo $\Delta_{\alpha\beta}$ não contribui para as equações de movimento em primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(t)}{dt} = \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) ; \\ \frac{dM_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(1)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(1)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(1)}(t) . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Com as condições iniciais da Eq. (2.56) e a condição em $t = -\pi/2$, ao integrar-se as expressões da Eq. (2.57) combinadas com as expressões da Eq. (2.55), obtemos:

$$\begin{aligned} q_\mu^{(1)}(t) &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\ \bar{q}_\nu^{(1)}(t) &= \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\ m_\alpha^{(1)}(t) &= 0 , \\ M_\alpha^{(1)}(t) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Esse processo iterativo pode ser estendido diretamente até ordens mais altas. No entanto, as soluções de segunda ordem em diante darão origem a termos seculares, isto é, termos que envolvem polinômios em t , além de funções trigonométricas em t . Entre outras coisas, os termos seculares introduzem as familiares discrepâncias “post-prior” [24] na análise de processos de espalhamento e processos reativos. A origem dos termos seculares está na assimetria das equações de movimento para m_α e M_α , Eqs. (2.51) e (2.52). A simetria é quebrada pelo termo $\Delta_{\alpha\beta}$. Quando apresentarmos o estudo sobre o formalismo de Fock-Tani aplicado aos *glueballs*, no capítulo 3, retornaremos a este problema e mostraremos explicitamente como surgem os termos seculares na resolução das equações de movimento. Formalmente o problema foi resolvido por Girardeau e Straton [23]. A solução consiste em adicionar a F um termo dependente de $\Delta_{\alpha\beta}$ de modo que as equações tornem-se simétricas. Seguimos, aqui, o procedimento de Lo e Girardeau [24], que embora seja equivalente ao procedimento de Girardeau e Straton, é mais elegante e sistemático.

O gerador da transformação é definido neste caso como

$$F = \sum_{\alpha} \left(m_{\alpha}^{\dagger} \tilde{M}_{\alpha} - \tilde{M}_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha} \right) , \quad (2.59)$$

ou seja, como uma superposição de termos do tipo do operador anti-hermitiano definido na Eq.(2.31) e onde o operador \tilde{M}_{α} é uma função somente dos operadores de quark e antiquark. \tilde{M}_{α} é escolhido de tal forma que satisfaça relações de comutação canônicas, ou seja:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_{\alpha}, \tilde{M}_{\beta}] &= 0 , \\ [\tilde{M}_{\alpha}, \tilde{M}_{\beta}^{\dagger}] &= \delta_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (2.60)$$

isto é, incorporando em sua definição termos que eliminam a presença de $\Delta_{\alpha\beta}$ em (2.6). Isto leva a equações de movimento simétricas para m_{α} e \tilde{M}_{α} em todas as ordens nas funções de onda de estado ligado Φ_{α} e Φ_{α}^* :

$$\begin{aligned} \frac{dm_{\alpha}(t)}{dt} &= [m_{\alpha}(t), F] = \tilde{M}_{\alpha}(t) , \\ \frac{d\tilde{M}_{\alpha}(t)}{dt} &= [\tilde{M}_{\alpha}(t), F] = -m_{\alpha}(t) , \end{aligned} \quad (2.61)$$

e que representam assim uma extensão das Eqs.(2.51) e (2.52). Note-se que diferentemente da Eq.(2.52) a segunda das expressões acima não contém explicitamente a presença do termo $\Delta_{\alpha\beta}$ que está contido implicitamente na definição de \tilde{M}_{α} . As soluções destas equações

$$\begin{aligned} m_{\alpha}(t) &= \tilde{M}_{\alpha} \sin t + m_{\alpha} \cos t , \\ \tilde{M}_{\alpha}(t) &= \tilde{M}_{\alpha} \cos t - m_{\alpha} \sin t , \end{aligned} \quad (2.62)$$

contêm somente funções trigonométricas em t . Não é difícil mostrar que isto elimina também os termos seculares dos operadores de quark e antiquark.

O operador \tilde{M}_α é, também determinado iterativamente, ou seja, ordem a ordem em Φ_α e Φ_α^* , de modo que \tilde{M}_α pode ser expandido similarmente às definições apresentadas em (2.53), como

$$\tilde{M}_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{M}_\alpha^{(i)}(t) , \quad (2.63)$$

onde, novamente, (i) indica a ordem considerada em Φ_α e Φ_α^* . O termo de ordem zero é trivialmente dado por:

$$\tilde{M}_\alpha^{(0)} = M_\alpha , \quad (2.64)$$

que certamente satisfaz a Eq. (2.60), em ordem zero. Isto porque nesta ordem de aproximação, despreza-se a presença de $\Delta_{\alpha\beta}$ em (2.6), e (2.64) reproduz portanto os resultados originais para primeira e segunda ordem. O termo seguinte é o de segunda ordem:

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(2)} , \quad (2.65)$$

onde $\tilde{M}_\alpha^{(2)}$ deve ser escolhido de forma que

$$[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3) . \quad (2.66)$$

A escolha apropriada que satisfaz esta condição é:

$$\tilde{M}_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta . \quad (2.67)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos o operador em terceira ordem em i ,

$$\tilde{M}_\alpha^{(3)} = -\frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma . \quad (2.68)$$

Assim, até terceira ordem em Φ_α , verifica-se que o operador \tilde{M}_α é dado por:

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta + \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma . \quad (2.69)$$

Pode-se mostrar, usando estas relações, que:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta] &= \mathcal{O}(\Phi^4) \\ [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) . \end{aligned} \quad (2.70)$$

O cálculo detalhado deste operador generalizado será apresentado, mais tarde, porém para o estudo dos *glueballs*.

As equações de movimento em segunda ordem para m_α e \tilde{M}_α , usando a transformação de Fock-Tani generalizada, são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [m_\alpha^{(2)}(t), F] = \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) , \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [M_\alpha^{(2)}(t), F] = -m_\alpha^{(2)}(t) . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ao considerarmos as equações de movimento para os operadores q e \bar{q} , temos que incluir as contribuições adicionais que resultam da mudança do gerador da transformação. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(2)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(2)}(t), F] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(1)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) , \\ \frac{d\bar{q}_\nu^{(2)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(2)}(t), F] &= \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^{\dagger(1)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) \\ &- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} M_\alpha^{\dagger(0)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) . \end{aligned} \quad (2.72)$$

As condições iniciais para $\tilde{M}_\alpha^{(i)}(t)$ são dadas por

$$\tilde{M}_\alpha^{(i)}(t=0) = O_\alpha^{(i)} \quad \forall i \quad . \quad (2.73)$$

Assim, temos $\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t=0) = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta$ e, integrando-se as Eqs. (2.71)-(2.72) obtemos

$$\begin{aligned} m_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \sin t , \\ O_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \cos t , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_\mu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\beta^{\mu\nu_1} \left[m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] q_{\mu_2} \\ \bar{q}_\nu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu} \left[m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] \bar{q}_{\nu_2} . \end{aligned} \quad (2.74)$$

As equações de movimento em terceira ordem para os operadores de quarks e antiquarks são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(3)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(3)}(t), F] &= -\frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \left[\bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(2)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(2)}(t) \right] \right. \\ &+ \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \right] \\ &+ \Phi_\alpha^{\mu_1\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho_1\sigma} \Phi_\delta^{\rho_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma_1}^{\dagger(0)}(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\ &+ \Phi_\alpha^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma_1} \Phi_\delta^{\mu_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma}^{\dagger(0)}(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\ &\left. - \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\gamma\alpha}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \right\} , \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(3)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(3)}(t), F] &= \frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \left[q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t)m_\alpha^{(2)}(t) + q_{\mu_1}^{\dagger(2)}(t)m_\alpha^{(0)}(t) \right] \right. \\
 &+ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \left[m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)M_\beta^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(1)}(t)m_\beta^{(0)}(t) \right] \\
 &- \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t) \\
 &- \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} M_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t)M_\beta^{(0)}(t)m_\gamma^{(0)}(t) \\
 &\left. + \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^{\dagger(0)}(t)\Delta_{\gamma\beta}(t)m_\beta^{(0)}(t) \right\} . \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

Integrando-se estas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(3)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \left[m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 &+ M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 &+ (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 &+ m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 &+ M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 &\left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 &+ \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 \bar{q}_\nu^{(3)}(t) &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} q_{\rho_1}^\dagger \left[m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 &+ M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 &+ (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 &+ m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 &+ M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 &\left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} q_{\mu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} q_{\mu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] . \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

Em princípio, este processo pode ser extendido até qualquer ordem, ainda que a complexidade das expressões obtidas aumente muito com a ordem considerada. Sabe-se, no entanto, que para obter uma interação efetiva méson-méson, bem como outros processos envolvendo quarks e mésons, necessita-se ir somente até a terceira ordem nos operadores de quarks transformados[29].

2.3 O Hamiltoniano na representação Fock-Tani.

O Hamiltoniano que descreve a propagação e a interação entre quarks e antiquarks na representação de Fock-Tani é obtido pela aplicação da transformação unitária U sobre o Hamiltoniano microscópico original, expresso em termos dos operadores dos constituintes fundamentais, q, q^\dagger, \bar{q} e \bar{q}^\dagger . Consideramos o Hamiltoniano microscópico envolvendo quarks e antiquarks, expresso de forma geral como uma soma de termos envolvendo contribuições de energia cinética e potencial na forma:

$$\begin{aligned} H = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Nesta expressão identificamos, nos dois primeiros termos, contribuições de energia cinética e nos demais contribuições de energia potencial envolvendo interações de dois corpos. Vários Hamiltonianos de modelos de quarks utilizados na literatura podem ser escritos nessa forma, como por exemplo o Hamiltoniano do tipo Fermi-Breit no modelo de quarks não-relativístico descrito no capítulo 1.

A equação de movimento para a função de onda de um méson é dada por

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} = \epsilon_{[\alpha]} \Phi_{[\alpha]}^{\mu\nu} , \quad (2.79)$$

onde ϵ_α é a energia total do méson, isto é, a soma de sua energia de centro de massa e de sua energia interna, e $H(\mu\nu; \sigma\rho)$ é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu[\mu']}\delta_{\nu[\nu']} [T([\mu']) + T([\nu'])] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') . \quad (2.80)$$

Usamos nesta parte do texto a convenção de que não há soma nos índices repetidos entre colchetes. O Hamiltoniano exato e transformado é dado, na nova representação, por

$$H_{\text{FT}} \equiv U^{-1} H U , \quad (2.81)$$

isto é, o Hamiltoniano é avaliado em todas as ordens na função de onda do méson e descreve todos os processos possíveis envolvendo quarks e mésons. Tais processos incluem interações de dois corpos do tipo *(anti)quark-(anti)quark*, méson-*(anti)quark*, méson-méson, bem como outros processos de muitos corpos envolvendo interações em que várias partículas (quarks, antiquarks e mésons) participam. Até a ordem em que os operadores de quark e antiquark foram determinados (ordem três), é possível obter-se um Hamiltoniano efetivo truncado, que descreve apenas interações de poucas partículas. O Hamiltoniano na representação de Fock-Tani, H_{FT} tem, assim, a seguinte estrutura geral:

$$H_{\text{FT}} = H_q + H_{\text{mq}} + H_m , \quad (2.82)$$

onde H_q indica termos contendo somente operadores de quarks e antiquarks, H_{mq} indica termos contendo operadores de mésons e quarks e H_m contém apenas operadores de mésons. O procedimento para obter a Eq. (2.82) é substituir na Eq. (2.78) os operadores de quarks transformados, fazendo em seguida o ordenamento normal dos operadores.

Por exemplo, o termo H_q tem estrutura idêntica àquela apresentada na Eq. (2.78), exceto pelo termo que descreve a interação *quark-antiquark*, que é modificado de forma a não produzir neste modelo estados ligados *quark-antiquark*. Os operadores q e \bar{q} presentes em H e H_q têm também significados distintos, pois em H_q estes operadores representam somente estados de quarks e antiquarks não ligados. Assim,

$$\begin{aligned} H_q = & T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ & + \frac{1}{2} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (2.83)$$

O termo importante a salientar é aquele que descreve a interação *quark-antiquark* modificada e que é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) = & V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) - \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma\rho) - H(\mu\nu; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) \\ & + \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) , \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde $\Delta(\mu\nu; \mu'\nu')$ é conhecido como “*kernel* de estado ligado”

$$\Delta(\mu\nu; \mu'\nu') = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu'\nu'} , \quad (2.85)$$

e $H(\mu\nu; \sigma\rho)$ é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') . \quad (2.86)$$

A origem destes termos é a seguinte:

- primeiro termo em $\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$: este termo representa as contribuições de ordem zero nas funções de onda de estado ligado para os operadores de quarks:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(0)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)} ; \quad (2.87)$$

- segundo termo: é dado pelas contribuições dos termos de primeira ordem nas funções de onda de estado ligado, ou seja,

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(0)} , \quad T(\nu) q_\nu^{\dagger(1)} q_\nu^{(0)} , \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)} ; \quad (2.88)$$

- terceiro termo: este termo representa o conjugado Hermitiano das contribuições anteriores.

- quarto termo: é dado pelas contribuições dos termos de segunda ordem, nas funções de onda mencionadas anteriormente.

$$T(\mu)q_\mu^{\dagger(1)}q_\mu^{(1)}, \quad T(\nu)q_\nu^{\dagger(1)}q_\nu^{(1)}, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^{\dagger(1)}\bar{q}_\nu^{\dagger(0)}\bar{q}_\rho^{(0)}q_\sigma^{(1)}. \quad (2.89)$$

O fato de que a interação *quark-antiquark* remanescente não pode formar estados ligados, em particular aqueles estados ligados empregados na transformação unitária, está em um certo sentido de acordo com a idéia de quase-partículas de Weinberg [27, 28]. O formalismo de quase-partículas de Weinberg foi introduzido com o objetivo de calcular amplitudes de espalhamento para potenciais para os quais a teoria de perturbação não pode ser empregada. Neste formalismo, partículas elementares fictícias são introduzidas na teoria, em correspondência direta com os estados ligados da teoria. Para que a física do problema não seja modificada, Weinberg argumenta que é necessário mudar simultaneamente o potencial de forma que contribuições de interação sejam incorporadas gradativamente nas propriedades intrínsecas destas partículas. Como os aspectos dos estados ligados da teoria original são incorporadas em grande parte na forma de modificações das estruturas intrínsecas das partículas originais, o potencial modificado não deve produzir os estados ligados originais. Neste procedimento, o potencial modificado torna-se mais fraco e, por isso, a teoria de perturbação pode ser em geral usada. No formalismo Fock-Tani, o potencial enfraquecido de Weinberg é realizado pelo potencial da Eq. (2.84).

O termo do Hamiltoniano transformado, que descreve interações envolvendo mésons e quarks, H_{mq} , corresponde ao acoplamento dos estados ligados aos estados do contínuo. Em um modelo de quarks com confinamento de cor, estes processos não contribuem em ordem mais baixa na aproximação de Born, pois não há estados assintóticos de quarks livres. No entanto, estes processos irão contribuir em ordens mais altas como estados intermediários de processos físicos com estados assintóticos confinados sem cor. Por outro lado, na matéria hadrônica densa e quente, quando espera-se que haja desconfinamento, estas interações certamente irão contribuir em processos de espalhamento e reações em que os quarks e antiquarks aparecem como estados físicos no meio.

Consideremos, agora, o termo do Hamiltoniano transformado contendo somente operadores de mésons, H_m de (2.82). Em ordem mais baixa, este termo tem a forma geral

$$H_m^{(0)} = T_m^{(0)} + V_{mm}^{(0)}. \quad (2.90)$$

$T_m^{(0)}$ é o termo de um único méson ideal, dado por

$$T_m^{(0)} = \sum_{\alpha\beta} T(\alpha, \beta) m_\alpha^\dagger m_\beta, \quad (2.91)$$

onde

$$T(\alpha, \beta) = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \{ \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \} \Phi_\beta^{\mu'\nu'}$$

$$= \Phi_\alpha^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\beta^{\mu'\nu'} . \quad (2.92)$$

Nesta expressão, os termos em $T(\mu)$ e $T(\nu)$ vêm das contribuições dos termos de segunda ordem em:

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(1)} , \quad T(\nu) \bar{q}_\nu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{(1)} . \quad (2.93)$$

O termo $V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$ vem também da contribuição do termo de segunda ordem em:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)} . \quad (2.94)$$

Se Φ_α é um auto-estado do Hamiltoniano microscópico de quarks, temos

$$T(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_\beta , \quad (2.95)$$

de modo que o termo $T_m^{(0)}$ reduz-se a:

$$T_m^{(0)} = \sum_\alpha \epsilon_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha . \quad (2.96)$$

$V_{mm}^{(0)}$ corresponde ao potencial efetivo envolvendo pares méson-méson ideais:

$$V_{mm}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta) m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\delta m_\gamma , \quad (2.97)$$

onde $V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta)$ é dado por:

$$V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{mm}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{mm}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (2.98)$$

O termo $V_{mm}^{\text{intra-ex}}$ abaixo corresponde à interação dos dois mésons com troca de um glúon no interior do méson seguida da troca de um quark.

$$\begin{aligned} V_{mm}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho'\sigma'} \Phi_\gamma^{\mu'\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho'\nu'} \Phi_\gamma^{\mu'\sigma'} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\nu'} \Phi_\gamma^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\mu\sigma} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{\mu'\nu'} . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Ademais o termo V_{mm}^{dir} abaixo corresponde à interação dos dois mésons através da troca de um glúon, sem troca de quark.

$$\begin{aligned} V_{mm}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & + 2\Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho'\nu'} \Phi_\gamma^{\mu'\sigma} \\ & + \Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_\delta^{\rho'\nu'} \Phi_\gamma^{\mu'\sigma} \\ & + \Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_\delta^{\rho'\nu'} \Phi_\gamma^{\mu\sigma'} . \end{aligned} \quad (2.100)$$

o termo $V_{\text{mm}}^{\text{ex}}$ abaixo corresponde à interação dos dois mésons através da troca de um glúon, seguida da troca de um quark.

$$\begin{aligned}
 V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} \\
 & - \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho'\sigma} \\
 & - \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma'} .
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

Dadas auto-funções do Hamiltoniano, representadas por Φ , o termo $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$ reduz-se à:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\alpha]} \Phi_{[\alpha]}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\
 & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\beta]} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{[\beta]}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\
 & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\delta]} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Phi_{[\delta]}^{\mu\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\
 & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\gamma]} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{[\gamma]}^{\mu\nu} .
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

As Fig. (2.1), (2.2), (2.3) mostram os diagramas de troca correspondentes a esses termos.

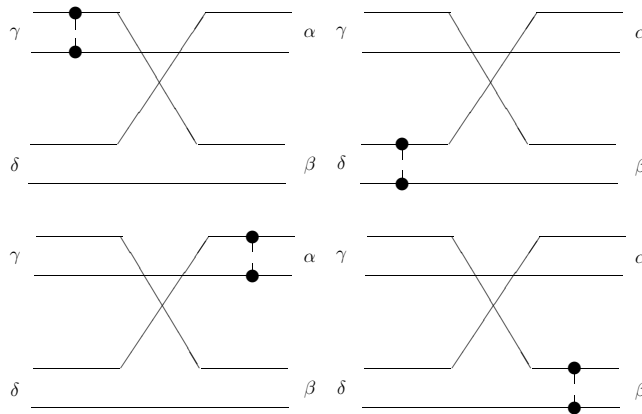


Fig. 2.1: Diagramas correspondentes às contribuições do termo $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$.

É importante notar que a Eq. (2.97) representa a contribuição de ordem mais baixa na função de onda Φ para o potencial méson-méson (quarta ordem). Existem outras contribuições de ordens mais altas que correspondem às correções de ortogonalidade, análogas as

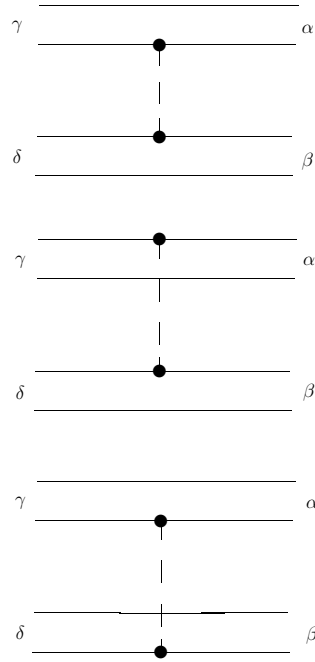


Fig. 2.2: Diagramas correspondentes às contribuições do termo $V_{\text{mm}}^{\text{dir}}$.

que aparecem no termo $H_{mq \rightarrow mq}$. Por exemplo, consideremos a integração até quinta ordem do quinto termo da Eq. (2.75),

$$\frac{dq_\mu^{(5)}(t)}{dt} = -\delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(0)(t) \Delta_{\gamma\alpha}^{(4)}(t) m_\alpha^{(0)}(t). \quad (2.103)$$

Integrando-se esta expressão, obtemos

$$\begin{aligned} q_\mu^{(5)} = & + \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\rho\tau'} \Phi_\alpha^{\lambda\tau'} \Phi_\beta^{\rho'\tau} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha \bar{q}_\nu^\dagger q_\rho q_{\rho'}^\dagger \\ & + \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\lambda'\sigma} \Phi_\alpha^{\lambda'\tau} \Phi_\beta^{\lambda\sigma'} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\sigma q_{\sigma'}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Analogamente, para o operador de antiquark, temos da Eq. (2.76)

$$\frac{d\bar{q}_\nu^{(5)}(t)}{dt} = \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^\dagger(0)(t) \Delta_{\gamma\beta}^{(4)}(t) m_\beta^{(0)}(t), \quad (2.105)$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} \bar{q}_\nu^{(5)} = & - \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\rho\tau'} \Phi_\alpha^{\lambda\tau'} \Phi_\beta^{\rho'\tau} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha q_\mu^\dagger q_\rho q_{\rho'}^\dagger \\ & - \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\lambda'\sigma} \Phi_\alpha^{\lambda'\tau} \Phi_\beta^{\lambda\sigma'} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha q_\mu^\dagger \bar{q}_\sigma q_{\sigma'}^\dagger \end{aligned} \quad (2.106)$$

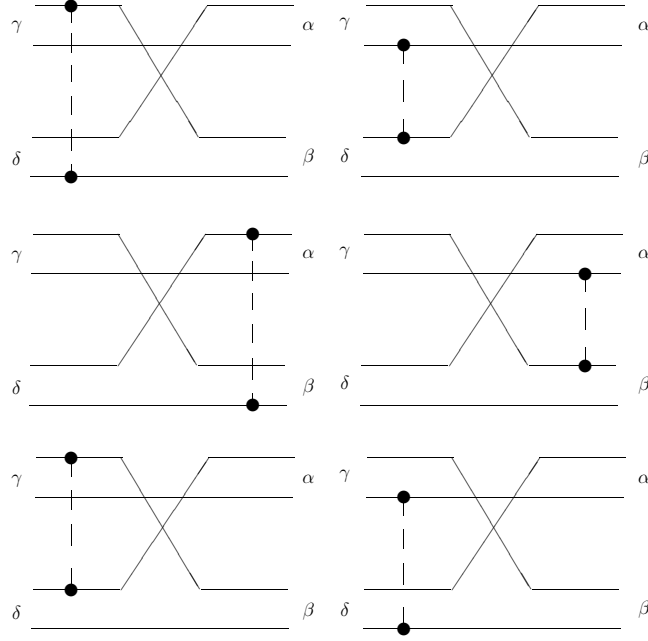


Fig. 2.3: Diagramas correspondentes às contribuições do termo $V_{\text{mm}}^{\text{ex}}$.

Utilizando esses operadores de quinta ordem na transformação do Hamiltoniano microscópico, obtemos uma contribuição para V_{mm} dada por

$$\begin{aligned}
 & T(\mu)q_{\mu}^{\dagger(5)}q_{\mu}^{(1)} + T(\nu)\bar{q}_{\nu}^{\dagger(5)}\bar{q}_{\nu}^{(1)} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \rho\sigma)q_{\mu}^{(5)\dagger}\bar{q}_{\nu}^{(0)\dagger}\bar{q}_{\sigma}^{(0)}q_{\rho}^{(5)} + (\text{h.c.}) = \\
 & = \frac{1}{6} \left[\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma}\Phi_{\beta}^{*\rho\nu}\Delta(\mu\nu; \lambda\tau)H(\lambda\tau; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\mu'\nu'}\Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \right. \\
 & \left. + \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu}\Phi_{\beta}^{*\mu\sigma}\Delta(\mu\nu; \lambda\tau)H(\lambda\tau; \mu'\nu')\Phi_{\delta}^{\rho\sigma}\Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} \right] m_{\alpha}^{\dagger}m_{\beta}^{\dagger}m_{\delta}m_{\gamma} + (\text{h.c.}) . \quad (2.107)
 \end{aligned}$$

Naturalmente, existem outras contribuições do mesmo tipo provenientes do operador $O_{\alpha}^{(5)}$. Dessa forma, o termo H_{m} pode ser escrito como

$$H_{\text{m}} = H_{\text{m}}^{(0)} + \Delta H_{\text{m}} , \quad (2.108)$$

onde ΔH_{m} representa as correções de ortogonalidade. Essas correções de ortogonalidade têm o efeito, entre outros, de enfraquecer o termo $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$. No caso em que as funções de onda Φ são auto-estados do Hamiltoniano microscópico pode-se mostrar que a correção de ortogonalização de ordem mais baixa cancela exatamente o termo $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$, restando correções de ordem mais alta.

No capítulo seguinte veremos o formalismo de Fock-Tani aplicado aos *glueballs*. Na primeira seção veremos a representação de Fock-Tani para *glueballs*. Na segunda seção

veremos como realizar a transformação de Fock-Tani sobre os operadores da teoria. Na terceira seção vamos obter uma transformação generalizada de Fock-Tani. E na quarta e última seção vamos obter o Hamiltoniano para *glueballs* na representação de Fock-Tani.

Capítulo 3

Formalismo de Fock-Tani para Glueballs

Neste capítulo descrevemos em detalhe a representação de Fock-Tani para glueballs [33]. Como havia sido dito anteriormente, a estrutura interna do glueball implica um alto grau de complexidade formal ao estudar-se sistemas onde glueballs e glúons podem estar simultaneamente presentes em processos de interação. Como foi mencionado no capítulo 2, a idéia do formalismo de Fock-Tani consiste em efetuar-se uma mudança de representação, tal que os operadores associados às partículas compostas sejam reescritos em termos de operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Toda a complexidade formal relacionada com a estrutura interna do glueball sendo transferida neste procedimento para outro componente formal.

3.1 Representação de Fock-Tani

Em segunda quantização, o estado ligado de dois glúons constituintes que formam o glueball é descrito de modo semelhante ao estado de um méson composto definido em (2.1),

$$|\alpha\rangle = G_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (3.1)$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo e o operador de criação de um glueball G_α^\dagger é definido como

$$G_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger a_\nu^\dagger. \quad (3.2)$$

Nesta expressão $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ representa a função de onda de estado ligado do glueball e os operadores de criação, a^\dagger , e destruição, a , de um glúon obedecem as relações canônicas de comutação

$$[a_\mu, a_\nu] = 0 \quad (3.3)$$

e

$$[a_\mu, a_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

O operador de um glueball (3.2) satisfaz relações não-canônicas de comutação:

$$[G_\alpha, G_\beta] = 0, \quad (3.5)$$

$$[G_\alpha, G_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta}, \quad (3.6)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = 2\Phi_\alpha^{*\mu\gamma}\Phi_\beta^{\gamma\rho}a_\rho^\dagger a_\mu. \quad (3.7)$$

A existência do termo (3.7) nas relações de comutação de G_α revela que também para o glueball enfrentamos uma situação idêntica àquela encontrada quando foram estudados os mésons. Portanto, como a estratégia desenvolvida anteriormente mostrou-se adequada, iremos adota-la novamente na presente situação. Assim sendo efetuamos a seguinte substituição

| | | | |
|-----------------------------|------------|-----------------------------|-------|
| $G_\alpha^\dagger 0\rangle$ | \implies | $g_\alpha^\dagger 0\rangle$ | (3.8) |
| <i>Glueball</i> | | <i>glueball</i> | |
| <i>físico</i> | | <i>ideal</i> | |

em que os operadores correspondentes de glueballs são representados por g_α e g_β^\dagger e apresentam as propriedades de comutação

$$[g_\alpha, g_\beta] = 0, \quad (3.9)$$

$$[g_\alpha, g_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.10)$$

A forma de realizar a substituição que obedece à condição (3.8), similarmente ao procedimento adotado no estudo dos mésons, consiste em definir-se um operador anti-hermitiano $F_0^\dagger = -F_0$ tal que

$$F_0 = f_0 - f_0^\dagger = g_\alpha^\dagger G_\alpha - G_\alpha^\dagger g_\alpha, \quad (3.11)$$

onde a atuação, respectivamente, de F_0 sobre os estados composto e elementar resulta em

$$F_0|\alpha\rangle = g_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad (3.12)$$

e

$$F_0 g_\alpha^\dagger|0\rangle = -|\alpha\rangle. \quad (3.13)$$

Podemos então construir, a partir da definição de F_0 apresentado em (3.11), uma transformação unitária que possibilita implementar-se a condição (3.8)

$$U(t) = \exp(tF_0) \quad (3.14)$$

onde o operador F_0 representa nesta definição o gerador da transformação unitária. Utilizando (3.13), podemos obter as expressões para as potências de F_0 aplicadas nos estados compostos e elementares, respectivamente,

$$\begin{aligned} F_0^2 G_\alpha^\dagger|0\rangle &= -G_\alpha^\dagger|0\rangle & F_0^2 g_\alpha^\dagger|0\rangle &= -g_\alpha^\dagger|0\rangle \\ F_0^3 G_\alpha^\dagger|0\rangle &= -g_\alpha^\dagger|0\rangle & F_0^3 g_\alpha^\dagger|0\rangle &= G_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (3.15)$$

e assim portanto utilizando estas expressões podemos realizar a transformação unitária sobre o estado composto

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) G_\alpha^\dagger|0\rangle &= \left(1 - tF_0 + \frac{t^2}{2!}F_0^2 - \frac{t^3}{3!}F_0^3 + \dots\right) G_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &= \left(1 + \frac{t^2}{2!}F_0^2 + \frac{t^4}{4!}F_0^4 + \dots\right) G_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &\quad - \left(tF_0 + \frac{t^3}{3!}F_0^3 + \frac{t^5}{5!}F_0^5 + \dots\right) G_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) G_\alpha^\dagger|0\rangle - \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) g_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &= (\cos t) G_\alpha^\dagger|0\rangle - (\sin t) g_\alpha^\dagger|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se tomarmos $t = -\pi/2$ obtemos desta expressão o estado transformado

$$U^{-1} G_\alpha^\dagger|0\rangle = g_\alpha^\dagger|0\rangle \equiv |\alpha\rangle. \quad (3.17)$$

3.2 Transformação dos Operadores

O objetivo deste capítulo é o de mostrar explicitamente o surgimento e cancelamento dos termos seculares envolvendo os operadores de criação e destruição de glueballs. O ponto de partida é a equação de movimento dada por

$$\frac{d\mathcal{O}(t)}{dt} = U^{-1}(t) [\mathcal{O}, F_0] U(t) = [\mathcal{O}(t), F_0(t)], \quad (3.18)$$

onde o operador \mathcal{O} representa respectivamente os operadores G_α , g_α e a_μ . As quantidades dinâmicas fundamentais do modelo, como o Hamiltoniano por exemplo, bem como

as correntes quadrivetoriais, são escritas em termos de operadores criação e destruição de glúons. Portanto, a transformação de Fock-Tani destas quantidades implica em transformar-se também os operadores criação e destruição de glúons. A equação de movimento para o operador destruição de glúons a_μ por exemplo é dada na forma

$$\frac{da_\mu(t)}{dt} = -\sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu} a_\mu^\dagger(t)g_\beta(t) \quad (3.19)$$

No lado direito da expressão (3.19) aparece o operador de glueball ideal $g_\beta(t)$, cuja equação de movimento é

$$\frac{dg_\alpha(t)}{dt} = G_\alpha(t). \quad (3.20)$$

Para resolver a equação (3.20) precisamos encontrar a equação de evolução para $G_\alpha(t)$

$$\frac{dG_\alpha(t)}{dt} = -g_\alpha(t) - \Delta_{\alpha\beta}(t)g_\beta(t) \quad (3.21)$$

que nos conduz a um sistema de equações diferenciais acopladas, com as seguintes condições iniciais

$$G_\alpha^{(0)}(0) = G_\alpha \quad ; \quad g_\alpha^{(0)}(0) = g_\alpha \quad ; \quad a_\mu^{(0)}(0) = a_\mu. \quad (3.22)$$

A resolução do sistema (3.19)-(3.21) é tão difícil quanto o cálculo de múltiplos comutadores. No entanto, uma forma sistemática de efetuarmos a sua resolução consiste em realizarmos uma expansão dos operadores transformados em potências da função de onda [17], isto é,

$$\begin{aligned} G_\alpha(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} G_\alpha^{(i)}(t) \\ g_\alpha(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} g_\alpha^{(i)}(t) \\ a_\mu(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_\mu^{(i)}(t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Estas expansões não são funções de potências do parâmetro t , que assume um valor grande, $t = -\pi/2$, mas de potências na densidade do sistema. Desta forma as equações de ordem zero são ¹

$$\dot{G}_\alpha^{(0)}(t) = -g_\alpha^{(0)}(t), \quad (3.24)$$

$$\dot{g}_\alpha^{(0)}(t) = G_\alpha^{(0)}(t), \quad (3.25)$$

$$\dot{a}_\mu^{(0)}(t) = 0. \quad (3.26)$$

¹ Adotamos a notação $\dot{\mathcal{O}}$ para a derivada em relação a t de um operador \mathcal{O} .

O termo proporcional a $\Delta_{\alpha\beta}$ foi desprezado em (3.24) por ser de segunda ordem em Φ e portanto não contribuir para a formulação. Também na equação (3.26) o lado direito foi tomado igual a zero porque no lado direito de (3.19) temos uma função de onda multiplicando os operadores. A equação de (3.26) tem solução trivial

$$a_{\mu}^{(0)}(t) = \text{cte}; \quad (3.27)$$

mas, pela condição “inicial” (3.22), encontramos

$$a_{\mu}^{(0)}(t) = a_{\mu}. \quad (3.28)$$

As equações (3.24) e (3.25) podem ser resolvidas derivando-se uma vez mais a equação (3.25) e substituindo este resultado em (3.24), obtendo-se

$$\ddot{g}_{\alpha}^{(0)}(t) + g_{\alpha}^{(0)}(t) = 0. \quad (3.29)$$

A solução geral de (3.29) é

$$g_{\alpha}^{(0)}(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t. \quad (3.30)$$

Derivando-se a equação (3.30) obtemos, ao combinar a expressão resultante com o resultado em (3.25), a respectiva solução para $G_{\alpha}^{(0)}(t)$

$$G_{\alpha}^{(0)}(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t. \quad (3.31)$$

Considerando-se a determinação das constantes operatoriais c_1 e c_2 , das condições “iniciais”, (3.22) resultam, respectivamente, os seguintes operadores transformados de glueball físico e glueball ideal em ordem zero

$$\begin{aligned} g_{\alpha}^{(0)}(t) &= G_{\alpha} \sin t + g_{\alpha} \cos t, \\ G_{\alpha}^{(0)}(t) &= G_{\alpha} \cos t - g_{\alpha} \sin t. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Note-se que as expressões acima são de ordem zero na função de onda; portanto, por uma questão de consistência formal, não se computa as funções de onda contidas nos operadores G_{α} apresentados no lado direito da expressão (3.32). Observamos também que a presença da função seno e cosseno nos operadores transformados conduz a interpretar-se a transformação como uma rotação no espaço dos operadores.

As equações em primeira ordem, isto é, aquelas equações que contém potências da função de onda até a primeira ordem, são obtidas a seguir

$$\dot{G}_{\alpha}^{(1)}(t) = -g_{\alpha}^{(1)}(t), \quad (3.33)$$

$$\dot{g}_{\alpha}^{(1)}(t) = G_{\alpha}^{(1)}(t), \quad (3.34)$$

$$\dot{a}_{\mu}^{(1)}(t) = -\sqrt{2}\Phi_{\beta}^{\mu\nu} a_{\mu}^{\dagger(0)}(t) g_{\beta}^{(0)}(t). \quad (3.35)$$

Novamente o termo proporcional a $\Delta_{\alpha\beta}$ foi desprezado em (3.33) por ser de segunda ordem em Φ e portanto não contribuir para a solução em primeira ordem. Desta vez, no entanto, o lado direito de (3.35) não foi tomado igual a zero por ser efetivamente de primeira ordem.

Como as condições “iniciais” já foram usadas nas soluções de ordem zero devemos, então ter que

$$G_\alpha^{(i)}(0) = g_\alpha^{(i)}(0) = a_\mu^{(i)}(0) = 0 \quad \text{para } i \geq 1. \quad (3.36)$$

Assim encontramos que

$$G_\alpha^{(1)}(t) = g_\alpha^{(1)}(t) = 0. \quad (3.37)$$

Para encontrar a solução para a equação (3.35), substituímos nesta expressão os resultados obtidos em (3.28) e (3.30) e integramos a expressão resultante de 0 a t

$$\begin{aligned} a_\mu^{(1)}(t) &= -\sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu} a_\mu^\dagger \int_0^t dt' g_\beta^{(0)}(t') = -\sqrt{2}\Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger \int_0^t dt' (G_\alpha \sin t' + g_\alpha \cos t') \\ &= -\sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu} a_\mu^\dagger [g_\beta \sin t - G_\beta (\cos t - 1)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A obtenção dos operadores em segunda ordem segue o mesmo procedimento na contagem de potências nas equações de movimento

$$\dot{G}_\alpha^{(2)}(t) = -g_\alpha^{(2)}(t) - \Delta_{\alpha\beta}^{(2)}(t) g_\alpha^{(0)}(t), \quad (3.39)$$

$$\dot{g}_\alpha^{(2)}(t) = G_\alpha^{(2)}(t), \quad (3.40)$$

$$\dot{a}_\mu^{(2)}(t) = -\sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu} a_\mu^\dagger^{(1)}(t) g_\beta^{(0)}(t). \quad (3.41)$$

A resolução das equações para G_α e g_α envolve encontrarmos a solução para um sistema de equações diferenciais acopladas e não-homogêneas. Observemos que $\Delta_{\alpha\beta}^{(2)}(t)$ é da forma

$$\Delta_{\alpha\beta}^{(2)}(t) = 2\Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger^{(0)}(t) a_\mu^{(0)}(t) = 2\Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger a_\mu = \Delta_{\alpha\beta}. \quad (3.42)$$

Deste modo podemos resolver as equações acopladas

$$\begin{aligned} \dot{g}_\alpha^{(2)}(t) &= G_\alpha^{(2)}(t), \\ \dot{G}_\alpha^{(2)}(t) &= -g_\alpha^{(2)}(t) - \Delta_{\alpha\beta} (G_\beta \sin t + g_\beta \cos t). \end{aligned}$$

Para facilitar o procedimento de cálculo definimos $X_\alpha = \Delta_{\alpha\beta} G_\beta$ e $Y_\alpha = \Delta_{\alpha\beta} g_\beta$, obtendo então

$$\begin{aligned} \dot{g}_\alpha^{(2)}(t) &= G_\alpha^{(2)}, \\ \dot{G}_\alpha^{(2)}(t) &= -g_\alpha^{(2)} - X_\alpha \sin t - Y_\alpha \cos t. \end{aligned}$$

Após derivamos a primeira expressão com respeito a t e substituímos o resultado obtido na segunda expressão

$$\ddot{g}_\alpha^{(2)}(t) + g_\alpha^{(2)} = -X_\alpha \sin t - Y_\alpha \cos t. \quad (3.43)$$

Ao buscar a solução particular da parte não homogênea, tentamos uma função teste do tipo

$$y_{par}(t) = g_{\alpha(par)}^{(2)}(t) = t(v \cos t + u \sin t). \quad (3.44)$$

Derivando esta expressão uma vez em relação a t

$$\dot{y}_{par}(t) = \dot{g}_{\alpha(par)}^{(2)}(t) = v \cos t + u \sin t + t(-v \sin t + u \cos t), \quad (3.45)$$

e derivando-a uma segunda vez, em relação novamente a t , obtemos

$$\ddot{y}_{par}(t) = \ddot{g}_{\alpha(par)}^{(2)}(t) = 2(u \cos t - v \sin t) - t(v \cos t + u \sin t). \quad (3.46)$$

Substituindo as equações (3.44) e (3.46) em (3.43) encontramos então

$$u = -\frac{1}{2}Y_\alpha \quad , \quad v = \frac{1}{2}X_\alpha. \quad (3.47)$$

Combinando as equações (3.47) e (3.44), temos então

$$y_{par}(t) = g_{\alpha(par)}^{(2)}(t) = t\left(\frac{1}{2}X_\alpha \cos t - \frac{1}{2}Y_\alpha \sin t\right). \quad (3.48)$$

A solução da parte homogênea desta equação é dada por

$$y_h(t) = g_{\alpha(h)}^{(2)}(t) = r_1 \sin t + r_2 \cos t. \quad (3.49)$$

Usando-se a condição inicial,

$$y_h(0) = g_{\alpha(h)}^{(2)}(0) = r_2 = 0$$

encontramos de (3.49)

$$g_\alpha^{(2)}(t) = r_1 \sin t + \frac{1}{2}tX_\alpha \cos t - \frac{1}{2}tY_\alpha \sin t. \quad (3.50)$$

Como passo seguinte derivamos esta expressão em relação a t , obtendo

$$G_\alpha^{(2)}(t) = \dot{g}_\alpha^{(2)}(t) = r_1 \cos t + \frac{1}{2}X_\alpha \cos t - \frac{1}{2}Y_\alpha \sin t - \frac{1}{2}tX_\alpha \sin t - \frac{1}{2}tY_\alpha \cos t. \quad (3.51)$$

Aplicando novamente a condição inicial a esta expressão, isto é, $G_\alpha^{(2)}(0) = 0$, temos

$$r_1 = -\frac{1}{2}X_\alpha. \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.50) e (3.51), resulta então

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}X_\alpha \sin t + \frac{1}{2}tX_\alpha \cos t - \frac{1}{2}tY_\alpha \sin t, \\ G_\alpha^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}X_\alpha \cos t + \frac{1}{2}X_\alpha \cos t - \frac{1}{2}Y_\alpha \sin t - \frac{1}{2}tX_\alpha \sin t - \frac{1}{2}tY_\alpha \cos t. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Após, introduzindo nestas expressões as definições de X_α e Y_α , encontramos, para $g_\alpha^{(2)}(t)$ e $G_\alpha^{(2)}(t)$

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}[G_\beta(\sin t - t \cos t) + t g_\beta \sin t], \\ G_\alpha^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}[t G_\beta \sin t + g_\beta(\sin t + t \cos t)]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

E, para a equação (3.41), obtemos

$$\dot{a}_\mu^{(2)}(t) = -\sqrt{2}\Phi_\alpha^{\mu\nu}\{-\sqrt{2}\Phi_\gamma^{\star\mu'\nu'} a_{\nu'}[g_\gamma^\dagger \sin t - G_\gamma^\dagger(\cos t - 1)]\}(G_\alpha \sin t + g_\alpha \cos t). \quad (3.55)$$

Após esta resolução explícita das equações diferenciais para os operadores notamos a presença de termos proporcionais a t (*i.e.* termos que não estão contidos em funções do tipo seno ou cosseno) que dificultam a interpretação da transformação de Fock-Tani como implementadora de uma rotação sobre os operadores. Como foi mostrado para os mésons, e também em [23], a eliminação destes termos implica na existência da simetria *post-prior* no potencial. A integração do operador de glúons $\dot{a}_\mu^{(2)}(t)$ é simples e também apresenta termos seculares

$$\begin{aligned} a_\mu^{(2)}(t) &= \Phi_\gamma^{\star\mu'\nu'} \Phi_\alpha^{\mu\nu} \left[g_\gamma^\dagger a_{\nu'} G_\alpha(t - \sin t \cos t) + g_\gamma^\dagger a_{\nu'} g_\alpha \sin^2 t \right. \\ &\quad + 2G_\gamma^\dagger a_{\nu'} G_\alpha(1 - \cos t - \frac{1}{2} \sin^2 t) \\ &\quad \left. + 2G_\gamma^\dagger a_{\nu'} g_\beta(-\frac{1}{2}t + \sin t - \frac{1}{2} \sin t \cos t) \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.3 Transformação de Fock-Tani Generalizada

Construiremos nesta seção uma transformação de Fock-Tani generalizada que será capaz de cancelar os termos seculares. Esta generalização envolve obter um gerador F mais geral que o apresentado em (3.11)

$$F \equiv F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots \quad (3.57)$$

o que é equivalente a definir uma expansão em um operador \tilde{G}_α

$$\tilde{G}_\alpha \equiv \tilde{G}_\alpha^{(0)} + \tilde{G}_\alpha^{(1)} + \tilde{G}_\alpha^{(2)} + \tilde{G}_\alpha^{(4)} + \dots \quad (3.58)$$

O novo gerador fica então formalmente igual ao antigo (ver equação (3.11)) apenas com a substituição do operador G_α por \tilde{G}_α , ou seja,

$$F = g_\alpha^\dagger \tilde{G}_\alpha - \tilde{G}_\alpha^\dagger g_\alpha, \quad (3.59)$$

tal que

$$\tilde{G}_\alpha^{(0)} \equiv G_\alpha. \quad (3.60)$$

Impomos que o novo operador, \tilde{G}_α , que substitui ao operador de glueballs composto, deva obedecer relações canônicas de comutação

$$[\tilde{G}_\alpha, \tilde{G}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.61)$$

A construção deste comutador é feita de maneira iterativa. Em ordem mais baixa de interação a comutação de \tilde{G}_α resulta em

$$[\tilde{G}_\alpha^{(0)}, \tilde{G}_\beta^{(0)\dagger}] = [G_\alpha, G_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta}. \quad (3.62)$$

Para cancelar o termo operatorial $\Delta_{\alpha\beta}$ e garantir que o comutador seja canônico até segunda ordem, soma-se a $\tilde{G}_\alpha^{(0)}$ um termo com uma estrutura adequada, isto é,

$$\tilde{G}_\alpha \equiv G_\alpha + c_1 \Delta_{\alpha\beta} G_\beta. \quad (3.63)$$

A determinação da constante c_1 é realizada mediante o cálculo do comutador apresentado na expressão (3.63),

$$\begin{aligned} [\tilde{G}_\alpha, \tilde{G}_\beta^\dagger] &= [G_\alpha, G_\beta^\dagger] + c_1 [G_\alpha, G_\gamma^\dagger \Delta_{\gamma\beta}] + c_1 [G_\beta^\dagger, \Delta_{\alpha\gamma} G_\gamma] + c_1^2 [\Delta_{\alpha\gamma} G_\gamma, G_\lambda^\dagger \Delta_{\lambda\beta}] \\ &\approx \delta_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta} + c_1 \left(G_\gamma^\dagger [G_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] + [G_\alpha, G_\gamma^\dagger] \Delta_{\gamma\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{\alpha\gamma} [G_\gamma, G_\beta^\dagger] + [\Delta_{\alpha\gamma}, G_\beta^\dagger] G_\gamma \right) + \mathcal{O}(\Phi^{\geq 4}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Na expressão acima foram desprezados termos que envolvem potências iguais ou maiores do que quatro na função de onda. Reagrupando os termos encontramos o seguinte resultado

$$[\tilde{G}_\alpha, \tilde{G}_\beta^\dagger] \approx \delta_{\alpha\beta} + (1 + 2c_1) \Delta_{\alpha\beta} + c_1 \left(G_\gamma^\dagger [G_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] + [\Delta_{\alpha\gamma}, G_\beta^\dagger] G_\gamma \right) + \mathcal{O}(\Phi^{\geq 4}).$$

Para ocorrer o cancelamento do termo de segunda ordem, o coeficiente c_1 deve ser igual a $-1/2$. Assim, temos que o comutador (3.64) pode ser expresso na forma

$$[\tilde{G}_\alpha, \tilde{G}_\beta^\dagger] \approx \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \left(G_\gamma^\dagger [G_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] + [\Delta_{\alpha\gamma}, G_\beta^\dagger] G_\gamma \right) + \mathcal{O}(\Phi^{\geq 4}). \quad (3.65)$$

A expressão acima é canônica até a segunda ordem em Φ . Os termos entre parênteses são de terceira ordem na função de onda e foram gerados pela inclusão do contra-termo

proporcional a c_1 em (3.63). O cancelamento destes termos irá ocorrer mediante uma nova modificação do operador \tilde{G}_α capaz, agora, de eliminar estas contribuições.

Definindo um novo “ansatz” para \tilde{G}_α tal que,

$$\tilde{G}_\alpha \equiv G_\alpha - \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} G_\beta + c_2 G_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, G_\alpha] G_\gamma \quad (3.66)$$

esta definição garantirá que a transformação de Fock-Tani seja consistente até ordem três nos operadores. Como ficará claro mais tarde, na dedução do potencial glueball - glueball, esta é a ordem mínima, na função de onda, para se obter de maneira consistente o gerador F . O valor de $c_2 = -1/2$ é encontrado pelo cálculo do comutador de (3.66), semelhantemente ao procedimento que foi utilizado para determinar c_1 . A inclusão do contra-termo proporcional a c_2 em (3.66) irá, por sua vez, gerar contribuições operatoriais em ordens mais altas. O procedimento que leva ao cancelamento destes termos é similar àquele. A nova transformação de Fock-Tani fica

$$U(t) = \exp(tF) , \quad (3.67)$$

de maneira que as respectivas equações de movimento resultam em

$$\dot{\tilde{G}}_\alpha(t) = [\tilde{G}_\alpha(t), F(t)] , \quad (3.68)$$

$$\dot{g}_\alpha(t) = [g_\alpha(t), F(t)] , \quad (3.69)$$

$$\dot{a}_\mu(t) = [a_\mu(t), F(t)] . \quad (3.70)$$

Uma das vantagens da formulação generalizada aparece na resolução destas equações de movimento, um procedimento que apresenta, neste formalismo, expressiva simplicidade formal. As equações (3.68) e (3.69) são

$$\dot{\tilde{G}}_\alpha(t) = -g_\alpha(t) , \quad (3.71)$$

$$\dot{g}_\alpha(t) = \tilde{G}_\alpha(t) , \quad (3.72)$$

cuja integração leva a

$$\tilde{G}_\alpha(t) = \tilde{G}_\alpha \cos t - g_\alpha \sin t , \quad (3.73)$$

$$g_\alpha(t) = \tilde{G}_\alpha \sin t + g_\alpha \cos t . \quad (3.74)$$

Nesta formulação generalizada vemos que operadores transformados possuem uma estrutura similar àquela apresentada por operadores que sofrem uma rotação no espaço no qual são definidos. Na formulação “restrita”, isto é, com o gerador F limitado ao termo F_0 , são apenas os operadores de ordem zero que apresentam esta propriedade.

Estas equações podem ser escritas ordem a ordem

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\alpha^{(0)}(t) &= G_\alpha \cos t - g_\alpha \sin t & ; & \quad \tilde{G}_\alpha^{(1)}(t) = 0, \\ \tilde{G}_\alpha^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}\Delta_{\alpha\gamma}G_\gamma \cos t & ; & \quad \tilde{G}_\alpha^{(3)}(t) = -\frac{1}{2}G_\gamma^\dagger[\Delta_{\gamma\rho}, G_\alpha]G_\rho \cos t,\end{aligned}\quad (3.75)$$

e

$$\begin{aligned}g_\alpha^{(0)}(t) &= G_\alpha \sin t + g_\alpha \cos t & ; & \quad g_\alpha^{(1)}(t) = 0, \\ g_\alpha^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}\Delta_{\alpha\gamma}G_\gamma \sin t & ; & \quad g_\alpha^{(3)}(t) = -\frac{1}{2}G_\gamma^\dagger[\Delta_{\gamma\rho}, G_\alpha]G_\rho \sin t.\end{aligned}\quad (3.76)$$

A simplicidade das equações para os operadores de glueballs \tilde{G}_α e g_α não se reflete apenas na equação para os operadores de glúons. A equação de movimento para o operador a_μ , em particular até terceira ordem, é dada por

$$\begin{aligned}\dot{a}_\mu(t) &= -\sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu}a_\nu^\dagger(t)g_\beta(t) \\ &+ \Phi_\alpha^{\star\mu\gamma}\Phi_\beta^{\gamma\mu'}(G_\beta^\dagger(t)a_{\mu'}(t)g_\beta(t) - g_\beta^\dagger(t)a_{\mu'}(t)G_\beta(t)) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_\beta^{\mu\nu}a_\nu^\dagger(t)\Delta_{\beta\alpha}(t)g_\beta(t) \\ &- \sqrt{2}(\Phi_\alpha^{\mu\rho'}\Phi_\rho^{\mu'\gamma'}\Phi_\gamma^{\star\gamma'\rho'} + \Phi_\alpha^{\mu'\rho'}\Phi_\rho^{\mu\rho'}\Phi_\gamma^{\star\gamma'\rho'})G_\gamma^\dagger(t)a_{\mu'}^\dagger(t)G_\beta(t)g_\beta(t).\end{aligned}\quad (3.77)$$

Uma equação de primeira ordem pode ser obtida de (3.77), desprezando-se os termos que possuem potências mais altas da função de onda

$$\dot{a}_\mu^{(1)}(t) = -\sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu}a_\nu^{\dagger(0)}(t)g_\beta^{(0)}(t).\quad (3.78)$$

O tratamento formal adotado para a resolução de (3.78) é similar ao tratamento que levou à equação (3.35). No entanto, neste ponto podemos apresentar uma maneira alternativa de resolver esta equação. Substituímos (3.28) e (3.72) em (3.78) e obtemos

$$\dot{a}_\mu^{(1)}(t) = \sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu}a_\nu^\dagger\dot{\tilde{G}}_\beta^{(0)}(t).\quad (3.79)$$

No lado direito de (3.79) vemos a presença de uma derivada total em t ; ao integrá-la obtemos:

$$\begin{aligned}a_\mu^{(1)}(t) &= \sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu}a_\nu^\dagger(\tilde{G}_\beta^{(0)}(t) - \tilde{G}_\beta^{(0)}(0)) \\ &= -\sqrt{2}\Phi_\beta^{\mu\nu}a_\nu^\dagger[g_\beta \sin t + G_\beta(1 - \cos t)].\end{aligned}\quad (3.80)$$

Esta propriedade, a de sempre encontrarmos uma derivada total no lado direito das equações de movimento, constituiu um aspecto do formalismo de Fock-Tani descoberto por D. Hadjimichief em [30] que possibilita a resolução direta das equações de movimento para os operadores de glúons de ordens mais altas. A equação em segunda ordem é então

$$\begin{aligned}\dot{a}_\mu^{(2)}(t) &= -\sqrt{2}\Phi_\alpha^{\mu\nu}a_\nu^{\dagger(1)}(t)g_\alpha^{(0)}(t) \\ &+ \Phi_\alpha^{\star\mu\gamma}\Phi_\beta^{\gamma\mu'}(G_\beta^{\dagger(0)}(t)a_{\mu'}^{(0)}(t)g_\alpha^{(0)}(t) - g_\beta^{\dagger(0)}(t)a_{\mu'}^{(0)}(t)G_\alpha^{(0)}(t)).\end{aligned}\quad (3.81)$$

Usando-se o fato que $G_\alpha^{(0)}(t) = \tilde{G}_\alpha^{(0)}(t)$ e novamente as condições (3.28) e (3.72), encontramos

$$\dot{a}_\mu^{(2)}(t) = \Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\mu'} \frac{d}{dt} \left(-2G_\beta^\dagger a_{\mu'} \tilde{G}_\alpha^{(0)}(t) + \tilde{G}_\beta^{\dagger(0)}(t) a_{\mu'} \tilde{G}_\alpha^{(0)}(t) \right). \quad (3.82)$$

A integração de (3.82) resulta em

$$\begin{aligned} a_\mu^{(2)}(t) = & -2\Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\mu'} G_\beta^\dagger a_{\mu'} \tilde{G}_\alpha^{(0)}(t) + \Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\mu'} G_\beta^\dagger a_{\mu'} G_\alpha \\ & + \Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\mu'} \tilde{G}_\beta^{\dagger(0)}(t) a_{\mu'} \tilde{G}_\alpha^{(0)}(t), \end{aligned} \quad (3.83)$$

ou, escrito de uma forma aberta,

$$\begin{aligned} a_\mu^{(2)}(t) = \Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\mu'} & \left[G_\beta^\dagger a_{\mu'} G_\alpha (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) \right. \\ & + G_\beta^\dagger a_{\mu'} g_\alpha (2 \sin t - \cos t \sin t) \\ & \left. - g_\beta^\dagger a_{\mu'} G_\alpha \cos t \sin t + g_\beta^\dagger a_{\mu'} g_\alpha \sin^2 t \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Vemos, em comparação com os termos da equação (3.56), que esta transformação generalizada efetivamente cancela os termos seculares. O operador em terceira ordem é obtido da respectiva equação de movimento em terceira ordem

$$\begin{aligned} \dot{a}_\mu^{(3)}(t) = & -\sqrt{2} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\nu^{\dagger(2)} g_\alpha^{(0)} - \sqrt{2} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\nu^{\dagger(0)} g_\alpha^{(2)} \\ & + \Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\mu'} (G_\beta^{\dagger(0)} a_{\mu'}^{(1)} g_\beta^{(0)} - g_\beta^{\dagger(0)} a_{\mu'}^{(1)} G_\beta^{(0)}) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \Phi_\beta^{\mu\nu} a_\nu^{\dagger(0)} \Delta_{\beta\alpha} g_\beta^{(0)} \\ & - \sqrt{2} (\Phi_\alpha^{\mu\rho'} \Phi_\rho^{\mu'\gamma'} \Phi_\gamma^{*\gamma'\rho'} + \Phi_\alpha^{\mu'\rho'} \Phi_\rho^{\mu\gamma'} \Phi_\gamma^{*\gamma'\rho'}) G_\gamma^{\dagger(0)} a_{\mu'}^{\dagger(0)} G_\beta^{(0)} g_\beta^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

que, após a integração, resulta em

$$\begin{aligned} a_\mu^{(3)}(t) = & \sqrt{2} \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\beta^{*\sigma\nu} \Phi_\gamma^{\sigma\tau} \left[G_\beta^\dagger a_\tau^\dagger G_\gamma G_\alpha (\cos^3 t - \cos^2 t + \cos t - 1) \right. \\ & + G_\beta^\dagger a_\tau^\dagger G_\gamma g_\alpha (\cos t \sin t - \cos^2 t \sin t - \sin t) \\ & + g_\beta^\dagger a_\tau^\dagger G_\gamma G_\alpha (\cos t \sin t - \cos^2 t \sin t) \\ & + g_\beta^\dagger a_\tau^\dagger G_\gamma g_\alpha (\cos^2 t \sin t - \sin^2 t) \\ & - G_\beta^\dagger a_\tau^\dagger g_\gamma G_\alpha \cos^2 t \sin t \\ & + G_\beta^\dagger a_\tau^\dagger g_\gamma g_\alpha \cos t \sin^2 t \\ & + g_\beta^\dagger a_\tau^\dagger g_\gamma G_\alpha \cos t \sin^2 t \\ & \left. - g_\beta^\dagger a_\tau^\dagger g_\gamma g_\alpha \sin^3 t \right] \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\nu^{\dagger(0)} \Delta_{\alpha\gamma} [2(\cos t - 1) G_\gamma - g_\gamma \sin t]. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Este resultado conclui a dedução dos operadores de glúons transformados básicos que serão necessários para obtenção do Hamiltoniano de Fock-Tani a ser mostrado na próxima seção.

3.4 Hamiltoniano de Fock-Tani

A transformação de Fock-Tani realizada sobre os operadores definidos em (3.68) - (3.70) permite, agora, obter-se um Hamiltoniano efetivo onde não só estão presentes os glueballs, mas também os seus constituintes elementares. A transformação de Fock-Tani generalizada, quando aplicada ao Hamiltoniano microscópico, H_{aa} , automaticamente gera termos que representam processos de espalhamento, “ionização”, recombinação, e assim por diante. O procedimento geral para se obter este Hamiltoniano consiste em calcular a seguinte transformação

$$\mathcal{H}_{\text{FT}} = U^{-1} H_{aa} U. \quad (3.87)$$

Na prática, isto implica em substituir na expressão (3.87) as equações para os operadores definidos em (3.68) - (3.70), colocando em ordenamento normal a expressão resultante. De uma maneira genérica escrevemos o Hamiltoniano de Fock-Tani como

$$\mathcal{H}_{\text{FT}} = \mathcal{H}_{\text{glúon-glúon}} + \mathcal{H}_{\text{glueball-glúon}} + \mathcal{H}_{\text{glueball-glueball}}. \quad (3.88)$$

O primeiro termo de (3.88) envolve somente operadores de glúons e representa em princípio as mais diversas interações entre glúons sem que, no entanto, sejam formados novos estados ligados. A transformação de Fock-Tani como vimos no capítulo anterior no caso dos mésons implementa, mediante a introdução do conceito de glueball ideal implementa o conceito de Weinberg de quasi-partícula onde os estados ligados são subtraídos do problema. O segundo termo envolve tanto operadores de glueballs ideais quanto de glúons, representando processos de ionização e recombinação espontânea de glueballs; processos de interações de glueballs com glúons sem ocorrer a quebra do glueball; processos representando colisões binárias de glueballs com a quebra total dos compostos; entre outros. O terceiro termo desta expressão é constituído somente de operadores de glueballs ideais e apresenta entre os seus termos representativos a interação efetiva glueball-glueball.

3.4.1 Inexistência de um Novo Estado Ligado

Uma das questões iniciais, após a obtenção do Hamiltoniano transformado, consiste em saber se a nova interação glúon-glúon contida em

$$\mathcal{H}_{\text{glúon-glúon}} = \mathcal{H}_{2a} + \mathcal{H}_{N_a} \quad (3.89)$$

forma ou não um novo estado ligado de dois glúons. Em princípio, toda a informação sobre o estado glúon- glúon ligado deveria estar contida em g_α e, conseqüentemente, qualquer interação entre glúons, neste contexto, só poderia produzir espalhamento entre estas

partículas. A interação original deve então ser enfraquecida a tal ponto que sobre apenas uma força residual e nenhum novo estado ligado deveria surgir. A obtenção deste termo implica em efetuar a transformação de Fock-Tani sobre H_{aa} , como é mostrado em (3.87), e coletar os operadores de glúons transformados nas potências mais baixas da função de onda, restando a estrutura operatorial desejada, isto é,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{2a} &= U^{-1} H_{aa} U \\
 &= T_{aa}(\mu) U^{-1} a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu} U + \frac{1}{2} V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) U^{-1} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\rho} a_{\sigma} U \\
 &= T_{aa}(\mu) \left[a_{\mu}^{\dagger(0)}(t) a_{\mu}^{(0)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(0)}(t) a_{\mu}^{(1)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t) a_{\mu}^{(0)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t) a_{\mu}^{(1)}(t) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \left[a_{\mu}^{\dagger(0)}(t) a_{\nu}^{\dagger(0)}(t) a_{\rho}^{(0)}(t) a_{\sigma}^{(0)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t) a_{\nu}^{\dagger(0)}(t) a_{\rho}^{(0)}(t) a_{\sigma}^{(0)}(t) \right. \\
 &\quad \left. + a_{\mu}^{\dagger(0)}(t) a_{\nu}^{\dagger(0)}(t) a_{\rho}^{(0)}(t) a_{\sigma}^{(1)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t) a_{\nu}^{\dagger(0)}(t) a_{\rho}^{(0)}(t) a_{\sigma}^{(1)}(t) \right], \tag{3.90}
 \end{aligned}$$

onde na expressão acima se toma $t = -\pi/2$. O cálculo da expressão (3.90) implica em calcularmos produtos dos operadores transformados. Mostraremos a seguir alguns exemplos de termos que envolvem esta estrutura de operadores. Inicialmente, termos que envolvem operadores de energia cinética

$$\begin{aligned}
 T_{aa}(\mu) a_{\mu}^{\dagger(0)} a_{\mu}^{(1)} &= \sqrt{2} T_{aa}(\mu) \Phi_{\beta}^{\mu\nu} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} g_{\beta} \\
 &\quad - T_{aa}(\mu) \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu'} a_{\nu'}, \tag{3.91}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 T_{aa}(\mu) a_{\mu}^{\dagger(1)} a_{\mu}^{(1)} &= 2T_{aa}(\mu) \Phi_{\alpha}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\beta}^{\mu\nu} (-g_{\alpha}^{\dagger} + G_{\alpha}^{\dagger}) a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'}^{\dagger} (-g_{\beta} + G_{\beta}) \\
 &\quad + 2T_{aa}(\mu) \Phi_{\alpha}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\beta}^{\mu\nu} g_{\alpha}^{\dagger} g_{\beta} \\
 &\quad - \sqrt{2} T_{aa}(\mu) \Phi_{\alpha}^{*\mu'\nu'} \Delta(\mu\nu; \rho\sigma) g_{\alpha}^{\dagger} a_{\rho} a_{\sigma} \\
 &\quad - \sqrt{2} T_{aa}(\mu) \Phi_{\beta}^{\mu\nu} \Delta(\mu\nu; \rho\sigma) a_{\rho}^{\dagger} a_{\sigma}^{\dagger} g_{\beta} \\
 &\quad + T_{aa}(\mu) \Delta(\rho\sigma; \mu'\nu') \Delta(\mu\nu; \rho'\sigma') a_{\rho}^{\dagger} a_{\sigma}^{\dagger} a_{\rho'} a_{\sigma'}. \tag{3.92}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, um exemplo de termo contido em (3.90) que envolve energia potencial

$$\begin{aligned}
 V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) a_{\mu}^{\dagger(1)}(t) a_{\nu}^{\dagger(0)}(t) a_{\rho}^{(0)}(t) a_{\sigma}^{(0)}(t) \\
 = \sqrt{2} V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} g_{\alpha}^{\dagger} a_{\sigma} a_{\rho} \\
 + \sqrt{2} V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu'} g_{\alpha}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\sigma} a_{\rho} \\
 - V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta(\mu\nu; \tau\xi) a_{\xi}^{\dagger} a_{\tau}^{\dagger} a_{\sigma} a_{\rho} \\
 - V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta(\mu\nu'; \tau\xi) a_{\xi}^{\dagger} a_{\tau}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\sigma} a_{\rho}. \tag{3.93}
 \end{aligned}$$

Assim o Hamiltoniano \mathcal{H}_{2a} fica

$$\mathcal{H}_{2a} = H_{aa} + \tilde{H}_{aa} \tag{3.94}$$

onde \tilde{H}_{aa} tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{aa}} = \frac{1}{2} \left[\Delta(\nu_1\nu_2; \mu\nu) H_{\text{aa}}(\mu\nu; \mu_1\mu_2) + H_{\text{qq}}(\nu_1\nu_2; \sigma\rho) \Delta(\sigma\rho; \mu_1\mu_2) \right. \\ \left. - \Delta(\nu_1\nu_2 \mu\nu) H_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Delta(\sigma\rho; \mu_1\mu_2) \right] a_{\nu_1}^\dagger a_{\nu_2}^\dagger a_{\mu_1} a_{\mu_2}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Supondo-se que Φ é autofunção de H_{aa} e usando-se a propriedade

$$\Delta(\mu\nu; \mu'\nu') = \Phi_\beta^{\mu\nu} \Phi_\beta^{*\mu'\nu'} \quad (3.96)$$

temos, da expressão (3.95), que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{aa}} &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_\alpha \Phi_\alpha^{\nu_1\nu_2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\mu_2} a_{\nu_1}^\dagger a_{\nu_2}^\dagger a_{\mu_1} a_{\mu_2} = -\mathcal{E}_\alpha G_\alpha^\dagger G_\alpha \\ &= -\mathcal{E}_\alpha \hat{N}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.97)$$

onde \hat{N}_α é o “operador número” para glueballs. Assim \mathcal{H}_{2a} fica

$$\mathcal{H}_{2a} = H_{\text{aa}} - \mathcal{E}_\alpha \hat{N}_\alpha. \quad (3.98)$$

Apesar de estarmos considerando uma interação glúon-glúon, que gera apenas um único estado ligado, a demonstração da inexistência de novos estados ligados não se restringe a esta situação. Ela será válida para interações que geram vários estados ligados.

Consideremos um estado genérico de dois glúons dado por $|\Psi\rangle$ tal que

$$|\Psi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger a_\nu^\dagger |0\rangle. \quad (3.99)$$

Se $|\Psi_\alpha\rangle$ pertencer ao conjunto de autofunções $|\alpha\rangle$, a ação de \mathcal{H}_{2a} sobre este estado é

$$\mathcal{H}_{2a}|\Psi_\alpha\rangle = (H_{\text{aa}} - \mathcal{E}_\beta \hat{N}_\beta) |\Psi_\alpha\rangle = (\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\alpha) |\Psi_\alpha\rangle = 0. \quad (3.100)$$

Por outro lado, se Ψ_α for ortogonal a Φ_α , encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2a}|\Psi_\alpha\rangle &= (H_{\text{aa}} - \mathcal{E}_\beta \hat{N}_\beta) |\Psi_\alpha\rangle = H_{\text{aa}}|\Psi_\alpha\rangle - \mathcal{E}_\alpha \Psi_\beta^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} |\alpha\rangle \\ &= H_{\text{aa}}|\Psi_\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Qualquer estado $|\Psi\rangle$ pode ser expandido como

$$|\Psi\rangle = c_\alpha |\Psi_\alpha\rangle + c_k |\phi_k\rangle \quad (3.102)$$

onde $|\phi_k\rangle$ são as autofunções do contínuo de um estado de dois glúons com autovalores ϵ_k . Assim, usando (3.100), obtemos

$$\mathcal{H}_{2a}|\Psi\rangle = \epsilon_k c_k |\phi_k\rangle \quad (3.103)$$

de onde segue

$$\langle\Psi|\mathcal{H}_{2a}|\Psi\rangle = \epsilon_k |c_k|^2. \quad (3.104)$$

O Hamiltoniano \mathcal{H}_{2a} é positivo e semi-definido e portanto não corresponde a um estado ligado de dois glúons.

3.4.2 Interação Glueball-Gluon

Entre os diversos termos de interação glueball-glúon que surgem após a transformação de Fock-Tani iremos destacar dois que são interessantes. A partir do primeiro termo de (3.91) e do quarto termo de (3.92) podemos extrair o termo que está relacionado com a ionização do glueball, ou seja,

$$\mathcal{H}_{ion} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[H_{aa}(\mu_1\mu_2; \sigma\rho) \Phi_{\beta}^{\sigma\rho} - H_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\beta}^{\sigma\rho} \Delta(\mu_1\mu_2; \mu\nu) \right] a_{\mu_1}^{\dagger} a_{\mu_2}^{\dagger} g_{\beta}. \quad (3.105)$$

O conjugado da expressão acima corresponde ao termo de recombinação, isto é, dois glúons se recombinando para formar uma glueball. Usando o fato de Φ ser autofunção de H_{aa} descobrimos que

$$\mathcal{H}_{ion} = 0. \quad (3.106)$$

Na ausência de perturbações externas, este resultado reflete a estabilidade do estado ligado de um glueball frente à probabilidade de decaimento espontâneo de seus constituintes.

A interação que corresponde à colisão binária entre glueballs com ionização de glúons deve, num modelo de glúons com confinamento de cor, contribuir somente para estados intermediários e é dada por

$$\begin{aligned} V_{col \text{ bin}} &= \frac{1}{2} V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) a_{\mu}^{\dagger(0)} a_{\nu}^{\dagger(0)} a_{\rho}^{(1)} a_{\sigma}^{(1)} \\ &= \Phi_{\alpha}^{\rho\nu_2} \Phi_{\beta}^{\sigma\nu_2} V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu_2}^{\dagger} a_{\nu_2}^{\dagger} g_{\alpha} g_{\beta}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Figuras associadas ao processo de ionização de um glueball e colisão binária entre dois glueballs podem ser vistos nas figuras 3.1 e 3.2, respectivamente.

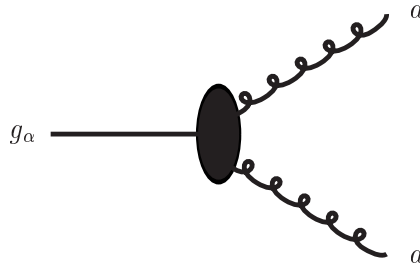


Fig. 3.1: Termo de ionização de um glueball.

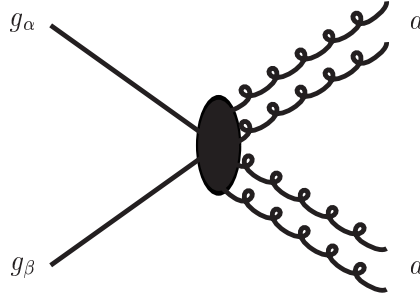


Fig. 3.2: Termo de colisão binária entre dois glueballs com quebra de ambos os glueballs.

3.4.3 Interação Glueball-Glueball

Nesta subsecção iremos deduzir, a partir do formalismo de Fock-Tani, a interação glueball-glueball $\mathcal{H}_{\text{glueball-glueball}}$. Este termo contém as contribuições oriundas apenas das interações entre glueballs, sendo que operadores de glúons foram totalmente contraídos. Escrito numa forma genérica, temos que a interação glueball-glueball toma a forma

$$\mathcal{H}_{\text{glueball-glueball}} = \mathcal{H}_{2g} + \mathcal{H}_{Ng} \quad (3.108)$$

onde \mathcal{H}_{2g} é o termo de interação entre dois glueballs e \mathcal{H}_{Ng} representa a interação entre N glueballs. O Hamiltoniano efetivo de Fock-Tani H_{FT} para a interação entre dois glueballs é escrito da seguinte forma

$$H_{\text{FT}} \equiv \mathcal{H}_{2g} = T_g + V_{gg} \quad (3.109)$$

onde T_g é o termo de energia cinética de partícula única dado por

$$T_g = T_{\text{FT}}(\alpha; \beta) g_\alpha^\dagger g_\beta \quad (3.110)$$

obtido a partir do terceiro termo de (3.92). Este termo é então somado com a respectiva contribuição originada no termo $V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) a_\mu^\dagger{}^{(1)} a_\nu^\dagger{}^{(0)} a_\rho^{(0)} a_\sigma^{(1)}$ resultando em

$$T_{\text{FT}}(\alpha; \beta) \equiv \Phi_\alpha^{*\mu\nu} H_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\beta^{\sigma\rho}. \quad (3.111)$$

Se Φ é autofunção de $H_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho)$ encontramos

$$T_g = \mathcal{E}_\alpha g_\alpha^\dagger g_\alpha. \quad (3.112)$$

O potencial glueball-glueball é obtido a partir de um procedimento similar a este, onde se substitui os operadores transformados no Hamiltoniano microscópico H_{aa} retendo as

contribuições combinadas até quarta ordem na função de onda. Este truncamento em quarta ordem na função de onda irá garantir uma interação glueball-gueball de dois corpos do tipo

$$\begin{aligned}
 V_{\text{gg}} = & T_{\text{aa}}(\mu) \left[a_{\mu}^{\dagger(3)}(t)a_{\mu}^{(1)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t)a_{\mu}^{(3)}(t) \right] \\
 & + \frac{1}{2}V_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \left[a_{\mu}^{\dagger(1)}(t)a_{\nu}^{\dagger(1)}(t)a_{\rho}^{(1)}(t)a_{\sigma}^{(1)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t)a_{\nu}^{\dagger(0)}(t)a_{\rho}^{(2)}(t)a_{\sigma}^{(1)}(t) \right. \\
 & + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t)a_{\nu}^{\dagger(2)}(t)a_{\rho}^{(0)}(t)a_{\sigma}^{(1)}(t) + a_{\mu}^{\dagger(3)}(t)a_{\nu}^{\dagger(0)}(t)a_{\rho}^{(0)}(t)a_{\sigma}^{(1)}(t) \\
 & \left. + a_{\mu}^{\dagger(1)}(t)a_{\nu}^{\dagger(0)}(t)a_{\rho}^{(0)}(t)a_{\sigma}^{(3)}(t) \right]. \tag{3.113}
 \end{aligned}$$

Após realizarmos o ordenamento normal em (3.113) e efetuar a contração total dos operadores de glúons, o potencial glueball-gueball de mais baixa ordem é

$$V_{\text{gg}} = V_{\text{FT}}(\alpha\gamma; \delta\beta) g_{\alpha}^{\dagger} g_{\gamma}^{\dagger} g_{\delta} g_{\beta} \tag{3.114}$$

onde

$$V_{\text{FT}}(\alpha\gamma; \delta\beta) = \sum_{i=1}^4 v_i(\alpha\gamma; \delta\beta) + \sum_{i=1}^2 v_i^{\text{intra}}(\alpha\gamma; \delta\beta). \tag{3.115}$$

Nesta expressão,

$$\begin{aligned}
 v_1(\alpha\gamma; \delta\beta) &= 2V_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{\star\mu\tau} \Phi_{\gamma}^{\star\nu\xi} \Phi_{\delta}^{\rho\xi} \Phi_{\beta}^{\sigma\tau}; \\
 v_2(\alpha\gamma; \delta\beta) &= 2V_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{\star\mu\tau} \Phi_{\gamma}^{\star\nu\xi} \Phi_{\delta}^{\rho\tau} \Phi_{\beta}^{\sigma\xi}; \\
 v_3(\alpha\gamma; \delta\beta) &= V_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{\star\mu\nu} \Phi_{\gamma}^{\star\tau\xi} \Phi_{\delta}^{\sigma\tau} \Phi_{\beta}^{\rho\xi}; \\
 v_4(\alpha\gamma; \delta\beta) &= V_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{\star\mu\xi} \Phi_{\gamma}^{\star\nu\tau} \Phi_{\delta}^{\tau\xi} \Phi_{\beta}^{\rho\sigma}, \tag{3.116}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 v_1^{\text{intra}}(\alpha\gamma; \delta\beta) &= H_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{\star\mu\nu} \Phi_{\gamma}^{\star\tau\xi} \Phi_{\delta}^{\tau\sigma} \Phi_{\beta}^{\rho\xi}; \\
 v_2^{\text{intra}}(\alpha\gamma; \delta\beta) &= H_{\text{aa}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha}^{\star\mu\xi} \Phi_{\gamma}^{\star\tau\nu} \Phi_{\delta}^{\tau\xi} \Phi_{\beta}^{\sigma\rho}. \tag{3.117}
 \end{aligned}$$

No potencial efetivo de Fock-Tani para a interação glueball-gueball deve haver a troca de um glúon entre os dois glueballs. Isso exclui os termos v_i^{intra} no Hamiltoniano, que tem origem na troca de um glúon no interior do glueball. Como foi discutido no estudo dos mésons, estes termos v_i^{intra} são exatamente cancelados pelas correções de ortogonalidade. Para o nosso estudo futuro, o potencial efetivo de interação entre os glueballs fica expresso por

$$V_{\text{gg}}^{\text{efetivo}} = \sum_{i=1}^4 v_i(\alpha\gamma; \delta\beta), \tag{3.118}$$

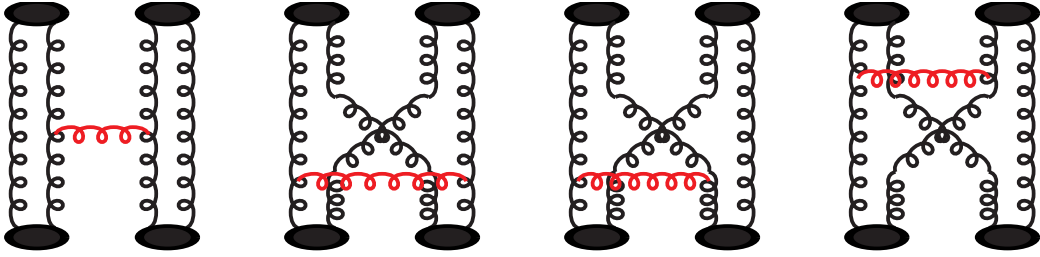


Fig. 3.3: Diagramas representando os potenciais $v_i(\alpha\gamma; \delta\beta)$ da interação glueball-glueball com a troca de um glúon constituinte.

onde os os termos de potencial $v_i(\alpha\gamma; \delta\beta)$ estão definidos nas equações (3.116). Desses quatro termos podemos obter os diagramas da Fig. (3.3). Cabe ressaltar que observando a figura (3.3), podemos verificar qualitativamente que o primeiro diagrama, da esquerda para a direita não vai contribuir para o potencial. A explicação está relacionado com o fato de que uma partícula carregando cor está sendo trocada por dois objetos sem cor (brancos). Este cálculo será detalhado mais adiante onde esta afirmação será provada.

No capítulo seguinte veremos aplicações do formalismo de Fock-Tani. Na primeira seção vamos obter a amplitude de espalhamento para a interação glueball-glueball. Na segunda seção vamos avaliar a massa dos glueballs, afim de obter os parâmetros para o cálculo da seção de choque e do potencial glueball-glueball. Na terceira parte vamos obter a seção de choque para o espalhamento glueball-glueball. E na quarta e última parte vamos obter o potencial para a interação glueball-glueball.

Capítulo 4

Aplicações do Formalismo de Fock-Tani

Neste capítulo vamos apresentar algumas aplicações do potencial efetivo glueball-glueball de Fock-Tani (3.118) que foi obtido no capítulo anterior. Usaremos, como interação microscópica, V_{aa} , a equação (1.87) associada ao modelo de glúons constituintes apresentada no capítulo 1. Entre as aplicações que pretendemos realizar estão a obtenção das amplitudes de espalhamento, o potencial $V_{GG}(r)$ na aproximação local e a seção de choque de espalhamento glueball-glueball para os estados 0^{++} e 2^{++} com $L = 0$. Para o caso 0^{++} será feita uma comparação da seção de choque do espalhamento glueball-glueball com a seção de choque de um méson composto por quarks com isospin total igual a zero.

4.1 Amplitude de Espalhamento Glueball-Glueball

Nesta seção obtemos a amplitude de espalhamento glueball-glueball h_{fi} , partindo da estrutura formal do potencial de Fock-Tani deduzida anteriormente na seção 3.3.3 (ver eq. (3.116)). No processo de espalhamento de duas partículas do tipo

$$\delta + \beta \rightarrow \alpha + \gamma, \quad (4.1)$$

a amplitude de espalhamento exata para esse processo é dada pelos elementos da matriz- T na representação de Fock-Tani,

$$T_{fi}(z) = (f|T_{FT}(z)|i), \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned} |f\rangle &= |\gamma\alpha\rangle = g_\gamma^\dagger g_\alpha^\dagger |0\rangle, \\ |i\rangle &= |\delta\beta\rangle = g_\delta^\dagger g_\beta^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$T_{FT}(z)$ é o operador de transição na representação de Fock-Tani, que satisfaz uma equação do tipo de Lippman-Schwinger,

$$\begin{aligned} T_{FT}(z) &= V_{FT} + V_{FT}G_0(z)T_{FT}(z) \\ &= V_{FT} + V_{FT}G_0(z)V_{FT}(z) + \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde V_{FT} é o termo de interação do Hamiltoniano de Fock-Tani e $G_0(z)$ é o propagador livre do glueball. Ao considerarmos a solução da equação Eq. (4.4), em primeira ordem na aproximação de Born, notamos que apenas a parte de V_{FT} correspondente ao potencial glueball-glueball, V_{gg} , contribui, uma vez que os estados assintóticos contêm apenas operadores de glueballs ideais. Dessa forma, o elemento da matriz- T , na representação de Fock-Tani, em primeira ordem na aproximação de Born, é dado por:

$$T_{fi}(z) = T(\alpha\gamma; \delta\beta) = (\alpha\gamma|V_{gg}|\delta\beta). \quad (4.5)$$

Considerando-se o cancelamento do termo v_i^{intra} pela correção de ortogonalidade de primeira ordem e desprezando-se as correções remanescentes, obtemos que o processo de espalhamento entre glueballs é dominado pela interação efetiva entre os gluons contituíntes via troca de um gluon perturbativo, ou ainda,

$$\begin{aligned} T(\alpha\gamma; \delta\beta) &= \sum_{i=1}^4 v_i(\alpha'\gamma'; \delta'\beta')(\alpha\gamma|g_{\alpha'}^\dagger g_{\gamma'}^\dagger g_{\delta'} g_{\beta'}|\delta\beta), \\ &= \sum_{i=1}^4 v_i(\alpha'\gamma'; \delta'\beta')[\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\delta\delta'}\delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\delta'\beta}\delta_{\beta'\delta} \\ &\quad + \delta_{\alpha\gamma'}\delta_{\gamma\alpha'}\delta_{\delta\delta'}\delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha\gamma'}\delta_{\gamma\alpha'}\delta_{\delta'\beta}\delta_{\beta'\delta}], \\ &= \sum_{i=1}^4 [v_i(\alpha\gamma; \delta\beta) + v_i(\alpha\gamma; \beta\delta) + v_i(\gamma\alpha; \delta\beta) + v_i(\gamma\alpha; \beta\delta)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

O potencial de Fock-Tani para a interação entre glueballs é dado pelos diagramas da Figura (3.3), isto é,

$$\begin{aligned} v_1(\alpha\gamma; \delta\beta) &= 2V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho)\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Phi_\gamma^{*\nu\xi}\Phi_\delta^{\rho\xi}\Phi_\beta^{\sigma\tau}; \\ v_2(\alpha\gamma; \delta\beta) &= 2V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho)\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Phi_\gamma^{*\nu\xi}\Phi_\delta^{\rho\tau}\Phi_\beta^{\sigma\xi}; \\ v_3(\alpha\gamma; \delta\beta) &= V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho)\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\gamma^{*\tau\xi}\Phi_\delta^{\sigma\tau}\Phi_\beta^{\rho\xi}; \\ v_4(\alpha\gamma; \delta\beta) &= V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho)\Phi_\alpha^{*\mu\xi}\Phi_\gamma^{*\nu\tau}\Phi_\delta^{\tau\xi}\Phi_\beta^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A condição de invariância translacional por sua vez permite que o elemento de matriz $(\alpha\gamma|V_{gg}|\delta\beta)$ possa ser escrito na forma

$$T(\alpha\gamma; \delta\beta) = \delta^{(3)}(\vec{P}_f - \vec{P}_i) h_{fi}(\alpha\gamma; \delta\beta), \quad (4.8)$$

onde $\vec{P}_f = \vec{P}_\alpha + \vec{P}_\gamma$ e $\vec{P}_i = \vec{P}_\beta + \vec{P}_\delta$ são, respectivamente, os momenta lineares totais final e inicial do sistema.

A partir deste ponto o cálculo deve ser dividido em três partes, uma correspondente à parte espacial, outra que considera as componentes de cor e outra que leva em conta as contribuições de spin, o que está em acordo com a estrutura da função de onda (ver apêndice D). Em outras palavras, a função Φ que aparece em (4.7) ao ser contraída com V_{aa} define a forma funcional de h_{fi} . A função de onda que iremos usar pode ser escrita como

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \mathcal{C}^{c_\mu c_\nu} \chi_{S_\alpha, G_\alpha^s}^{s_1 s_2} \varphi(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu), \quad (4.9)$$

onde $\mathcal{C}^{c_\mu c_\nu}$ é a parte de cor; $\chi_{S_\alpha, G_\alpha^s}^{s_1 s_2}$ a componente de spin e a parte de espacial é dada por

$$\varphi(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \left(\frac{1}{\pi b^2} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{8b^2}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)^2}. \quad (4.10)$$

O potencial $V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho)$ microscópico entre os gluons também é escrito no espaço de momentum linear. A dedução da transformada de Fourier de V_{aa} pode ser encontrada no apêndice E. Segundo a dedução apresentada neste apêndice temos

$$V_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) = \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_\rho) f^{\mu\sigma\kappa} f^{\nu\rho\kappa} \left[V_{2g}^{OGEP} + \frac{1}{3} V_{str} \right], \quad (4.11)$$

onde V_{2g}^{OGEP} é o potencial da troca de um gluon,

$$V_{2g}^{OGEP}(\mu\nu; \sigma\rho) = -\frac{\lambda}{3} \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_1(\mu\nu; \sigma\rho)}{p^2 + m^2} + \frac{\pi}{m^2} \frac{\omega_2(\mu\nu; \sigma\rho)}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{4k^2 m^2}\right) \right] \quad (4.12)$$

e V_{str} é o termo de confinamento,

$$V_{str}(\vec{p}) = (2\pi)^{3/2} 2m\delta^{(3)}(\vec{p}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{8\beta m^2}{(p^2 + \beta^2 m^2)^2}. \quad (4.13)$$

Os coeficientes ω_1 e ω_2 são elementos de matriz com dependência nos índices $(\mu\nu; \sigma\rho)$ e podem ser obtidos a partir do potencial da troca de um gluon

$$\omega_1(\mu\nu; \sigma\rho) = \frac{1}{4} \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} + \frac{1}{3} \vec{S}^2; \quad (4.14)$$

$$\omega_2(\mu\nu; \sigma\rho) = \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - \frac{5}{6} \vec{S}^2. \quad (4.15)$$

A amplitude de espalhamento é finalmente obtida efetuando-se as respectivas contrações dos termos de interação apresentados em (4.7) com as diversas componentes da função de onda definida em (4.9) e (4.10). Passaremos a seguir a mostrar como é obtido os diversos termos que constituem a amplitude h_{fi} .

Cálculo do Fator de Cor

O fator de cor \mathcal{C}_i , deve ser calculado para cada um dos diagramas da Eq. (4.7) apresentados na figura 3.3, utilizando-se a contribuição de cor para a função de onda do glueball (ver apêndice D)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \mathcal{C}^{\mu\tau} \mathcal{C}^{\nu\xi} \mathcal{C}^{\rho\xi} \mathcal{C}^{\sigma\tau} ; & \mathcal{C}_2 &= f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \mathcal{C}^{\mu\tau} \mathcal{C}^{\nu\xi} \mathcal{C}^{\rho\tau} \mathcal{C}^{\sigma\xi} ; \\ \mathcal{C}_3 &= f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \mathcal{C}^{\mu\nu} \mathcal{C}^{\tau\xi} \mathcal{C}^{\sigma\tau} \mathcal{C}^{\rho\xi} ; & \mathcal{C}_4 &= f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \mathcal{C}^{\mu\xi} \mathcal{C}^{\nu\tau} \mathcal{C}^{\tau\xi} \mathcal{C}^{\rho\sigma} . \end{aligned}$$

Mas como

$$\mathcal{C}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{8}} \delta^{\mu\nu} , \quad (4.16)$$

temos, das expressões anteriores que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \frac{1}{64} f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \delta^{\mu\tau} \delta^{\nu\xi} \delta^{\rho\xi} \delta^{\sigma\tau} ; & \mathcal{C}_2 &= \frac{1}{64} f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \delta^{\mu\tau} \delta^{\nu\xi} \delta^{\rho\tau} \delta^{\sigma\xi} ; \\ \mathcal{C}_3 &= \frac{1}{64} f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \delta^{\mu\nu} \delta^{\tau\xi} \delta^{\sigma\tau} \delta^{\rho\xi} ; & \mathcal{C}_4 &= \frac{1}{64} f^{\mu\sigma\lambda} f^{\nu\rho\lambda} \delta^{\mu\xi} \delta^{\nu\tau} \delta^{\tau\xi} \delta^{\rho\sigma} . \end{aligned}$$

Considerando-se os valores dos coeficientes de cor f^{abc} da simetria de grupo $SU(3)$, que estão descritos no apêndice F, após a contração total dos índices de cor encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= 0 ; \\ \mathcal{C}_2 &= -\frac{3}{8} ; \\ \mathcal{C}_3 &= \frac{3}{8} ; \\ \mathcal{C}_4 &= \frac{3}{8} . \end{aligned} \quad (4.17)$$

O resultado zero no primeiro fator apresentado em (4.17) deve-se ao fato de um gluon estar sendo trocado entre dois objetos sem cor (brancos).

Cálculo do Fator de Spin

O vetor \vec{S} representa o spin total do glueball que pode ser reescrito em termos dos spins dos gluons constituintes, \vec{S}_1 e \vec{S}_2 ,

$$\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 . \quad (4.18)$$

Considerando-se a função de onda de spin do gluon χ_{gluon} sabemos que [34]

$$\vec{S}_i^2 \chi_{\text{gluon}} = s_i(s_i + 1) \chi_{\text{gluon}} = 1(1 + 1) \chi = 2 \chi_{\text{gluon}} ; \quad (4.19)$$

logo

$$\vec{S}_i^2 = 2. \quad (4.20)$$

Dessa maneira podemos escrever em (4.18)

$$\vec{S}^2 = 4 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \quad (4.21)$$

Substituindo-se (4.21) em (4.14) e (4.15), obtemos

$$\omega_1(\mu\nu; \sigma\rho) = \frac{19}{12}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} + \frac{2}{3}\vec{S}_{1\mu\sigma} \cdot \vec{S}_{2\nu\rho} \quad (4.22)$$

e

$$\omega_2(\mu\nu; \sigma\rho) = -\frac{7}{3}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \frac{5}{3}\vec{S}_{1\mu\sigma} \cdot \vec{S}_{2\nu\rho}. \quad (4.23)$$

A parte de spin de cada diagrama é dada respectivamente por

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1)} &= \omega_1(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\tau} \chi_\gamma^{*\nu\xi} \chi_\delta^{\rho\xi} \chi_\beta^{\sigma\tau} & ; & \quad \omega_1^{(2)} = \omega_1(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\tau} \chi_\gamma^{*\nu\xi} \chi_\delta^{\rho\tau} \chi_\beta^{\sigma\xi} ; \\ \omega_1^{(3)} &= \omega_1(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\nu} \chi_\gamma^{*\tau\xi} \chi_\delta^{\sigma\tau} \chi_\beta^{\rho\xi} & ; & \quad \omega_1^{(4)} = \omega_1(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\xi} \chi_\gamma^{*\nu\tau} \chi_\delta^{\tau\xi} \chi_\beta^{\rho\sigma} ; \end{aligned} \quad (4.24)$$

e

$$\begin{aligned} \omega_2^{(1)} &= \omega_2(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\tau} \chi_\gamma^{*\nu\xi} \chi_\delta^{\rho\xi} \chi_\beta^{\sigma\tau} & ; & \quad \omega_2^{(2)} = \omega_2(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\tau} \chi_\gamma^{*\nu\xi} \chi_\delta^{\rho\tau} \chi_\beta^{\sigma\xi} ; \\ \omega_2^{(3)} &= \omega_2(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\nu} \chi_\gamma^{*\tau\xi} \chi_\delta^{\sigma\tau} \chi_\beta^{\rho\xi} & ; & \quad \omega_2^{(4)} = \omega_2(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\alpha^{*\mu\xi} \chi_\gamma^{*\nu\tau} \chi_\delta^{\tau\xi} \chi_\beta^{\rho\sigma} , \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo os coeficientes χ apresentados no apêndice D. Portanto, ao utilizar estas definições apresentadas no apêndice juntamente com as expressões (4.22) e (4.23) em (4.24) e (4.25) podemos obter os coeficientes de spin $\omega_1^{(i)}$ e $\omega_2^{(i)}$ para os dois casos que iremos estudar nesta dissertação, ou seja, $S = 0$ e $S = 2$.

Para $S = 0$

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1)} &= 1.58333326 & ; & \quad \omega_1^{(2)} = 0.972222179 ; \\ \omega_1^{(3)} &= 0.675925895 & ; & \quad \omega_1^{(4)} = 0.675925895 ; \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^{(1)} &= -2.33333309 & ; & \quad \omega_2^{(2)} = -1.8888887 ; \\ \omega_2^{(3)} &= -1.14814803 & ; & \quad \omega_2^{(4)} = -1.14814803 . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para $S = 2$

Para uma partícula de spin 2 há 5 projeções possíveis no eixo de quantização; assim se, a interação entre duas delas implica na escolha entre 25 estados. Vamos considerar a seguir os valores dos coeficientes obtidos a partir de uma média aritmética, isto é, iremos somar sobre todos os valores, para um determinado $\omega_1^{(i)}$ e $\omega_2^{(i)}$ e dividir por 25, obtendo

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1)} &= 1.58333334 & ; & \quad \omega_1^{(2)} = 1.46228344 ; \\ \omega_1^{(3)} &= 1.18539605 & ; & \quad \omega_1^{(4)} = 1.18539605 ; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^{(1)} &= -2.33333321 & ; & \quad \omega_2^{(2)} = -2.24529693 ; \\ \omega_2^{(3)} &= -1.55307847 & ; & \quad \omega_2^{(4)} = -1.55307847 . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Cálculo da Parte Espacial

Para calcularmos a parte espacial, vamos escrever a amplitude h_{fi} associada às equações (4.7). O cálculo será efetuado no espaço de momentum linear dos glueballs, avaliado em termos dos momenta lineares no centro de massa (\vec{p}, \vec{p}') . Assim a notação $(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\gamma, \vec{p}_\delta, \vec{p}_\beta)$ representa na realidade termos do tipo $(\vec{p}, -\vec{p}, -\vec{p}', \vec{p}')$, respectivamente. De (4.12) e (4.13) vemos que

$$V_{aa}(\vec{p}) = V_{aa}(-\vec{p}) \quad (4.30)$$

e usando (4.6) obtemos uma expressão para os diversos termos de h_{fi}

$$\begin{aligned} h_1(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}) &= 4V_{aa}(\vec{p} - \vec{p}') \exp\left[-\frac{(\vec{p} - \vec{p}')^2}{8b^2}\right] + 4V_{aa}(\vec{p} + \vec{p}') \exp\left[-\frac{(\vec{p} + \vec{p}')^2}{8b^2}\right]; \\ h_2(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}) &= \frac{4}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{(p^2 + p'^2)}{4b^2}\right] \int d\vec{q} V_{aa}(\vec{q}) \\ &\quad \times \left\{ \exp\left[-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{q \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}{2b^2}\right] + \exp\left[-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{q \cdot (\vec{p} + \vec{p}')}{2b^2}\right] \right\}; \\ h_3(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(3)}, \omega_2^{(3)}) &= \frac{4}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{(p^2 + p'^2)}{4b^2}\right] \int d\vec{q} V_{aa}(\vec{q}) \\ &\quad \times \left\{ \exp\left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}'}{2b^2}\right] + \exp\left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}}{2b^2}\right] \right\}; \\ h_4(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(4)}, \omega_2^{(4)}) &= \frac{4}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{(p^2 + p'^2)}{4b^2}\right] \int d\vec{q} V_{aa}(\vec{q}) \\ &\quad \times \left\{ \exp\left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}'}{2b^2}\right] + \exp\left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}}{2b^2}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

A amplitude será determinada da seguinte forma

$$h_{fi}(\vec{p}, \vec{p}') = \sum_{i=1}^4 \mathcal{C}_i h_i(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}); \quad (4.32)$$

mas como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= 0; \quad \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_4; \\ \omega_i^{(3)} &= \omega_i^{(4)}; \quad h_3 = h_4, \end{aligned} \quad (4.33)$$

obtemos

$$h_{fi}(\vec{p}, \vec{p}') = \mathcal{C}_2 h_2(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}) + 2\mathcal{C}_3 h_3(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(3)}, \omega_2^{(3)}). \quad (4.34)$$

Finalmente podemos escrever (4.34) em termos das variáveis de Mandelstam- (s, t, u) , descritas em detalhe no apêndice G. Apresentaremos a seguir o resultado explícito das integrações

para h_{fi}

$$h_{fi}(s, t) = \frac{3}{8} R_0(s) \sum_{i=1}^6 R_i(s, t), \quad (4.35)$$

onde

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{4}{(2\pi)^{3/2} b^3} \exp \left[-\frac{1}{2b^2} \left(\frac{s}{4} - M_G^2 \right) \right]; \\ R_1 &= \frac{\lambda \omega_1^{(2)} 4 \sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m^2} \exp \left(-\frac{q^2}{2b^2} \right) \left[\mathcal{J}_0 \left(\frac{q\sqrt{t}}{2b^2} \right) + \mathcal{J}_0 \left(\frac{q\sqrt{u}}{2b^2} \right) \right]; \\ R_2 &= \frac{\lambda \omega_2^{(2)} 2\sqrt{2\pi} b^3 k^3 m}{3(b^2 + 2k^2 m^2)^{3/2}} \left[\exp \left(-\frac{tk^2 m^2}{4(b^4 + 2b^2 k^2 m^2)} \right) + \exp \left(-\frac{uk^2 m^2}{4(b^4 + 2b^2 k^2 m^2)} \right) \right]; \\ R_3 &= \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{q^2 \beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \exp \left(-\frac{q^2}{2b^2} \right) \left[\mathcal{J}_0 \left(\frac{q\sqrt{t}}{2b^2} \right) + \mathcal{J}_0 \left(\frac{q\sqrt{u}}{2b^2} \right) \right]; \\ R_4 &= -\frac{\lambda \omega_1^{(3)}}{3} \frac{16 \sqrt{2\pi} b^2}{\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} \exp \left(-\frac{3q^2}{8b^2} \right) \sinh \left(\frac{q}{2b^2} \sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2} \right); \\ R_5 &= -\frac{\lambda \omega_2^{(3)}}{3} \frac{16\pi b^3 k^3 m}{(2b^2 + 3k^2 m^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{k^2 m^2 \left(\frac{s}{4} - M_G^2 \right)}{2(2b^4 + 3b^2 k^2 m^2)} \right]; \\ R_6 &= -\frac{128\sqrt{2\pi} b^2}{3\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}} \int_0^\infty dq \frac{q\beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \exp \left(\frac{3q^2}{8b^2} \right) \sinh \left(\frac{q}{2b^2} \sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2} \right); \end{aligned} \quad (4.36)$$

e onde $\mathcal{J}_0(x)$ é função de Bessel esférica dada por

$$\mathcal{J}_0(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (4.37)$$

4.2 Massa dos Glueballs

O cálculo da amplitude de espalhamento obtido na seção anterior é fundamental no estudo que queremos desenvolver, pois a partir de $h_{fi}(s, t)$ podemos obter a seção de choque e o potencial de interação entre os glueballs. Entretanto, como pode ser visto em (4.35), a amplitude $h_{fi}(s, t)$ possui uma dependência em vários parâmetros: λ , b , β , m e k . A determinação destes parâmetros é uma tarefa não-trivial. A estratégia para vincular estas quantidades pode ser desdobrada em duas etapas:

1. cálculo do valor esperado de r^2 que irá fornecer uma relação entre o parâmetro b acima e o raio quadrático médio que chamaremos de r_0 ;
2. cálculo do valor esperado de H_{aa} que deve fornecer a massa do glueball, representada por M_G .

O cálculo do valor esperado de r^2 é obtido usando-se a função de onda do glueball do apêndice D, onde se obtém a seguinte relação entre r_0 e b

$$r_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}b}. \quad (4.38)$$

O cálculo da massa do glueball é feito, tomando-se o valor esperado do Hamiltoniano,

$$\Phi_\alpha^{*\mu\nu} H_{aa}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\beta^{\sigma\rho} = M_G, \quad (4.39)$$

onde H_{aa} é dado por (1.88)

$$H_{aa} = 2m - \frac{1}{m} \nabla^2 + V_{aa}. \quad (4.40)$$

∇^2 em coordenadas esféricas é representado por:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \quad (4.41)$$

e V_{aa} está definido na Eq. (4.11). Assim, após a contração dos índices em (4.39) e realizando-se algumas manipulações formais obtemos a *equação da massa*

$$\begin{aligned} M_G = & 4m + \frac{3b^2}{2m} - \frac{\omega_1 \lambda}{\sqrt{\pi}} \left[2b + m \sqrt{\pi} e^{\frac{m^2}{4b^2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2b}\right) \right] - \frac{mk^3 \omega_2 \lambda}{\sqrt{\pi}} \frac{b^3}{(b^2 + k^2 m^2)^{3/2}} \\ & + \frac{m}{\sqrt{\pi} b^2} \left[2b\beta m + \sqrt{\pi} e^{\frac{\beta^2 m^2}{4b^2}} (2b^2 + \beta^2 m^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta m}{2b}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \operatorname{erf}(x) - 1, \quad (4.43)$$

e

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (4.44)$$

No cálculo de (4.42) foi incluído a contração da parte de cor:

$$\mathcal{C}^{\mu\nu} f^{\mu\sigma\kappa} f^{\nu\rho\kappa} \mathcal{C}^{\sigma\rho} = 3; \quad (4.45)$$

portanto, o termo $\lambda/3$ foi substituído por λ . A dependência no spin aparece nos coeficientes ω_1 e ω_2 e será dado por $\chi_\alpha^{*\mu\nu} \omega_i(\mu\nu; \sigma\rho) \chi_\beta^{\sigma\rho}$, sendo

$$\begin{aligned} \chi_\alpha^{*\mu\nu} \omega_1 \chi_\beta^{\sigma\rho} &= \chi_\alpha^{*\mu\nu} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} S^2 \right) \chi_\beta^{\sigma\rho}, \\ \chi_\alpha^{*\mu\nu} \omega_2 \chi_\beta^{\sigma\rho} &= \chi_\alpha^{*\mu\nu} \left(1 - \frac{5}{6} S^2 \right) \chi_\beta^{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Lembrando que $S^2 = S(S + 1)$, encontramos para o glueball no estado 0^{++} , $S^2 = 0$ e para o glueball no estado 2^{++} , $S^2 = 6$. Portanto, temos que, para o glueball no estado 0^{++} ,

$$\begin{aligned}\chi_\alpha^{*\mu\nu} \omega_1 \chi_\beta^{\sigma\rho} &= \frac{1}{4}; \\ \chi_\alpha^{*\mu\nu} \omega_2 \chi_\beta^{\sigma\rho} &= 1;\end{aligned}\tag{4.47}$$

e para o estado 2^{++} ,

$$\begin{aligned}\chi_\alpha^{*\mu\nu} \omega_1 \chi_\beta^{\sigma\rho} &= \frac{9}{4}; \\ \chi_\alpha^{*\mu\nu} \omega_2 \chi_\beta^{\sigma\rho} &= -4.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Buscamos então o valor dos parâmetros necessários para calcularmos a amplitude de espalhamento e a seção de choque glueball-glueball. Para fixarmos os valores dos parâmetros k e β utilizamos o cálculo das massas dos glueballs nos estados 0^{++} e 2^{++} . Os resultados, obtidos em cálculos de CDQ na rede, estabelecem uma estimativa para a massa dos glueballs nos estados 0^{++} e 2^{++} respectivamente em $M_{0^{++}} = 1,73$ GeV e $M_{2^{++}} = 2,4$ GeV, ou seja, isto implica que a razão entre as massas dos glueballs nos estados 2^{++} e 0^{++} resulta em:

$$\frac{M_{2^{++}}}{M_{0^{++}}} \simeq 1.39.\tag{4.49}$$

A resolução numérica da equação da massa terá como objetivo estabelecer um conjunto de parâmetros que resultem em uma faixa de valores de massa próxima aos valores das massas previstos pela CDQ na rede e sujeitas à restrição (4.49). Desta forma, os parâmetros de entrada serão:

- o raio quadrático médio r_0 que de acordo com a expressão (4.38) fixa o valor de b ; a faixa de valores para r_0 a ser considerada situa-se dentro de uma faixa usual para a física hadrônica: 0.5 fm a 0.9 fm;
- a massa do gluon m será fixada em 0.6 GeV [15, 12];
- o valor de λ é determinado por (1.84) o que fornece uma faixa de valores de 1.0 até 2.0; o valor que iremos usar será $\lambda = 1.8$, que é três vezes o acoplamento a ser usado para a interação entre o par $s\bar{s}$: $\alpha_S = 0.6$.

Serão considerados parâmetros de saída: β e k .

Nas figuras 4.1 e 4.2 mostramos os gráficos da massa do glueball em função de k , variando este de zero a um. Esta região nos interessa, pois se o valor de k for grande, a função $D(r)$, dada pela equação (1.89), que aparece no potencial, tende ao mesmo valor que seria obtido se esta fosse substituída por $\delta^3(r)$. Nestes gráficos vemos outra tendência: para o glueball no estado 0^{++} , onde o raio quadrático médio é 0.58 fm; os valores de β que produzem a

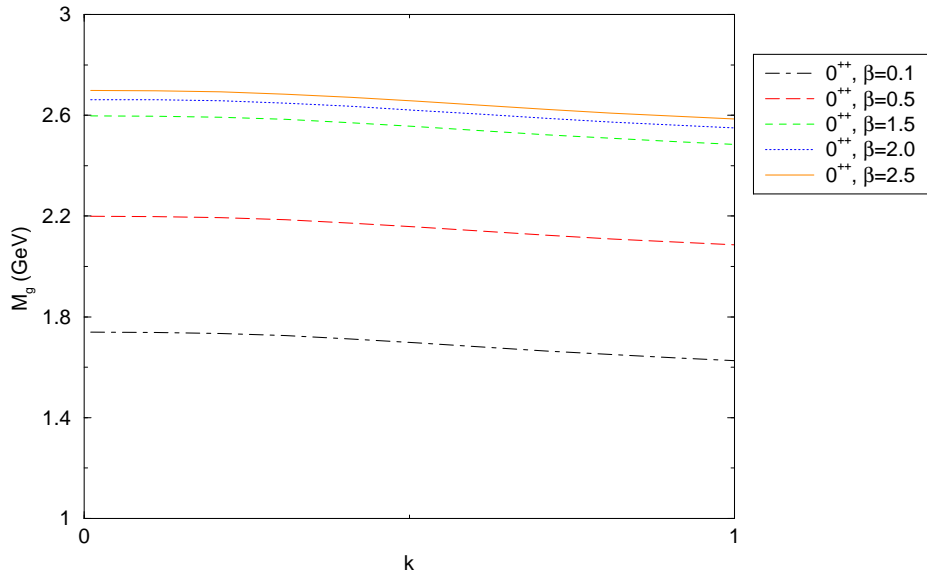


Fig. 4.1: Massa do glueball no estado 0^{++} ($r_0 = 0.58 fm$) em função do parâmetro k , para massa do gluon $m = 0.6 GeV$, $\lambda = 1.8$, e vários valores do parâmetro β .

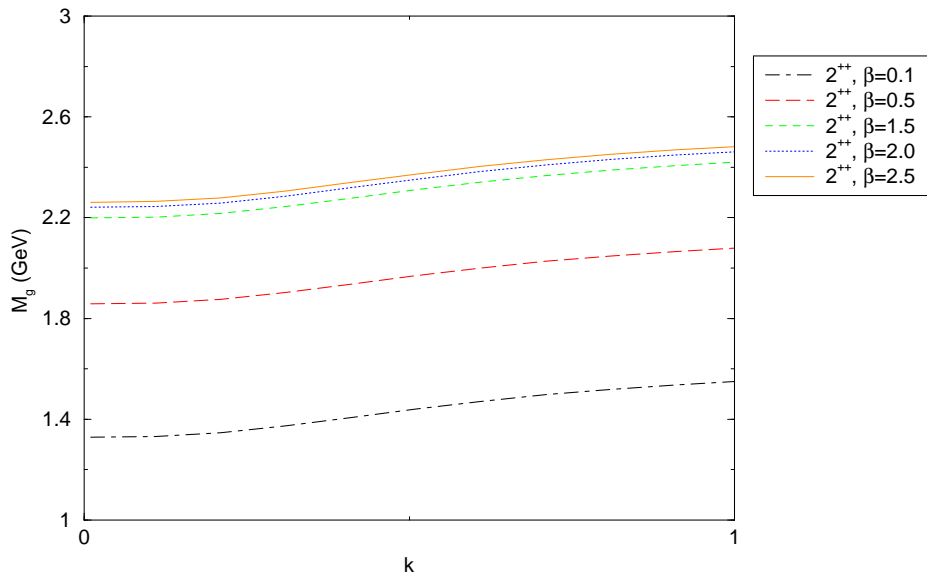


Fig. 4.2: Massa do glueball no estado 2^{++} ($r_0 = 0.8 fm$) em função do parâmetro k , para massa do gluon $m = 0.6 GeV$, $\lambda = 1.8$, e vários valores do parâmetro β .

curva mais próxima ao valor de massa do glueball no estado 0^{++} , 1.73 GeV, estão na região de β pequenos, isto é, próximos a 0.1. A situação é diferente para o glueball 2^{++} , onde o

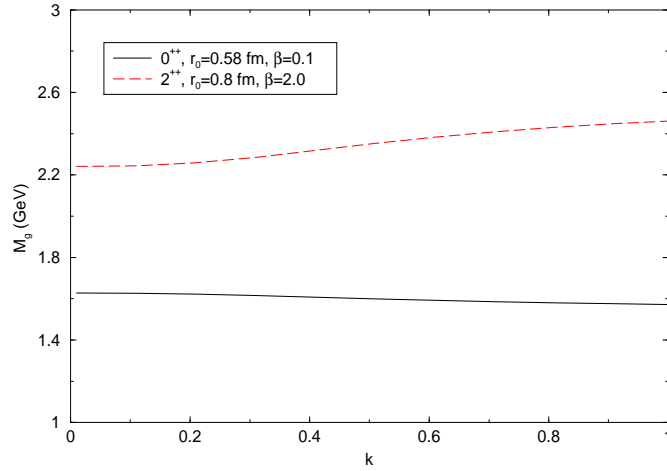


Fig. 4.3: Massas dos glueballs nos estados 0^{++} e 2^{++} em função do parâmetro k , para massa do gluon $m = 0.6 \text{ GeV}$ e $\lambda = 1.8$.

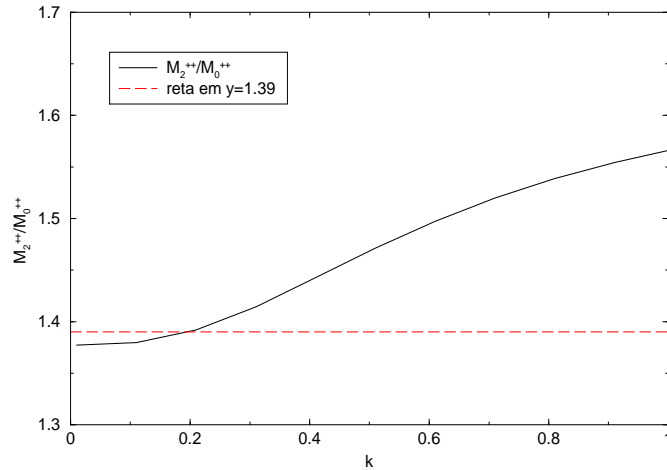


Fig. 4.4: Razão das massas dos glueballs 0^{++} ($r_0 = 0.58 \text{ fm}$ e $\beta = 0.1$) e 2^{++} ($r_0 = 0.8 \text{ fm}$ e $\beta = 2.0$) em função do parâmetro k , para massa do gluon $m = 0.6 \text{ GeV}$ e $\lambda = 1.8$.

raio quadrático médio é maior (igual a 0.8 fm). Neste caso os valores de β que produzem a curva mais próxima ao valor de massa do glueball no estado 2^{++} , 2.4 GeV , são os valores de β grandes, próximo a 2. As curvas para os glueballs correspondentes aos estados 0^{++} e 2^{++} com valores de β iguais a 0.1 e 2.0, vistas isoladamente na figura 4.3, possuem uma razão igual a 1.39 para $k \simeq 0.21$. Isto pode ser visualizado na figura 4.4. Com os valores de β e k determinados podemos agora obter a seção de choque e o potencial de interação V_{GG} .

4.3 Seção de Choque Glueball-Glueball

Nesta seção fazemos uma comparação entre a seção de choque para a interação entre dois glueballs com a seção de choque obtida considerando-se um méson composto por quarks com os mesmos números quânticos que o respectivo glueball. A comparação só poderá ser realizada para o estado 0^{++} , pois o estado 2^{++} corresponde a um estado de spin total igual a 2 e no modelo de quarks elementares que iremos utilizar não teremos como construir um estado de spin 2.

A matriz- T obtida é utilizada na determinação da seção de choque. No que segue, utilizamos, basicamente, a notação da Ref. [35]. Os elementos da matriz- S , na aproximação de Born, são dados por:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) (\alpha\gamma | V_{gg} | \delta\beta) . \quad (4.50)$$

Nesta expressão, $E_f = E_\alpha + E_\beta$ e $E_i = E_\gamma + E_\delta$ são, respectivamente, as energias final e inicial do sistema de duas partículas, com

$$E_\alpha = \sqrt{\vec{P}_\alpha^2 + M_\alpha^2} . \quad (4.51)$$

Observamos que S_{fi} satisfaz a lei de conservação de energia. Assim, a conservação do quadri-vetor momentum linear é implementada pelo elemento de matriz S_{fi} . A matriz- S pode ser escrita, em termos da amplitude invariante, \mathcal{M}_{fi} , como

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left[\prod_{n=1}^4 (2(2\pi)^3 E_n)^{-\frac{1}{2}} \right] \mathcal{M}_{fi} , \quad (4.52)$$

onde P_f e P_i são, respectivamente, os quadri-vetores momenta final e inicial, e

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{N} h_{fi} , \quad (4.53)$$

onde

$$\mathcal{N} = \frac{1}{(2\pi)^3} \prod_{n=1}^4 (2(2\pi)^3 E_n)^{\frac{1}{2}} , \quad (4.54)$$

é o fator de normalização necessário para obter-se a forma correta da amplitude invariante de espalhamento a partir do elemento de matriz- T não-relativístico.

A seção de choque diferencial, no referencial do centro de massa (c.m.), para o processo $i \rightarrow f$ é dada genericamente por

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{\vec{P}^2(s)} |\mathcal{M}_{fi}(s, t, u)|^2 , \quad (4.55)$$

onde $\vec{P}(s)$ é o momentum linear relativo das duas partículas no estado inicial e $\mathcal{M}_{fi}(s, t, u)$ é a amplitude invariante de espalhamento calculada no centro de massa das partículas iniciais. Todas as grandezas são expressas em termos das variáveis de Mandelstam (Apêndice G) na forma invariante de Lorentz. A seção de choque total é obtida integrando-se a equação (4.55) em t ,

$$\sigma_{fi}(s) = \int_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.}, \quad (4.56)$$

onde t_- e t_+ são, respectivamente, o momentum linear mínimo e o momentum linear máximo transferidos. Essa integral em t pode ser transformada em uma integral na variável z , definido como

$$z = \cos \theta(\vec{P}, \vec{P}'), \quad (4.57)$$

onde $\theta(\vec{P}, \vec{P}')$ é o ângulo entre os momenta lineares relativos inicial e final. Para partículas não-idênticas, temos:

$$\sigma_{fi}(s) = \frac{1}{32\pi s} \frac{|\vec{P}'(s)|}{|\vec{P}(s)|} \int_{-1}^{+1} dz |\mathcal{M}_{fi}(|\vec{P}'(s)|, |\vec{P}(s)|, z)|^2. \quad (4.58)$$

Para espalhamento elástico no c.m. de partículas idênticas com massa iguais a M , obtemos:

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}(s, t, u)}{dt} \right)_{c.m.} = \frac{4\pi^5 s}{(s - 4M^2)} |h_{fi}|^2, \quad (4.59)$$

e

$$\sigma_{fi}(s) = \frac{4\pi^5 s}{(s - 4M^2)} \int_{-(s-4M^2)}^0 dt |h_{fi}|^2. \quad (4.60)$$

Inicialmente vamos obter a seção de choque para um méson composto por um par $s\bar{s}$. Este modelo é uma alternativa à hipótese da existência dos glueballs e tem sido usado para descrever o estado com $J^{PC} = 0^{++}$ [36]. Usaremos o resultado correspondente apresentado no capítulo 2 para o formalismo de Fock-Tani aplicado a mésons. O potencial microscópico é representado pelo termo de spin-spin do potencial de Fermi-Breit apresentado na equação (1.47). A amplitude de espalhamento fica então

$$h_{fi}^{s\bar{s}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{8\pi\alpha_s}{9m_q^2} \left[\frac{16}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{4b^2} \frac{(s-4M_G^2)}{3}} + e^{\frac{t}{8b^2}} + e^{\frac{u}{8b^2}} \right]. \quad (4.61)$$

A seção de choque é obtida após integração em t e resulta numa expressão analítica

$$\sigma_{fi}^{s\bar{s}} = \frac{4\pi\alpha_s^2 s}{81m_q^4} \left[\frac{4b^2 \left(1 - e^{-\frac{\xi}{4b^2}}\right)}{\xi} + \frac{128}{27} e^{-\frac{\xi}{6b^2}} + e^{-\frac{\xi}{8b^2}} + \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{4b^2}{\xi} \left(e^{-\frac{\xi}{12b^2}} - e^{-\frac{5\xi}{24b^2}} \right) \right] \quad (4.62)$$

onde $\xi = s - 4M_G^2$. Vamos considerar os seguintes parâmetros $m_q = 0.55$ GeV, $\alpha_s = 0.6$. Novamente b e r_0 possuem uma dependência dada por (4.38).

A seção de choque para o glueball 0^{++} corresponde também à integral na variável t de Mandelstam da equação (4.35), mas diferentemente da situação correspondente ao méson com a composição $s\bar{s}$, não possui uma expressão analítica. Este resultado pode ser visto na figura (4.5). A seção de choque para 2^{++} também pode ser calculada do mesmo modo e pode ser vista na figura (4.6).

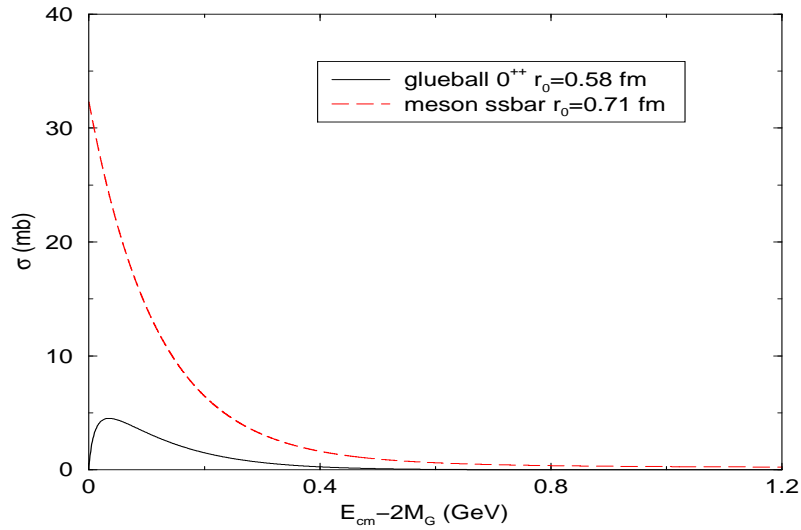


Fig. 4.5: Comparação entre as seções de choque do glueball e do méson $s\bar{s}$.

4.4 Potencial Glueball-Glueball V_{GG}

Nesta seção iremos calcular o potencial de interação entre dois glueballs a partir de h_{fi} . Como esta função depende de diversas variáveis isto conduz a um potencial não-local. Há uma forma engenhosa de se obter um potencial local com as características desejadas que consiste em introduzirmos a seguinte aproximação, chamada de *aproximação local*,

$$\begin{aligned} s &\longrightarrow 4M_G^2 + \vec{Q}^2, \\ t &\longrightarrow -\vec{Q}^2. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Os detalhes deste processo de elaboração formal são apresentados no apêndice G. Desta forma pode-se definir um potencial

$$V_{GG}(r) = \int d^3Q e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} h_{fi}(\vec{Q}). \quad (4.64)$$

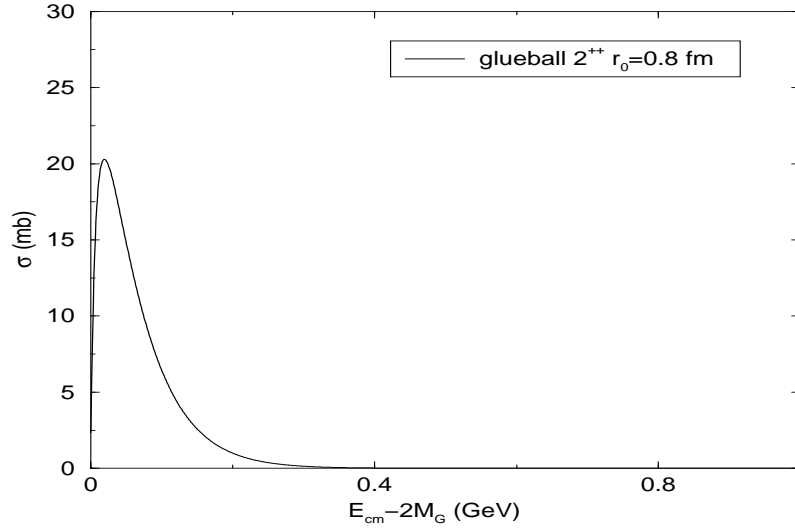


Fig. 4.6: Seção de choque do glueball 2^{++} .

Esta transformada de Fourier não pode ser resolvida analiticamente. Uma forma de contornar esta dificuldade consiste em expandir $h_{fi}(\vec{Q})$ em uma soma de gaussianas e fazer um ajuste

$$h_{fi}(\vec{Q}) = \sum_i a_i e^{-b_i \vec{Q}^2}. \quad (4.65)$$

A determinação de $h_{fi}(\vec{Q})$ envolve o ajuste de três gaussianas, tanto para o estado 0^{++} como para o estado 2^{++} , como mostram as Fig. 4.7 e 4.8. As curvas ajustadas têm os seguintes parâmetros para o estado 0^{++}

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.0202212 ; & b_1 &= 0.607788 ; & a_2 &= -0.0202226 ; \\ b_2 &= 0.607932 ; & a_3 &= -0.000394839 ; & b_3 &= 2.48103 ; \end{aligned} \quad (4.66)$$

e para o estado 2^{++} ,

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.0978584 ; & b_1 &= 0.842053 ; & a_2 &= 0.0303196 ; \\ b_2 &= 0.734019 ; & a_3 &= -0.00181978 ; & b_3 &= 2.3152 . \end{aligned} \quad (4.67)$$

Determinamos então a transformada de Fourier da equação (4.65) e obtemos o potencial

$$V_{GG}(r) = \pi^{3/2} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{b_i^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4b_i}}. \quad (4.68)$$

Os gráficos de $V_{GG}(r)$ para os estados 0^{++} e 2^{++} são mostrados nas figuras 4.9 e 4.10. Nestas mesmas figuras estão representadas o potencial de interação entre os glúons $V_{2g}(r)$ de (1.79) e (1.80).

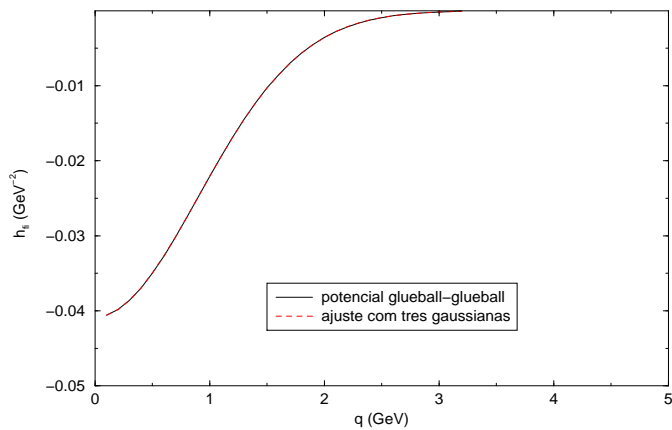


Fig. 4.7: Amplitude de espalhamento em função de momentum linear para o glueballs 0^{++} , $r_0 = 0.58\text{fm}$, $\beta = 0.1$, $\lambda = 1.8$, $k = 0.21$ e massa do gluon, $m = 0.6\text{GeV}$.

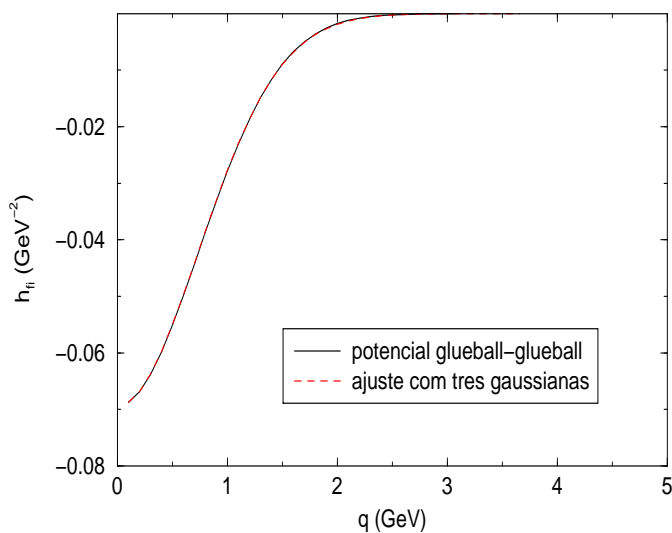


Fig. 4.8: Amplitude de espalhamento em função de momentum linear para o glueballs 2^{++} , $r_0 = 0.8\text{fm}$, $\beta = 2.0$, $\lambda = 1.8$, $k = 0.21$ e massa do gluon, $m = 0.6\text{GeV}$.

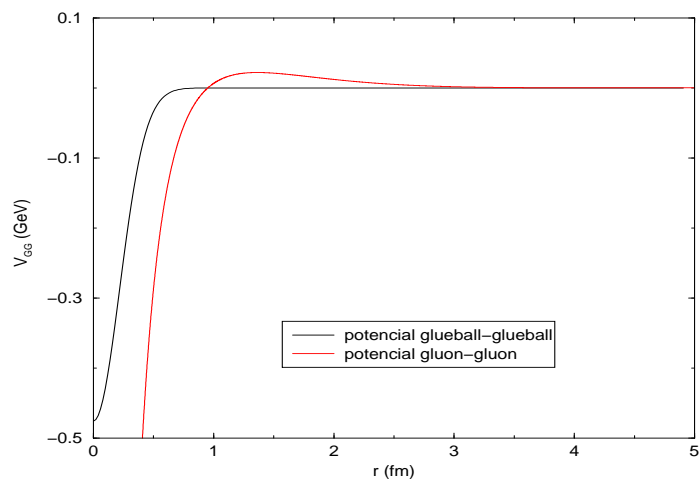


Fig. 4.9: *Potencial glueball-glueball em função do raio, para o glueballs 0^{++} , $r_0 = 0.58\text{fm}$, $\beta = 0.1$, $\lambda = 1.8$, $k = 0.21$ e massa do gluon, $m = 0.6\text{GeV}$. E potencial gluon-gluon em função do raio para os mesmos parâmetros.*

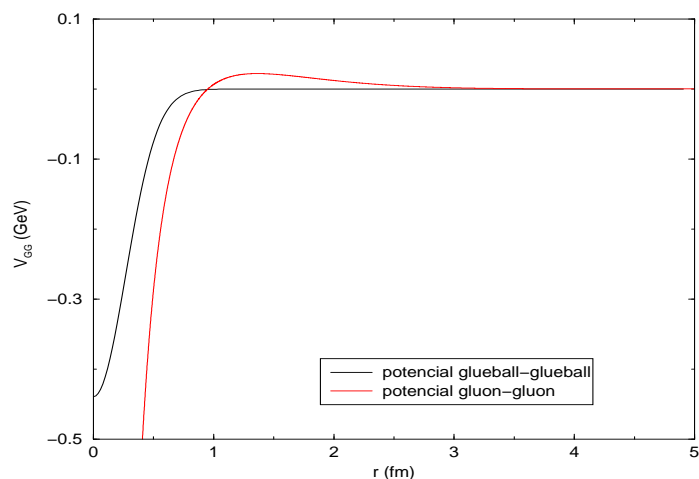


Fig. 4.10: *Potencial glueball-glueball em função do raio, para o glueballs 2^{++} , $r_0 = 0.8\text{fm}$, $\beta = 2.0$, $\lambda = 1.8$, $k = 0.21$ e massa do gluon, $m = 0.6\text{GeV}$. E potencial gluon-gluon em função do raio para os mesmos parâmetros.*

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação fizemos um estudo exploratório sobre a interação entre glueballs. Para este estudo usou-se uma técnica amplamente desenvolvida na física atômica e recentemente aplicada à física hadrônica chamada de formalismo de Fock-Tani. Há muitos exemplos de sistemas nos quais os graus de liberdade internos de partículas compostas não podem ser desprezados. Para estes sistemas o formalismo em segunda quantização da mecânica quântica torna-se uma ferramenta matemática muito difícil de ser usada. A presença de estados ligados torna mais complexa a aplicação do teorema de Wick, o cálculo de funções de Green e assim por diante.

Por isso foi desenvolvida a idéia de se fazer um mapeamento do espaço de Hilbert físico para um espaço de Hilbert ideal onde as partículas compostas são representadas por operadores elementares ideais, obedecendo regras de comutação canônicas. A informação sobre a sua estrutura interna é então transferida para um Hamiltoniano de interação efetivo. A construção do potencial de Fock-Tani consiste em efetuar-se o produto dos operadores transformados, de maneira conveniente a formar um potencial de interação de dois corpos. A partir deste potencial obteve-se, neste trabalho, os elementos da matriz de espalhamento h_{fi} , em aproximação de Born, para o espalhamento elástico entre glueballs. Foram calculadas as seções de choque para os glueballs 0^{++} e 2^{++} e o potencial de interação V_{GG} entre os glueballs.

Os resultados apresentados no capítulo 4 têm alguns desdobramentos interessantes. Neste capítulo é feita uma comparação direta entre as seções de choque de um mesmo méson (0^{++}). Este méson é descrito de duas formas completamente diferentes. Na primeira forma o méson é descrito da maneira usual como sendo composto por um par $q\bar{q}$. Na segunda abordagem este mesmo méson é descrito como sendo constituído por dois glúons. A primeira conclusão obtida se refere a diferença entre os raios do méson nas duas descrições. Esta diferença pode ser interpretada como um reflexo da origem dos constituintes, que no caso do glueball são bósons e no caso do méson formado por quarks que são férmions, ou seja, essa diferença pode ser originada pelo princípio de Pauli. As diferenças acentuadas encontradas nas amplitudes e estruturas das seções de choque correspondentes podem ser

interpretadas, —a despeito da simplicidade formal da abordagem utilizada—, como uma nova assinatura para glueballs. Na hipotética realização de um experimento capaz de medir a seção de choque de interação deste méson, nossos resultados preliminares indicam que seria possível distinguir-se entre estas descrições. A eventual descoberta de uma seção de choque com valor menor poderia indicar a existência de um méson constituído por glúons.

O potencial de interação entre os glueballs V_{GG} introduzido nesta dissertação também apresenta aspectos interessantes como, por exemplo, sua profundidade que é de aproximadamente 0.5GeV . A partir deste fato cabe especular-se sobre a existência de estados ligados de dois glueballs. Como o potencial glueball-glueball é de curto alcance podemos esperar a presença destes estados na descrição de outros processos, em especial na colisão de íons pesados. Na atualidade, um dos cenários mais adequados para se formar um plasma de quarks e glúons é na colisão de íons pesados. Nestas colisões a altíssimas energias acredita-se que uma região muito densa é formada na colisão, com densidades muito elevadas de glúons. Um dos mecanismos indiretos de detecção deste plasma tem sido atribuído à conhecida *supressão do méson J/Ψ* , um méson composto por um par $c\bar{c}$. Acredita-se que a formação do plasma de quarks e glúons gere uma *blindagem de cor* entre os quarks c e \bar{c} livres impedindo pelo menos parcialmente a formação de um estado ligado $c\bar{c}$ que originaria a J/Ψ . Deste modo, devido ao efeito de blindagem, seria observada efetivamente uma diminuição no número total de J/Ψ produzidos. O potencial de interação entre glúons V_{2g}^{OGEP} é de curto alcance e portanto poderá se mostrar relevante na colisão de íons pesados a curtas distâncias. Como o potencial V_{GG} é atrativo e de curto alcance pode-se conjecturar que, após a colisão de íons pesados, seja produzido uma região densa de glueballs juntamente com a região onde atua o potencial V_{2g}^{OGEP} entre os glúons. Desta forma um quark c ou \bar{c} poderia encontrar uma região também densa em glúons confinados nos glueballs. Isto faria com que o processo de supressão da formação de pares $c\bar{c}$ fosse acentuado, ou seja, teríamos uma supressão ainda maior de J/Ψ .

O grau de importância deste hipotético gás de glueballs na supressão de J/Ψ poderá ser avaliado num cálculo futuro da interação $c - \text{glueball}$ e $\bar{c} - \text{glueball}$.

A perspectiva de continuação futura para este estudo estende-se ademais para o cálculo do glueball constituído por três glúons. Um outro estudo seria o dos mésons híbridos. Neste caso seria necessário construir uma transformação de Fock-Tani, aos moldes da que foi estudada em [37], para expansão do estado de Fock do tipo $|q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle$. Após a obtenção desta transformação, buscamos modificar então, de modo consistente, os operadores fundamentais do problema. A construção do potencial de Fock-Tani consiste em efetuar-se novamente o produto dos operadores transformados, de maneira conveniente a formar um potencial de interação de dois corpos. Um outro cálculo interessante consiste em superarmos o modelo microscópico não-relativístico apresentado nesta dissertação introduzindo-se um

modelo relativístico, mais consistente com os processos correspondentes a altas energias.

Apêndice A

Unidades, Notação, Convenções

(A) Unidades Naturais

No sistema internacional de unidades, a velocidade da luz,

$$c = 299792458 \text{ m/s} , \quad (\text{A.1})$$

e a constante de Planck,

$$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-31} \text{ kg m}^2/\text{s} , \quad (\text{A.2})$$

são iguais à unidade:

$$c = \hbar = 1 . \quad (\text{A.3})$$

A conversão entre unidades do sistema internacional (S. I.) e unidades do sistema natural (S. N.) é dada pela tabela A.1.

| quantidade física | unidade S.I. | unidade S.N. | fator de conversão S.I. \rightarrow S.N. |
|-------------------|-----------------------------------|-----------------|--------------------------------------------|
| distância | m | m | 1 |
| tempo | s | m | c |
| massa | g | m ⁻¹ | c/ \hbar |
| velocidade | m/s | adimensional | 1/c |
| momentum linear | kg·m/s | m ⁻¹ | 1000/ \hbar |
| momentum angular | kg·m ² /s | adimensional | 1000/ \hbar |
| energia | kg·m ² /s ² | m ⁻¹ | 1000/ $\hbar c$ |
| ação | kg·m ² /s | adimensional | 1000/ \hbar |

Tab. A.1: *Unidades dos sistemas internacional e natural*

Em particular, um resultado útil é

$$1 \text{ fm}^{-1} = 197.327052 \text{ MeV} . \quad (\text{A.4})$$

(B) Métrica

Neste trabalho foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell para a métrica. O quadri-vetor contravariante é

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) , \quad (\text{A.5})$$

e o vetor covariante correspondente é

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) , \quad (\text{A.6})$$

onde o tensor métrico é definido por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.7})$$

Usamos a convenção de que índices latinos (i, j, k, \dots) assumem os valores 1,2,3 e índices gregos assumem os valores 0,1,2,3. Na equação (A.6) e em todo este trabalho, a repetição de índices gregos indica soma implícita.

O produto escalar entre dois quadri-vetores é denotado por

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} . \quad (\text{A.8})$$

As derivadas parciais são definidas de acordo com

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) . \quad (\text{A.9})$$

Usamos a convenção de que a derivada $\partial_\mu A B$ atua somente em A , enquanto que $\partial_\mu(A B)$ atua sobre o produto $A B$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A B &= (\partial_\mu A) B \\ \partial_\mu(A B) &= (\partial_\mu A) B + A(\partial_\mu B) = \partial_\mu A B + A \partial_\mu B . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

O operador de momentum linear é

$$p^\mu = i \partial^\mu = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \vec{\nabla} \right) . \quad (\text{A.11})$$

(C) Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli obedecem a lei de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.12})$$

e a lei de anti-comutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2I \delta_{ij}, \quad (\text{A.13})$$

onde I é a matriz identidade 2×2 , δ_{ij} é o símbolo de Kronecker e ϵ_{ijk} é o símbolo totalmente anti-simétrico. Uma relação útil envolvendo operadores \vec{A} e \vec{B} que comutam com as matrizes de Pauli, mas não necessariamente um com o outro, é

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (\text{A.14})$$

A representação padrão para as matrizes de Pauli é

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

No espaço de isospin, as mesmas matrizes são denotadas por $\vec{\tau}$.

(D) Matrizes de Dirac

Neste trabalho foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell para as matrizes de Dirac. A propriedade fundamental destas matrizes é a lei de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.16})$$

As matrizes α_i e β são definidas por

$$\gamma_i = \beta \alpha_i \quad \gamma^0 = \gamma_0 = \beta. \quad (\text{A.17})$$

A matriz γ_5 é definida por

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.18})$$

Note-se que 5 não é um índice tensorial. A representação padrão para γ^μ é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Nesta representação, a matriz adjunta hermitiana de γ^μ é

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\text{A.20})$$

e a matriz γ_5 é:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

(E) Parte Angular dos Espinores de Dirac

A parte angular dos espinores de Dirac é dada por (ver Capítulos 1 e 2)

$$\mathcal{Y}_{jl}^{m_j}(\hat{r}) = (l \frac{1}{2} m_j - \frac{1}{2} \frac{1}{2} | j m_j) Y_l^{m_j - \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (l \frac{1}{2} m_j + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | j m_j) Y_l^{m_j + \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

onde as funções $Y_l^m(\hat{r})$ são harmônicos esféricos e $(j_1 j_2 m_1 m_2 | J M)$ são coeficientes de Clebsch-Gordon. Para momentum angular total $j = 1/2$ e projeção $m_j = 1/2$, temos

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) = Y_0^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}}(\hat{r}) = -\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sin(\theta) e^{i\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Para projeção $m_j = -1/2$, temos

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}0}^{-\frac{1}{2}}(\hat{r}) = Y_0^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}1}^{-\frac{1}{2}}(\hat{r}) = +\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^{-1}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sin(\theta) e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Apêndice B

Método de Segunda Quantização

A função de onda de partícula única definida no espaço de Fock, espaço vetorial associado aos estados quantizados de um sistema de muitos corpos, é caracterizada por determinar:

- os estados de partícula única $|\alpha\rangle$ possíveis do sistema;
- o conjunto de números de ocupação destes estados.

A suposição básica do método da segunda quantização é que, qualquer conjunto completo de variáveis dinâmicas, κ , que descreve o comportamento de uma partícula isolada, pode ser empregada para descrever o comportamento de n partículas do mesmo tipo. Portanto, mesmo na presença de interações, no “sistema composto”, as propriedades individuais das partículas são mantidas. Podemos escrever:

$$H_0 |\beta\rangle = \epsilon_\beta |\beta\rangle \quad (\text{B.1})$$

onde H_0 representa o Hamiltoniano de partícula livre confinada em uma caixa (ou pode representar também o Hamiltoniano que contém um potencial central, com dependência de spin, isospin, entre outros), ou seja, o formalismo a ser desenvolvido é independente da natureza de H_0 e $|\beta\rangle$ representa o conjunto completo de estados ortogonais do sistema.

Utilizando-se o exemplo dos férmions, temos o espaço vetorial linear formado por “kets”:

$$|\beta_1 \dots \beta_N\rangle, \quad (\text{B.2})$$

e o espaço vetorial dual formado por “bras”:

$$\langle\beta_1 \dots \beta_N| . \quad (\text{B.3})$$

Logo o produto escalar entre eles, ou seja, a condição de ortogonalidade é escrita como:

$$\langle\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N | \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_N\rangle = \delta_{\beta_1 \alpha_1 \dots \beta_N \alpha_N} \quad (\text{B.4})$$

B.1 Operadores Criação e Destruição

Os operadores criação e destruição são operadores que conectam, no espaço de Fock, diferentes estados vetoriais.

Operador Criação: $\mathcal{A}_\alpha^\dagger$

Seja um estado de n-partículas no espaço de Fock:

$$|\beta_1 \dots \beta_N\rangle; \quad (\text{B.5})$$

podemos definir o operador criação $\mathcal{A}_\alpha^\dagger$ como:

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger \equiv \sum_{\beta_1 \dots \beta_N} |\alpha, \beta_1 \dots \beta_N\rangle \langle \beta_1 \dots \beta_N|; \quad (\text{B.6})$$

desta expressão podemos obter que

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger |\beta_1 \dots \beta_N\rangle = \sum_{\beta'_1 \dots \beta'_N} |\alpha, \beta'_1 \dots \beta'_N\rangle \langle \beta'_1 \dots \beta'_N | \beta_1 \dots \beta_N\rangle \quad (\text{B.7})$$

ou

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger |\beta_1 \dots \beta_N\rangle = \sum_{\beta'_1 \dots \beta'_N} |\alpha, \beta'_1 \dots \beta'_N\rangle \delta_{\beta'_1 \beta_1} \dots \delta_{\beta'_N \beta_N}. \quad (\text{B.8})$$

E finalmente obtemos desta operação um estado com $n + 1$ partículas,

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger |\beta_1 \dots \beta_N\rangle = |\alpha, \beta_1 \dots \beta_N\rangle. \quad (\text{B.9})$$

Operador Aniquilação ou Destruição: \mathcal{A}_β

Seja um estado de n-partículas no espaço de Fock:

$$|\beta_1 \dots \beta_N\rangle; \quad (\text{B.10})$$

podemos definir o operador aniquilação \mathcal{A}_{β_1} como:

$$\mathcal{A}_{\beta_1} \equiv \sum_{\beta_2 \dots \beta_N} |\beta_2 \dots \beta_N\rangle \langle \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N|; \quad (\text{B.11})$$

desta expressão podemos obter que

$$\mathcal{A}_{\beta_1} |\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N\rangle = \sum_{\beta'_2 \dots \beta'_N} |\beta'_2 \dots \beta'_N\rangle \langle \beta'_1 \dots \beta'_N | \beta_1 \dots \beta_N\rangle \quad (\text{B.12})$$

ou ainda

$$\mathcal{A}_{\beta_1} |\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N\rangle = \sum_{\beta'_2 \dots \beta'_N} |\beta'_2 \dots \beta'_N\rangle \delta_{\beta'_1 \beta_1} \dots \delta_{\beta'_N \beta_N}. \quad (\text{B.13})$$

E finalmente obtemos desta operação um estado com $n - 1$ partículas,

$$\mathcal{A}_{\beta} |\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N\rangle = |\beta_2 \dots \beta_N\rangle. \quad (\text{B.14})$$

A condição de completicidade ou completude pode ser escrita como:

$$\sum_{\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N} |\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N\rangle \langle \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N| = 1. \quad (\text{B.15})$$

Operadores Criação e Aniquilação para Férmions

Para o caso dos férmions as funções de onda são antissimétricas, ou seja,

$$\Psi_{klm\dots} = -\Psi_{lkm\dots} \quad (\text{B.16})$$

Analogamente também podemos escrever,

$$|\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N\rangle = -|\beta_2, \beta_1 \dots \beta_N\rangle. \quad (\text{B.17})$$

Uma vez que:

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_N\rangle = \mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger |\beta_3 \dots \beta_N\rangle \quad (\text{B.18})$$

e que

$$|\beta_2, \beta_1, \beta_3 \dots \beta_N\rangle = \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger |\beta_3 \dots \beta_N\rangle, \quad (\text{B.19})$$

substituindo as expressões (B.18) e (B.19) em (B.17), podemos escrever

$$\mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger |\beta_3 \dots \beta_N\rangle = -\mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger |\beta_3 \dots \beta_N\rangle. \quad (\text{B.20})$$

Desta expressão temos

$$(\mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger + \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger) |\beta_3 \dots \beta_N\rangle = 0. \quad (\text{B.21})$$

Portanto concluímos que os operadores em segunda quantização de criação de férmions obedecem a relação de anticomutação

$$\mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger + \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger \mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger = \{\mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger, \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger\} = 0. \quad (\text{B.22})$$

A partir desta expressão podemos escrever

$$\{\mathcal{A}_{\beta_1}^\dagger, \mathcal{A}_{\beta_2}^\dagger\} = \{\mathcal{A}_{\beta_2}, \mathcal{A}_{\beta_1}\}^\dagger = 0^\dagger = 0. \quad (\text{B.23})$$

Logo, similarmente ao caso anterior temos, para os operadores de aniquilação

$$\{\mathcal{A}_{\beta_2}, \mathcal{A}_{\beta_1}\} = 0. \quad (\text{B.24})$$

Utilizando as expressões (B.22) e (B.24), se $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, temos

$$\mathcal{A}_\beta^2 = \mathcal{A}_\beta^{\dagger 2} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Este resultado demonstra a incorporação, nestes operadores, do princípio de Pauli.

Ademais, podemos escrever que,

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = | \alpha, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle \quad \forall \quad \alpha \neq \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N ; \quad (\text{B.26})$$

então

$$\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\alpha^\dagger | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = \mathcal{A}_\alpha | \alpha, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle. \quad (\text{B.27})$$

Similarmente,

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger \mathcal{A}_\alpha | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = 0 \quad \forall \quad \alpha \neq \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N. \quad (\text{B.28})$$

Somando-se as expressões (B.27) e (B.28) vamos obter

$$(\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\alpha^\dagger + \mathcal{A}_\alpha^\dagger \mathcal{A}_\alpha) | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle, \quad (\text{B.29})$$

ou seja,

$$\{\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha^\dagger\} = 1. \quad (\text{B.30})$$

Por outro lado, se $\alpha \neq \gamma$ e se γ for igual a um dos números quânticos $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N$ vamos obter

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger \mathcal{A}_\gamma | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = -\mathcal{A}_\gamma \mathcal{A}_\alpha^\dagger | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle \quad (\text{B.31})$$

de modo que

$$\{\mathcal{A}_\alpha^\dagger, \mathcal{A}_\gamma\} = 0. \quad (\text{B.32})$$

Se α e γ forem diferentes dos números quânticos $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_N$ temos

$$\mathcal{A}_\alpha^\dagger \mathcal{A}_\gamma | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = 0 \quad (\text{B.33})$$

e

$$\mathcal{A}_\gamma \mathcal{A}_\alpha^\dagger | \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N \rangle = 0. \quad (\text{B.34})$$

Logo podemos escrever,

$$\{\mathcal{A}_\alpha^\dagger, \mathcal{A}_\gamma\} = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (\text{B.35})$$

Apêndice C

Cálculo de Comutadores

Neste apêndice vamos apresentar, em detalhes, os cálculos de comutadores que são utilizados no decorrer deste trabalho. Como foi definido em (3.2) o operador de criação de um *glueball* no espaço físico é dado por

$$G_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger a_\nu^\dagger. \quad (\text{C.1})$$

Esta definição, em segunda quantização permite calcular vários comutadores importantes para esta dissertação.

C.1 Cálculo de $[G_\alpha, G_\beta]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[G_\alpha, G_\beta]$, que é realizado a partir da Eq. (C.1); logo podemos escrever:

$$[G_\alpha, G_\beta] = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\gamma\rho} [a_\mu a_\nu, a_\gamma a_\rho]. \quad (\text{C.2})$$

Se utilizarmos a propriedade

$$\begin{aligned} [AB, CD] &= A[B, CD] + [A, CD]B \\ &= AC[B, D] + A[B, C]D + C[A, D]B + [A, C]DB, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

podemos escrever:

$$[G_\alpha, G_\beta] = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\gamma\rho} (a_\mu [a_\nu, a_\gamma] a_\rho + a_\mu a_\gamma [a_\nu, a_\rho] + a_\gamma [a_\mu, a_\rho] a_\nu + [a_\mu, a_\gamma] a_\rho a_\nu). \quad (\text{C.4})$$

Mas o comutador abaixo é dado por

$$[a_\mu, a_\nu] = 0. \quad (\text{C.5})$$

Portanto, o resultado do comutador (C.4) é:

$$[G_\alpha, G_\beta] = 0. \quad (\text{C.6})$$

C.2 Cálculo de $[G_\alpha, G_\beta^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[G_\alpha, G_\beta^\dagger]$, que é realizado a partir da Eq. (C.1),

$$[G_\alpha, G_\beta^\dagger] = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\gamma\rho} [a_\mu a_\nu, a_\gamma^\dagger a_\rho^\dagger]. \quad (\text{C.7})$$

Com a propriedade de comutadores da Eq. (C.3) temos

$$[G_\alpha, G_\beta^\dagger] = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\gamma\rho} (a_\mu [a_\nu, a_\gamma^\dagger] a_\rho^\dagger + a_\mu a_\gamma^\dagger [a_\nu, a_\rho^\dagger] + a_\gamma^\dagger [a_\mu, a_\rho^\dagger] a_\nu + [a_\mu, a_\gamma^\dagger] a_\rho^\dagger a_\nu). \quad (\text{C.8})$$

Mas uma vez que:

$$[a_\mu, a_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu}, \quad (\text{C.9})$$

então utilizando a definição da Eq. (C.9) em (C.8) obtemos

$$[G_\alpha, G_\beta^\dagger] = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\gamma\rho} (\delta_{\nu\gamma} a_\mu a_\rho^\dagger + \delta_{\nu\rho} a_\mu a_\gamma^\dagger + \delta_{\mu\rho} a_\gamma^\dagger a_\nu + \delta_{\mu\gamma} a_\rho^\dagger a_\nu). \quad (\text{C.10})$$

Colocando os operadores em ordenamento normal encontramos

$$\begin{aligned} [G_\alpha, G_\beta^\dagger] &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\gamma\rho} \Phi_\beta^{\gamma\rho} + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger a_\mu \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\gamma\nu} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger a_\nu + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\rho} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\gamma^\dagger a_\mu + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\gamma^\dagger a_\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Com o auxílio da propriedade:

$$\Phi_\alpha^{*\gamma\rho} = \Phi_\alpha^{*\rho\gamma}, \quad (\text{C.12})$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} [G_\alpha, G_\beta^\dagger] &= \Phi_\alpha^{*\rho\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger a_\mu + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\gamma\nu} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger a_\nu \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\rho} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\gamma^\dagger a_\mu + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\gamma^\dagger a_\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Acertando os índices de modo conveniente para podermos somar alguns termos, vamos obter

$$[G_\alpha, G_\beta^\dagger] = \Phi_\alpha^{*\rho\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} + 2\Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger a_\mu, \quad (\text{C.14})$$

onde

$$\Phi_\alpha^{*\rho\gamma} \Phi_\beta^{\rho\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{C.15})$$

e

$$2\Phi_\alpha^{*\mu\gamma} \Phi_\beta^{\gamma\rho} a_\rho^\dagger a_\mu = \Delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{C.16})$$

Vemos que (C.14) não satisfaz as relações canônicas de comutação, devido à presença do termo $\Delta_{\alpha\beta}$.

C.3 Cálculo de $[a_{\mu'}, G_{\alpha}^{\dagger}]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[a_{\mu'}, G_{\alpha}^{\dagger}]$, que é realizado a partir da Eq. (C.1). Podemos escrever

$$[a_{\mu'}, G_{\alpha}^{\dagger}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} [a_{\mu'}, a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger}]. \quad (\text{C.17})$$

Utilizando a propriedade

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \quad (\text{C.18})$$

obtemos

$$[a_{\mu'}, G_{\alpha}^{\dagger}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} ([a_{\mu'}, a_{\mu}^{\dagger}] a_{\nu}^{\dagger} + a_{\mu}^{\dagger} [a_{\mu'}, a_{\nu}^{\dagger}]). \quad (\text{C.19})$$

Mas se observarmos a definição dada pela Eq. (C.9) e substituirmos em (C.19), temos

$$\begin{aligned} [a_{\mu'}, G_{\alpha}^{\dagger}] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha}^{\mu\nu} (\delta_{\mu'\mu} a_{\nu}^{\dagger} + a_{\mu}^{\dagger} \delta_{\mu'\nu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} a_{\nu}^{\dagger} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha}^{\mu\mu'} a_{\mu}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Manipulando-se os índices convenientemente para que possamos somar os termos, vamos obter

$$[a_{\mu'}, G_{\alpha}^{\dagger}] = \sqrt{2} \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} a_{\nu}^{\dagger}. \quad (\text{C.21})$$

C.4 Cálculo de $[a_{\mu'}, G_{\alpha}]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[a_{\mu'}, G_{\alpha}]$, que é realizado a partir da Eq. (C.1) assim temos

$$[a_{\mu'}, G_{\alpha}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} [a_{\mu'}, a_{\mu} a_{\nu}]. \quad (\text{C.22})$$

Utilizando a propriedade (C.18) resulta

$$[a_{\mu'}, G_{\alpha}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} [a_{\mu'}, a_{\mu}] a_{\nu} + a_{\mu} [a_{\mu'}, a_{\nu}]. \quad (\text{C.23})$$

Mas se observarmos a definição dada por

$$[a_{\mu}, a_{\nu}] = 0, \quad (\text{C.24})$$

então a solução buscada fica

$$[a_{\mu'}, G_{\alpha}] = 0. \quad (\text{C.25})$$

C.5 Cálculo de $[\Delta_{\gamma\beta}, G_\alpha^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[\Delta_{\gamma\beta}, G_\alpha^\dagger]$. Este cálculo é realizado a partir das Eq. (C.1) e (C.16). Escrevemos assim

$$[\Delta_{\gamma\beta}, G_\alpha^\dagger] = \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\tau\nu}[a_\rho^\dagger a_\mu, a_\tau^\dagger a_\nu^\dagger]. \quad (\text{C.26})$$

Com a propriedade (C.18), podemos escrever,

$$[\Delta_{\gamma\beta}, G_\alpha^\dagger] = \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\tau\nu}(a_\rho^\dagger[a_\mu, a_\tau^\dagger a_\nu^\dagger] + [a_\rho^\dagger, a_\tau^\dagger a_\nu^\dagger]a_\mu). \quad (\text{C.27})$$

O segundo termo desta expressão é nulo, pois todos os operadores nela contidos são de criação e $[a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger] = 0$. Utilizando novamente a propriedade (C.18), temos

$$\begin{aligned} [\Delta_{\gamma\beta}, G_\alpha^\dagger] &= \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\tau\nu}(a_\rho^\dagger[a_\mu, a_\tau^\dagger]a_\nu^\dagger + a_\rho^\dagger a_\tau^\dagger[a_\mu, a_\nu^\dagger]) \\ &= \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\tau\nu}a_\rho^\dagger a_\nu^\dagger \delta_{\mu\tau} + \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\tau\nu}a_\rho^\dagger a_\tau^\dagger \delta_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\mu\nu}a_\rho^\dagger a_\nu^\dagger + \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\tau\mu}a_\rho^\dagger a_\tau^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os dois termos acima e obter,

$$[\Delta_{\gamma\beta}, G_\alpha^\dagger] = 2\sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\sigma}\Phi_\beta^{\sigma\rho}\Phi_\gamma^{\mu\nu}a_\rho^\dagger a_\nu^\dagger. \quad (\text{C.29})$$

C.6 Cálculo de $[a_{\mu'}, \Delta_{\alpha\beta}]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[a_{\mu'}, \Delta_{\alpha\beta}]$, que é realizado a partir da Eq. (C.16). Desta expressão resulta

$$[a_{\mu'}, \Delta_{\alpha\beta}] = 2\Phi_\alpha^{*\mu'\gamma}\Phi_\beta^{\gamma\rho}[a_\mu, a_\rho^\dagger a_{\mu'}]. \quad (\text{C.30})$$

Com a propriedade (C.18) temos

$$[a_{\mu'}, \Delta_{\alpha\beta}] = 2\Phi_\alpha^{*\mu'\gamma}\Phi_\beta^{\gamma\rho}([a_\mu, a_\rho^\dagger]a_{\mu'} + a_\rho^\dagger[a_\mu, a_{\mu'}]). \quad (\text{C.31})$$

Utilizando as Eq. (C.5) e (C.9) obtemos

$$[a_{\mu'}, \Delta_{\alpha\beta}] = 2\Phi_\alpha^{*\mu'\gamma}\Phi_\beta^{\gamma\mu}a_{\mu'}. \quad (\text{C.32})$$

C.7 Cálculo de $[G_\alpha, \Delta_{\rho\gamma}]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de $[a_{\mu'}, \Delta_{\gamma\beta}]$, que é realizado a partir das Eq. (C.1) e (C.16). Desta feita escrevemos

$$[G_\alpha, \Delta_{\rho\gamma}] = \frac{2}{\sqrt{2}}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\rho^{*\mu'\gamma'}\Phi_\gamma^{\gamma'\rho'}[a_\mu a_\nu, a_\rho^\dagger, a_{\mu'}]. \quad (\text{C.33})$$

Com o auxílio da propriedade (C.3) temos

$$\begin{aligned}
 [G_\alpha, \Delta_{\rho\gamma}] &= \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\rho^{*\mu'\gamma'}\Phi_\gamma^{\gamma'\rho'}(a_\mu[a_\nu, a_{\rho'}^\dagger]a_{\mu'} + [a_\mu, a_{\rho'}^\dagger]a_\nu a_{\mu'}) \\
 &+ a_{\rho'}^\dagger a_\mu [a_\nu, a_{\mu'}] + a_{\rho'}^\dagger [a_\mu, a_{\mu'}] a_\nu.
 \end{aligned}
 \tag{C.34}$$

Utilizando as Eq. (C.5) e (C.9) obtemos

$$\begin{aligned}
 [G_\alpha, \Delta_{\rho\gamma}] &= \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\rho^{*\mu'\gamma'}\Phi_\gamma^{\gamma'\rho'}(a_\mu a_{\mu'} \delta_{\nu\rho'} + a_\nu a_{\mu'} \delta_{\mu\rho'}) \\
 &= \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\rho'}\Phi_\rho^{*\mu'\gamma'}\Phi_\gamma^{\gamma'\rho'} a_\mu a_{\mu'} + \sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\rho'\nu}\Phi_\rho^{*\mu'\gamma'}\Phi_\gamma^{\gamma'\rho'} a_\nu a_{\mu'}.
 \end{aligned}
 \tag{C.35}$$

Se alterarmos os índices finalmente resulta a expressão

$$[G_\alpha, \Delta_{\rho\gamma}] = 2\sqrt{2}\Phi_\alpha^{*\mu\rho'}\Phi_\rho^{*\mu'\gamma'}\Phi_\gamma^{\gamma'\rho'} a_\mu a_{\mu'}.
 \tag{C.36}$$

Apêndice D

Função de Onda

D.1 Função de Onda do Méson

No formalismo de Fock-Tani, consideramos os estados de méson em segunda quantização, dados por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle, \quad (\text{D.1})$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do méson, normalizada na forma

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{D.2})$$

Assim, considerando os graus de liberdade *spin*, S , sabor, F , cor, C , e espacial, P , conforme descrito anteriormente, este estado pode ser escrito na forma

$$|\alpha\rangle = |S_\alpha, M_\alpha^s\rangle \otimes |F_\alpha, M_\alpha^f\rangle \otimes |C_\alpha\rangle \otimes |\vec{P}_\alpha\rangle. \quad (\text{D.3})$$

de modo que a função de onda do méson é dada por

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2} \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2} \mathcal{C}_{C_\alpha}^{c_1 c_2} \Phi_{\vec{P}_\alpha}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2}. \quad (\text{D.4})$$

As funções de onda para cada grau de liberdade são normalizadas separadamente:

$$\langle S_\alpha, M_\alpha^s | S_\beta, M_\beta^s \rangle = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{*s_1 s_2} \chi_{S_\beta, M_\beta^s}^{s_1 s_2} = \delta_{S_\alpha, S_\beta} \delta_{M_\alpha^s, M_\beta^s}; \quad (\text{D.5})$$

$$\langle F_\alpha, M_\alpha^f | F_\beta, M_\beta^f \rangle = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{*f_1 f_2} \mathcal{F}_{F_\beta, M_\beta^f}^{f_1 f_2} = \delta_{F_\alpha, F_\beta} \delta_{M_\alpha^f, M_\beta^f}; \quad (\text{D.6})$$

$$\langle C_\alpha | C_\beta \rangle = \mathcal{C}_{C_\alpha}^{*c_1 c_2} \mathcal{C}_{C_\beta}^{c_1 c_2} = \delta_{C_\alpha, C_\beta}; \quad (\text{D.7})$$

$$\langle \vec{P}_\alpha | \vec{P}_\beta \rangle = \int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi_{\vec{P}_\alpha}^{*\vec{p}_1 \vec{p}_2} \Phi_{\vec{P}_\beta}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2} = \delta^{(3)}(\vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta). \quad (\text{D.8})$$

As funções de onda de *spin*, $\chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes aos estados de *spin* do méson:

$$|S_\alpha, M_\alpha^s\rangle = \chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2} q_{s_1}^\dagger \bar{q}_{s_2}^\dagger |0\rangle, \quad (\text{D.9})$$

onde S_α é o *spin* total e M_α^s é a projeção de *spin* do méson e s_1, s_2 são as projeções de *spin* do *quark* e do *antiquark* ($\uparrow \equiv +\frac{1}{2}; \downarrow \equiv -\frac{1}{2}$). O estado singlete de *spin* ($S_\alpha = 0; M_\alpha^s = 0$) é dado por:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (\text{D.10})$$

Assim,

$$\chi_{0,0}^{\uparrow\downarrow} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.11})$$

$$\chi_{0,0}^{\downarrow\uparrow} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{D.12})$$

Os estados tripleto de *spin* ($S = 1; M_s = -1, 0, +1$) são representados por:

$$|1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad (\text{D.13})$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\text{D.14})$$

$$|1, +1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle. \quad (\text{D.15})$$

Desta forma

$$\chi_{1,-1}^{\downarrow\downarrow} = 1 \quad (\text{D.16})$$

$$\chi_{1,0}^{\uparrow\downarrow} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.17})$$

$$\chi_{1,0}^{\downarrow\uparrow} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.18})$$

$$\chi_{1,+1}^{\uparrow\uparrow} = 1. \quad (\text{D.19})$$

As funções de onda de sabor, $\mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes aos estados de sabor do méson:

$$|F_\alpha, M_\alpha^f\rangle = \mathcal{F}_{F_\alpha, M_\alpha^f}^{f_1 f_2} q_{f_1}^\dagger \bar{q}_{f_2}^\dagger |0\rangle, \quad (\text{D.20})$$

onde F_α é o isospin e M_α^f é a projeção de isospin do méson, f_1 e f_2 são as projeções de isospin do *quark* e *antiquark*. Consideremos, por exemplo, o méson π :

$$|\pi^+\rangle \equiv |1, +1\rangle = -|u\bar{d}\rangle \quad (\text{D.21})$$

$$|\pi^-\rangle \equiv |1, -1\rangle = |d\bar{u}\rangle \quad (\text{D.22})$$

$$|\pi^0\rangle \equiv |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle). \quad (\text{D.23})$$

Deste modo temos

$$\mathcal{F}_{1,+1}^{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = -1 \quad (\text{D.24})$$

$$\mathcal{F}_{1,-1}^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = +1 \quad (\text{D.25})$$

$$\mathcal{F}_{1,0}^{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.26})$$

$$\mathcal{F}_{1,0}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{D.27})$$

No estudo que realizamos nesta dissertação, estamos interessados em comparar a seção de choque do espalhamento *glueball-glueball* com a do espalhamento méson-méson, onde o méson deve ter os mesmos números quânticos que o *glueball*, ou seja, deve ter isospin zero. No modelo de *quarks* que consideramos, com isospin total igual a zero, o estado que representa o méson é formado por um par $s\bar{s}$,

$$|s\bar{s}\rangle = |0, 0\rangle \quad (\text{D.28})$$

onde

$$\mathcal{F}_{0,0}^{0,0} = +1. \quad (\text{D.29})$$

As funções de onda de cor, $\mathcal{C}_{C_\alpha}^{c_1 c_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes ao estado singleto de cor do méson,

$$\begin{aligned} |C_\alpha\rangle &= \mathcal{C}_0^{c_1 c_2} q_{c_1}^\dagger \bar{q}_{c_2}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle \right). \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Assim,

$$\mathcal{C}_0^{c_1 c_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{c_1 c_2}. \quad (\text{D.31})$$

Para as funções de onda espaciais utilizamos um “ansatz” gaussiano descrito a seguir. Consideremos que, no espaço de coordenadas, a função de onda espacial pode ser escrita como o produto de uma onda plana de momento \mathbf{P}_α no c.m. e uma função de onda relativa *quark-antiquark*:

$$\Psi_{\vec{P}_\alpha}^{\vec{r}_i \vec{r}_j} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{P}_\alpha \cdot \vec{R}} \varphi(\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (\text{D.32})$$

Utilizamos um “ansatz” gaussiano para $\varphi(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, resulta então

$$\varphi(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = N e^{-\frac{b^2}{2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2}, \quad (\text{D.33})$$

onde b é o parâmetro da gaussiana e N é um fator de normalização. Impondo que a função de onda relativa seja normalizada à unidade,

$$\int d^3r |\varphi(\vec{r})|^2 = 1, \quad (\text{D.34})$$

obtemos o fator de normalização N :

$$N = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}. \quad (\text{D.35})$$

Assim

$$\varphi(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{b^2}{2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2}. \quad (\text{D.36})$$

A função de onda espacial no espaço de momentum linear é dada pela transformada de Fourier de $\Psi_{\vec{P}_\alpha}^{\vec{r}_i \vec{r}_j}$:

$$\Phi_{\vec{P}_\alpha}^{\vec{p}_i \vec{p}_j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r_i d^3r_j e^{-i\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i} e^{-i\vec{p}_j \cdot \vec{r}_j} \Psi_{\vec{P}_\alpha}^{\vec{r}_i \vec{r}_j}. \quad (\text{D.37})$$

Dessa forma, a função de onda no espaço de momentum linear é dada pelo produto de uma delta de conservação de momentum linear e uma função de onda gaussiana do momentum linear relativo:

$$\Phi_{\vec{P}_\alpha}^{\vec{p}_i \vec{p}_j} = \delta^{(3)}(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_i - \vec{p}_j) \varphi(\vec{p}_i - \vec{p}_j), \quad (\text{D.38})$$

onde

$$\varphi(\vec{p}_i - \vec{p}_j) = \left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{8b^2}(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2}. \quad (\text{D.39})$$

A normalização de $\varphi(\vec{r})$ à unidade implica na mesma normalização para $\varphi(\vec{p}_i - \vec{p}_j)$:

$$\int d^3p |\varphi(2\vec{p})|^2 = 1, \quad (\text{D.40})$$

onde $2\vec{p} = \vec{p}_i - \vec{p}_j$.

D.2 Função de Onda do Glueball

O cálculo da função de onda do *glueball* é semelhante ao do méson. No formalismo de Fock-Tani, utilizamos os estados de *glueball* em segunda quantização, dados por

$$|\alpha\rangle = G_\alpha^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_\alpha^{\mu\nu} a_\mu^\dagger a_\nu^\dagger |0\rangle, \quad (\text{D.41})$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ é a função de onda do *glueball*, normalizada na forma

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} . \quad (\text{D.42})$$

Assim, considerando os graus de liberdade *spin*, cor e espacial, conforme descrito anteriormente, esse estado pode ser escrito na forma

$$|\alpha\rangle = |S_\alpha, G_\alpha^s\rangle \otimes |C_\alpha\rangle \otimes |\vec{P}_\alpha\rangle , \quad (\text{D.43})$$

de modo que a função de onda do méson é dada por

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \chi_{S_\alpha, G_\alpha^s}^{s_1 s_2} \mathcal{C}_{C_\alpha}^{c_1 c_2} \Phi_{\vec{P}_\alpha}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2} . \quad (\text{D.44})$$

É importante notar que para o *glueball* não há uma contribuição de sabor para a função de onda. As funções de onda para cada grau de liberdade são normalizadas separadamente:

$$\langle S_\alpha, G_\alpha^s | S_\beta, G_\beta^s \rangle = \chi_{S_\alpha, G_\alpha^s}^{*s_1 s_2} \chi_{S_\beta, G_\beta^s}^{s_1 s_2} = \delta_{S_\alpha, S_\beta} \delta_{G_\alpha^s, G_\beta^s} ; \quad (\text{D.45})$$

$$\langle C_\alpha | C_\beta \rangle = \mathcal{C}_{C_\alpha}^{*c_1 c_2} \mathcal{C}_{C_\beta}^{c_1 c_2} = \delta_{C_\alpha, C_\beta} ; \quad (\text{D.46})$$

$$\langle \vec{P}_\alpha | \vec{P}_\beta \rangle = \int d^3 \vec{p}_1 d^3 p_2 \Phi_{\vec{P}_\alpha}^{*\vec{p}_1 \vec{p}_2} \Phi_{\vec{P}_\beta}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2} = \delta^{(3)}(\vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta) . \quad (\text{D.47})$$

As funções de onda de *spin*, $\chi_{S_\alpha, M_\alpha^s}^{s_1 s_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes aos estados de *spin* do *glueball*

$$|S_\alpha, G_\alpha^s\rangle = \chi_{S_\alpha, G_\alpha^s}^{s_1 s_2} a_{s_1}^\dagger a_{s_2}^\dagger |0\rangle , \quad (\text{D.48})$$

onde S_α é o *spin* total e G_α^s é a projeção de *spin* do *glueball* e s_1, s_2 são as projeções de *spin* dos *gluons*. Para o estado de *spin* $S_\alpha = 0$ e $G_\alpha^s = 0$ temos

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1 - 1\rangle - |00\rangle + |-11\rangle) . \quad (\text{D.49})$$

Desta forma temos

$$\chi_{0,0}^{1,-1} = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{D.50})$$

$$\chi_{0,0}^{0,0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{D.51})$$

$$\chi_{0,0}^{-1,1} = +\frac{1}{\sqrt{3}} . \quad (\text{D.52})$$

Para os estados de *spin* $S = 2$ e $G_\alpha^s = -2, -1, 0, +1, +2$ encontramos

$$|2, 2\rangle = |11\rangle \quad (\text{D.53})$$

$$|2, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle) \quad (\text{D.54})$$

$$|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |-11\rangle \quad (\text{D.55})$$

$$|2, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle) \quad (\text{D.56})$$

$$|2, -2\rangle = |-1-1\rangle. \quad (\text{D.57})$$

Deste modo

$$\begin{aligned} \chi_{2,2}^{1,1} &= 1 \\ \chi_{2,1}^{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \chi_{2,1}^{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \chi_{2,0}^{1,-1} &= \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \chi_{2,0}^{0,0} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \chi_{2,0}^{-1,1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \chi_{2,-1}^{0,-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \chi_{2,-1}^{-1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \chi_{2,-2}^{-1,-1} &= 1. \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

As funções de onda de cor, $\mathcal{C}_{C_\alpha}^{c_1 c_2}$, são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes ao estado singleto de cor do *glueball*,

$$\mathcal{C}_{cor}^{\mu,\nu} |0\rangle = \Psi_{cor}^{\mu,\nu} a_\mu^\dagger a_\nu^\dagger |0\rangle. \quad (\text{D.59})$$

Assim,

$$\Psi_{cor}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{8}} \delta^{\mu\nu}. \quad (\text{D.60})$$

Para as funções de onda espaciais utilizamos o mesmo “ansatz” gaussiano que foi utilizado para o méson, isto é, as equações (D.32)-(D.40).

Apêndice E

Potencial de Troca de um Glúon

Neste apêndice vamos calcular a transformada de Fourier para o potencial *gluon-gluon* para o *glueball* de dois *gluons* com $\vec{L} = 0$ (ver Eq.(1.79)). O potencial em função de r é dado por,

$$V_{aa}(r) = -f^{\mu\sigma\kappa} f^{\nu\rho\kappa} \frac{\lambda}{3} \left[\omega_1 \frac{e^{-mr}}{r} + \omega_2 \frac{\pi}{m^2} D(r) \right] + f^{\mu\sigma\kappa} f^{\nu\rho\kappa} \frac{2m}{3} (1 - e^{-\beta mr}) \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \vec{S}^2 \\ \omega_2 &= 1 - \frac{5}{6} \vec{S}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

e

$$D(r) = \frac{k^3 m^3}{\pi^{3/2}} e^{-k^2 m^2 r^2}. \quad (\text{E.3})$$

A transformada de Fourier é dada pela integral,

$$V_{aa}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} V_{2g}(r). \quad (\text{E.4})$$

Vamos calcular a transformada para cada termo do potencial (E.1) separadamente. Para o primeiro termo, obtemos

$$I_1(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (\text{E.5})$$

Passando à coordenadas esféricas, temos

$$d^3r = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi. \quad (\text{E.6})$$

A integral pode ser escrita na forma,

$$I_1(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr r^2 e^{-ipr \cos \theta} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (\text{E.7})$$

ou então como

$$I_1(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr r e^{-r(ip \cos \theta + m)}. \quad (\text{E.8})$$

Resolvendo as integrais acima vamos obter,

$$I_1(p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{(ip + m)(ip - m)} \right], \quad (\text{E.9})$$

ou simplificando esta expressão, obtemos

$$I_1(p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{m^2 + p^2} \right]. \quad (\text{E.10})$$

O cálculo da transformada de Fourier do segundo termo, do potencial (E.1) é o seguinte:

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} D(r) \\ &= \frac{k^3 m^3}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} e^{-k^2 m^2 r^2} \\ &= \frac{k^3 m^3}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r} - k^2 m^2 r^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

A solução desta integral é,

$$I_2(p) = \frac{k^3 m^3}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{k^2 m^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{4k^2 m^2}} \quad (\text{E.12})$$

$$I_2(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{4k^2 m^2}}. \quad (\text{E.13})$$

Para o terceiro termo do potencial (E.1), temos

$$I_3(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} 2m. \quad (\text{E.14})$$

A solução para esta integral é:

$$I_3(p) = \frac{2m}{(2\pi)^{3/2}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}); \quad (\text{E.15})$$

logo

$$I_3(p) = 2m \pi^{3/2} \delta^{(3)}(\vec{p}). \quad (\text{E.16})$$

Agora vamos calcular o quarto e último termo do potencial (E.1):

$$I_4(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} e^{-\beta mr} . \quad (\text{E.17})$$

Passando à coordenadas esféricas, esta expressão pode ser escrita na forma

$$I_4(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-ipr \cos \theta - \beta mr} \quad (\text{E.18})$$

ou então como

$$I_4(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-r(ip \cos \theta + m\beta)} . \quad (\text{E.19})$$

Resolvendo a integral em r , obtemos

$$I_4(p) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin \theta}{(ip \cos \theta + m\beta)^3} . \quad (\text{E.20})$$

Agora, resolvendo a integral em ϕ encontramos

$$I_4(p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin \theta}{(ip \cos \theta + m\beta)^3} . \quad (\text{E.21})$$

Neste ponto fazemos uma nova mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta \\ du &= -\sin \theta d\theta , \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

e obtemos

$$I_4(p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \frac{du}{(ipu + m\beta)^3} . \quad (\text{E.23})$$

Resolvendo esta integral, temos

$$I_4(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{4m\beta}{(ip + m\beta)^2(ip - m\beta)^2} \right] , \quad (\text{E.24})$$

ou ainda

$$I_4(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{4m\beta}{(p^2 + m^2\beta^2)^2} \right] . \quad (\text{E.25})$$

Juntando-se os termos calculados anteriormente podemos escrever o potencial no espaço de momentum linear na forma

$$\begin{aligned} V_{\text{aa}}(\vec{p}) &= -f^{\mu\sigma\kappa} f^{\nu\rho\kappa} \frac{\lambda}{3} \left[\omega_1 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p^2 + m^2} + \omega_2 \frac{\pi}{m^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{4k^2 m^2}} \right] \\ &+ f^{\mu\sigma\kappa} f^{\nu\rho\kappa} \left[(2\pi)^{3/2} 2m \delta^{(3)}(\vec{p}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{8\beta m^2}{(p^2 + \beta^2 m^2)^2} \right] , \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

onde na primeira linha temos a parte da troca de um glúon e na segunda linha a parte de confinamento.

Apêndice F

Representação do SU(3)

As matrizes fundamentais do SU(3), também chamadas de matrizes de Gell-Mann, λ^a , são as matrizes hermitianas de traço nulo 3×3 ,

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{F.1}$$

e que satisfazem a relação de comutação

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2},\tag{F.2}$$

onde f^{abc} é o tensor totalmente antissimétrico com membros não nulos dados por:

$$\begin{aligned}f^{123} &= 1, & f^{147} &= \frac{1}{2}, & f^{156} &= -\frac{1}{2}, \\ f^{246} &= \frac{1}{2}, & f^{257} &= \frac{1}{2}, & f^{345} &= \frac{1}{2}, \\ f^{367} &= -\frac{1}{2}, & f^{458} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & f^{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\tag{F.3}$$

Apêndice G

Variáveis de Mandelstam e a Aproximação Local do Potencial

Neste apêndice mostramos como obter um potencial local a partir de uma dependência geral nas variáveis dos quadri-momenta lineares iniciais (p_1, p_2) e finais (p_3, p_4) como mostra a Fig. G.1.

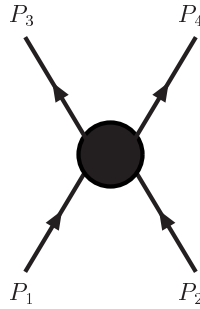


Fig. G.1: *Espalhamento genérico entre duas partículas relativísticas.*

Primeiro definimos as variáveis de Mandelstam em função dos quadri-vetores de momentum linear p_1, p_2, p_3 e p_4

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 ; \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 ; \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 . \end{aligned} \tag{G.1}$$

Vamos escrever as variáveis p_i no referencial de centro de massa do sistema, introduzindo as seguintes variáveis relativas

$$\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{p}'),$$

e

$$\vec{Q} = \vec{p} - \vec{p}', \quad (\text{G.2})$$

onde a variável \vec{Q} representa o momentum linear transferido. Desta forma a variável de Mandelstam s pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(M^2 + E_1 E_2) - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \\ &= 2(M^2 + E^2) + 2\vec{p}^2 \\ &= 4M^2 + 4\left(\vec{P} + \frac{1}{2}\vec{Q}\right)^2 \\ &= 4(M^2 + \vec{P}^2) + \vec{Q}^2 + 4\vec{P} \cdot \vec{Q}, \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

enquanto que a variável t de Mandelstam fica igual a

$$t = -\vec{Q}^2 \quad (\text{G.4})$$

de modo que

$$s + t + u = 4M^2 ; \quad (\text{G.5})$$

nesta expressão M é a massa do glueball. A parte espacial da matriz de espalhamento GG de Fock-Tani é dada por

$$\begin{aligned} T_1(\vec{p}, \vec{p}') &= 4\delta(0) \left\{ -\frac{\lambda}{3} \left[\omega_1^{(1)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m^2} + \omega_2^{(1)} \frac{\pi}{m^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{p} - \vec{p}')^2}{4k^2 m^2}\right) \right] \right. \\ &+ \left. (2\pi)^{3/2} 2m \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{8\beta m^2}{((\vec{p} - \vec{p}')^2 + \beta^2 m^2)^2} \right\} \exp\left[-\frac{(\vec{p} - \vec{p}')^2}{8b^2}\right] \\ &+ 4\delta(0) \left\{ -\frac{\lambda}{3} \left[\omega_1^{(1)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m^2} + \omega_2^{(1)} \frac{\pi}{m^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{p} - \vec{p}')^2}{4k^2 m^2}\right) \right] \right. \\ &+ \left. \frac{2m}{3} (2\pi)^{3/2} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') - \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{8\beta m^2}{((\vec{p} - \vec{p}')^2 + \beta^2 m^2)^2} \right\} \exp\left[-\frac{(\vec{p} + \vec{p}')^2}{8b^2}\right] \quad (\text{G.6}) \\ T_2(\vec{p}, \vec{p}') &= \frac{4\delta(0)}{(2\pi)^{3/2} b^3} \exp\left[-\frac{(p^2 + p'^2)}{4b^2}\right] \left\{ -\frac{\lambda}{3} \omega_1^{(2)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{(p - p')} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} \right. \\ &\times \left(\exp\left[-\frac{q^2}{2b^2} + \frac{q(p - p')}{2b^2}\right] - \exp\left[-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{q(p - p')}{2b^2}\right] \right) \\ &- \frac{\lambda}{3} \omega_2^{(2)} \frac{2\sqrt{2\pi} b^3 k^3 m}{(b^2 + 2k^2 m^2)^{3/2}} \exp\left[\frac{(p - p')^2 k^2 m^2}{4(b^4 + 2b^2 k^2 m^2)}\right] \\ &+ \frac{1}{3} (2\pi)^{3/2} 2m - \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{(p - p')} \int_0^\infty dq \frac{8q\beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\exp \left[-\frac{q^2}{2b^2} + \frac{q(p-p')}{2b^2} \right] - \exp \left[-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{q(p-p')}{2b^2} \right] \right) \Bigg\} \\
 & + \frac{4\delta(0)}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp \left[-\frac{(p^2+p'^2)}{4b^2} \right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(2)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{(p+p')} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2+m^2} \right. \\
 & \times \left(\exp \left[-\frac{q^2}{2b^2} + \frac{q(p+p')}{2b^2} \right] - \exp \left[-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{q(p+p')}{2b^2} \right] \right) \\
 & - \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(2)} \frac{2\sqrt{2}\pi b^3 k^3 m}{(b^2+2k^2m^2)^{3/2}} \exp \left[\frac{(p+p')^2 k^2 m^2}{4(b^4+2b^2k^2m^2)} \right] \\
 & + \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}2m - \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{(p+p')} \int_0^\infty dq \frac{8q\beta m^2}{(q^2+\beta^2m^2)^2} \\
 & \times \left(\exp \left[-\frac{q^2}{2b^2} + \frac{q(p+p')}{2b^2} \right] - \exp \left[-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{q(p+p')}{2b^2} \right] \right) \Bigg\} ; \tag{G.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3(\vec{p}, \vec{p}') & = \frac{4\delta(0)}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp \left[-\frac{(p^2+p'^2)}{4b^2} \right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(3)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{p'} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2+m^2} \right. \\
 & \times \left(\exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{qp'}{2b^2} \right] - \exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} - \frac{qp'}{2b^2} \right] \right) \\
 & - \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(3)} \frac{8\pi b^3 k^3 m}{(2b^2+3k^2m^2)^{3/2}} \exp \left[\frac{k^2m^2p'^2}{2(2b^4+3k^2b^2m^2)} \right] \\
 & + \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}2m - \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{p} \int_0^\infty dq \frac{8q\beta m^2}{(q^2+\beta^2m^2)^2} \\
 & \times \left(\exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{qp'}{2b^2} \right] - \exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} - \frac{qp'}{2b^2} \right] \right) \Bigg\} ; \tag{G.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_4(\vec{p}, \vec{p}') & = \frac{4\delta(0)}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp \left[-\frac{(p^2+p'^2)}{4b^2} \right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(4)} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{p} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2+m^2} \right. \\
 & \times \left(\exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{qp}{2b^2} \right] - \exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} - \frac{qp}{2b^2} \right] \right) \\
 & - \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(4)} \frac{8\pi b^3 k^3 m}{(2b^2+3k^2m^2)^{3/2}} \exp \left[\frac{k^2m^2p^2}{2(2b^4+3k^2b^2m^2)} \right] \\
 & + \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}2m - \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi b^2}{p} \int_0^\infty dq \frac{8q\beta m^2}{(q^2+\beta^2m^2)^2} \\
 & \times \left(\exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} + \frac{qp}{2b^2} \right] - \exp \left[-\frac{3q^2}{8b^2} - \frac{qp}{2b^2} \right] \right) \Bigg\} ; \tag{G.9}
 \end{aligned}$$

este potencial pode ser escrito em termos de (G.1) e tem a seguinte forma compacta

$$T(s, t) = \sum_{i=1}^4 C_i T(\vec{p}, \vec{p}', \omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}) . \tag{G.10}$$

Mas $\mathcal{C}_1 = 0$, $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_4$, $\omega_1^{(3)} = \omega_1^{(4)}$ e $\omega_2^{(3)} = \omega_2^{(4)}$, portanto, de (G.10), temos

$$\begin{aligned}
 T(s, t) &= \frac{4\delta(0)\mathcal{C}_2}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{s}{4} - M_G^2\right)\right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(2)} 4\sqrt{2\pi} \right. \\
 &\times \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{t}}{2b^2}\right) \\
 &- \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(2)} \frac{2\sqrt{2}\pi b^3 k^3 m}{(b^2 + 2k^2 m^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{tk^2 m^2}{4(b^4 + 2b^2 k^2 m^2)}\right] \\
 &+ \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2} 2m - \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{8q^2 \beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{t}}{2b^2}\right) \left. \right\} \\
 &+ \frac{4\delta(0)\mathcal{C}_2}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{s}{4} - M_G^2\right)\right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(2)} 4\sqrt{2\pi} \right. \\
 &\times \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{u}}{2b^2}\right) \\
 &- \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(2)} \frac{2\sqrt{2}\pi b^3 k^3 m}{(b^2 + 2k^2 m^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{uk^2 m^2}{4(b^4 + 2b^2 k^2 m^2)}\right] \\
 &+ \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2} 2m - \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{8q^2 \beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{u}}{2b^2}\right) \left. \right\} \\
 &+ \frac{8\delta(0)\mathcal{C}_3}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{s}{4} - M_G^2\right)\right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(3)} \frac{8\sqrt{2\pi} b^2}{\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}} \right. \\
 &\times \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} \exp\left(-\frac{3q^2}{8b^2}\right) \sinh\left(\frac{q}{2b^2}\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}\right) \\
 &- \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(3)} \frac{8\pi b^3 k^3 m}{(2b^2 + 3k^2 m^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{k^2 m^2 \left(\frac{s}{4} - M_G^2\right)}{2(2b^4 + 3b^2 k^2 m^2)}\right] \\
 &+ \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2} 2m - \frac{8\sqrt{2\pi} b^2}{3\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}} \int_0^\infty dq \frac{8q\beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \exp\left(\frac{3q^2}{8b^2}\right) \\
 &\times \sinh\left(\frac{q}{2b^2}\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}\right) \left. \right\}. \tag{G.11}
 \end{aligned}$$

Agora, podemos obter a amplitude de espalhamento h_{fi} a partir da matriz- T , utilizando a expressão abaixo

$$T(s, t) = \delta(0) h_{fi}(s, t). \tag{G.12}$$

Realizar a aproximação local significa eliminar a dependência em \vec{P} do potencial, restando apenas a variável local \vec{Q}

$$\vec{P} \approx 0, \tag{G.13}$$

que é equivalente a fazer as seguintes substituições das variáveis de Mandelstam

$$s \longrightarrow 4M_G^2 + \vec{Q}^2,$$

$$t \longrightarrow -\vec{Q}^2. \quad (\text{G.14})$$

Como consequência das substituições (G.14) é fácil mostrar que

$$u = 0. \quad (\text{G.15})$$

Logo a amplitude de espalhamento pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} h_{fi}(\vec{Q}) &= \frac{4\mathcal{C}_2}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{\vec{Q}^2}{4}\right)\right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(2)}4\sqrt{2\pi} \right. \\ &\times \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2+m^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \sinh\left(\frac{q\vec{Q}}{2b^2}\right) \\ &- \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(2)}\frac{2\sqrt{2}\pi b^3 k^3 m}{(b^2+2k^2m^2)^{3/2}} \exp\left[\frac{\vec{Q}^2 k^2 m^2}{4(b^4+2b^2k^2m^2)}\right] \\ &+ \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}2m - \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{8q^2\beta m^2}{(q^2+\beta^2m^2)^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \sinh\left(\frac{q\vec{Q}}{2b^2}\right) \left. \right\} \\ &+ \frac{4\mathcal{C}_2}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{\vec{Q}^2}{4}\right)\right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(2)}4\sqrt{2\pi} \right. \\ &\times \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2+m^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) - \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(2)}\frac{2\sqrt{2}\pi b^3 k^3 m}{(b^2+2k^2m^2)^{3/2}} \\ &+ \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}2m - \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{8q^2\beta m^2}{(q^2+\beta^2m^2)^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \left. \right\} \\ &+ \frac{8\mathcal{C}_3}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{\vec{Q}^2}{4}\right)\right] \left\{ -\frac{\lambda}{3}\omega_1^{(3)}\frac{16\sqrt{2\pi}b^2}{\vec{Q}} \right. \\ &\times \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2+m^2} \exp\left(-\frac{3q^2}{8b^2}\right) \sinh\left(\frac{q}{4b^2}\vec{Q}\right) \\ &- \frac{\lambda}{3}\omega_2^{(3)}\frac{8\pi b^3 k^3 m}{(2b^2+3k^2m^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{k^2m^2\vec{Q}^2}{8(2b^4+3b^2k^2m^2)}\right] \\ &+ \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}2m - \frac{16\sqrt{2\pi}b^2}{3\vec{Q}} \int_0^\infty dq \frac{8q\beta m^2}{(q^2+\beta^2m^2)^2} \exp\left(\frac{3q^2}{8b^2}\right) \\ &\times \sinh\left(\frac{q}{4b^2}\vec{Q}\right) \left. \right\}. \quad (\text{G.16}) \end{aligned}$$

Simplificando esta expressão temos,

$$h_{fi}(s, t) = \frac{3}{8}R_0(s) \sum_{i=1}^6 R_i(s, t) \quad (\text{G.17})$$

onde

$$R_0 = \frac{4}{(2\pi)^{3/2}b^3} \exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(\frac{s}{4} - M_G^2\right)\right];$$

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{\lambda\omega_1^{(2)} 4\sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{t}}{2b^2}\right) + \mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{u}}{2b^2}\right) \right] ; \\
 R_2 &= \frac{\lambda\omega_2^{(2)} 2\sqrt{2\pi} b^3 k^3 m}{3(b^2 + 2k^2 m^2)^{3/2}} \left[\exp\left(-\frac{tk^2 m^2}{4(b^4 + 2b^2 k^2 m^2)}\right) + \exp\left(-\frac{uk^2 m^2}{4(b^4 + 2b^2 k^2 m^2)}\right) \right] ; \\
 R_3 &= \frac{32\sqrt{2\pi}}{3} \int_0^\infty dq \frac{q^2 \beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2}\right) \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{t}}{2b^2}\right) + \mathcal{J}_0\left(\frac{q\sqrt{u}}{2b^2}\right) \right] ; \\
 R_4 &= -\frac{\lambda\omega_1^{(3)}}{3} \frac{16\sqrt{2\pi} b^2}{\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + m^2} \exp\left(-\frac{3q^2}{8b^2}\right) \sinh\left(\frac{q}{2b^2} \sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}\right) ; \\
 R_5 &= -\frac{\lambda\omega_2^{(3)}}{3} \frac{16\pi b^3 k^3 m}{(2b^2 + 3k^2 m^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{k^2 m^2 \left(\frac{s}{4} - M_G^2\right)}{2(2b^4 + 3b^2 k^2 m^2)}\right] ; \\
 R_6 &= -\frac{128\sqrt{2\pi} b^2}{3\sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}} \int_0^\infty dq \frac{q\beta m^2}{(q^2 + \beta^2 m^2)^2} \exp\left(\frac{3q^2}{8b^2}\right) \sinh\left(\frac{q}{2b^2} \sqrt{\frac{s}{4} - M_G^2}\right) , \quad (\text{G.18})
 \end{aligned}$$

sendo $\mathcal{J}_0(x)$ a função de Bessel esférica dada por

$$\mathcal{J}_0(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (\text{G.19})$$

Referências

- [1] GELL-MANN, M. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, Amsterdam, v. 8, n. 3, p. 214-215, Feb. 1964.
- [2] ZWEIG, G. An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking. *CERN Report*, th412, NP14146, 74p., Feb. 1964.
- [3] LIPKIN, H. J. Quarks for pedestrians. *Phys. Rep. C*, Amsterdam, v. 8, n. 3, p. 173-268, Aug. 1973.
- [4] LIPKIN, H. J. Triality, exotics and the dynamical basis of the quark model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 45, n. 3, p. 267,271, Jul. 1973.
- [5] DE RUJULA, A.;HOWARD, G.; GLASHOW, S. L. Hadron Masses in a Gauge Theory. *Phys. Rev. D*, New York, v. 12, n. 1, p. 147-162, Jul. 1975.
- [6] LE YAOUANC, A. OLIVER, L. L. PÈNE, O. RAYNAL, J. -C. *Hadron Transition in the Quark Model*, Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1988.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Relativistic Quantum Theory*, London, Pergamon Press, 1960.
- [8] CORNWALL J. M.; SONI, A. Glueballs as bound states of massive gluons. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 120, n. 4,5,6, p. 431-435, Jan. 1983.
- [9] HALZEN, F.; KREIN, G. I.; NATALE, A. A. Relating the QCD Pomeron to an effective gluon mass. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 47, n. 1, p. 295-298, Jan. 1993.
- [10] GAY DUCATI, M. B.;HALZEN, F.; NATALE, A. A. Diffraction and the gluon mass. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 48, n. 5, p. 2324-2328, Sept. 1993.
- [11] MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum Theory Field*. Revised ediction, Hoboken, John Wiley & Sons, 1993.
- [12] HOU, W. S.; WONG, G. G. The Glueball Spectrum from a Potential Model. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 67, n. 3, 034003 6p., Feb. 2003.

- [13] BERNARD, C. Monte Carlo Evaluation of the Effective Gluon Mass. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 108, n. 6, p. 431-434, Feb. 1982.
- [14] BERNARD, C. Adjoint Wilson Lines and the Effective Gluon Mass. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 219, n. 2, p. 341-357, Jun. 1983.
- [15] HOU W. S.; LUO C. S.; WONG, G. G. Glueball States in a Constituent Gluon Model. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 64, n. 1, 014028 7p., Jun. 2001.
- [16] GIRARDEAU, M. D. Second-Quantization Representation for Systems of Atoms, Nuclei, and Electrons. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 27, n. 21, p. 1416-1419, Nov. 1971.
- [17] GIRARDEAU, M. D. Second-Quantization Representation for a Nonrelativistic System of Composite Particles. I. Generalized Tani Transformation and its Iterative Evaluation. *J. Math. Phys.*, New York, v. 16, n. 9, p. 1901-1919, Sep. 1975.
- [18] GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D. Fock-Tani Representation for the Quantum Theory of Reactive Collisions. *Physica A*, Amsterdam, v. 97, n. 1, p. 42-74, Jun. 1979.
- [19] GILBERT, J. D. Second Quantized Representation for a Model System with Composite Particles. *J. Math. Phys.*, New York, v. 18, n. 4, p. 791-805, Apr. 1977.
- [20] GIRARDEAU, M. D. Fock-Tani representation for positron-hydrogen scattering. *Phys. Rev. A*, New York, v. 26, n. 1, p. 217-236, Jul. 1982.
- [21] OJHA, P. C.; GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D.; STRATON, J. C. Fock-Tani transformation and a first-order theory of charge transfer. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 33, n. 1, p. 112-123, Jan. 1986.
- [22] STRATON, J. C. Reduced-mass Fock-Tani representations for $a^+ + (b^+c^-) \rightarrow (a^+c^-) + b^+$ and first-order results for $\{abc\} = \{ppe, epe, \mu p \mu, \mu d \mu, \text{ and } \mu t \mu\}$. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 35, n. 9, p. 3725-3740, May 1987.
- [23] STRATON, J. C.; GIRARDEAU, M. D. Post-prior symmetrical first-order T matrix for charge transfer. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 40, n. 6, p. 2991-3001, Sept. 1989.
- [24] LO, C.; GIRARDEAU, M. D. Symmetric orthogonalized-plane-wave Born approximation for charge exchange. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 41, n. 1, p. 158-164, Jan. 1990.
- [25] STRATON, J. C. Fock-Tani Hamiltonian for reactions involving two-electron atoms. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 43, n. 11, p. 6018-6026, Jun. 1991.

- [26] TANI, S. Scattering Involving a Bound State. *Phys. Rev.*, New York, v. 117, n. 1, p. 252-260, Jan. 1960.
- [27] WEINBERG, S. Elementary Particle Theory of Composite Particles. *Phys. Rev.*, New York, v. 130, n. 2, p. 776-783, Apr. 1963.
- [28] WEINBERG, S. Quasiparticles and the Born Series. *Phys. Rev.*, New York, v. 131, n. 1, p. 440-460, July 1963.
- [29] HADJIMICHEF, D.; KREIN G.; SZPIGEL S.; DA VEIGA, J. S. Mapping of Composite Hadrons into Elementary Hadrons and Effective Hadronic Hamiltonians. *Ann. Phys.*, New York, v. 268, n. 1, p. 105-148, Mar. 1998.
- [30] HADJIMICHEF, D. *Formalismo de Fock-Tani para a Física Hadrônica*. 1995. 131 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1995.
- [31] SZPIGEL, S. *Interação Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani*. 1995. 183 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.
- [32] HADJIMICHEF, D.; HAIDENBAUER, J.; KREIN, G. Long- and medium-range components of the nuclear force in quark-model based calculations. *Phys. Rev. C*, Melville, v. 63, n. 3, 035204 8p., Feb. 2001.
- [33] SILVA, M. L. L. DA; HADJIMICHEF, D.; VASCONCELLOS, C. A. Z. Glueball-Glueball Interaction in The Context of an Effective Theory. *I. J. Mod. phys. D*, 2004. Aceito para publicação.
- [34] MESSIAH, A. *Quantum Mechanics*. New York: Dover Publications, 1999.
- [35] BARNES T.; SWANSON, E. S. Diagrammatic Approach to Meson-Meson Scattering in the Nonrelativistic Quark Potential Model. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 46, n. 1, p. 131-159, Jul. 1992.
- [36] MEYER, C. A. Light and Exotic Mesons. Disponível em: <http://www.phys.cmu.edu/halld/notes.html#Note_001_anchor>. Acesso em: 20 Jan. 2004.
- [37] GIRARDEAU, M. D.; KREIN, G.; HADJIMICHEF, D. Field-Theoretic Approach for Systems of Composite Hadrons. *Mod. Phys. Lett. A*, Singapore, v. 11, n. 14, p. 1121-1129, May. 1996.