

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Auto-Organização da Redistribuição de Riqueza*

Saete Pianegonda

Dissertação realizada sob orientação do Dr. José Roberto Iglesias e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre

Julho - 2003

*Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Dedico este trabalho ao Ismael, o grande amor da minha vida.

Agradecimentos

★ Ao meu orientador, José Roberto Iglesias pela orientação desde a iniciação científica, pela paciência e amizade.

★ Aos meus pais, João Pianegonda e Iracema Spido Pianegonda pelo carinho, amizade e constante apoio.

★ Ao meu noivo Ismael pelo apoio, compreensão e carinho.

★ Ao Evy, ao Henrique e ao Marlon pelo esclarecimento das dúvidas de Linux.

★ Aos meus colegas da sala M205 pela amizade e pela troca de idéias. Em especial a Ana Carolina pelo preocupação, apoio e grande amizade.

★ Por fim, agradeço de modo geral a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	vi
1 Self-Organized Criticality	1
1.1 Introdução	1
1.2 Caracterização do estado SOC	3
1.2.1 Distribuição das respostas	4
1.2.2 As leis de potências e a criticalidade	9
1.3 A pilha de areia	11
1.3.1 Resposta Crítica	13
1.3.2 Resultados numéricos: funções distribuição	14
1.3.3 Espectro de frequência	16
1.4 Terremotos	17
1.4.1 Auto-organização dos terremotos	18
1.4.2 Modelos de terremotos não conservativos	19
1.4.3 Criticalidade do Modelo OFC	20
1.5 Dinâmica de extremos	23
1.5.1 Aplicação de SOC na biologia	23

1.5.2	Extinções em massa e equilíbrios pontuados em um simples modelo de evolução	24
1.6	A busca por um formalismo	35
1.6.1	Teoria de Campo Médio	37
1.6.2	Modelo da Pilha de Areia	37
1.6.3	Modelos de terremotos	41
1.6.4	O modelo de evolução biológica	45
1.6.5	A versão de vizinhos randômicos do modelo BS de evolução	49
1.7	Considerações finais	57
2	Lei de Pareto	58
2.1	Introdução	58
2.2	Estrutura universal da distribuição de renda pessoal	62
2.3	A mudança temporal da distribuição	65
2.4	Distribuição de renda de companhias	67
2.5	Distribuições de Pareto-Lévy	68
2.6	A distribuição de riqueza	69
2.7	O mercado de dinheiro	73
2.8	Considerações finais	80
3	Modelo de mercado com trocas conservativas	82
3.1	Introdução	82
3.2	O modelo de mercado com trocas conservativas	85
3.3	Resultados	87
3.3.1	Distribuição de riqueza	87

3.3.2	Criticalidade do MMTC	91
3.3.3	A solução de campo médio em comparação ao caso de interações locais	98
3.3.4	O processo de acumulação de riqueza	100
3.3.5	Estabilidade dos agentes mais ricos no MMTC	102
3.4	Considerações finais	106
4	Conclusões	110
5	Referências	115

Resumo

Neste trabalho nos concentraremos na análise de um aspecto particular dos processos econômicos: modelar a competição entre diferentes agentes em um ambiente onde as trocas de recursos entre eles acontecem em um modo conservativo, ou seja, um modelo de mercado de trocas conservativas (MMTC). Nós apresentamos um modelo simplificado para a exploração de recursos por agentes econômicos interagentes, onde cada agente recebe uma fração randômica dos recursos disponíveis. Em cada passo de tempo, o agente mais pobre, isto é, aquele com a menor riqueza do mercado, sofre uma mudança randômica na sua riqueza. Essa dinâmica de mínimo garante que o agente mais pobre tenha chance de mudar seu estado econômico. Qualquer riqueza que é ganha (ou perdida) por este agente é debitada (ou creditada) entre seus dois primeiros vizinhos na rede, de modo que a riqueza total do mercado permanece constante. Depois de um longo transiente o sistema se auto-organiza em um estado crítico auto-organizado (SOC) que maximiza a performance média de cada participante. No estado SOC quase todos os agentes têm riqueza acima de um certo limiar, um valor de riqueza crítico $\eta_T \approx 0,4$, que é chamado de linha de pobreza. Acima deste limiar, nosso modelo exhibe um novo tipo de condensação de riqueza; uma distribuição de riqueza exponencial onde muito poucos agentes extremamente ricos são estáveis no tempo, enquanto o restante permanece no que chamamos de classe média. A redistribuição de riqueza é então evidente. O progresso econômico na sociedade é uniforme, embora lento.

A evolução temporal dos eventos de redistribuição de riqueza entre os agentes segue

o padrão de equilíbrio pontuado, com intervalos relativamente longos de tranquilidade intercalados por períodos de explosões de atividade. Além disso, a distribuição da duração das avalanches segue uma lei de potência com expoente $\alpha = 1$ que corresponde a um espectro de frequência $1/f$, que se refere a correlações temporais extremamente longas. Ambos os fenômenos são característicos de sistemas no estado SOC.

Estudamos também uma solução não geográfica de campo médio (interações globais), que gera uma distribuição de riqueza completamente diferente que é quase linear acima de um limiar crítico, $\eta_T \approx 0,2$, (bem menor do que no caso de interações locais). A globalização aumentou as diferenças econômicas, pois houve um aumento do número de agentes mais ricos e também um crescimento da miséria dos mais pobres, que se tornaram em maior número. Neste caso se pode identificar claramente 3 classes sociais: a rica, a classe média e a pobre. De certo modo, o modelo local (não globalizado) corresponde a um tipo de mundo feudal, onde os barões locais mantêm seu domínio por longos períodos de tempo, sobre uma população de agentes semipobres. Com isso, o MMTC apresentado aqui fornece uma descrição simples da redistribuição de riqueza nos estágios iniciais da história econômica da humanidade, e indica algumas das possíveis forças motrizes que influenciaram esse processo de redistribuição. Nós acreditamos que essas conclusões podem ser de interesse em vista do presente debate sobre os aspectos positivos e negativos da globalização.

Abstract

In this work we concentrate our analysis in a particular aspect of the economic processes: modelling the competition among different agents in an environment where all exchanges of resources between agents take place in a conservative manner, that is, a conservative exchange market model (CEMM). We present a simplified model for the exploitation of resources by interacting economic agents, where each agent receives a random fraction of the available resources. At each time step, the poorest agent, i.e., the one with the minimum wealth in the market, suffers a random change in its wealth. This minimum dynamic ensures that the poorest agent has a chance to change its economic welfare. Whatever wealth is gained (or lost) by the poorest agent is equally debited (or credited) between its two nearest neighbors in the lattice, making the total wealth constant. After a long transient, the system self-organizes into a self-organized critical state (SOC) that maximizes the average performance of each participant. In the SOC state almost all agents have wealth beyond a certain threshold, a critical value of wealth $\eta \approx 0,4$, that is called poverty line. Above this threshold our model exhibits a new kind of wealth condensation; an exponential wealth distribution where the very few extremelly rich agents are stable in time, while the rest remains in what we call a middle class. Wealth redistribution is then evident. The economic progress in the society is steady, even if slow.

The temporal evolution of the wealth redistribution events among the agents follows a punctuated equilibrium pattern, with relatively long periods of stasis separated by bursts of activity. Moreover, the distribution of avalanches lifetime follows a power law

with exponent $\alpha = 1$, which corresponds to a $1/f$ frequency spectrum, that is related to extremely long temporal correlations. Both phenomena are characteristic of systems in the SOC state.

We also study the a-geographic mean field solution (global interactions), which generates a completely different wealth distribution that is almost linear beyond a critical threshold, $\eta_T \approx 0,2$ (much lower than in the local interaction case). Globalization increases the economic inequalities, because there is a relatively great fraction of wealthy agents but there is also a higher number of poorer agents with lower income. In this case it is possible to clearly identify three social classes: the rich, the middle, and the poor one. In a sense, the local model (non-globalized) corresponds to a kind of feudal world, where local barons maintain their dominance for long periods of time, over a population of semi-poor agents. Therefore, the CEMM presented here provides a simple description of wealth redistribution in the early stages of human economic history, and indicates some of the possible driving forces that influenced this redistribution process. We believe that these conclusions may be of interest in view of the present debate over the goods and evils of globalization.

Capítulo 1

Self-Organized Criticality

*Raízes-troncos ramagens
Ramagens-troncos raiz
Abriu-se uma cicatriz
De onde brotei na paisagem
O tempo me fez mensagem
Que os ventos pampas dirigem
Dos anseios que me afligem
De transplantar horizontes
Buscando o rumor das fontes
Pra beber água na origem.*

Jayme Caetano Braun, poeta gaúcho

1.1 Introdução

Self-Organized Criticality (SOC), ou criticalidade auto-organizada, é uma teoria recente que pretende descrever a natureza como um processo de organização fora do equilíbrio. O retrato básico é aquele onde a natureza está continuamente fora de equilíbrio, mas organizada em um estado estacionário, o estado auto-organizado. O objetivo do modelo de SOC é investigar uma questão fundamental do porquê a natureza é complexa e não

simples como as leis da física sugerem (BAK, 1997).

O artigo de Bak *et al.* (1987) contém a hipótese de que as interações dinâmicas entre os constituintes de grandes sistemas dinâmicos conduzem o sistema a um estado crítico fora do equilíbrio, com uma estrutura global e complexa. Este estado é estabelecido sem a ação de qualquer agente externo e independe das condições iniciais do sistema. O estado crítico é um atrator global para a dinâmica. Suas propriedades estatísticas são descritas por simples leis de potência; há eventos de atividade de todos os tamanhos. Tal comportamento foi descrito como criticalidade auto-organizada e identificado pela sigla inglesa SOC (JENSEN, 1998).

Não existe um consenso e uma definição geral aceita sobre o que é SOC e nem as condições necessárias para que este comportamento ocorra. Conectada com esta falta de definição de SOC, está a falta de formalismo matemático. Um formalismo, equivalente à função partição e a energia livre na mecânica estatística de equilíbrio, está sendo procurado. O sistema torna-se crítico no sentido que todos os elementos do sistema influenciam uns aos outros.

Que tipo de sistemas evoluem para um estado dinâmico SOC? Os processos relacionados com forças externas ao sistema precisam ser muito menores que os processos internos de relaxação. É a existência de um limiar que garante a separação de escalas temporais. Além disso, a metaestabilidade também contribui. Dentre os estados metaestáveis há um conjunto de estados particularmente importantes; os estados marginalmente estáveis. Bak *et al.* (1987) originalmente encararam os estados marginalmente estáveis como caracterizados pela falta de qualquer escala temporal ou de comprimento. Este é precisamente o caso das configurações de um sistema termodinâmico na temperatura crítica. A falta de uma escala típica conduz a funções de correlação algébricas.

Uma intrigante consequência da teoria é que catástrofes podem acontecer sem qualquer razão. Extinções em massa podem ocorrer sem nenhum mecanismo de engatilha-

mento externo como uma erupção vulcânica ou o choque de um meteorito na Terra (embora a teoria naturalmente não descarte que isso tenha de fato ocorrido). A maior parte das mudanças acontece através de eventos catastróficos e não por um caminho gradual e suave.

Um teste para a teoria da complexidade é sua habilidade de explicar observações gerais como ruído $1/f$, fractais, eventos catastróficos e outros. SOC explica alguns desses padrões onipresentes existentes na natureza que nós vemos como complexos. As aplicações vão desde pulsares e buracos negros a terremotos e evolução da vida.

A seguir, será apresentada na seção 1.2 a caracterização do estado SOC; nas seções 1.3, 1.4 e 1.5 exemplos de sistemas que evoluem para o estado SOC e finalmente na seção 1.6 modelos analíticos. As explicações apresentadas aqui seguem principalmente as referências Bak (1997) e Jensen (1998).

1.2 Caracterização do estado SOC

A natureza do estado crítico é descrita pela resposta do sistema a perturbações externas. Para sistemas que exibem um comportamento não crítico a reação do sistema é descrita por um tempo de resposta característico e uma escala característica de comprimento sobre a qual a perturbação é espacialmente sentida. Embora a resposta de sistemas não críticos possa diferir conforme o sistema é perturbado em diferentes posições e diferentes tempos, a distribuição das respostas é estreita e bem descrita pela resposta média. Para um sistema crítico, a mesma perturbação aplicada em diferentes posições ou na mesma posição em diferentes tempos pode conduzir a respostas de diferentes tamanhos. A média pode não ser uma medida conveniente da resposta; de fato a média pode nem mesmo existir.

1.2.1 Distribuição das respostas

As leis de potência são aquelas em que expressamos uma quantidade N como alguma potência de outra quantidade:

$$N(s) = s^{-\tau}. \quad (1.1)$$

Aqui s seria, por exemplo, a energia liberada por um terremoto e $N(s)$ seria o número de terremotos com esta energia. Se tomarmos o logaritmo em ambos os lados da equação (1.1) temos $\log N(s) = -\tau \log s$ que, em escala $\log - \log$, é uma linha reta onde τ é a sua inclinação. Note que a lei de potência $f(x) = x^n$ tem a propriedade que a mudança relativa $f(kx)/f(x) = k^n$ é independente de x . Essa propriedade é uma condição suficiente e também necessária para se dizer que as leis de potência não têm uma escala característica. De simulações e dados reais, a invariância de escala pode ser vista do simples fato que a linha reta parece a mesma em toda parte, ou seja, sem picos.

Para ilustrar a descrição do estado crítico vamos considerar o sistema de uma pilha de areia. Investiga-se o sistema adicionando um grão de areia randomicamente em uma posição escolhida na superfície da pilha. O grão extra eventualmente induzirá uma avalanche que será caracterizada pelo seu tamanho (ou dimensão), como o número total s de grãos de areia envolvidos na avalanche, e seu tempo de vida t . As distribuições estatísticas são descritas por $P(s)$ e $P(t)$, respectivamente. No estado crítico é esperado um comportamento do tipo lei de potência da forma $P(s) \sim s^{-\tau}$ e $P(t) \sim t^{-\alpha}$.

A explicação das características estatísticas dos sistemas complexos pode ser expressa matematicamente como o problema de explicar as leis de potências essenciais e mais especificamente os valores dos seus expoentes.

As catástrofes seguem este simples padrão. A taxa de ocorrência dos terremotos de magnitude M maior que um dado m é dada por $\log_{10} N(M > m) = a - bm$, que é a lei

de Gutenberg-Richter. O parâmetro b varia entre 0,80 a 1,06 para pequenos terremotos e 1,23 a 1,54 para os grandes. A energia E liberada durante um terremoto está relacionada com m pela relação $\log_{10} E = c + dm$, com $d = 1$ para os terremotos fracos e $d = 3/2$ para os grandes. Com isso, a lei de Gutenberg-Richter é transformada em uma lei de potência para o número de terremotos observados com energia maior que E , ou seja, $N(E_0 > E) \sim E^{-b/d} = E^{-B}$ (figura 1.1). Aqui B varia no mesmo intervalo (0,80 a 1,05) para pequenos e grandes terremotos e exibe uma dependência geográfica, isto é, depende das propriedades das falhas (OLAMI *et al.*, 1992).

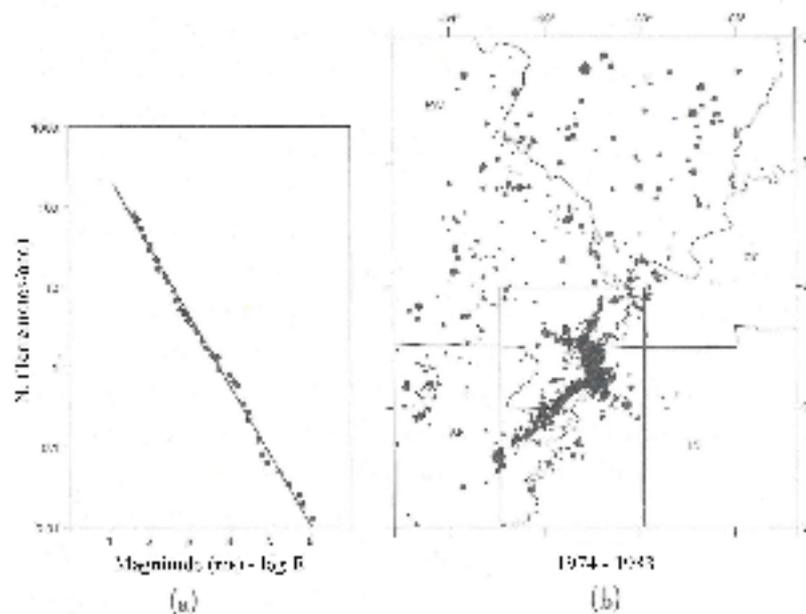


Figura 1.1: (a) Distribuição das magnitudes dos terremotos na zona de Nova Madrid no sudeste dos Estados Unidos durante o período de 1974 – 1983. Os pontos mostram o número de terremotos com magnitude maior que uma dada magnitude m . A linha reta indica uma distribuição de terremotos do tipo lei de potência. Esta simples lei é conhecida como lei de Gutenberg - Richter. (b) Localização dos terremotos usados em (a). O tamanho dos pontos representa a magnitude dos terremotos (BAK, 1997).

Esta lei mostra que os grandes terremotos não têm um papel especial, pois eles obedecem à mesma lei dos pequenos. Ela é uma lei empírica que motiva a pesquisa em busca de uma teoria de complexidade. O japonês Keisuke Ito (ITO, 1995) considerou os intervalos de tempo que os terremotos na Califórnia (1971-1985) levaram para retornar a

mesma pequena área, ou seja, a distribuição dos períodos de calmaria entre os terremotos em uma dada localização. Ele mediu a distribuição desses tempos de retorno para 8.000 terremotos. O resultado é uma lei de potência com expoente 1,4. Ele também considerou a distribuição dos tempos de um dado terremoto a quaisquer terremotos subsequentes na mesma região, não apenas o primeiro terremoto, e obteve outra lei de potência com expoente 0,5. Finalmente ele mediu a distribuição das distâncias espaciais de um terremoto ao próximo consecutivo. Ele obteve outra lei de potência com expoente 1,7. O fato de que há leis de potência, em ambos espaço e tempo, sugere que há um padrão fractal espaço-temporal de atividade dos terremotos na Califórnia.

Em economia, existe um padrão empírico similar à lei de Gutenberg-Richter. Benoit Mandelbrot¹, citado por Bak (1997), em 1966, poucos anos antes das observações de padrões fractais na natureza, analisou dados das flutuações dos preços do algodão, das ações de aço e outras mercadorias. Ele fez um histograma da variação mensal do preço do algodão contando quantas variações mensais haviam de 0,1% (ou -0,1%), quantas de 1%, 10%, etc (figura 1.2). Ele verificou que a probabilidade de se ter pequenas e grandes variações segue um simples padrão conhecido como distribuição de Lévy. A característica importante desta distribuição é que ela tem uma cauda do tipo lei de potência para grandes eventos, assim como a lei de Gutenberg-Richter para terremotos. A distribuição das flutuações dos preços segue aproximadamente uma linha reta numa escala log - log, indicando uma lei de potência. A variação dos preços não possui escala, ou seja, não apresenta um tamanho típico (BAK, 1997).

Algo similar também ocorre nos processos de evolução biológica. A distribuição dos eventos de extinção é suave, e grandes eventos ocorrem com regularidade e probabilidade bem definida. Por exemplo, vemos na figura 1.3a uma estimativa da fração de espécies que desapareceram em períodos consecutivos de 4 milhões de anos, num inter-

¹Mandelbrot, B. The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business of the University of Chicago* 36 (1963) 307.

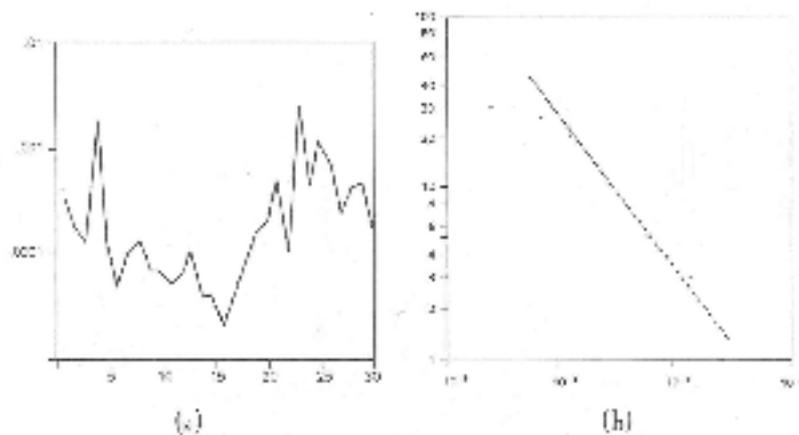


Figura 1.2: (a) Variações mensais do preço do algodão durante um período de 30 meses. (b) A curva mostra o número de meses onde a variação relativa excedeu uma dada fração. Note a suave transição de pequenas para grandes variações. A linha reta indica uma lei de potência. Outras mercadorias seguem um padrão similar (BAK, 1997).

valo de 600 milhões de anos. A estimativa é a medida da taxa de extinção. Algumas vezes houve poucas extinções, menos de 5%, e outras vezes houve mais de 50% de extinções. Contando o número de períodos em que o número relativo de extinções foi menor que 10%, em quantos períodos a variação ficou entre 10 e 20% e assim por diante, foi obtido o histograma da figura 1.3b (SEPKOSKI², citado por Bak (1997)). O histograma forma uma curva suave com o número de grandes eventos estendendo-se suavemente a partir do número muito maior de pequenos eventos (BAK, 1997).

Embora os grandes eventos ocorram com uma probabilidade bem definida, isto não significa que o fenômeno é periódico. Em outras palavras, o fato de que os eventos ocorrem em algum intervalo médio não significa que eles sejam cíclicos. Regularidade não deve ser confundida com periodicidade.

George Kingsley Zipf³, citado por Bak (1997), observou algumas regularidades também em sistemas de origem humana. Uma delas foi a constatação de que havia no

²Sepkoski, J. J. Jr. Ten Years in the Library: New Data Confirm Paleontological Patterns. *Paleobiology* 19 (1993) 43.

³Zipf, George Kingsley. *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. Cambridge MA: Addison-Wesley, 1949.

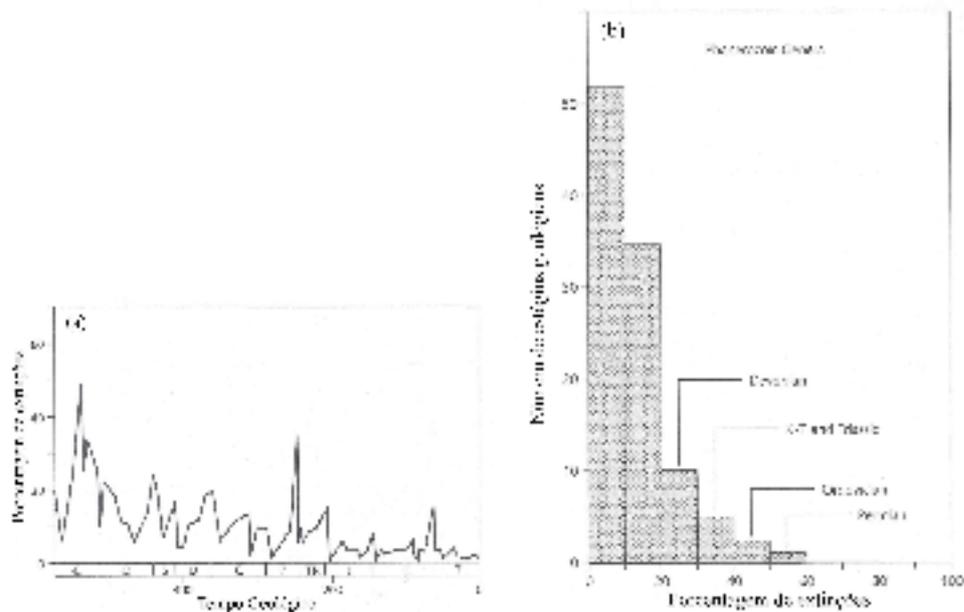


Figura 1.3: (a) Extinções biológicas nos últimos 600 milhões de anos como registradas pelo paleontólogo John Sepkoski. A curva mostra a porcentagem de famílias que foram extintas dentro de intervalos de aproximadamente 4 milhões de anos. (b) Histograma dos eventos de extinção de (a). O diagrama mostra o número de períodos de 4 milhões de anos onde a taxa de extinção estava dentro de uma determinada faixa. As grandes extinções aparecem na cauda da curva (BAK, 1997).

mundo em torno de 1920, duas cidades com mais de 8 milhões de habitantes, 10 com mais de 1 milhão e 100 com mais de 200.000 habitantes. A curva é uma linha reta irregular numa escala logarítmica. Zipf também contou a frequência de uso de uma determinada palavra em livros de literatura e jornais. O resultado para a língua inglesa é que a palavra mais frequente de ordem 1, *the*, é usada com uma frequência de 9%, a de ordem 10, *I*, 1%, a de ordem 100, *say*, 0,1% e assim por diante. Esse resultado independe de onde as palavras foram tiradas (jornais, livros de literatura ou outros). Esses resultados são distribuídos em uma linha reta na escala logarítmica da ordem versus frequência, com inclinação próxima a 1. A regularidade expressa por essa reta é conhecida como lei de Zipf. Essa lei, assim como os outros fenômenos descritos, são emergentes no sentido que eles não são conseqüências óbvias das regras dinâmicas básicas. Todas essas observações são de natureza estatística e, portanto, uma teoria para explicá-las também precisa ser estatística (BAK, 1997).

1.2.2 As leis de potências e a criticalidade

Em geral, sistemas em equilíbrio não apresentam ruído $1/f$, grandes catástrofes e fractais. No estado crítico a função de resposta dinâmica tem um comportamento característico de lei de potência do tipo “ $1/f$ ”. As aspas são usadas porque frequentemente o ruído é um espectro de frequência $f^{-\beta}$ com β apenas grotescamente próximo a 1. Os fractais se referem às estruturas geométricas com características de todas as escalas de comprimento e, portanto, são descritos por leis de potência. A falta de uma escala característica de comprimento conduz diretamente a ausência de uma escala temporal característica para as flutuações temporais (BAK *et al.*, 1988).

No passado frequentemente se assumia implicitamente que grandes sistemas como os biológicos e econômicos estão em equilíbrio estável. A principal teoria econômica até agora, a teoria geral de equilíbrio, assume mercados perfeitos, racionalidade perfeita (os agentes têm escolhas limitadas e capacidade limitada de processar a informação disponível), e assim por diante, e então trata os sistemas econômicos dentro dos equilíbrios estáveis de Nash. Os economistas chamam de equilíbrios de Nash os estados em que nenhum agente pode melhorar sua situação escolhendo uma estratégia diferente. Nos estados de equilíbrio, pequenas perturbações causarão apenas pequenas desordens, modificando levemente o estado de equilíbrio. A resposta do sistema é proporcional ao tamanho da perturbação e, portanto, os sistemas em equilíbrio são ditos lineares. Contingência é irrelevante. Grandes flutuações nestes sistemas só podem ocorrer se muitos eventos randômicos acidentalmente tiverem efeitos na mesma direção, o que é improvável. Portanto, a teoria de equilíbrio não explica muitos eventos que realmente acontecem, como porque os preços das ações flutuam da maneira que se observa.

Nenhuma teoria geral de equilíbrio ainda foi explicitamente formulada para a biologia, mas em geral a natureza é retratada como estando em equilíbrio e supostamente como sendo algo que pode, em princípio, ser conservativo. Como no tempo de vida humana o

mundo natural muda muito pouco, estes conceitos de equilíbrio são naturais. Mas se a natureza está em equilíbrio como pode haver evolução? Sistemas estáveis ou em equilíbrio por definição não saem do lugar.

Os paleontólogos Stephen Jay Gould e Niles Eldridge apontaram que o aparente equilíbrio é apenas um período de tranquilidade ou calma⁴ entre explosões de atividade e volatilidade em que muitas espécies são extintas e novas emergem. A taxa de evolução de espécies individuais medida, por exemplo, pela mudança em tamanho, também acontece episodicamente em surtos de intensa atividade. Este fenômeno é chamado de equilíbrio pontuado.

Por outro lado, sistemas caóticos não são complexos, pois eles apresentam um espectro do tipo ruído branco e não $1/f$. Além disso, os sistemas caóticos não têm memória do passado e, portanto, não podem evoluir. Apenas no ponto crítico, que é a borda entre o comportamento periódico previsível e o caótico imprevisível, há um comportamento complexo com sinal $1/f$. Como todos os fenômenos discutidos, tais como fractais, ruído $1/f$, regularidade dos eventos catastróficos e a lei de Zipf, ocorrem ao mesmo tempo em toda parte, eles não podem depender de valores específicos dos parâmetros do sistema. Portanto o caos não pode explicar complexidade.

Dado que os sistemas com poucos graus de liberdade e sistemas em equilíbrio não podem geralmente apresentar ruído $1/f$ ou qualquer outro comportamento complexo, pois uma fina sintonia é sempre necessária, Bak *et al.* (1987) propuseram que o ruído $1/f$ deveria ser um fenômeno cooperativo onde os diferentes elementos de grandes sistemas agem juntos de um modo combinado.

Bak *et al.* (1987) construíram um modelo protótipo de SOC, o modelo da pilha de areia, que será apresentado a seguir. Este trabalho mostrou como um modelo que obedece a regras simples e locais pode se organizar em um estado estacionário que evolui em ter-

⁴Aqui calma é empregado no sentido de um período quase estático com baixa atividade.

mos de explosões intensas de atividades intermitentes e não através de um caminho suave. A pilha de areia exibe um comportamento do tipo equilíbrio pontuado onde períodos de calma são interrompidos por desmoronamentos intermitentes de areia. Tais desmoronamentos, ou avalanches, são causados por um efeito dominó em que um simples grão de areia desloca um ou mais outros grãos e faz com que eles caiam. Estes grãos podem interagir com outros numa reação em cadeia.

1.3 A pilha de areia

No artigo de Bak *et al.* (1987), um autômata celular foi introduzido (modelo BTW) como um meio de ilustrar numericamente a tendência típica dos sistemas de se auto-organizarem em um estado crítico (BAK *et al.*, 1988; WIESENFELD *et al.*, 1989).

Considere uma tábua plana na qual adiciona-se areia vagarosamente, um grão por vez, em posições randômicas. No início os grãos de areia permanecem mais ou menos onde eles aterrissam. À medida que mais grãos são adicionados, a pilha se torna íngreme e pequenas quantidades de areia desmoronam, ou avalanches ocorrem. A adição de um simples grão de areia pode causar uma perturbação local, mas que não afeta as partes mais distantes da pilha. Não há comunicação global dentro da pilha, apenas entre muitos grãos individuais que seguem sua dinâmica local própria.

À medida que a inclinação aumenta, simples grãos induzem outros a caírem e, conseqüentemente, a inclinação atinge um certo valor e então não pode aumentar mais porque a quantidade de areia adicionada é balanceada em média pela quantidade que deixa a pilha caindo fora pelas bordas. Este estado é estacionário, pois a quantidade média de areia e a inclinação média são constantes no tempo. Para existir este balanço médio deve haver comunicação entre todo o sistema. Haverá ocasionalmente avalanches que andarão pela pilha toda. Este é o estado crítico auto-organizado (estado SOC), onde as dinâmicas

emergentes são globais.

A pilha de areia é um sistema dinâmico aberto, pois a areia é adicionada de fora para dentro do sistema, e tem muitos graus de liberdade (ou grãos). Os grãos de areia têm energia potencial medida como sua altura em relação à superfície da tábua. Quando eles desmoronam esta energia é transformada em energia cinética que é dissipada na forma de calor na pilha. Assim, há energia fluindo através do sistema. O estado crítico pode ser mantido apenas devido à energia adicionada na forma de novos grãos sendo fornecidos do exterior. Ele precisa ser robusto em relação a modificações para que o conceito de SOC tenha chance de descrever o mundo real; de fato, esta é toda a idéia.

Agora é preciso fazer um modelo matemático que reproduza esses traços. Aqui será analisado apenas o caso bidimensional ($d = 2$) em uma rede quadrada (x, y) para $1 \leq x, y \leq L$, sendo que a generalização para d dimensões é direta. As colunas de areia são representadas por seu vínculo com os vizinhos mais próximos (primeiros vizinhos) nas direções x e y . Para cada sítio define-se uma variável apropriada $z(x, y)$ que pode representar a inclinação da pilha em uma dada direção, a energia, o número de grãos de areia e etc. Aqui, ela será referida como a inclinação média na direção diagonal, ou seja, a soma das diferenças de altura nas direções x e y . Pode-se definir $z(x, y)$ como $z(x, y) = 2h(x, y) - h(x + 1, y) - h(x, y + 1)$.

A inclinação local da pilha de areia determina sua estabilidade. Se $z(x, y)$ em um ponto específico (x, y) é menor que algum limiar de estabilidade z_c , a pilha é localmente estável nesta posição. A variável dinâmica $z(x, y)$ é tratada como um escalar inteiro nas simulações do modelo e então é negligenciado o fato que a inclinação da pilha de areia é um vetor com dimensões $d > 1$. Segundo McNamara e Wiesenfeld (1990), o comportamento do modelo não é alterado significativamente quando $z(x, y)$ é tratado como um vetor.

A dinâmica do modelo é definida em termos das seguintes operações:

R1 Perturbação não-conservativa em uma posição randômica da pilha:

$$z(x, y) \rightarrow z(x, y) + 1$$

R2 Relaxação (regra de desmoronamento): se $z(x, y) > z_c$,

$$z(x, y) \rightarrow z(x, y) - 4,$$

$$z(x \pm 1, y) \rightarrow z(x \pm 1, y) + 1$$

$$z(x, y \pm 1) \rightarrow z(x, y \pm 1) + 1$$

R3 Condições de contorno fechadas:

$$z(0, y) = z(x, 0) = z(L + 1, y) = z(x, L + 1) = 0.$$

Note que a relaxação conserva a soma de $z(x, y)$ sobre toda a rede, exceto nas bordas.

1.3.1 Resposta Crítica

As propriedades estatísticas do modelo podem ser estudadas simplesmente pela aplicação sucessiva das regras dinâmicas básicas. Tais propriedades, depois de um transiente de muitos passos de tempo, não dependem da configuração inicial, pois o estado crítico é um atrator para a dinâmica do sistema. Começando de uma superfície plana, $z(x, y) = 0$, a inclinação é aumentada por uma unidade em uma posição (x, y) randômica (R1). Então o processo é repetido em outra posição (x, y) e assim por diante. Quando z eventualmente excede o valor crítico z_c em algum lugar, o sistema relaxa de acordo com R2 e R3 até que todos os sítios sejam novamente estáveis; então uma avalanche foi criada. Este processo simula uma situação onde a inclinação aumenta gradualmente e leva o sistema ao ponto crítico.

No estado estacionário as distribuições das respostas são medidas aplicando-se a perturbação e depois medindo o tamanho e a duração temporal da avalanche induzida por ela. Histogramas são produzidos repetindo este processo muitas vezes. O tamanho s da avalanche é definido como o número total de sítios que precisam ser relaxados antes que

todos se tornem novamente estáveis. Uma posição específica (x, y) pode contar mais de uma vez, se tornando instável como resultado da instabilidade de seus sítios vizinhos. O tempo de vida t de uma avalanche é definido como o número total de atualizações simultâneas de toda a rede que precisam ser executadas a fim de tornar todos os sítios estáveis. Um passo de tempo é definido como uma visita em todos os L^2 sítios, checando se $z(x, y) > z_c$ e então fazendo uma atualização.

Seja $P(s)$ a probabilidade de que o número de sítios envolvidos nas relaxações seja igual a s e $P(t)$ a probabilidade de que o número de passos de tempo necessários para restabelecer a configuração estável seja igual a t . Diz-se que o modelo exibe comportamento crítico porque, depois de um transiente em que o sistema atinge um estado estatístico estacionário, essas duas densidades de probabilidade seguem leis de potência: $P(s) \sim s^{-\tau}$ e $P(t) \sim t^{-\alpha}$ (GRASSBERGER; MANNA, 1990; CHRISTENSEN *et al.*, 1991).

Há avalanches de todos os tamanhos até o tamanho do sistema e nenhum ajuste de parâmetro é necessário. Para verificar se um estado estacionário estatístico foi atingido, se deve checar a evolução temporal dessas funções distribuição.

1.3.2 Resultados numéricos: funções distribuição

A distribuição do tamanho das avalanches para $L = 50$ depois que o sistema atingiu o estado crítico é uma lei de potência com expoente $\tau = 1,0$. Então graficando o logaritmo do número de avalanches de uma dada magnitude versus esta magnitude, sendo que a magnitude é o logaritmo do tamanho da avalanche, se obtém uma linha reta (figura 1.4). Isso mostra que as avalanches seguem a lei de potência de Gutenberg-Richter assim como os terremotos reais na figura 1.1. A lei de potência indica que a pilha de areia se auto-organizou em um estado estacionário crítico e que a distribuição das avalanches segue a lei de Zipf, que é apenas outro jeito de representar a informação da lei de potência original.

Foi também verificado que a criticalidade é robusta frente a modificações do modelo. A lei de potência prevalece não importando como é modificada a pilha de areia. Foram feitas modificações como escolher condições iniciais randômicas de modo que $z > z_c$ em todos os sítios, deixar o sistema relaxar até atingir o estado crítico e então escolher randomicamente um sítio minimamente estável, $z(x, y) = z_c$, e fazer a relaxação. Note que a relaxação conserva a soma de $z(x, y)$ sobre toda a rede exceto nas bordas, então qualquer “excesso de z ” precisa ser transportado até elas para que a relaxação global ocorra. Depois de cada perturbação o estado estático original é reobtido e uma nova perturbação é feita. Os resultados obtidos foram exatamente os mesmos. Outras modificações foram feitas e em todos os casos a pilha se auto-organiza em um estado crítico sem escala, com avalanches de todos os tamanhos e durações (BAK *et al.*, 1988).

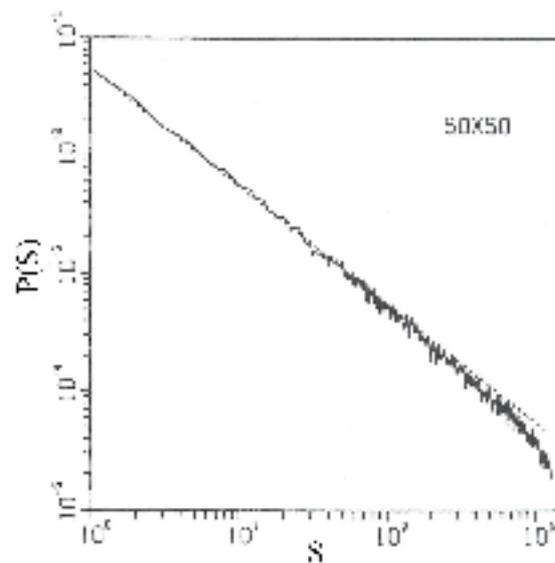


Figura 1.4: Distribuição dos tamanhos das avalanches para um sistema 50×50 . A curva foi obtida aplicando-se 10^5 perturbações no estado estacionário. A inclinação da reta é $\tau = 1,0$ (BAK *et al.*, 1988).

1.3.3 Espectro de frequência

Como é bem conhecido, uma superposição randômica de pulsos de uma quantidade física com uma distribuição de tempos de vida $P(T) \approx T^{-\alpha}$, ponderada pelo valor médio da quantidade durante o pulso, conduz a um espectro de frequência dado por (BAK *et al.*, 1988):

$$S(f) = \int \frac{TP(T)}{1 + (2\pi fT)^2} dT \approx f^{-2+\alpha} \quad (1.2)$$

de modo que um espectro de frequência de lei de potência do tipo $1/f$ (JENSEN *et al.*, 1989; JENSEN, 1991) é equivalente a uma distribuição de lei de potência dos tempos de vida. Para o caso bidimensional anteriormente analisado, o expoente é $\alpha = 0,43$ (figura 1.5) e assim o espectro de frequência é dado por $f^{-1,57}$.

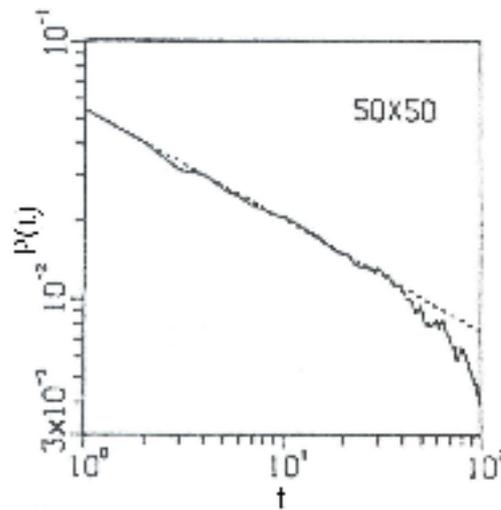


Figura 1.5: Distribuição dos tempos de vida, correspondente à figura 1.4, para um sistema de tamanho 50×50 . O expoente é $\alpha = 0,43$ (BAK *et al.*, 1988).

1.4 Terremotos

Os terremotos podem ser considerados os exemplos mais diretos de fenômenos críticos auto-organizados na natureza. A maior parte do tempo a crosta da Terra está em repouso, em períodos de calmaria. De vez em quando a aparente tranqüilidade é interrompida por surtos intermitentes, às vezes violentos, de atividade. Há poucos terremotos grandes e muito mais terremotos pequenos.

Os terremotos ocorrem como resultado do movimento relativo de placas tectônicas na crosta externa da terra, que se encaixam ao longo de falhas. As placas de um lado a outro das falhas estão sujeitas a um movimento relativo, e a fricção entre elas impede que o movimento relativo ocorra de modo suave. As placas adjacentes permanecem em contato até que a força armazenada na interface torna-se maior do que a força de contato, ou atrito estático, entre as duas placas; então elas deslizam uma em relação à outra. A condução do sistema consiste no movimento relativo das placas tectônicas, que é caracterizado por uma escala de poucos centímetros por ano. Este movimento apresenta o ingrediente chave para SOC, um limiar. A expectativa de que os terremotos sejam sistemas SOC surge de anos de observações da fenomenologia de terremotos. A força que cresce gradualmente ao longo dos anos é liberada em segundos ou minutos durante um catastrófico colapso das ligações que têm restringido o movimento relativo das placas (SCHOLZ⁵; SORNETTE⁶, citados por Jensen (1998)).

⁵Scholz, C. H. (1990), *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge University Press.
Scholz, C. H. (1991), in T. Riste and D. Sherrington (eds.), *Spontaneous Formation of Space-Time Structures and Criticality*. Dordrecht: Kluwer.

⁶Sornette, D. (1991), in T. Riste and D. Sherrington (eds.), *Spontaneous Formation of Space-Time Structures and Criticality*. Dordrecht: Kluwer.

1.4.1 Auto-organização dos terremotos

As falhas tectônicas formam padrões fractais e dados de terremotos do mundo todo mostram um comportamento do tipo lei de potência para as magnitudes dos terremotos medidas ao longo de várias décadas como mostra a figura 1.1. Os resultados empíricos para os terremotos reais apresentados na seção 1.2.1 mostram que os terremotos são fenômenos críticos auto-organizados. As leis de potência empíricas para os tempos de retorno demonstram que os terremotos não são periódicos. Eles apenas ocorrem com algum grau de regularidade. As leis de potência indicam que quanto mais se está esperando desde um grande terremoto em uma dada localização, mais ainda se poderá ter que esperar. Os terremotos estão agrupados no tempo, mas não são periódicos.

A geração de terremotos é representada por um modelo bloco-mola de Burridge-Knopoff⁷, citado por Jensen (1998), em que a falha é representada por uma matriz bidimensional de blocos em contato com uma superfície rugosa (BAK; TANG, 1989). Neste sistema bloco-mola, os blocos estão conectados por molas retas a uma placa superior, que está constantemente em movimento. Estas molas representam a tensão no material próximo a falha devido ao movimento das placas tectônicas. Eles estão também conectados uns aos outros por molas em espiral. Os blocos deslizam em direção a placa em movimento quando a força neles excede um valor crítico, o máximo atrito estático (BAK, 1997).

Esse sistema bloco-mola é equivalente ao sistema de pilha de areia com a inclinação representando a força agindo em uma parte particular da crosta da Terra. No modelo original de pilha de areia a atualização é estritamente conservativa (veja R2), exceto nas bordas. Isso é muito razoável para pilhas de areia. No caso de terremotos não há razão para a conservação de forças, pois a quantidade de força que é transmitida para os vizinhos pode ser menor do que a liberada no deslizamento dos blocos.

⁷Burridge, R., and Knopoff, L. (1967), Bull. Seismol. Soc. Am. 57: 341.

Pensando nisso, Olami *et al.* (1992) mapearam o modelo bloco-mola em um autômata celular contínuo e não conservativo (modelo OFC) onde cada bloco está sujeito a uma força constantemente crescente da placa que se move e a força dos blocos vizinhos. Este modelo será apresentado na seção a seguir.

1.4.2 Modelos de terremotos não conservativos

Considere uma rede bidimensional de tamanho $N = L \times L$. Em cada ponto (i, j) da rede, sendo que i e j variam de 1 a L , é atribuída uma variável dinâmica real E_{ij} . Este campo representa uma energia ou uma força. Especificamente, ela será referida como a energia E_{ij} no sítio (i, j) . O modelo pode ser descrito pelo seguinte algoritmo:

1. Todos os sítios são inicializados com valores randômicos de E_{ij} entre 0 e E_c , onde E_c é um limiar;
2. Se algum sítio satisfizer $E_{ij} \geq E_c$ (sítio crítico) então a energia E_{ij} é distribuída para os vizinhos de acordo com a seguinte regra de relaxação:

$$E_{ij} \rightarrow 0 \text{ e } E_{pv} \rightarrow E_{pv} + \alpha E_{ij},$$

onde pv denota os sítios que são os primeiros vizinhos do sítio crítico (i, j) .

3. O processo (2) é repetido até que todos os sítios sejam novamente subcríticos;
4. Localiza-se o bloco (sítio) com a maior energia E_{max} . Adiciona-se $E_c - E_{max}$ para todos os sítios (perturbação global uniforme) e retorna-se para (2).

Aqui serão consideradas condições de contorno abertas tal que os blocos da borda do sistema estão acoplados a blocos de borda imaginários por meio de molas. Assim, se um dos vizinhos é um sítio de borda a energia αE_{ij} é perdida. Neste modelo uma avalanche é uma cadeia de interações da regra (2).

Durante cada interação (2) uma quantidade de energia sai do sistema, que é a diferença entre a energia que desaparece no sítio central E_{ij} e a energia αE_{ij} adicionada em cada um dos q_i sítios vizinhos. Aqui q_i denota o número de coordenação do i -ésimo sítio na rede: $q_i = q_c = 4$ para um sítio no volume em uma rede bidimensional com a designação de primeiros vizinhos. O número de coordenação para os sítios na superfície do sistema é menor e varia para sítios de superfície, borda e canto. A diferença entre a energia perdida e a energia adicionada é dada por:

$$E_{diss} = (q_i \alpha - 1) E_{ij}. \quad (1.3)$$

Apenas quando $\alpha = 1/q_c$ o algoritmo conserva a variável dinâmica no volume.

Acreditava-se que a conservação fosse um pré-requisito importante para os modelos exibirem comportamento do tipo lei de potência (GRINSTEIN *et al.*, 1990), indicando que a criticalidade na natureza nem sempre seria observada. O comportamento crítico do modelo OFC em um regime não conservativo, $\alpha < 1/q_c$, foi uma surpresa. Assim, o ruído $1/f$ pode emergir de um estado SOC para uma grande classe de modelos.

1.4.3 Criticalidade do Modelo OFC

Agora serão discutidas as evidências numéricas para o comportamento crítico do modelo OFC. O algoritmo é iterado até que um estado estacionário seja atingido, ou seja, um estado em que a distribuição dos tamanhos das avalanches ou dos seus tempos de vida não mude com o tempo. O estado estacionário é atingido muito lentamente. Cerca de 10^8 ou 10^9 avalanches são necessárias para se atingir o estado estacionário em uma rede bidimensional de tamanho $L \sim 10^2$. Este número aumenta quando α é menor que $1/4$ (GRASSBERGER, 1994).

O tamanho de um terremoto é medido em termos da energia E liberada quando as

placas deslizam. Seja $P(E, L)$ a densidade de probabilidade de ocorrer uma avalanche de tamanho E num sistema de tamanho linear L . Se a função distribuição é uma lei de potência, então define-se o expoente B como,

$$P(E, L) \sim E^{-(1+B)}. \quad (1.4)$$

Com esse modelo foram encontrados terremotos de todos os tamanhos seguindo a lei de Gutenberg-Richter (seção 1.2.1). Da densidade de probabilidade do tamanho das avalanches, se tem a impressão de que o modelo permanece crítico para valores de α menores que 1/4 mas não muito próximos a zero (figura 1.6a).

Foi concluído por Christensen e Olami (1992) que a transição de um comportamento crítico com $\alpha > \alpha_c$ para um comportamento não crítico com $\alpha < \alpha_c$ acontece no valor $\alpha_c \simeq 0,05$. Esta conclusão foi obtida olhando as curvas $\log - \log$ da distribuição do tamanho das avalanches e observando que nenhuma parte do gráfico poderia ser fitada com uma linha reta quando α era menor que aproximadamente 0,05. O modelo é não crítico para $\alpha = 0$, já que todas as avalanches estão restritas a um simples sítio e nenhuma interação é possível entre sítios, conforme (2). A densidade de probabilidade $P(E, L)$ para os tamanhos das avalanches exibe uma dependência no nível de conservação α através do expoente B , como mostra a figura 1.6b.

Podemos ver da figura 1.7 que à medida que o tamanho do sistema aumenta a lei de potência se estende para grandes eventos de um modo sistemático que apenas sistemas críticos obedecem. Do contrário, se o sistema não é crítico o corte não é afetado pelo tamanho do sistema.

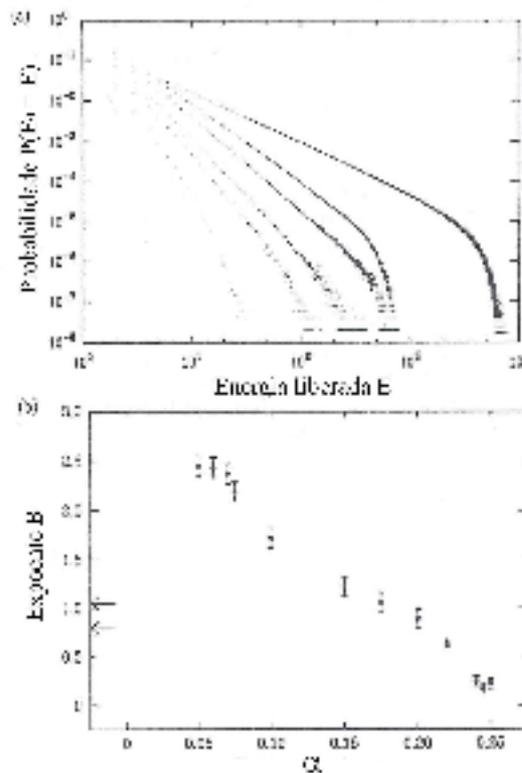


Figura 1.6: (a) Densidade de probabilidade dos tamanhos das avalanches no modelo OFC para diferentes valores do nível de conservação em escala logarítmica para um sistema 35×35 . A inclinação da curva torna-se mais íngreme à medida que α diminui. As curvas correspondem a $\alpha = 0,25; 0,20; 0,15; 0,10; 0,075; 0,025$. Note que o último ponto não é crítico. (b) O expoente da lei de potência em função de α . Abaixo de $\alpha = 0,05$ há uma transição para um decaimento exponencial. As setas indicam, os valores reais de B medidos de terremotos (CHRISTENSEN; OLAMI, 1992).

Um dos aspectos interessantes do modelo é que ele não necessita de ajustes de parâmetros para ser crítico. A crosta da Terra trabalhando ao longo de centenas de milhões de anos tem se auto-organizado em um estado crítico através das placas tectônicas, dinâmica de terremotos e atividade vulcânica; o próximo terremoto pode ser um simples estrondo ou uma catástrofe. Essas observações resumidas pela lei de Gutenberg-Richter são os indicativos de que ocorreu de fato um processo de auto-organização. As placas da crosta são estruturas fractais por si só, sugerindo que elas se originam de outro processo crítico possivelmente associado com o movimento convectivo do material no interior da Terra.

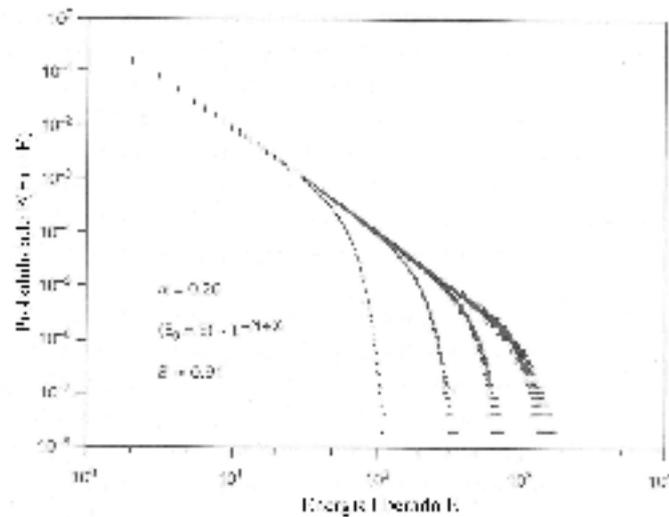


Figura 1.7: Densidade de probabilidade de se ter um terremoto de energia E em função da energia para $\alpha = 0, 2$. O resultado é a reprodução da lei de Gutenberg – Richter. As várias curvas correspondem a diferentes tamanhos do sistema bidimensional, $L = 15; 25; 35; 50$. O corte na energia escala com $L^{2,2}$ (OLAMI *et al.*, 1992).

1.5 Dinâmica de extremos

1.5.1 Aplicação de SOC na biologia

Pouco mais de 20 anos atrás Stephen Gould⁸, citado por Jensen (1998), sugeriu que a evolução acontece através de explosões intermitentes de atividade separadas por longos períodos de calmaria, com pouca atividade em termos de extinções ou emergência de novas espécies, ao invés de seguir o lento e contínuo caminho que Darwin sugeriu. Tal idéia é chamada de equilíbrio pontuado e se refere ao fato de que há uma vasta diferença na escala temporal dos períodos de calmaria e das pontuações intermitentes. Mais tarde, o professor da universidade de Chicago, David Raup⁹, citado por Jensen (1998), apresentou evidências paleontológicas de que as espécies sobrevivem por longos períodos mas desaparecem dentro de um intervalo relativamente curto de anos. Além disso, freqüentemente se observa que a extinção de uma espécie ocorre simultaneamente com a extinção de ou-

⁸Gould, S. J. (1977), *Paleobiology* 3: 135.

⁹Raup, M. D. (1986), *Science* 231:1528.

tras, tipo avalanche de extinções. O número de espécies extintas durante um certo surto de extinções varia muito. Os mais espetaculares eventos são a explosão Cambriana, 500 milhões de anos atrás, com a proliferação de novas espécies, e a extinção Permiana, 250 milhões de anos atrás, onde 96% de todas as espécies foram extintas. Nesses dois eventos ocorreram as maiores avalanches de extinção conhecidas. A evolução de uma simples espécie segue o mesmo padrão. Suas propriedades físicas apresentam um comportamento de equilíbrio pontuado. Quando a evolução e a extinção são tratadas desta forma, imediatamente se percebe similaridades com os outros exemplos de dinâmica SOC discutidos anteriormente. Essas pontuações (ou as avalanches nas pilhas de areia e os terremotos) são consideradas as marcas registradas da SOC.

1.5.2 Extinções em massa e equilíbrios pontuados em um simples modelo de evolução

Darwin via a evolução como um processo lento e gradual em que causas externas (impactos cataclismáticos) seriam responsáveis pelas extinções de massa. A teoria de Darwin é uma formulação concisa de algumas observações gerais para a evolução da vida na Terra, sem equações em uma linguagem matemática rigorosa e se refere à evolução em pequenas escalas, ou seja, micro evolução. É difícil confrontar e possivelmente falsificar a teoria por observações de registro de fósseis porque não se pode extrapolar diretamente de uma escala microscópica para uma escala macroscópica (BAK, 1997).

Em sistemas críticos auto-organizados, a maior parte das mudanças freqüentemente se concentra dentro de grandes eventos, então a dinâmica de avalanches representa a ligação entre a visão de evolução contínua de Darwin e as pontuações representando mudanças repentinas tanto qualitativas como quantitativas.

Bak e Sneppen (1993) introduziram um modelo no qual a população total de uma espécie é representada em termos do seu *fitness*. O *fitness* seria uma quantidade relativa

que depende das aptidões de sobrevivência das espécies. Por simplicidade, o *fitness* de uma espécie é representado por um simples valor (um número randômico) que é atualizado em cada mutação da espécie. A estabilidade de cada espécie é caracterizada por uma barreira separando seu máximo local de *fitness* de outro máximo melhor. A espécie com a menor adaptação está sujeita a menor barreira de *fitness*. A escala temporal de mutação é exponencial na altura de barreira, pois quando o *fitness* é alto, é difícil encontrar um máximo melhor na sua proximidade, então estes estados são mais estáveis. Isso justifica a seleção da menor barreira para a mutação. Sendo assim, Bak-Sneppen (BS) escolheram a espécie com o menor valor de *fitness* (menor barreira) para a eliminação e então substituí-la por uma nova espécie. Aliás, Darwin invocava a sobrevivência daquele mais adaptado, ou de modo equivalente, a eliminação daquele menos adaptado. Este passo fundamental pode ser pensado como uma mutação de toda a população da espécie de menor adaptação em uma diferente espécie (pseudo-extinção) ou sua extinção seguida pela substituição de outra com diferentes propriedades no seu nicho ecológico, que é definido por seu acoplamento a outras espécies com as quais ela interage.

Vamos considerar apenas a versão unidimensional do modelo BS, embora a generalização para dimensões arbitrárias possa ser feita imediatamente. As espécies estão situadas num anel, ou seja, considera-se uma rede unidimensional de N sítios com condições de contorno periódicas. Cada espécie interage com seus dois primeiros vizinhos no anel. Isto representaria algo como uma cadeia alimentar, onde cada espécie tem seu predador à esquerda e sua presa à direita (podendo em princípio ter uma relação simbiótica com cada um dos seus dois vizinhos). No início da simulação, para cada sítio x é atribuído um número $B(x) \in [0, 1]$ de barreira de *fitness*. A espécie x terá que superar uma certa barreira a fim de evoluir em direção a um *fitness* maior. Depois, localiza-se a posição x_{min} do sítio com a menor barreira $B(x)$. A espécie x_{min} sofre uma mutação randômica e o mais provável é que seu *fitness* será melhorado. Então a mutação é descrita pela substituição do valor atual $B(x_{min})$ por um novo número randômico escolhido com

uma probabilidade uniforme no intervalo $[0, 1]$. A mudança das propriedades da espécie x_{min} induz uma mudança na vida das espécies em contato com ela. Para representar isso, substitui-se também as barreiras $B(x_{min} - 1)$ e $B(x_{min} + 1)$ por novos números randômicos do intervalo $[0, 1]$ (BAK; SNEPPEN, 1993). O algoritmo de atualização pode ser resumido da seguinte maneira:

- Localiza-se o sítio x_{min} com o menor valor de $B(x)$.
- Realiza-se as substituições:

$$B(x_{min} - 1) \rightarrow u_1,$$

$$B(x_{min}) \rightarrow u_2,$$

$$B(x_{min} + 1) \rightarrow u_3,$$

onde $u_i \in [0, 1]$ são números randômicos tomados de uma densidade uniforme.

No início das simulações $B(x)$ cresce em média, já que as espécies com menor adaptação são sempre eliminadas. A figura 1.8 mostra o valor de $B(x)$ das espécies menos adaptadas contra o tempo. Embora hajam flutuações para cima e para baixo, há uma tendência geral de crescimento do valor médio da barreira de fitness até que ele não cresce mais em média. Neste caso, todas as espécies têm valores de barreira de fitness acima de um certo limiar, $B_c = 0,6670$ (PACZUSKI *et al.*, 1996). Nenhuma espécie com barreira de fitness maior do que este limiar será selecionada para mutação espontânea; elas nunca terão o menor valor de barreira. Entretanto, seus destinos podem mudar se seus vizinhos fracos mutarem.

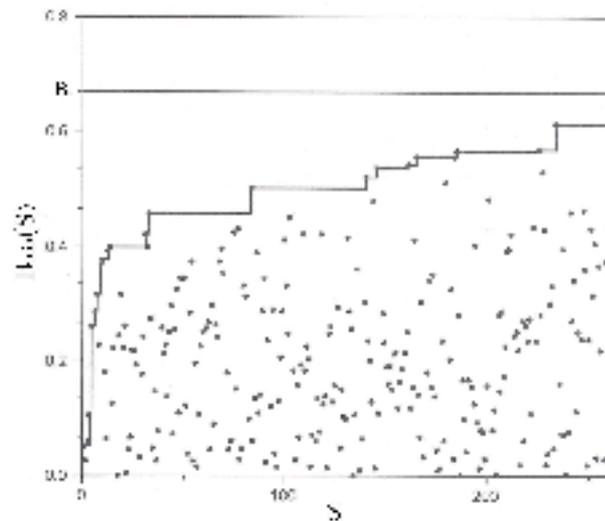


Figura 1.8: Barreira de *fitness* das espécies menos adaptadas versus o número s de passos de atualização em um modelo de evolução com apenas 20 espécies. A função envelope, que define o limiar de barreira de *fitness*, aumenta em forma de degraus. Uma avalanche começa quando há um degrau e termina no próximo, onde uma nova começa. A função envelope eventualmente atinge o valor crítico B_c (BAK, 1997).

A figura 1.9 mostra uma imagem instantânea das barreiras de *fitness* de todas as espécies no meio de uma avalanche em uma ecologia consistindo de 300 espécies. Note que a maior parte das espécies está acima do limiar, mas há um conjunto de espécies muito ativas com barreiras de *fitness* abaixo dele e que serão selecionadas para mutação.

As regras dinâmicas simples do modelo BS conduzem a um comportamento interessante. A distribuição das barreiras desenvolve-se em direção a uma função degrau (figura 1.10) que é atingida depois de um período de transiente. No limite de tamanho infinito do sistema, a distribuição é caracterizada por um simples parâmetro B_c . Para $B < B_c$ a distribuição é zero, $P(B) = 0$. Quando $B > B_c$, a distribuição assume o valor constante $P(B) = 1/(1 - B_c)$ determinado pela condição de normalização. Esta figura também mostra a distribuição das barreiras de mínimo $p_{min}(B)$. A função de correlação usual de dois pontos exibe decaimento algébrico, que é característico de um sistema crítico. Pode-se encontrar que $G(x) = \langle B(x')B(x+x') \rangle_x - \langle B(x') \rangle^2 \sim x^{-\eta} e^{-x/x_0}$, onde $\eta \simeq 0,7$ e

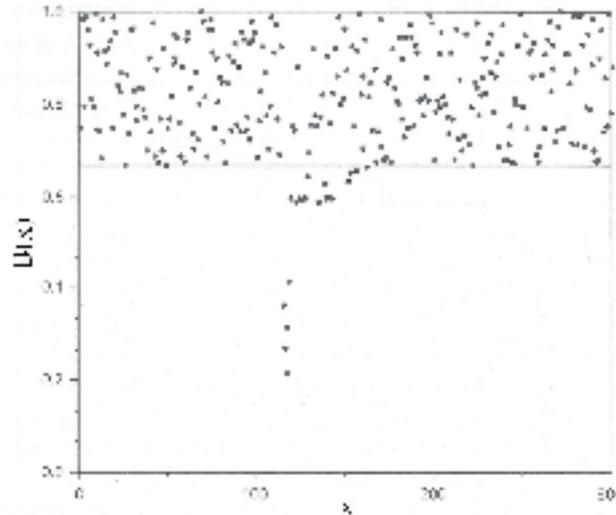


Figura 1.9: Imagem instantânea das barreiras de *fitness* no estado estacionário crítico do modelo de evolução. Todas as barreiras do sistema estão acima do limiar auto-organizado $B_c = 0,6670$, exceto para uma região localizada onde há relativamente poucas barreiras de *fitness* devido a uma avalanche (BAK, 1997).

$x_0 \rightarrow \infty$ quando $L \rightarrow \infty$ (DATTA *et al.*¹⁰, citado por Jensen (1998)).

É também possível definir explosões de avalanches neste modelo. Seja $B_{min}(t)$ o menor dos valores de $B(t)$ presentes no instante t . Quando o modelo é atualizado, o valor $B_{min}(t)$ muda. Sendo B_0 algum valor fixo de B , pode-se agora medir o intervalo de tempo entre sucessivas atualizações em que $B_{min}(t)$ passa pelo valor B_0 . Assumindo que $B_{min}(t) > B_0$ mas que, $B_{min}(t') < B_0$ para $t < t' < T$ e $B_{min}(T + t) > B_0$, diz-se então que uma avalanche de duração (ou tempo de vida) T aconteceu. Se $B_0 = B_c$ encontra-se que a densidade de probabilidade dos tempos de vida das avalanches $P(T)$ exibe o comportamento de lei de potência $P(T) \sim 1/T^\alpha$, onde $\alpha \simeq 1,0$ (figura 1.11). O tamanho s de uma avalanche é o número total de eventos de mutação e, como apenas um sítio é ativo em cada passo de tempo, a distribuição dos tamanhos é igual a distribuição dos tempos de vida (BAK; SNEPPEN, 1993).

Há avalanches de todos os tamanhos sendo que pequenas e grandes avalanches são causadas pelo mesmo mecanismo. Não faz sentido distinguir entre extinções de fundo

¹⁰Datta, A., Gilhøj, H., and Jensen, H. J. (1997).

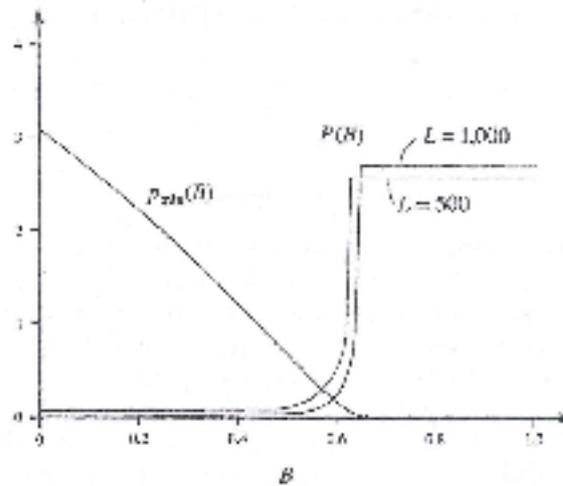


Figura 1.10: Densidade de probabilidade para a barreira de *fitness* no modelo Bak – Sneppen. A dependência no tamanho de $p_{min}(B)$ (a distribuição das barreiras de mínimo) não é visível na escala da figura (JENSEN, 1998).

acontecendo o tempo todo e catástrofes ecológicas maiores. Várias versões do modelo foram simuladas com diferentes atualizações da espécie de menor barreira e de seus vizinhos. Todas forneceram sempre o mesmo valor de expoente. Deste modo, o resultado é universal. O sistema se auto-organizou em um estado crítico.

A natureza crítica do estado estabelecido pela ação repetitiva do algoritmo de atualização pode ser vista em um grande número de quantidades. Por exemplo, pode-se estudar também a distribuição de distâncias $\delta x = |x_{min}(t + 1) - x_{min}(t)|$ entre atualizações sucessivas. A densidade de probabilidade encontrada se comporta algebricamente de acordo com $P(\delta x) \sim \delta x^{-\alpha}$ com $\alpha \simeq 3,1$ (BAK; SNEPPEN, 1993). Esta forma algébrica de $P(\delta x)$ está relacionada a correlações entre os sítios atualizados.

Os mecanismos de Darwin de seleção da variação de maior adaptação na ecologia das espécies não conduzem a uma mudança ecológica gradual, e sim a uma ecologia em que as mudanças acontecem em termos de avalanches ou pontuações. As simulações numéricas apresentadas demonstram que não há contradição entre a teoria de Darwin e os equilíbrios pontuados. O modelo BS está no contexto da teoria de Darwin, contudo exhibe

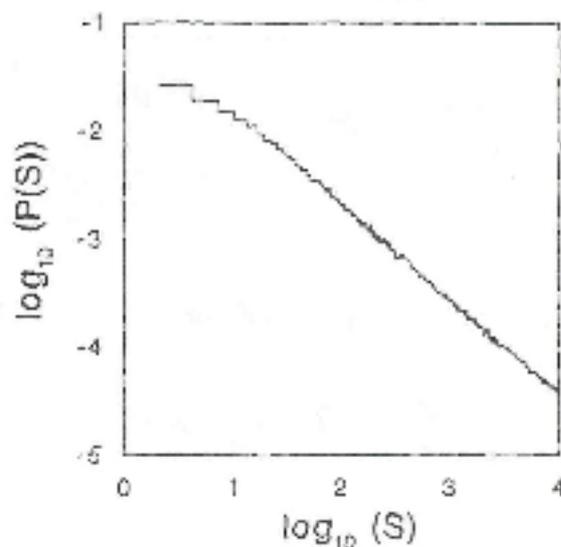


Figura 1.11: Distribuição dos tamanhos das avalanches no estado crítico. Uma avalanche é definida como uma seqüência de atividade abaixo da barreira $B = 0,65$ (BAK; SNEPPEN, 1993).

equilíbrios pontuados.

O conceito de equilíbrio pontuado ilustra a criticalidade de um sistema complexo. Os sistemas podem lembrar o passado por causa dos longos períodos de calma permitindo a eles preservar o que eles tinham aprendido da história, imitando o comportamento de sistemas congelados; eles podem evoluir por causa dos surtos (explosões) intermitentes de atividade.

Para obter uma visão geral da evolução do modelo, se pode fazer um gráfico espaço-temporal da atividade evolucionária (figura 1.12). O eixo x representa a espécie x e o eixo y o tempo. O gráfico começa em um tempo arbitrário depois que o sistema atingiu o estado crítico auto-organizado. Os círculos indicam os tempos em que uma dada espécie sofreu uma mutação. O gráfico resultante é um fractal. Começando de uma simples espécie mutante, o número R de espécies que serão em média afetadas depois de um grande número S de atualizações é uma lei de potência $S - R^D$, onde o expoente D ($\sim 2,3$) é chamado de dimensão fractal da avalanche (BAK, 1997).

Para monitorar o destino de uma espécie individual, uma espécie será observada,

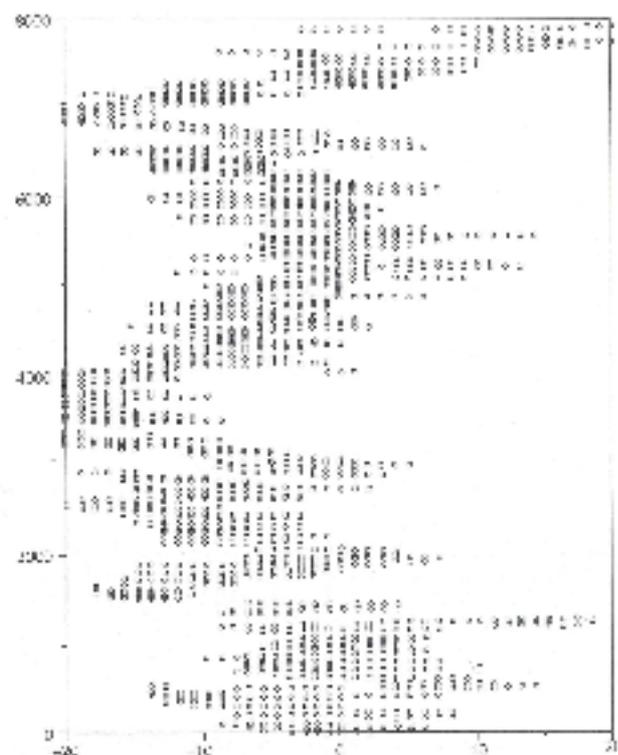


Figura 1.12: Padrão de atividade para o modelo de evolução. Para cada espécie, os pontos no tempo onde ela sofreu uma mutação são mostrados como círculos. O tempo é medido como o número de passos de atualização. O padrão é um fractal no tempo e no espaço (BAK, 1997).

por exemplo, aquela situada na origem do eixo x . À medida que percorremos ao longo da linha vertical do tempo encontramos longos períodos em que não há círculos, que são os períodos de calmaria. Também há alguns pontos no tempo onde há muita atividade. Contando o número de eventos de mutação encontrados à medida que percorremos ao longo da direção temporal, obtém-se a figura 1.13 que representa o número acumulado de mutações da espécie selecionada em função do tempo. Este número pode representar a quantidade de mudança física em função do tempo. A natureza de equilíbrio pontuado da curva é óbvia. Há longos períodos de calmaria, onde não há atividade, separados por explosões de atividade. Tal curva é chamada de escada do Diabo por causa dos seus passos fractais, alguns muito grandes, mas a maior parte deles muito pequenos (BAK, 1997).

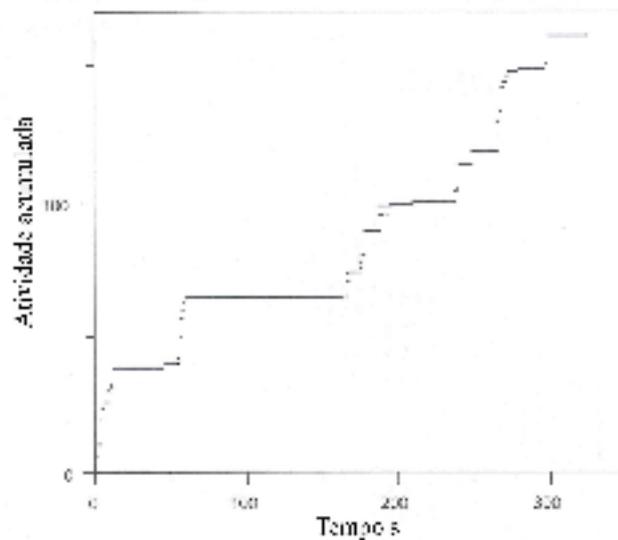


Figura 1.13: Equilíbrios pontuados no modelo de evolução. A curva mostra o número de eventos de mutação para uma simples espécie, que é o número de círculos encontrados quando se percorre ao longo da direção vertical através do fractal mostrado na figura 12 (BAK, 1997).

Para comparar os resultados das simulações com dados reais do paleontólogo John Sepkoski de eventos de extinção da história evolucionária da vida na Terra, separados em intervalos de 4 milhões de anos, Sneppen *et al.* (1995) amostraram as taxas de extinções (ou pseudo-extinções) ocorridas em uma janela temporal de algumas centenas de passos de tempo. Deste modo eles geraram um registro artificial de extinções que corresponde à figura 1.14a (BAK, 1997). Note a similaridade com a figura 1.3a referente aos dados de Sepkoski.

O histograma de Raup dos dados de Sepkoski na figura 1.3b pode ser razoavelmente bem ajustado a uma lei de potência com expoente entre 1 e 3, com eventos de grande extinção ocorrendo na cauda da distribuição. Por comparação, a figura 1.14b mostra a distribuição dos eventos de extinção do modelo em questão. O ponto importante é que o histograma é uma curva suave sem picos fora da escala para grandes eventos de extinção (BAK, 1997).

A figura 1.15 mostra as mutações acumuladas de uma simples espécie, a escada do Diabo, juntamente com o gráfico da atividade global de extinções. As espécies indivi-

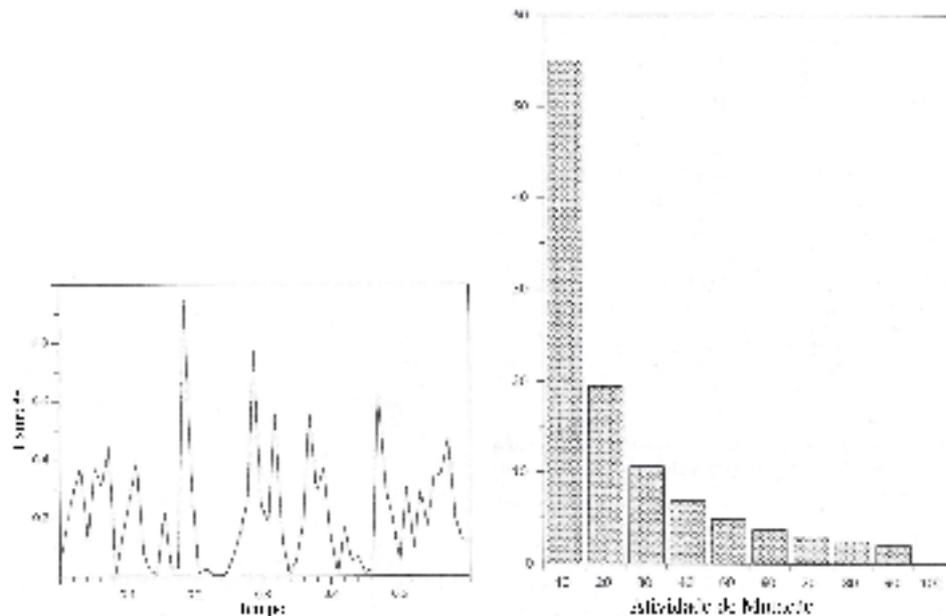


Figura 1.14: (a) Registro artificial de eventos de extinção do modelo de equilíbrio pontuado. Note a similaridade com a curva de Sepkoski para a evolução real (figura 1.3a). (b) Distribuição de eventos no modelo de evolução. Compare com os dados de Raup (figura 1.3b). Os eventos podem ser pensados como extinções ou pseudo-extinções onde uma espécie desaparece por mutar em outra espécie (BAK, 1997).

duais mudam durante períodos onde há uma grande atividade geral, embora nem todas as avalanches afetem as espécies que estão sendo monitoradas. As extinções sincronizadas são uma consequência da criticalidade da ecologia global, conectando os destinos de várias espécies, como os grãos de areia no modelo de pilha de areia.

As propriedades estatísticas reais dos registros de extinções suportam a visão que a evolução biológica é um fenômeno crítico auto-organizado.

O fato de que o histograma de eventos de extinção é uma curva suave indica que o mesmo mecanismo é responsável por pequenos e grandes eventos de extinções. Do contrário, o tamanho e a frequência desses grandes eventos não teria correlação com os eventos de extinção menores.

Os agentes externos, como a queda de um meteoro, podem representar um evento de engatilhamento que inicialmente afetaria uma ou algumas espécies, e isso poderia levar

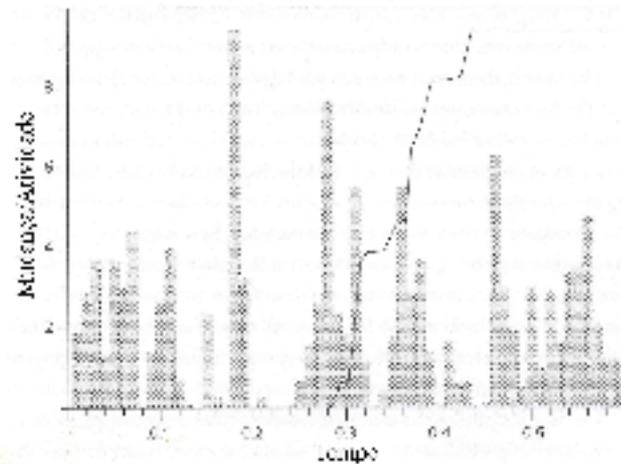


Figura 1.15: Atividade global versus a local no modelo de evolução. A taxa de extinção global está indicada pelo histograma. A curva mostra a evolução de uma simples espécie escolhida randomicamente. Os surtos de intensa atividade acontecem durante períodos de grande atividade geral de extinção (BAK, 1997).

a uma extinção em massa. Tal extinção aconteceria devido ao cenário que vinha sendo preparado pela história evolucionária prévia, preparando a ecologia global no estado crítico.

Dentro da representação de SOC toda a ecologia evolui para um estado crítico. Não faz sentido ver a evolução de espécies individuais independentemente. A simulação do modelo de evolução, monitorando o número acumulado de mutações de um dado sítio, é apresentada na figura 1.16. Identificando o evento que iniciou uma das maiores avalanches envolvendo aquele particular sítio, que eventualmente estava a uma certa distância da espécie monitorada, pode-se eliminá-lo substituindo seu *fitness* por um valor maior e então evitando a extinção naquele sítio. Então roda-se a simulação novamente. Os números randômicos escolhidos foram os mesmos que os da simulação anterior. No ponto onde a pequena perturbação foi feita a história mudou. A grande pontuação foi evitada, entretanto, isto não evitou outros desastres. Outras pontuações ocorreram em pontos posteriores. Sendo assim, grandes flutuações não podem ser evitadas pela manipulação local na tentativa de remover a fonte da catástrofe. Por causa da grande sensibilidade do estado crítico, uma pequena perturbação conseqüentemente afetará o comportamento em todo

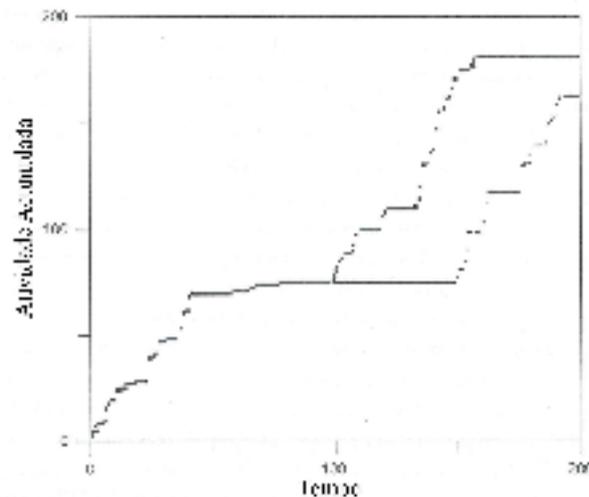


Figura 1.16: Depois de rodar o modelo de evolução (curva mais grossa), ele foi rodado novamente com um número randômico trocado, de modo que um evento de mutação foi eliminado (curva quebrada). Um evento de extinção catastrófico foi evitado, mas outros ocorreram mais tarde na história evolucionária (BAK, 1997).

lugar (BAK, 1997).

1.6 A busca por um formalismo

SOC foi introduzida por Bak *et al.* (1987). Para confirmar esta hipótese, simulações de um simples algoritmo foram apresentadas. Uma boa compreensão analítica ficou faltando por algum tempo. Logo, entretanto, ferramentas matemáticas padrão foram sendo aplicadas ao novo conjunto de modelos. A mecânica estatística tradicionalmente faz uso de uma combinação de aproximações, algumas das quais consistem em definir modelos que tenham uma estrutura que permita algum cálculo exato de quantidades específicas. Deepak Dhar e seus colaboradores conseguiram resolver analiticamente uma versão levemente alterada (pilha de areia Abelian) do autômata celular original de Bak *et al.* (1987) (DHAR¹¹, citado por Jensen (1998)). Depois deste trabalho ficou claro que, pelo menos em alguns casos, o comportamento crítico observado não é meramente um artefato de

¹¹Dhar, D., and Ramaswamy, R. (1989), Phys. Rev. Lett. 63: 1659.
Dhar, D., (1990), Phys. Rev. Lett. 64: 1613.

simulações em sistemas muito pequenos.

No entanto, apesar da beleza, as soluções exatas envolviam uma matemática específica que tendia a acrescentar detalhes dos modelos a serem resolvidos. Frequentemente isto tornava impossível a generalização da solução para outros modelos similares. Nas dinâmicas de estatística de equilíbrio, bem como no estudo dirigido de sistemas com vários graus de liberdade, várias aproximações têm sido desenvolvidas a fim de calcular de um modo sistemático o comportamento de longa escala e de longo tempo dos modelos.

A virtude dos métodos mais rigorosos é que eles podem produzir previsões confiáveis. Entretanto, a complexidade matemática pode ser inconveniente. É então usual fazer uma análise quantitativa grotesca dos sistemas considerados, uma análise que se espera que descreva as principais características corretamente, embora ela possa ser incorreta em alguns detalhes. A teoria de campo médio é um exemplo de tal aproximação.

1.6.1 Teoria de Campo Médio

A teoria de campo médio consiste de uma estimativa do comportamento médio de muitos graus de liberdade interagentes. Há vários tipos de teorias de campo médio e sua característica comum é que o comportamento detalhado dos vizinhos (os detalhes específicos dos arredores) é substituído por um comportamento médio típico. Para ilustrar o uso de argumentos de campo médio na análise de modelos SOC, será discutida a natureza do estado crítico no modelo da pilha de areia, o papel da não conservação no modelo de terremoto e a distribuição da barreira no modelo da evolução. O ponto forte da teoria de campo médio é sua simplicidade, no entanto, a supersimplificação assumida é ao mesmo tempo sua maior fraqueza. É claro que não se espera que os cálculos de campo médio sejam quantitativamente precisos. A esperança, no entanto, é que suas previsões sejam qualitativamente corretas.

1.6.2 Modelo da Pilha de Areia

Considere a versão de vizinhos randômicos do autômata celular da pilha de areia (BAK *et al.*, 1987). O efeito de atribuir vizinhos randômicos ao invés do arranjo de primeiros vizinhos é destruir a correlação espacial. Neste sentido, vamos considerar o modelo de vizinhos randômicos como um tipo de teoria de campo médio.

O modelo é aquele definido na seção 1.3 exceto que são escolhidos $q_c = \alpha z_c$ novos vizinhos randomicamente cada vez que um sítio i qualquer satisfaz $z_i \geq z_c$ (CHRISTENSEN; OLAMI, 1993). Aqui q_c denota o número de coordenação do sítio e α o nível de conservação do modelo. Cada um dos sítios escolhidos randomicamente recebe uma unidade de areia, $z_{vr} \rightarrow z_{vr} + 1$. O sítio supercrítico perde z_c grãos de areia, ou seja, $z_i \rightarrow z_i - z_c$. Como apenas αz_c sítios recebem um grão de areia o modelo é não conservativo, exceto se $\alpha = 1$ e com isso se introduz um elemento de dissipação. A perturbação utilizada é a não conservativa. Dessa forma, a dinâmica é dada por:

- Configuração inicial randômica: $\{z_i\}_{i=1}^N$ tal que $z_i < z_c \forall i$
- Sorteia-se randomicamente um sítio i : $z_i \rightarrow z_i + 1$
- Se $z_i \geq z_c$ (sítio ativo):
$$\begin{cases} z_i \rightarrow z_i - z_c \\ z_{vrk} \rightarrow z_{vrk} + 1, k = 1, \dots, \alpha z_c \end{cases}$$
- O processo continua até que $z_i < z_c \forall i$ (estado estático).
- Uma nova perturbação é feita.

Pode-se pensar na evolução das avalanches do modelo como um tipo de processo de ramificação (HARRIS¹², citado por Jensen (1998)). A figura 1.17 ilustra essa estrutura do tipo árvore criada pelo processo de ramificação.

¹²Harris, T. E. (1963), *The Theory of Branching Processes*. Berlin: Springer-Verlag.

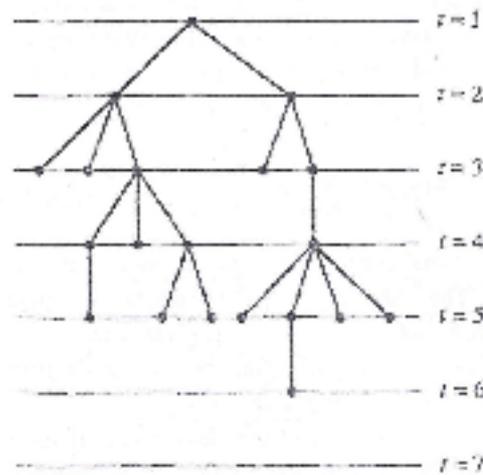


Figura 1.17: Uma árvore gerada pelo processo de ramificação (JENSEN, 1998).

O processo começa no topo e cada nodo se ramifica em n nodos. Denota-se P_n como a probabilidade de que o nodo se divida em $n = 0, 1, 2, \dots$, ramos. Um sítio ativo pode induzir de 0 a q_c novos sítios ativos. A evolução temporal de uma avalanche pode ser considerada como um processo de ramificação em que de 0 a q_c novos ramos podem surgir. O número médio de novos ramos é chamado de taxa de ramificação $\sigma = \langle n \rangle$. A probabilidade de que uma árvore em um processo de ramificação com taxa σ desenvolva s nodos antes de parar é dada por:

$$P(s) \sim s^{-3/2} \exp\left(-\frac{s}{s_0(\sigma)}\right). \quad (1.5)$$

O corte exponencial s_0 diverge quando $\sigma \rightarrow 1^-$ de acordo com $s_0(\sigma) \sim (1 - \sigma)^{-2}$.

A distribuição do tamanho das árvores é igual à distribuição do tamanho das avalanches se a pilha de areia for considerada como um processo de ramificação. A probabilidade de ramificação é facilmente expressa em termos da densidade de probabilidade $P(z)$. Aqui $P(z)$ denota a probabilidade que a variável dinâmica z_i , de uma escolha arbitrária do sítio i , assumo o valor z , onde z é um inteiro. Um sítio se torna supercrítico quando $z_i \geq z_c$. Então os q_c grãos distribuídos quando um sítio relaxa induzirão novas

relaxações ou novos ramos quando eles são adicionados em sítios com $z = z_c - 1$. Como os vizinhos são escolhidos randomicamente a probabilidade de que a relaxação do sítio ativo induza n novos sítios ativos é dada por,

$$p_n = K_{q_c, n} P^n(z_c - 1) (1 - P(z_c - 1))^{q_c - n} \quad (1.6)$$

(CHRISTENSEN; OLAMI, 1993), onde $K_{i,j}$ são os coeficientes binominais,

$$K_{q_c, n} = \frac{q_c!}{n!(q_c - n)!}. \quad (1.7)$$

A taxa de ramificação média é dada por,

$$\sigma = \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{q_c} n p_n = q_c P(z_c - 1). \quad (1.8)$$

As probabilidades $P(z)$ para $z < z_c$ são facilmente determinadas de suas equações mestras no estado estacionário. A equação mestra expressa a mudança de $P(z)$ com o tempo. Se $P(z, t)$ denotar a probabilidade de que um sítio no sistema assuma o valor z no tempo t , a probabilidade $P(z, t + 1)$ no passo de tempo seguinte é dada por:

$$P(z, t + 1) = P(z, t) + \sum_{z'} [W_{z, z'; t} P(z', t) - W_{z', z; t} P(z, t)]. \quad (1.9)$$

A fração de estados que mudam o valor da sua variável z de z' para z durante um passo de tempo (matriz de transição) é denotada por $W_{z, z'; t}$. O primeiro termo dentro dos colchetes corresponde aos sítios (taxa) que mudam seus valores de z de algum $z' \neq z$ para z ; este processo aumenta $P(z, t + 1)$. O segundo termo corresponde aos sítios que mudam seus valores de z para algum outro valor. Durante um passo de tempo um sítio mudará seu valor de z por uma quantidade igual ao número de vezes que ele foi escolhido (randomicamente) como um vizinho de um sítio ativo. A probabilidade que um sítio seja escolhido

como vizinho é $1/N$ em um sistema de tamanho N , isto é, a probabilidade de que um sítio seja escolhido como vizinho de k sítios ativos é N^{-k} . No limite quando $N \rightarrow \infty$ pode-se negligenciar a possibilidade $k > 1$. Nesta aproximação, um sítio pode receber no máximo um grão por passo. Isso é útil, pois as probabilidades de transição conectam valores de z que diferem precisamente por um grão, ou seja, uma unidade. Quando um sítio fica ativo ele induz uma mudança no valor de z em q_c outros sítios. Sendo assim temos que,

$$W_{z,z';t} = \frac{q_c n_t}{N} \delta_{z-1,z'}, \quad (1.10)$$

onde n_t é o número de sítios ativos no sistema no tempo t e $\delta_{i,j}$ denota a função delta de Kronecker. De (1.9) obtém-se que,

$$P(z, t+1) - P(z, t) \sim [P(z-1, t) - P(z, t)]. \quad (1.11)$$

Então, no estado estacionário independente do tempo, onde $P(z, t+1) - P(z, t) = P(z)$, conclui-se que $P(z-1) = P(z)$ para todo $z = 0, 1, 2, \dots, z_c - 1$. Normalizando, ou seja, usando que $\sum_{z=0}^{z_c-1} P(z) = 1$, obtém-se que $P(z) = 1/z_c$ para todo $z < z_c$.

De (1.8) obtém-se que a taxa de ramificação é $\sigma = \alpha$. Da expressão em (1.5) para a distribuição dos tamanhos das árvores temos que se $\alpha = 1$ (modelo conservativo) $P(s) \propto s^{-3/2}$ e o sistema é crítico. Quanto ao modelo BTW não conservativo ($\alpha < 1$) de vizinhos randômicos, ele não é crítico, pois o tamanho médio de uma avalanche é $\langle s \rangle = 1/(1-\alpha) < \infty$, o que implica que $s_0 < \infty$ e, portanto, $P(s) \propto s^{-3/2} \exp(-s/s_0)$. Para tamanhos de avalanches $s < s_0$ a distribuição do tamanho das avalanches comporta-se como uma lei de potência, mas o corte exponencial em $s_0(\alpha)$ é independente de N . Esta conclusão está de acordo com os resultados das simulações do modelo BTW de vizinhos randômicos (CHRISTENSEN; OLAMI, 1993).

1.6.3 Modelos de terremotos

O objetivo desta seção é calcular a taxa de ramificação σ para o modelo OFC não conservativo (definido na seção 1.4.2) e calcular o número médio de sítios que se tornam ativos devido a energia distribuída durante a relaxação de um sítio crítico (LISE; JENSEN, 1996). Considere um sítio subcrítico $E < E_c$; a quantidade αE é distribuída para q_c vizinhos. Seja $P_+(E)$ a probabilidade que um sítio subcrítico torne-se crítico como resultado de receber a energia αE . O número médio de relaxações induzidas pela distribuição de q_c pacotes de energia αE é dado por,

$$\sigma = q_c \frac{\int_{E_c}^{\infty} P_+(E) P(E|E \geq E_c) dE}{\int_{E_c}^{\infty} P(E|E \geq E_c) dE}. \quad (1.12)$$

A probabilidade de que um sítio crítico possua energia E é denotada por $P(E|E \geq E_c)$. A probabilidade $P_+(E)$ é igual a probabilidade que a energia recebida pelo sítio esteja no intervalo $[E_c - \alpha E, E_c]$; esta probabilidade é igual a integral,

$$P_+(E) = \int_{E_c - \alpha E}^{E_c} P(\tilde{E}) dE, \quad (1.13)$$

onde $P(\tilde{E})$ é a densidade de probabilidade da variável do sítio. Infelizmente não há como calcular essa distribuição exatamente. Como uma grosseira aproximação assume-se que $P(\tilde{E})$ é uniforme no intervalo $[0, E_c]$, embora este não seja o caso. Nesta aproximação, $P_+(E) = \alpha E/E_c$ e considerando (1.12) obtém-se que,

$$\sigma = \frac{q_c \alpha}{E_c} \frac{\int_{E_c}^{\infty} E P(E|E \geq E_c) dE}{\int_{E_c}^{\infty} P(E|E \geq E_c) dE} = \frac{q_c \alpha}{E_c} \langle E^+ \rangle, \quad (1.14)$$

onde $\langle E^+ \rangle$ é a energia média dos sítios críticos da relaxação. Pode-se estimar $\langle E^+ \rangle$ da

seguinte maneira (foi colocado um + sobrescrito nos valores de energia supercríticos). O sítio subcrítico j contém a energia $E_j(t)$ no tempo t e ao receber $\alpha E_i^+(t)$ do sítio crítico i , o sítio j se torna supercrítico, ou seja, $E_j^+(t+1) = E_j(t) + \alpha E_i^+(t)$. Fazendo a média sobre os possíveis valores de $E_i^+(t)$, assumindo que $E_j(t) \in [E_c - \alpha E_i^+(t), E_c]$, se obtém que,

$$\langle E_j^+(t+1) \rangle = \langle E_j(t) \rangle + \alpha \langle E_i^+(t) \rangle, \quad (1.15)$$

Usando novamente a aproximação uniforme para $P(E)$ temos,

$$\langle E_j(t) \rangle = E_c - \frac{1}{2} \alpha \langle E_i^+(t) \rangle. \quad (1.16)$$

A média não pode depender do índice do sítio (porque foram negligenciados os efeitos de superfície) ou do instante de tempo, então, $\langle E_j^+(t+1) \rangle = \langle E_i^+(t) \rangle = \langle E^+ \rangle$. De (1.15) obtém-se que,

$$\langle E^+ \rangle = \frac{E_c}{1 - \alpha/2}. \quad (1.17)$$

Sendo assim, a equação para a taxa de ramificação se reduz a,

$$\sigma = \frac{q_c \alpha}{1 - \alpha/2}. \quad (1.18)$$

Esta expressão prediz que a taxa de ramificação se torna menor do que 1 quando,

$$\alpha < \alpha_c = \frac{2}{1 + 2q_c}. \quad (1.19)$$

A taxa de ramificação menor que 1 é equivalente a distribuição dos tamanhos de avalanches com decaimento exponencial. A predição pelo cálculo de campo médio é que o modelo OFC bidimensional ($q_c = 4$) é crítico para $\alpha \geq 2/9$. O modelo OFC de primeiros vizinhos permanece crítico para valores de α menores que $2/9$. Esta discrepância não é uma surpresa. Espera-se que a versão de vizinhos randômicos do modelo OFC seja mais

próxima da descrição de campo médio.

A versão de vizinhos randômicos é definida como no caso dos primeiros vizinhos (seção 1.4.2), exceto que os vizinhos são designados de forma diferente. Quando se atualiza um sítio (i, j) escolhe-se randômicamente q_i diferentes sítios entre os $N - 1$ restantes. Pode-se levar em conta o efeito de borda aberta se um sítio a ser relaxado, de acordo com (2), for considerado como um sítio do volume (isto é, $q_c - 4$) com probabilidade $p_{\text{volume}} = (L - 1)^2/L^2$ ou um sítio de superfície ($q_i - 3$) com probabilidade $1 - p_{\text{volume}}$. Em cada atualização novos vizinhos são atribuídos e, portanto, a estrutura espacial da rede é perdida.

De fato a transição de um comportamento crítico para um não crítico para este modelo é encontrada numericamente quando α torna-se menor do que aproximadamente $2/9$. De simulações bidimensionais (figura 1.18) obtém-se que para $\alpha > \alpha_c \simeq 2/9$ a densidade segue uma lei de potência, $P_\alpha(s) \sim 1/s^\tau$ com $\tau \simeq 3/2$ (LISE; JENSEN, 1996). O comportamento de lei de potência é interrompido apenas pelo tamanho finito do sistema para $\alpha > \alpha_c$. Para $\alpha < \alpha_c$ a distribuição dos tamanhos é bem aproximada por:

$$P_\alpha(s) \sim s^{-3/2} \exp(-s/s_0). \quad (1.20)$$

Aqui o tamanho característico s_0 diverge de acordo com $s_0 \sim (\alpha_c - \alpha)^{-\nu}$, onde $\nu \simeq 3/2$, quando α se aproxima do valor crítico α_c . Como s_0 é independente de L , é preciso considerar o sistema como não crítico para $\alpha < \alpha_c$.

A taxa de ramificação para o modelo OFC bidimensional de vizinhos randômicos também foi simulada. Apenas quando $\alpha \geq 2/9$ o limite $L \rightarrow \infty$ de $\sigma(L)$ é igual a unidade. Uma mudança no comportamento para $\alpha \simeq 0,225$ pode ser claramente vista da figura 1.19.

A expressão (1.18) conduz a uma taxa de ramificação maior que 1 quando $\alpha > 2/9$. Isto implica em um crescimento exponencial das avalanches, um tipo de comportamento

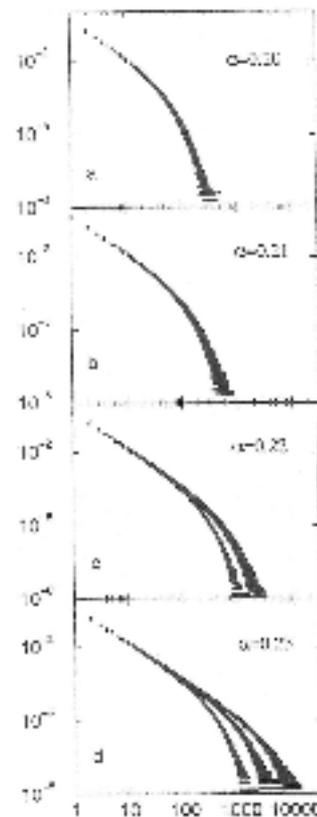


Figura 1.18: Distribuição dos tamanhos das avalanches para $L=100, 200$ e 400 . (a) $\alpha = 0,20$, (b) $\alpha = 0,21$, (c) $\alpha = 0,22$ e (d) $\alpha = 0,23$ (LISE; JENSEN, 1996).

supercrítico. Isto não é o que acontece nas simulações do modelo OFC de vizinhos randômicos. Nas simulações, $\sigma < 1$ para $\alpha < 2/9$, enquanto que $\sigma = 1$ no intervalo $2/9 < \alpha < 1/4$. É a dissipação adicional na borda aberta que evita que o modelo se torne supercrítico para $\alpha > 2/9$.

O critério $\sigma \geq 1$ pode ser interpretado como uma espécie de princípio de conservação dinâmico. De acordo com (1.14), $\sigma = 1$ quando a quantidade média de energia $q_c \alpha \langle E^+ \rangle$ fornecida de fora para dentro da avalanche, e que se expande pelos sítios ativos, for igual ao menor limite E_c na perda de energia nos sítios ativos (JENSEN, 1998).

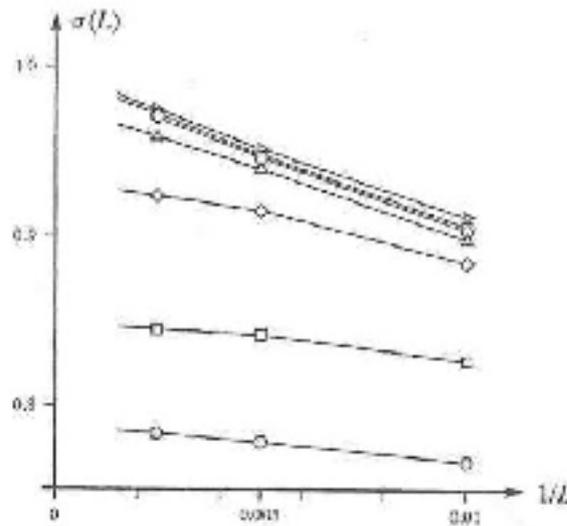


Figura 1.19: Taxa de ramificação na versão randômica do modelo OFC em função de $1/L$ para $L=100, 200, \text{ e } 400$. As curvas representam diferentes níveis de conservação. De baixo para cima, $\alpha = 0, 2; 0, 21; 0, 22; 0, 225; 0, 23; 0, 24; 0, 25$ (LISE; JENSEN, 1996).

1.6.4 O modelo de evolução biológica

A teoria do modelo de equilíbrio pontuado

Os resultados numéricos fornecem previsões para serem comparadas com observações, e as simulações agem como um guia para a aproximação analítica. Os principais pontos a serem tratados são o processo pelo qual o modelo se auto-organiza em um estado crítico e a caracterização deste estado, expressa, por exemplo, em termos de expoentes críticos para as leis de potência que caracterizam o estado crítico, que conseqüentemente seriam comparados com observações.

O processo de auto-organização

O processo geral de auto-organização foi estudado por Paczuzki *et al.* (1994). Ao contrário do modelo de pilha de areia e terremotos é possível construir uma teoria matemática para o processo lento no qual a ecologia se auto-organiza em um estado crítico.

Seja $B_{min}(t)$ o valor da maior barreira de *fitness* B , pertencente a qualquer espécie, selecionada para a mutação (maior mínimo) até o tempo t , começando de uma configuração inicial de B distribuído uniformemente no intervalo $[0, 1]$. O modelo BS no estado transiente em que se aproxima do atrator crítico auto-organizado pode ser mapeado em um processo de ramificação para $B < B_c$ longe do ponto crítico.

A aproximação para o ponto crítico segue um padrão característico (figura 1.8). O valor de $B_{min}(t)$ segue a curva em degraus mostrada na figura 1.8. Os degraus daquela curva mostram os pontos no tempo quando B cresce. Por um tempo depois do degrau, há valores de *fitness* menores no sistema, mas eventualmente eles são supridos e a curva tem outro pequeno degrau para cima. Esta curva é chamada de curva de limiar, já que não há espécies com *fitness* abaixo da curva nos pontos no tempo onde há um degrau. A curva de limiar é uma função monotonicamente crescente do tempo com platôs que se tornam cada vez maiores. O tamanho de uma avalanche é o número de passos de tempo separando eventos onde o limiar pula para o próximo maior valor. Sendo assim, as avalanches são as atividades de mutação entre os degraus, ou seja, a largura dos platôs. Uma avalanche pode ser mapeada em um processo de ramificação. As mutações durante ela são conectadas em uma estrutura do tipo árvore na primeira mutação da avalanche. Depois da conclusão da avalanche, onde a curva faz um degrau, o limiar pula para um novo valor em média por uma quantidade $(1 - B_{min}/N)$, onde N é o tamanho do sistema.

À medida que os platôs da curva de limiar crescem, as avalanches, em média, tornam-se cada vez maiores. Eventualmente o tamanho da avalanche atinge infinito, limitada apenas pelo número total de espécies no sistema, e a curva envelope gradualmente cessa de crescer. Ela pára no valor $B_c = 0,667$. Neste ponto, o sistema se torna crítico e estacionário. Durante as avalanches, os valores de B de algumas espécies são, pela definição de avalanche, menores do que o valor crítico, mas no fim de uma avalanche todos estão novamente acima deste valor. Então, a auto-organização pode ser descrita por uma inescapável divergência do tamanho médio das avalanches num processo de ramificação

com uma dada probabilidade $B_{min} = p$ próxima a B_c . Esta divergência é descrita por uma lei de potência com um expoente gama, $\langle s \rangle_p \sim (B_c - p)^{-\gamma}$, onde $\gamma = 2,7$ no modelo em que as espécies interagentes foram arranjadas em um anel.

A aproximação assintótica do limiar para o valor crítico como uma função do tempo é ainda outra lei de potência:

$$B_{min}(s) = B_c - A \left(\frac{s}{N} \right)^{-1/(\gamma-1)}. \quad (1.21)$$

Aqui s é o número total de atualizações, N é o número de espécies e A é uma constante. Esta equação é a equação fundamental para o processo de auto-organização. Ela mostra que à medida que s aumenta o limiar fica cada vez mais próximo do valor crítico B_c . O envelope na figura 1.8 segue esta equação do limiar. O estado crítico com um único valor de limiar é um atrator da dinâmica, em contraste com sistemas críticos não auto-organizados, onde a sintonização é necessária. Este processo responsável pela criticalidade é similar àquele no modelo da pilha de areia, embora o critério aqui seja principalmente numérico.

O estado crítico

Uma vez que o sistema tenha atingido o estado crítico, as dinâmicas evolucionárias são descritas em termos de fractais espaço-temporais mostrados na figura 1.12. Todas as quantidades que podem ser medidas podem ser expressas em termos de dois expoentes. Por exemplo, o expoente $\rho = 1/(\gamma - 1)$ na equação de limiar para a relaxação do estado crítico é uma expressão algébrica simples, $\rho = (1 + 1/D - \tau)/(1 - 1/D)$, onde D é a dimensão fractal da avalanche e τ é o expoente da distribuição dos tamanhos das avalanches (PACZUSKI *et al.*, 1996).

Considere a atividade de mutação de uma espécie à medida que o tempo passa. O comportamento de equilíbrio pontuado, com períodos de calmaria de todas as durações separando explosões de atividade, forma um fractal no tempo, com um espectro de

frequência $S(f) = 1/f^\alpha$, onde o expoente $\alpha = 1 - 1/D$. A distribuição dos períodos de calmaria para um dado sítio separando subseqüentes pontos de retorno da atividade é chamada de probabilidade do primeiro retorno. A distribuição dos primeiros tempos de retorno é uma lei de potência com expoente dado por $\tau_{pr} = 2 - 1/D$. A distribuição de todos os tempos de retorno também segue uma lei de potência com expoente dado por $\tau_{tr} = 1/D$. Note que $\alpha = \tau_{pr} - 1$. As simulações fornecem os valores $\alpha \simeq 0,57$, $\tau_{pr} \simeq 1,57$ e $\tau_{tr} = 1/D \simeq 0,43$ (MASLOV *et al.*, 1994).

Então a dinâmica resultante do modelo de equilíbrio pontuado pode ser entendida em termos de um fractal espaço-temporal. O espectro de potência é do tipo $1/f$; há avalanches de todos os tamanhos.

1.6.5 A versão de vizinhos randômicos do modelo BS de evolução

Nesta versão, ao invés de colocar as espécies em um círculo, cada espécie interage com duas outras selecionadas randomicamente no sistema. Em cada passo de tempo a espécie com o menor *fitness* e duas outras espécies randômicas são selecionadas e se fornece a elas novos *fitness* randômicos.

O processo de avalanches no modelo de vizinhos randômicos pode ser pensado como um caminho aleatório. Em um dado estágio de propagação das avalanches haverá um número de espécies ativas com *fitness* abaixo do limiar. No próximo passo de tempo, o número de espécies ativas terá um passo randômico; o número aumentará ou diminuirá por 1. O processo continuará até que não haja mais espécies ativas e então a avalanche estará terminada. David Raup estimou o tempo de vida de várias famílias de espécies usando os dados de John Sepkoski e então sugeriu que o processo é de fato um caminho aleatório, no qual em cada passo de tempo o número de espécies na família cresce ou decresce por 1 (BAK, 1997).

Solução de campo médio

Agora será apresentada uma análise de campo médio para a versão do modelo BS de evolução (BAK *et al.*, 1993) em que a menor barreira é atualizada simultaneamente com seus $K - 1$ vizinhos (FLYVBJERG *et al.*, 1993). Aqui, esta descrição de campo médio assume uma versão de vizinhos aleatórios do modelo e, além disso, negligencia correlações entre barreiras, o que reduz o problema à análise combinatória. Seja $p(B)dB$ a probabilidade de que um sítio arbitrariamente escolhido seja encontrado com uma variável de barreira no intervalo $[B, B + dB]$. A probabilidade de que uma barreira B seja a menor barreira é dada por:

$$p_{\min}(B) = p_1(B) = Np(B)Q^{N-1}(B). \quad (1.22)$$

De modo geral,

$$p_i(B) = \frac{N!}{(N-i)!(i-1)!} P^{i-1}(B)p(B)Q^{N-i}(B), \quad (1.23)$$

onde $P(B) = \int_0^B p(s) ds$ e $Q(B) = \int_B^1 p(s) ds$. A condição de normalização de p ,

$$\int_0^1 p(s) ds = P(B) + Q(B) = 1 \quad (1.24)$$

fornece que $Q(B) = 1 - P(B)$. A função $p_i(B)$ é a probabilidade de que a barreira B seja precisamente a i -ésima menor barreira. Para esclarecer esta idéia será dado o argumento que segue. Pode-se calcular $p_i(B)$ imaginando que os N sítios da cadeia unidimensional são visitados consecutivamente, tomando-se nota dos valores de B dos sítios. Deve-se averiguar se um dado B_0 é precisamente o i -ésimo menor valor de todos os B . Pode-se aproximar isto como se primeiramente fossem retirados $i - 1$ valores e se obtivesse valores

de B que são menores que B_0 . A probabilidade disto ocorrer é dada por

$$p_1 = \frac{N(N-1)\dots(N-(i-2))}{(i-2)!} (P(B_0))^{i-1}. \quad (1.25)$$

Na i -ésima vez em que se faz uma retirada existirão $N-(i-2)$ sítios que ainda não foram visitados. A probabilidade de que o resultado da i -ésima retirada seja igual a B_0 é

$$p_2 = (N-(i-1))p(B_0). \quad (1.26)$$

Nas $N-i$ retiradas restantes deve-se obter valores de B que são maiores que B_0 . A probabilidade para isso ocorrer é dada por

$$p_3 = \frac{(N-i)(N-i-2)\dots 1}{(N-i)!} Q^{N-i}. \quad (1.27)$$

Dessa forma, a expressão (1.23) para $p_i(B)$ é dada por $p_i(B) = p_1 p_2 p_3$. O modelo é então atualizado da seguinte maneira: primeiro retira-se a menor barreira da distribuição $p_{min}(B)$, depois $K-1$ sítios são escolhidos randomicamente (por enquanto vamos manter K geral). A equação de evolução para $p(B, t)$ é dada por

$$p(B, t+1) = p(B, t) - \frac{1}{N} p_{min}(B, t) - \frac{K-1}{N-1} \left[p(B, t) - \frac{1}{N} p_{min}(B, t) \right] + \frac{K}{N}. \quad (1.28)$$

Talvez seja mais fácil para ver o significado desta equação se ela for multiplicada por N :

$$Np(B, t+1) = Np(B, t) - p_{min}(B, t) - \frac{K-1}{N-1} [Np(B, t) - p_{min}(B, t)] + K. \quad (1.29)$$

Agora, $Np(B, t+1)$ é o número de sítios com valores de B igual a B no instante $t+1$. Este número é igual ao número de sítios no instante t com este valor de B , corrigido pelo número de sítios que mudaram seu valor de B devido a ação da atualização. O segundo

termo no lado direito descreve a probabilidade de que um valor de barreira B seja o menor de todos e, por esta razão, sujeito a atualização. Dentre os $N - 1$ sítios restantes, $K - 1$ sítios são escolhidos randomicamente e atualizados. Em cada uma dessas $K - 1$ retiradas, a probabilidade de que um sítio escolhido tenha um valor de barreira B é igual a $(Np(B, t) - p_{min}(B, t))/(N - 1)$. Isto acontece porque existem $Np(B, t)$ sítios de barreira B no sistema, mas uma barreira é removida do sistema se esta for a barreira mínima, por isso há o termo $p_{min}(B, t)$. O último termo de (1.29) surge porque cada uma das K retiradas pode produzir potencialmente uma barreira igual a B no instante $t + 1$. A probabilidade disto acontecer é igual a $KP_0(B)$, onde $P_0(B)$ é a densidade de probabilidade com que novas barreiras são geradas. Como se assumiu uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, tem-se $P_0(B) = 1$.

A dinâmica de campo médio é uma aproximação à equação mestra para o processo de Markov do modelo de vizinhos randômicos, ambos tendo um único ponto fixo atrativo. Neste ponto fixo a equação (1.28) é uma equação integral para $p(B)$ ou, equivalentemente, uma equação diferencial ordinária para $Q(B)$. Para a solução estacionária $p(B, t + 1) = p(B, t)$ e por esta razão a equação (1.28) pode ser escrita como

$$p(B) = \frac{k - 1}{k - m} p_{min}(B) + \frac{1 - m}{k - m}, \quad (1.30)$$

onde $k = K/N$ e $m = 1/N$. Usando que $p(B) = -dQ/dB$, e a expressão (1.22) para $p_{min}(B)$ e multiplicando por dB para fazer a integração, obtém-se que,

$$Q = \frac{(N - 1)K}{N(K - 1)}(1 - B) - \frac{(N - K)}{N(K - 1)}Q^N(B). \quad (1.31)$$

No limite onde $N \gg K > 1$, o primeiro termo nesta equação é pequeno em relação ao segundo, para valores de B onde $Q(B)$ é menor que 1 por uma ordem maior que $\mathcal{O}(1/N)$.

Conseqüentemente obtém-se que,

$$Q - \frac{(N-1)K}{N(K-1)}(1-B) - \frac{(N-K)}{N(K-1)}Q^{N(B)} \simeq \frac{K}{K-1}(1-B) \quad (1.32)$$

para $B - 1/K \gg \mathcal{O}(1/N)$. Por outro lado, para $Q(B) \simeq 1$ tem-se

$$Q - \left(\frac{(N-1)K}{(N-K)}(1-B) - \frac{N(K-1)}{(N-K)}Q(B) \right)^{1/N} \simeq (1-KB)^{1/N} \quad (1.33)$$

para $1/K - B \gg \mathcal{O}(1/N)$.

Usando que $p(B) = -dQ/dB$ temos que,

$$\begin{cases} p(B) - p_1 \simeq \frac{K}{N}; & (1/K - B \gg \mathcal{O}(1/N)) \\ p(B) - p_2 \simeq \frac{K}{K-1}; & (B - 1/K \gg \mathcal{O}(1/N)). \end{cases} \quad (1.34)$$

No limite de grande tamanho de sistema, ou seja, para $N \rightarrow \infty$, p_1 se anula e $B_c = 1/K$.

A teoria de campo médio reproduz a forma tipo degrau da função distribuição em simulações (figura 1.10). A solução exata da equação (1.31) é obtida numericamente pela iteração das equações (1.32) e (1.33) para $B > 1/K$ e $B < 1/K$, respectivamente. Esta solução é mostrada na figura 1.20 para $K = 3$ e $N = 100$, junto com a distribuição resultante da menor barreira, $p_1(B)$, ambas como linhas tracejadas. O modelo de vizinhos randômicos foi simulado para os mesmos valores de K e N e suas distribuições de equilíbrio $p(B)$ e $p_1(B)$ são mostradas na figura 1.20 como linhas cheias.

No limite $N \rightarrow \infty$ pode-se observar que $p(B)$ tem uma descontinuidade em $B = 1/K$; ela se anula abaixo deste limiar e é constante acima dele. É fácil entender este resultado em termos aproximados. Suponha que $p(B) \approx K/N$ para $0 \leq B \leq 1/K$ e $p(B) \approx K/(K-1)$ para $0 \leq 1/K \leq B$. Então, o menor dos N valores de barreira distribuídos de acordo com p vai ser equidistribuído abaixo do limiar $1/K$ e os outros $N-1$ vão ser maiores que $1/K$, tipicamente. Deste modo, quando o menor valor de

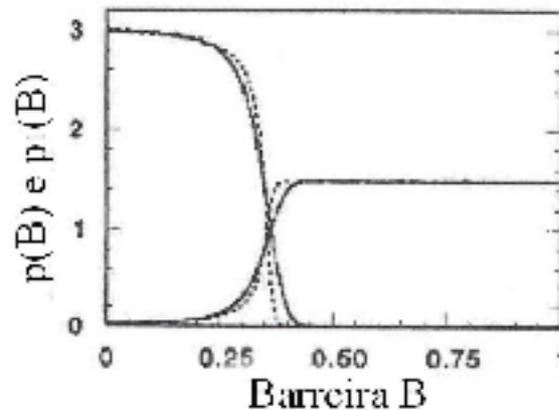


Figura 1.20: Distribuição de equilíbrio dos valores de barreiras $p(B)$ e $p_1(B)$ para as simulações do modelo de vizinhos randômicos (curvas cheias) e correspondente teoria de campo médio (curvas tracejadas) para $N = 100$ e $K = 3$ (FLYVBJERG *et al.*, 1993).

barreira é removido, nenhum é deixado abaixo do limiar. Conseqüentemente, os $K - 1$ valores de barreira adicionais que são selecionados randomicamente e removidos devem ser tomados daqueles acima do limiar; por isso eles são equidistribuídos por hipótese ao redor de p . Quando se substitui estes K valores de barreira por K valores equidistribuídos, um destes tipicamente cai abaixo do limiar e os outros $K - 1$ acima. Uma vez que todos são equidistribuídos, p fica inalterado, como deveria ser.

Esta explicação aponta para outro aspecto da dinâmica assintótica: quando se rastrea no tempo quais espécies provocam as explosões de atividade evolucionária, então usualmente encontra-se uma das espécies participantes em atividade recente. Assim, em qualquer tempo tardio, as espécies que adquiriram suas propriedades correntes mais recentemente são também aquelas mais aptas para mudar estas propriedades novamente.

A fim de expressar as conexões entre explosões de atividade evolucionária define-se *avalanche* como uma seqüência conectada de atividade, associada com valores de barreira abaixo do limiar auto-organizado $1/K$. Suponha que em algum tempo todos os valores de barreira estejam acima do valor limite (limiar). Então a próxima explosão vai, em média, resultar em um valor de barreira abaixo do limiar, que por sua vez resultará em

outro valor de barreira abaixo do limiar, etc. Deste modo, o número de barreiras abaixo do limiar permanece constante e igual a 1, na média. O número real (efetivo) de barreiras abaixo do limiar flutua e pode tornar-se zero novamente, terminando a avalanche.

Um valor mais realístico para o número médio de valores de barreira abaixo do limiar pode ser obtido da aproximação de campo médio. Esta aproximação dá

$$NP(1/K) = \ln N - \ln(\ln N) - \ln(K - 1) + \mathcal{O}(\ln(\ln N)/\ln N) + \\ + \mathcal{O}(1/\ln N) + \mathcal{O}(\ln N/N), \quad (1.35)$$

onde $P(1/K) = 1 - Q(1/K)$ e $Q(1/K)$ é a solução para a equação (1.31) com $B = 1/K$. Com uma média de $NP(1/K)$ valores de barreira abaixo do limiar, a flutuação neste número, necessária para finalizar uma avalanche, torna-se cada vez mais rara com o aumento de N . Desta maneira, os tamanhos de avalanches, definidos como o número de explosões que as avalanches contêm, crescem com N , para divergir quando $N \rightarrow \infty$.

No limite $N \rightarrow \infty$, uma avalanche definida acima pode ser identificada com processos críticos de ramificação, com taxa de ramificação K (HARRIS¹³, citado por Flyvbjerg *et al.* (1993)). Isto é feito identificando cada explosão com um nodo e cada um dos K novos valores de barreira resultantes de uma explosão com um ramo enraizado neste nodo (se o valor de barreira for menor que o valor limiar) ou com uma folha enraizada no mesmo nodo (se o valor da barreira estiver acima do limiar). O limite $N \rightarrow \infty$ é necessário para obter a estrutura de árvore. Esta identificação mostra que avalanches surgem em todos os tamanhos s e as maiores são distribuídas de acordo com uma lei de potência com expoente de campo médio $P(s) \propto s^{-3/2}$, mostrando que não há um tamanho médio para avalanches. As avalanches são críticas porque o processo de ramificação é crítico. Como o meio através do qual essas avalanches se propagam, o conjunto dos N valores de barreira, é transformado pelas avalanches e conduzido por elas para a distribuição assintótica

¹³Harris, *ibid.*

do único ponto fixo, isso faz as avalanches críticas; o modelo para evolução biológica é um sistema dinâmico crítico auto-organizado.

Para $K = 3$, o limiar de barreira de *fitness*, sobre o qual todas as espécies se encontram depois do transiente, é $1/3$, a ser comparado com $0,667$ para o modelo de primeiros vizinhos. O expoente da lei de potência da distribuição das avalanches é $\tau = 3/2$. Há levemente menos eventos catastróficos do que no modelo original no qual $\tau = 1,07$. Este expoente parece estar em melhor acordo com os dados de David Raup para a distribuição dos eventos de extinção (figura 1.3b). David Raup fez um histograma da distribuição dos tempos de vida de espécies reais (figura 1.21). Pode-se constatar que ele é uma lei de potência com expoente próximo a 2. Isso significa que não há um tempo de vida característico para as espécies.

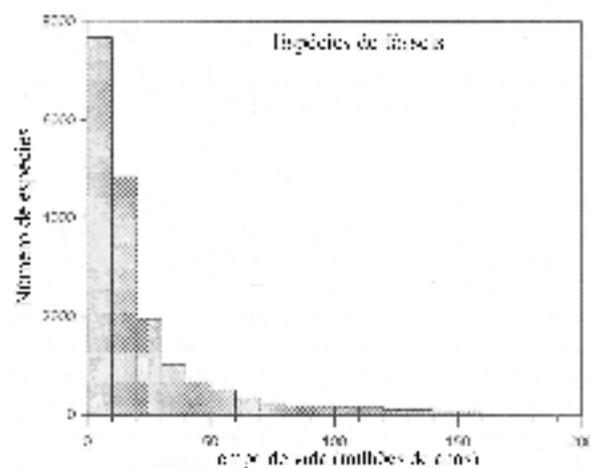


Figura 1.21: A figura mostra um histograma do número de espécies com uma dada distribuição de tempos de vida (BAK, 1997).

1.7 Considerações finais

Foram apresentadas evidências através de teorias analíticas e simulações numéricas, em acordo com dados reais, que diversos sistemas na natureza tendem a se auto-organizar em um estado crítico com avalanches de eventos de todos os tamanhos e durações. Essa teoria de complexidade foi capaz de explicar observações gerais como fractais, eventos catastróficos (extinções em massa por exemplo) e ruído $1/f$, que são padrões onipresentes na natureza.

Todos os modelos apresentados são muito abstratos, mas robustos. Seus traços podem ser mudados sem alterar sua criticalidade. Essa característica faz com que se acredite que tais modelos podem ser gerais o suficiente para abarcar o mundo real.

Capítulo 2

Lei de Pareto

A distribuição da riqueza não é fruto do acaso.

Vilfredo Pareto

2.1 Introdução

O estudo da distribuição da renda pessoal tem um significado importante na economia porque a renda pessoal é um ingrediente básico da economia.

O estudo da renda pessoal tem uma longa história e muitas investigações têm sido feitas para estudar a natureza da renda ou a distribuição de riquezas em diversas comunidades econômicas, em particular, em diferentes países. O ponto de partida é em torno de 100 anos atrás, quando o sociólogo e economista italiano Vilfredo Pareto propôs que a distribuição da renda pessoal segue uma lei de potência (PARETO, 1897). Ele analisou a distribuição da renda pessoal para alguns países e anos e encontrou que a função densidade de probabilidade $p(x)$ da renda pessoal x é dada por

$$p(x) = Cx^{-(1+\alpha)}, \quad (2.1)$$

onde C é a constante de normalização. Este comportamento de lei de potência é chamado de lei de Pareto e o expoente α é denominado de índice (ou expoente) de Pareto (SOUMA, 2003). O valor do expoente α encontra-se entre 1 e 2 (CHATTERJEE *et al.*, 2004 e LEVY; SOLOMON, 1997). Este é um exemplo clássico de distribuição fractal (MANDELBROT¹, citado por Aoyama *et al.* (2000)) e é observado em muitos sistemas que exibem auto-organização. Se o índice de Pareto tiver valores pequenos, a renda pessoal é distribuída desigualmente. Alguns exemplos de índices de Pareto estão listados na tabela 2.1 (BADGER², citado por Souma (2003)). Pareto estudou a distribuição de renda pessoal com o objetivo de caracterizar o status econômico dos países.

De acordo com dados, é esperado que $p(x)$ aumente para baixos valores de renda, atinja um máximo e finalmente diminua com o aumento de x (SCAFETTA *et al.*, 2003). Pareto encontrou $\alpha \simeq 1,5$ para vários países e acreditava que este expoente era uma constante universal (MONTROLL e BADGER³, citados por Scafetta *et al.* (2003)). Em 1922, Gini verificou a mesma estatística de leis de potência, mas constatou que este expoente variava de um país para outro (GINI⁴, citado por Aoyama *et al.* (2000)).

Contudo, é bem conhecido que a lei de Pareto somente é aplicável (bom ajuste) para a faixa de alta renda pessoal. Foi proposto por Gibrat que a distribuição toma a forma lognormal na faixa de renda intermediária (GIBRAT⁵, citado por Souma (2003)). Como é bem conhecido, neste caso, a função densidade de probabilidade é dada por

$$p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\log^2(x/x_0)}{2\sigma^2}\right], \quad (2.2)$$

onde x_0 é o valor médio e σ^2 é uma variância. Muitas vezes $\beta = 1/\sqrt{2\sigma^2}$ é chamado de

¹B. D. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, (Freeman, San Francisco, 1982).

²Badger W. W. (1980) An entropy-utility model for the size distribution of income. In: West. B. J. (Ed) *Mathematical models as a tool for the social science*. Gordon e Breach, New York, pp 87-120.

³E.W. Montroll e W.W. Badger, *Introduction to the Quantitative Aspects of Social Phenomena*, Gordon & Breach, New York (1974).

⁴C. Gini, *Indici di concentrazione e di dipendenza*, Biblioteca dell'economista 20 (1922).

⁵Gibrat R (1931) *Les inégalités économiques*. Paris, Sirey.

índice de Gibrat (SOUMA, 2003). Como uma grande variância significa uma distribuição global da renda, β pequeno corresponde à uma distribuição desigual da renda pessoal. Note que se x é uma variável randômica de distribuição lognormal, então $\log(x)$ tem distribuição gaussiana.

Tabela 2.1: Exemplos de índices de Pareto α para alguns países e anos (BADGER, citado por Souma (2003)).

País		α
Inglaterra	1843	1,50
	1879-80	1,35
	1893-94	1,50
Prússia	1852	1,89
	1894	1,60
Cidades italianas	1876	1,45
	Paris	1886
Florença	1890	1,41

A distribuição lognormal com uma cauda de lei de potência para a renda pessoal foi redescoberta por Badger⁶ e Montroll e Shlesinger⁷, citados por Souma (2003). Estas investigações foram feitas para os dados de renda dos EUA de 1935-36 e confirmaram que o 1 % mais alto da distribuição segue a lei de Pareto com $\alpha = 1,63$. O restante segue a distribuição lognormal com $x_0 = \$1.100$ e $\beta = 2,23$. A distribuição é mostrada na figura 2.1 em escala log-log. Nesta figura, o eixo horizontal é a renda com a unidade em dólar e o eixo vertical é a probabilidade cumulativa $P(x \leq)$. A probabilidade cumulativa é a probabilidade de encontrar a pessoa com a renda maior ou igual a x e é definida por $P(x \leq) \equiv \int_x^\infty p(y)dy$ na notação contínua. Em outras palavras, a probabilidade cumulativa é a ordem normalizada pelo número total de indivíduos. A probabilidade cumulativa de (2.1) é dada por $P(x \leq) \sim x^{-\alpha}$. Nesta figura (figura 2.1) a linha sólida é o ajuste da função lognormal com $x_0 = \$1.100$ e $\beta = 2,23$. Os altos valores de renda que não se ajustam a função lognormal têm um comportamento de lei de potência com $\alpha = 1,63$.

⁶Badger, ibid.

⁷Montroll EW, Shlesinger MF (1983) Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and 1/f noise: a tale of tails. J. Stat. Phys. 32:209-230.

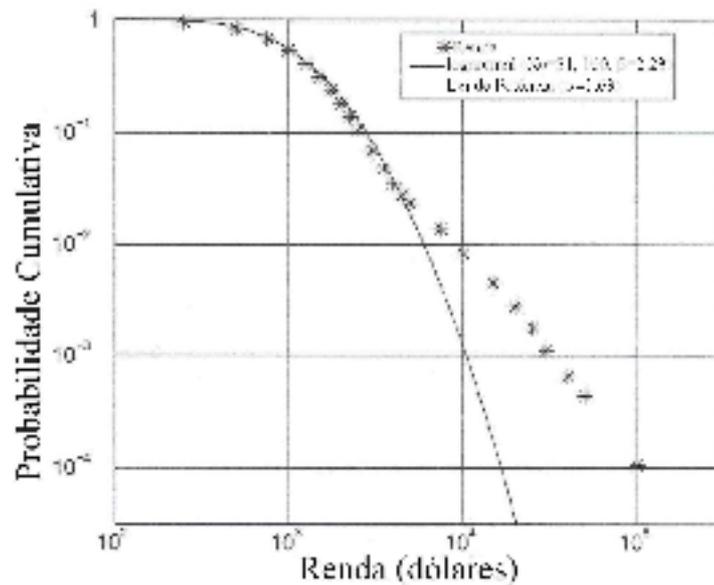


Figura 2.1: Os pontos discretos são os dados de renda dos EUA no período de 1935-1936. A linha sólida representa o ajuste lognormal com $x_0 = \$1.100$ e $\beta = 2,23$. Os pontos na faixa de alta renda seguem uma lei de potência com $\alpha = 1,63$ (SOUMA, 2003).

Um dos temas da ciência social é a teoria da desigualdade. Muitos índices que medem a desigualdade da distribuição de renda têm sido propostos na economia. Dentre eles, o índice de Gini G é bem conhecido e frequentemente usado. Apesar de o índice de Gini ser uma medida bastante útil da desigualdade da distribuição, este índice não tem atração do ponto de vista físico. Isto porque a manipulação usada para derivar o índice de Gini oculta o mecanismo que explica a distribuição da renda pessoal. O índice de Gini pode ser definido a partir da função de Lorentz $L(\nu)$. Para uma dada função densidade de renda $p(x)$, com média $\rho = \int_0^\infty xp(x) dx$ e um dado número $\nu \in [0, 1]$, $P(\leq \nu) = \int_0^\nu p(x) dx$ representa a fração cumulativa da população com renda abaixo de ν e a função de Lorentz $L(\nu)$ é definida como a fração da renda total que é atribuída aos 100ν por cento mais pobres da sociedade e é dada por (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001a),

$$L(\nu) = \frac{1}{\rho} \int_0^\nu xp(x) dx \quad (2.3)$$

Com isso, o índice de Gini é dado por,

$$G = 2 \int_0^1 (\nu - L(\nu)) d\nu. \quad (2.4)$$

O caso $G = 0$ corresponde a igualdade perfeita (sem desigualdades) e $G \rightarrow 1$ corresponde a máxima desigualdade. Por exemplo, para a distribuição de renda individual nos EUA usando uma função distribuição de $p(x)$ exponencial, o valor de G encontrado foi $G = 1/2$. No caso da distribuição de renda familiar com dois assalariados de 1974-1994 foi obtido que $G = 3/8$ (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001a).

2.2 Estrutura universal da distribuição de renda pessoal

Uma análise similar àquela da figura 2.1 foi feita para a renda pessoal do Japão no ano de 1998. Para obter o perfil total da distribuição de renda pessoal do Japão no ano de 1998, foram usados 3 conjuntos de dados: dados de imposto de renda, dados de renda e dados de renda salarial (SOUMA, 2003).

Os dados de imposto de renda são avaliados apenas para o ano de 1998. É uma lista dos 84.512 indivíduos que pagaram imposto de renda de 10 milhões de ienes ou mais naquele ano.

Os dados de renda contêm as pessoas que preencheram declarações de renda individualmente. Em Souma (2003) foram analisados dados de 1887-1998. Estes dados estão disponíveis ao público através dos registros da Administração de Impostos do Japão (AIJ).

Os dados de renda salarial são amostras levantadas do salário de pessoas trabalhando em empresas privadas e não contêm servidores públicos e pessoas com remuneração diária (diaristas). Estes dados foram analisados de 1955-1998 (SOUMA, 2003). Estes dados também foram obtidos da AIJ.

Para obter um perfil global da distribuição de renda pessoal, estes conjuntos de dados foram conectados pelas seguintes regras:

1. Foram usados dados de imposto de renda pagos na faixa $x \geq 50$, onde x está em unidades de milhões de ienes. Nesta faixa, o imposto de renda t está relacionado com a renda x através da relação $t = 0.3x$ (AOYAMA *et al.*, 2000).

2. Foram usados apenas dados de renda na faixa $20 \leq x < 50$, devido ao fato que todas as pessoas com renda maior que 20 milhões de ienes precisam fazer declaração de renda individualmente no sistema de impostos do Japão desde 1965. Então indivíduos com renda salarial maior que 20 milhões de ienes precisam declarar imposto de renda individualmente e então estão incluídos nos dados de renda.

3. Os dados de renda e renda salarial foram somados na faixa $x < 20$. Embora exista uma dupla contagem de pessoas, é impossível obter uma informação adicional para remover essa ambigüidade (SOUMA, 2003).

Desses processos foram obtidos dados de 51.493.254 indivíduos, aproximadamente 80% de todos os trabalhadores do Japão.

A distribuição para o ano de 1998 é mostrada na figura 2.2 em escala log-log. Nesta figura o eixo horizontal é a renda em unidades de milhões de ienes e o eixo vertical é a probabilidade cumulativa. Os símbolos (+) correspondem aos dados de impostos de renda pagos. Os círculos abertos correspondem apenas aos dados de renda e os círculos preenchidos são provenientes da soma dos dados de renda e os dados de renda salarial. A linha sólida fina é o ajuste da distribuição lognormal. A distribuição para o ano de 1998 da probabilidade cumulativa da renda pessoal é tal que o 1% mais alto da distribuição segue a lei de Pareto com $\alpha = 2,06$. Por outro lado, 99% da distribuição segue a distribuição lognormal com $x_0 = 4.000.000$ (ienes) e $\beta = 2,68$ (SOUMA, 2003). A mudança de lognormal para a lei de potência não ocorre suavemente e isto também é observado na figura 2.1.

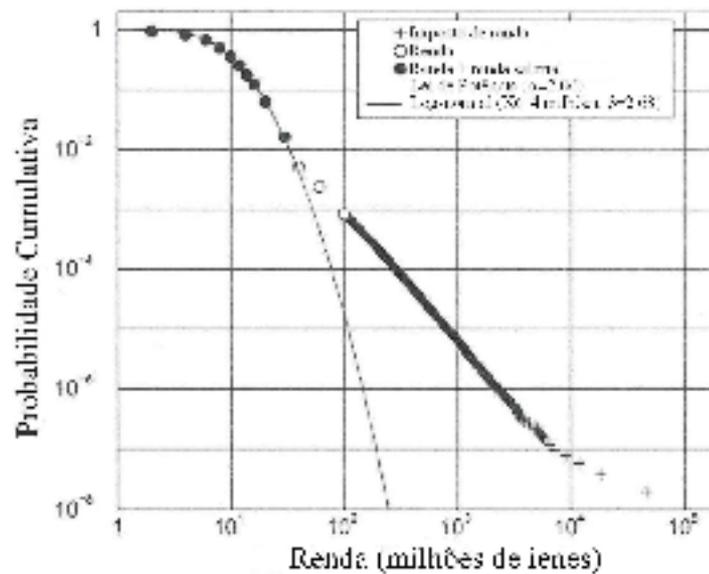


Figura 2.2: Dados de renda do Japão em 1998. A linha sólida representa o ajuste lognormal com $x_0 = 4.000.000$ (ienes) e $\beta = 2,68$. A faixa de alta renda é bem ajustada a uma lei de potência com $\alpha = 2,06$ (SOUMA, 2003).

Embora os dados detalhados para a alta renda (dados de imposto de renda) estão disponíveis apenas para o ano de 1998, o perfil global da distribuição pode ser obtido dos dados de renda e dados de renda salarial como reconhecidos da figura 2.2. Além disso, o valor de α é obtido apenas dos dados de renda (círculos abertos). Então os dados de renda fornecem uma idéia do valor de α .

Uma análise similar também foi feita para os anos de 1965, 1975, 1985 e 1995. Uma função lognormal se ajusta bem a faixa de renda média e uma lei de potência a faixa de alta renda. Para todos os casos, menos de 10% do topo da distribuição é bem fitado por uma lei de potência e mais de 90% da distribuição segue uma distribuição lognormal. Entretanto a inclinação de cada ajuste de lei de potência e a curvatura no ajuste da lognormal diferem umas das outras. Então os índices de Pareto e Gibrat diferem de ano a ano. Novamente se observa uma mudança descontínua da função lognormal para a lei de potência para os anos de 1975, 1985 e 1995. A razão para isso ainda é desconhecida.

Embora algumas ambigüidades e problemas insolúveis existam, pode-se confirmar

que o padrão da distribuição da renda pessoal é expresso como uma função lognormal com uma cauda de lei de potência. Esse padrão de distribuição coincide com os resultados de Badger⁸ e Montroll e Shlesinger⁹, citados por Souma (2003). Então, pode-se dizer que uma lognormal com cauda de lei de potência da distribuição da renda pessoal é uma estrutura universal. Entretanto, os índices especificando a distribuição diferem de ano para ano (SOUMA, 2003).

2.3 A mudança temporal da distribuição

A figura 2.3 mostra a variação de α e β no Japão de 1955-1998, obtida de ajustes numéricos da distribuição da renda pessoal. O eixo horizontal é o ano e o vertical é o valor dos parâmetros. Desta figura pode-se identificar que esses índices estão correlacionados em torno dos anos de 1960 e 1980. Entretanto, essas quantidades não têm correlação no início dos anos 70 e depois de 1985. Na faixa onde α e β mudam independentemente o índice α muda fortemente. Em especial, β permanece quase constante depois de 1985. Isso significa que a variância da renda média não está mudando. Desses comportamentos de α e β pode-se considerar que há alguns fatores causando a falta de correlação entre α e β e principalmente afetando α .

Como foi mencionado, α é principalmente derivado dos dados de renda. Sendo assim, a idéia da mudança de α pode ser obtida de 1887-1998 para a distribuição de renda no Japão. O valor médio do índice de Pareto é igual a 2 e α flutua em torno desse valor. A mudança de α nos EUA para 1914-1936 tem um comportamento que quase coincide com o do Japão (SOUMA, 2003) como pode ser visto na figura 2.4.

Levando em consideração os resultados pioneiros citados e estes resultados recém apresentados, a única interpretação consistente pode ser a seguinte: a distribuição de renda

⁸Badger, *ibid.*

⁹Montroll e Shlesinger, *ibid.*

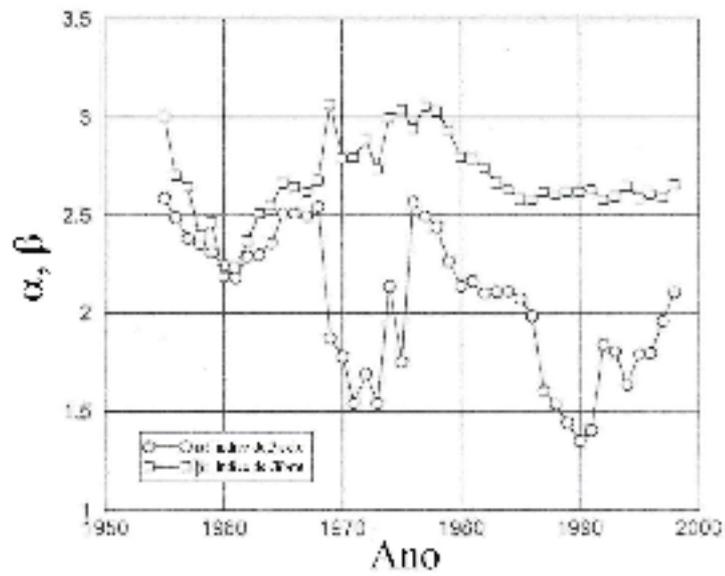


Figura 2.3: Mudança temporal de α e β no Japão no período de 1955-1998. Os círculos abertos representam a mudança de α e os quadrados abertos representam a mudança de β (SOUMA, 2003).

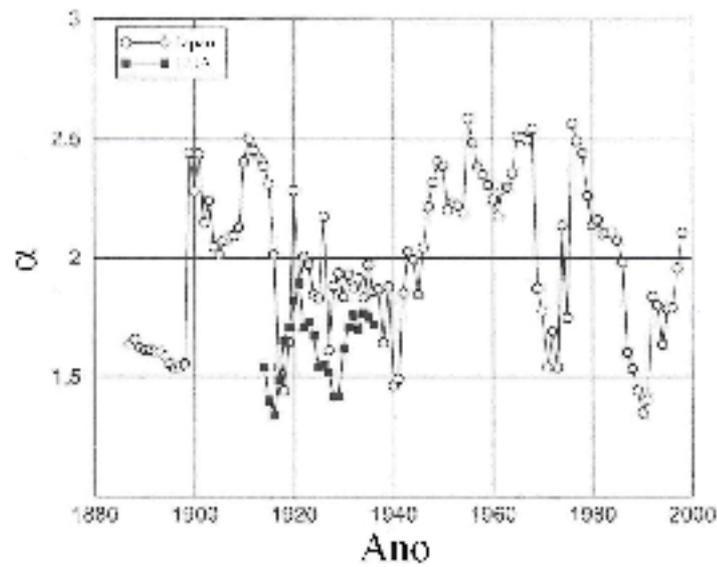


Figura 2.4: Mudança temporal de α . Os círculos abertos representam a mudança de α no Japão no período de 1887-1998. Os quadrados preenchidos representam a mudança de α nos EUA no período de 1914-1936 (SOUMA, 2003).

segue uma lei de potência para a faixa de alta renda, mas seus expoentes variam de país a país e de ano a ano. Como Pareto e Gini notaram, dados de diferentes anos fornecem diferentes expoentes (AOYAMA *et al.*, 2000).

2.4 Distribuição de renda de companhias

Dados de companhias japonesas do ano de 1997 foram analisados e constatou-se que a distribuição de renda das companhias segue a lei de Zipf, ou seja, a distribuição cumulativa segue uma lei de potência com expoente -1 (OKUYAMA *et al.*, 1999). Um resultado complementar a este é a distribuição das dívidas de companhias que faliram, que pode corresponder a distribuição de renda negativa. Embora os dados avaliados para esse propósito sejam limitados, pode-se demonstrar que a distribuição das dívidas também segue a lei de Zipf como mostra a figura 2.5. Os dados são das 100 maiores falências no Japão desde 1997 até o fim de março de 2000. O gráfico da ordem r versus o tamanho da probabilidade acumulada $P(\geq d)$ é mostrado nesta figura, sendo d a dívida em unidade de milhões de ienes. Os dados contêm casos muito menores, mas como o número de dados começa a decrescer para $d < 10^5$ é assumido que os dados começam a perder confiabilidade nesta faixa. A linha pontilhada representa a lei de Zipf, $r \propto d^{-1}$, que foi encontrada para a renda das companhias (OKUYAMA *et al.*, 1999). Os dados estão em razoável acordo com uma lei de potência.

Isso sugere uma compreensão da estatística do fluxo de dinheiro entre as companhias. A quantidade de dívida de uma companhia é aproximadamente dada pela renda negativa acumulada que excede o valor de todos os bens da companhia. Então, combinando estes resultados com a lei de Zipf para a distribuição da renda positiva, pode-se supor que a distribuição de dinheiro, positivo e negativo, que flui entre as companhias geralmente tende a seguir a lei de Zipf.

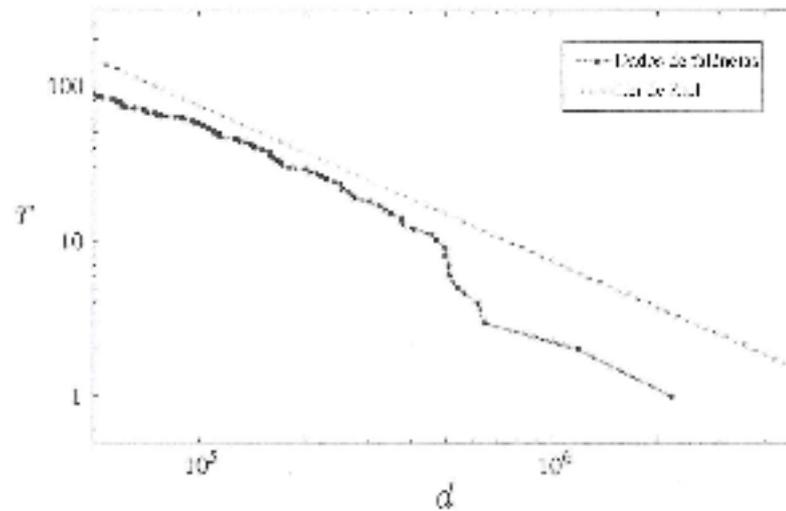


Figura 2.5: O gráfico da ordem r versus o tamanho da probabilidade acumulada $P(\geq d)$ para a dívida d de 1997 a março de 2000. A linha tracejada é a lei de Zipf mostrada para referência visual (AOYAMA *et al.*, 2000).

2.5 Distribuições de Pareto-Lévy

As distribuições de Lévy foram introduzidas nos anos cinquenta e sessenta por Mandelbrot (segundo Pareto) para descrever a renda pessoal e as variações de preço de alguns bens financeiros, em particular o preço do algodão. Uma propriedade constitutiva importante destas distribuições de Lévy é seu comportamento de lei de potência para grandes argumentos, muitas vezes chamado de caudas de Pareto-Lévy:

$$L_\mu(x) \sim \frac{\mu A_\pm^\mu}{|x|^{1+\mu}} (x \rightarrow \pm\infty), \quad (2.5)$$

onde $0 < \mu < 2$ é um certo expoente (freqüentemente chamado α) e A_\pm^μ são duas constantes chamadas de amplitudes de cauda ou parâmetros de escala. As constantes A_\pm^μ de fato dão a ordem de magnitude das grandes flutuações (positivas ou negativas) de x (BOUCHAUD; POTTERS, 2000).

Infelizmente não existem expressões analíticas simples para as distribuições simé-

tricas de Lévy $L_\mu(x)$, exceto para $\mu = 1$, que corresponde a distribuição de Cauchy:

$$L_1(x) = \frac{A}{x^2 + \pi^2 A^2}. \quad (2.6)$$

Porém, a função característica de uma distribuição de Lévy simétrica é mais simples e dada por:

$$\hat{L}_\mu(z) = \exp(-\alpha_\mu |z|^\mu), \quad (2.7)$$

onde α_μ é uma certa constante proporcional ao parâmetro da cauda A^μ . Desta forma, está claro que no limite $\mu = 2$ se recupera a definição de uma gaussiana. Quando μ decresce de 2 a distribuição torna-se mais agudamente pontuda em torno da origem e mais larga nas suas caudas, enquanto que eventos intermediários perdem peso.

Uma generalização interessante das distribuições de Lévy é dada pela distribuição de Lévy truncada. Uma maneira simples de alterar a função característica (2.7) para levar em conta um corte exponencial para grandes argumentos é estabelecer que:

$$\hat{L}_\mu^{(t)}(z) = \exp \left[-\alpha_\mu \frac{(\alpha^2 + z^2)^{\mu/2} \cos(\mu \arctan(|z|/\alpha)) - \alpha^\mu}{\cos(\pi\mu/2)} \right], \quad (2.8)$$

para $1 \leq \mu \leq 2$.

2.6 A distribuição de riqueza

As distribuições de renda e riqueza não coincidem exatamente, mas são fortemente dependentes uma da outra. Foi descoberto mais tarde que a riqueza também está distribuída de acordo com uma lei de potência (ATKINSON e HARRISON¹⁰, citados por Levy e Solomon (1997)). A distribuição de lei de potência da riqueza tem importantes

¹⁰A.B. Atkinson, A.J. Harrison, *Distribution of Total Wealth in Britain*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

implicações, como no grau de desigualdade na sociedade (SLOTTJE¹¹, citado por Levy e Solomon (1997)) e como na distribuição de flutuações nas bolsas de valores. Mantegna e Stanley (1995) mostraram que as flutuações no valor do índice de contratos de futuros dos EUA S&P 500 estão distribuídas de acordo com uma distribuição (truncada) de Lévy. Argumenta-se que o expoente da distribuição de Lévy de flutuações deveria ser idêntico ao expoente α da lei de potência da distribuição de riqueza (LEVY; SOLOMON, (1996)). Foi proposta uma explicação ao fato de que as flutuações de preço das ações não seguem uma distribuição gaussiana (normal), mas sim uma distribuição de Lévy L_μ mais larga de índice $\mu = 1,4$. Alegou-se que isto está relacionado com a lei de Pareto na riqueza dos investidores. Isto foi baseado na afirmação (sustentada por dados) que cada investidor induz variações randômicas de preço proporcionais a sua presente riqueza (LEVY; SOLOMON, (1996)).

Matematicamente, isto é um caso particular do bem conhecido resultado de P. Levy: uma distribuição de flutuações de Lévy L_μ de índice μ surge de um caminho aleatório com tamanhos de passos l randômicos distribuídos de acordo com a lei de potência de Pareto $P_\mu(l) \sim l^{-1-\mu}$ (LEVY; SOLOMON, (1997)).

Dados fenomenológicos confirmam esta afirmação: o expoente de Pareto $\mu = 1,4$ da distribuição de riqueza individual P_μ é igual ao índice da distribuição de Lévy L_μ que caracteriza as flutuações dos preços das ações (LEVY; SOLOMON, (1997)).

Portanto, conclui-se que os dados sustentam o mecanismo proposto em Levy *et al.* 1996, que relaciona flutuações de ações com a distribuição de riqueza individual dos investidores (LEVY; SOLOMON, (1997)).

Os dois principais métodos para medir a distribuição de riqueza são: (I) medida direta da função densidade de probabilidade e (II) medida da distribuição cumulativa. O método (I) é realizado dividindo a escala de riqueza em faixas (intervalos) e contando,

¹¹D.J. Slotje, *The Structure of Earnings and the Measurement of Income Inequality in the U.S.*, Elsevier, New York, 1989.

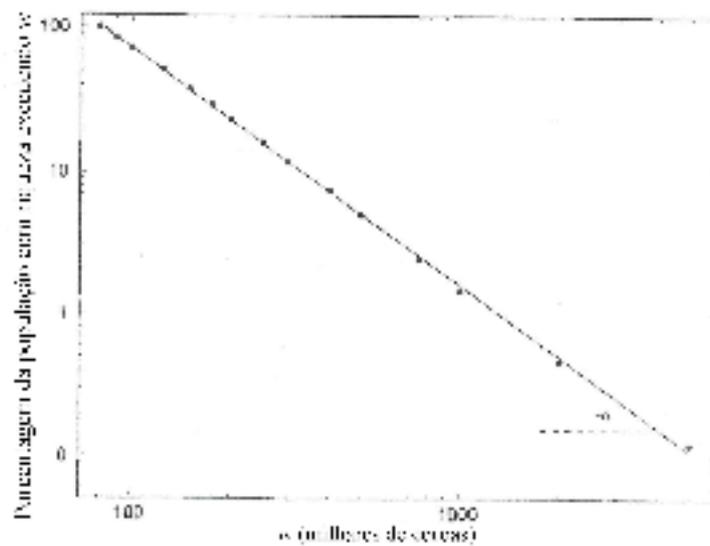


Figura 2.6: Medida da porcentagem da população com renda maior que diferentes níveis de riqueza. Esta medida foi feita na Suécia. A distribuição de lei de potência da riqueza é uma linha reta na escala log-log com inclinação α . Os dados empíricos são representados por pontos, a linha sólida é o ajuste da lei de potência. A distribuição empírica está em excelente acordo com o ajuste de lei de potência (LEVY; SOLOMON, (1997)).

para cada faixa, o número de pessoas cuja riqueza esteja dentro dela. O problema com este método é que por razões práticas, o número de faixas é pequeno e por isso não se tem uma imagem clara da distribuição. No método (II) seleciona-se alguns níveis de riqueza e para cada nível conta-se o número de pessoas com riqueza que excede este nível (figura 2.6). Uma desvantagem deste método é que ele é indireto no sentido que não se mede a distribuição de probabilidade, mas ao invés disso a integral desta função e deste modo há um efeito de média. Os dois métodos têm a desvantagem de dar uma descrição relativamente pobre da distribuição em níveis de riqueza extremamente altos, já que o número de pessoas nestes níveis é muito pequeno, e desta forma as estatísticas não são boas. No entanto, a distribuição exata nos níveis de riqueza extremamente altos é muito importante, já que uma grande porcentagem da riqueza total está concentrada nestes níveis. Por exemplo, nos EUA o 1% mais rico da população detém mais que 40 % da riqueza (WOLFF¹², citado por Levy e Solomon (1997)).

¹²E.N. Wolff, *The American Prospect* 22 (1995) 58.

Levy e Solomon (1997) empregaram um método diferente para descrever a distribuição de riqueza em níveis de riqueza muito altos. Para isso, as 400 pessoas mais ricas nos EUA foram ordenadas de acordo com sua riqueza, que foi analisada como uma função da ordem (posição). A fonte de dados é da lista da Forbes 400 de 1996. Para uma distribuição de riqueza de lei de potência com expoente α a relação esperada entre a ordem e a riqueza é dada por:

$$W = An^{-1/\alpha}, \quad (2.9)$$

onde W é a riqueza, A é uma constante e n é a ordem (isto é, para a pessoa ordenada em 200 na lista das pessoas mais ricas, $n = 200$). Para a obtenção desta relação veja, por exemplo, Takayasu¹³, citado por Levy e Solomon (1997). A figura 2.7 mostra os resultados. Os pontos representam os dados empíricos. A linha sólida é um ajuste de lei de potência com inclinação $-0,735$, o que corresponde a um valor de $\alpha = 1,36$. Uma análise similar foi feita no período de 1996-1999 com aproximadamente as 400 pessoas mais ricas dos EUA e as 100 mais ricas do Japão e os resultados são consistentes com este expoente (AOYAMA *et al.*, 2000). A concordância dos dados empíricos com uma lei de potência é muito boa. A maioria dos desvios do ajuste teórico ocorre em valores redondos de riqueza, especialmente em \$1 e \$2 bilhões. Isto se deve provavelmente ao arredondamento dos valores estimados de riqueza. O valor medido de α também está em muito boa concordância com o expoente da distribuição de Lévy de flutuações das cotações de ações na bolsa de valores medido por Mantegna e Stanley, que é 1,40. Isto suporta a hipótese (LEVY; SOLOMON, (1996)) relativa à conexão entre a distribuição de riqueza e a distribuição de flutuações das bolsas de valores.

Este estudo de Levy e Solomon (1997) indica uma distribuição de lei de potência para a riqueza em mercados ou sociedades realísticas, possivelmente de não equilíbrio (CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2000).

¹³H. Takayasu, *Fractals in the Physical Sciences*, Wiley, New York, 1990.

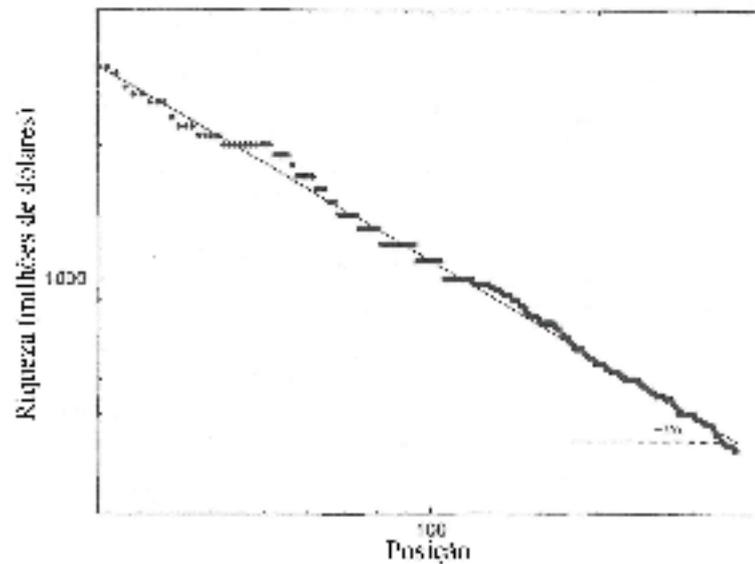


Figura 2.7: A figura mostra a riqueza das pessoas mais ricas nos EUA como uma função da posição. A linha sólida é o ajuste de lei de potência com inclinação $-0,735$, que corresponde a $\alpha = 1,36$ (LEVY; SOLOMON, (1997)).

2.7 O mercado de dinheiro

A natureza dinâmica interagente de qualquer setor econômico composto de muitos agentes que interagem de modo cooperativo tem muitas características em comum com a física estatística de sistemas interagentes (CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2000).

Muito esforço tem sido feito para aplicar métodos da física estatística a vários problemas econômicos. A maior parte dele foi aplicada na natureza das flutuações e suas distribuições nas bolsas de valores (MANTEGNA; STANLEY, 2000). Entretanto, uma dinâmica fundamental ocorre no mercado de dinheiro, que afeta fortemente a dinâmica dos outros setores na economia. Um entendimento da mecânica estatística do mercado de dinheiro é por esta razão essencial (CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2000)). Diversos modelos têm sido desenvolvidos para obter a distribuição de equilíbrio de dinheiro no mercado (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000 e CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2000). O comércio, que é a única atividade econômica considerada, entre quaisquer dois agentes em qualquer mercado que conserva dinheiro foi identificado com o espalhamento

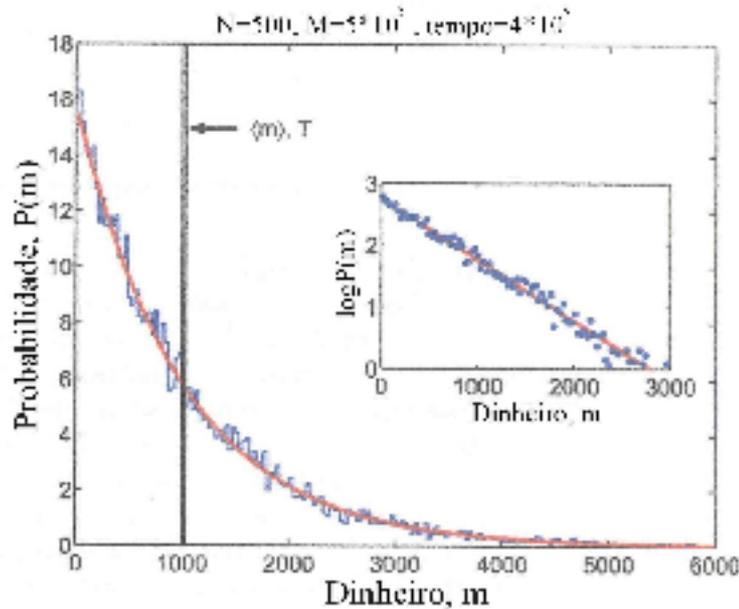


Figura 2.8: Histograma e pontos: distribuição de probabilidade estacionária de dinheiro $P(m)$. A curva sólida é o ajuste da lei de Boltzmann-Gibbs $P(m) \propto \exp(-m/T)$. As linhas verticais correspondem a distribuição inicial de dinheiro (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000).

elástico de dois corpos (que conserva energia) em um gás. Foi mostrado (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000) que para qualquer troca (comércio) arbitrária e randômica, mas que conserve localmente o dinheiro na transação entre dois quaisquer agentes em um mercado, a distribuição de dinheiro tende a distribuição de equilíbrio de Gibbs da mecânica estatística (figura 2.8): $P(m) = (1/T) \exp(-m/T)$, onde $T = M/N$ é o dinheiro médio por agente e M é o dinheiro total dos N agentes no mercado. Essa lei de conservação de dinheiro reflete o fato que não é permitido a manufaturação de dinheiro por agentes econômicos regulares, mas ele pode ser transferido entre eles. Esta distribuição de equilíbrio é extremamente robusta e várias espécies de transações monetárias interagentes, que localmente conservam o dinheiro total, conduzem a distribuição de probabilidade de Gibbs satisfazendo $P(m_1)P(m_2) = P(m_1 + m_2)$ (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000). Os conceitos de mecânica estatística de equilíbrio são pontos de referência no estudo de fenômenos fora de equilíbrio.

A maior realização deste estudo (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000) tem sido

a identificação precisa da temperatura T como o dinheiro médio por agente no mercado. Isto se deve ao fato de que a distribuição de probabilidade é normalizada e o dinheiro total é conservado (CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2000). Não há outra restrição no comércio. À parte da identificação de temperatura (do gás/mercado ideal) como sendo o dinheiro médio por agente no mercado, estes modelos claramente indicam uma distribuição robusta do tipo distribuição de Gibbs, $P(m)$, onde a densidade de agentes com dinheiro m diminui exponencialmente com m . Isto é completamente diferente da lei de Pareto. Em ambos os casos de distribuições de Gibbs ou Pareto, naturalmente, não importando o quão uniforme se distribui inicialmente o dinheiro entre os agentes, os sucessivos negócios no fim levam a uma distribuição estável onde a maioria de seus agentes termina com muito pouco dinheiro. Simulações numéricas extensas (CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2000) mostraram que esta e várias modificações de comércio levam a uma distribuição de Gibbs robusta, independente da distribuição inicial com que o mercado começa. Deste modo, a maioria dos agentes termina neste mercado com muito pouco dinheiro. O fornecimento de mais dinheiro no mercado (aumentando T) pode aumentar a largura da distribuição, mas a quantidade mais provável de dinheiro para qualquer agente no mercado permanece sendo zero.

Além da lei de Pareto, também é conhecido que tipicamente menos de 10 % da população em qualquer país possui em torno de 40% da riqueza e segue a lei de Pareto. O resto da população de baixa renda, de fato a maioria, claramente segue uma lei diferente (CHATTERJEE *et al.*, 2004), identificada por alguns autores (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001a) como sendo a distribuição de Gibbs (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000 e CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2000) ou a distribuição lognormal (SOUMA, 2003) que foi apresentada nas seções iniciais deste capítulo.

Algumas evidências sustentam a possibilidade de distribuição de Gibbs na renda de vários países. Por exemplo, a distribuição de renda individual nos EUA (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001a) como mostra a figura 2.9. Também há dados da distribuição de

riqueza (figura 2.10) e renda (figura 2.11) no Reino Unido e distribuição de renda de estados individuais dos EUA (figura 2.12), onde a maior parte da população é descrita por uma distribuição exponencial (no caso dos EUA, ~95%), enquanto que a cauda de alta renda segue uma lei de potência (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001b).

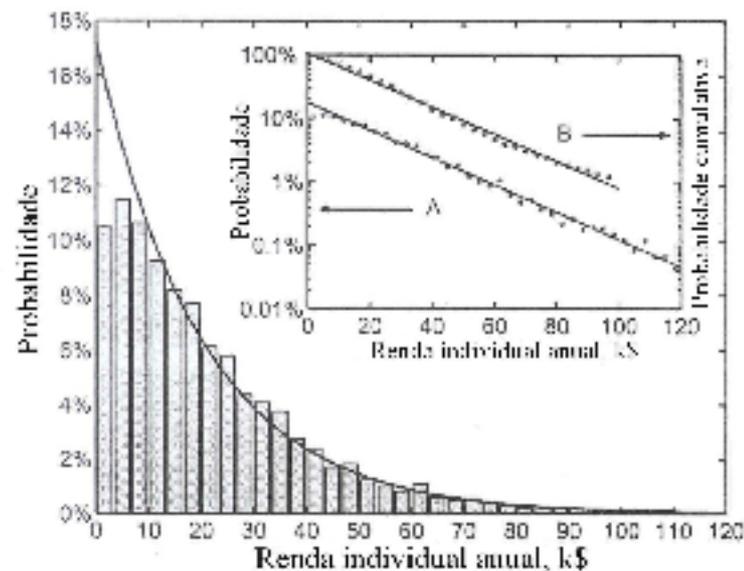


Figura 2.9: O histograma é a distribuição de probabilidade da renda individual dos EUA. Os dados são do censo de 1996. A linha sólida é o ajuste exponencial. O gráfico interno A também é a distribuição de probabilidade da renda individual, mas com a escala vertical em logaritmo natural. O gráfico interno B é a distribuição de probabilidade cumulativa da renda individual em 1992. A temperatura obtida no ajuste B é \$18.844 (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001a).

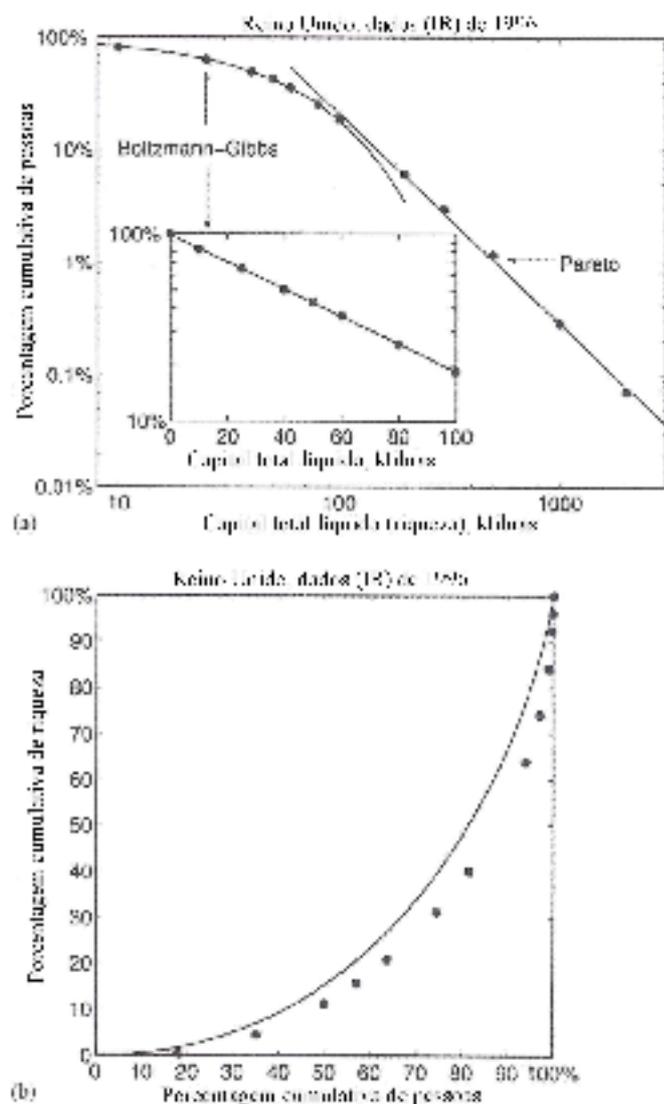


Figura 2.10: Distribuição de probabilidade cumulativa do capital total líquido (riqueza) mostrada em escala log-log (a), log-linear (gráfico interno) e nas coordenadas de Lorenz (b) para o Reino Unido em 1996. Os pontos são os dados reais. A linha sólida à esquerda é o ajuste da exponencial (Boltzmann-Gibbs) com temperatura igual a 59.6 k \mathcal{L} e à direita é o ajuste da lei de potência (Pareto) com $\alpha = 1,9$. A linha sólida do gráfico interno é a função de Lorenz calculada para a lei exponencial (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001b).

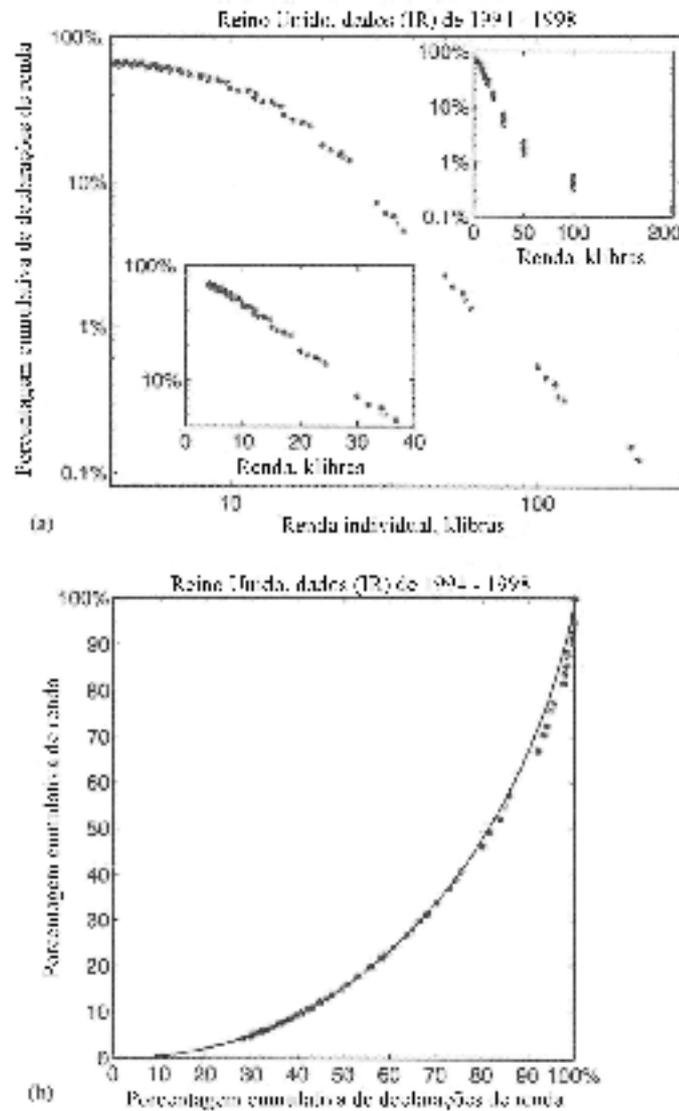


Figura 2.11: Distribuição da probabilidade cumulativa da renda individual anual no Reino Unido no período de 1994-1998 com os dados brutos (gráfico interno superior) e os dados em escala log-log com $\alpha \simeq 2,0$ (a), log-linear (gráfico interno inferior) e coordenadas de Lorentz (b). A linha sólida em (b) é a função de Lorentz calculada para a lei exponencial (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001b).

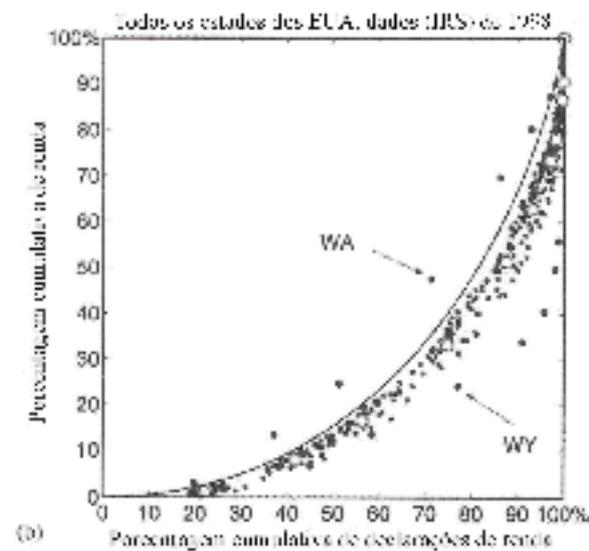
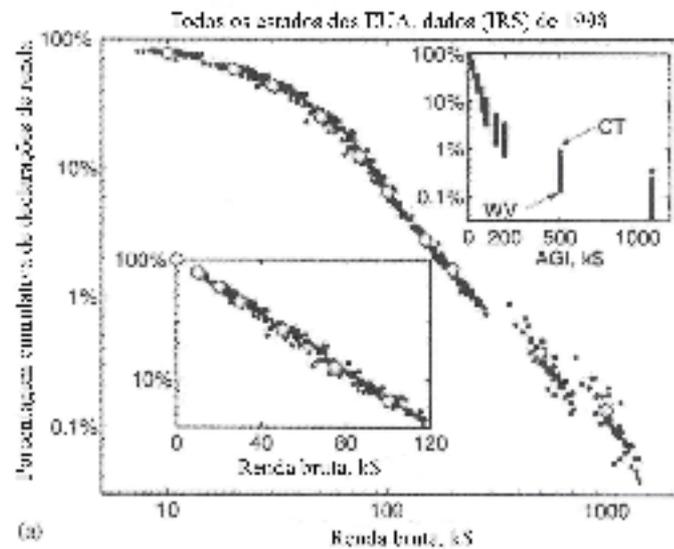


Figura 2.12: Distribuição da probabilidade cumulativa da renda individual anual para todos os estados dos Estados Unidos em 1998 com os dados brutos (gráfico interno superior) e os dados em escala log-log com $\alpha = 1,7$ (a), log-linear com temperatura igual a $36,4k\$$ (gráfico interno inferior) e coordenadas de Lorentz (b). A linha sólida em (b) é a função de Lorentz calculada para a lei exponencial (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001b).

2.8 Considerações finais

A análise de dados de boa qualidade assegura a validade da lei de potência de Pareto para a faixa de alta renda ou riqueza e permite uma boa estimativa do índice de Pareto. Além disso, a estrutura da lei de Pareto é universal, embora o índice varie de ano a ano e de país a país.

O resto da população de baixa renda ou riqueza, que é a maioria, segue uma lei diferente da lei de Pareto. Há evidências de que esta faixa segue a distribuição de Gibbs de acordo com dados de distribuição de renda e riqueza dos EUA e Reino Unido. Há também dados de renda para o Japão que sustentam a possibilidade da distribuição de baixa renda ou riqueza ser lognormal, com um máximo em um valor de renda diferente de zero, o que está em contradição com os resultados de distribuição exponencial que têm um máximo na riqueza igual a zero. Esta discrepância pode ser devido ao alto limiar superior para os registros de impostos do Japão que pode distorcer os dados no limite inferior. Por outro lado, supondo a validade destes dados, isso pode refletir diferenças reais entre as estruturas sociais dos EUA e Reino Unido com o Japão (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001b).

A distribuição exponencial de Boltzmann-Gibbs se aplica a quantidades que obedecem uma lei de conservação, como a energia ou o dinheiro. Entretanto, não há uma razão fundamental para que a soma das rendas (assim como a soma do dinheiro) seja conservativa. Talvez a renda obedeça uma lei de conservação aproximada ou a distribuição de renda simplesmente é proporcional a distribuição de dinheiro que é exponencial. Outra explicação para as evidências de distribuição de renda e riqueza exponencial envolve uma hierarquia. Grupos de pessoas têm líderes que por sua vez também têm líderes e assim por diante. O número de pessoas decresce geometricamente (exponencialmente) com o nível de hierarquia. Se a renda cresce linearmente com o nível de hierarquia, então a distribuição de renda é exponencial. Entretanto, se a renda cresce de modo multiplicativo, então

a distribuição segue a lei de Pareto. Para rendas moderadas nos EUA abaixo de 100.000 dólares o crescimento linear pode ser mais realfstico, o que explicaria a lei exponencial da figura 2.9 (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001a).

Além disso, há estudos empíricos que mostram que as distribuições de probabilidade cumulativa das flutuações do índice S&P 500 e outros índices do mercado financeiro seguem uma distribuição de Lévy truncada com $\mu = 3/2$ (MANTEGNA e STANLEY (1995) e BOUCHAUD e POTTERS (2000)).

Capítulo 3

Modelo de mercado com trocas conservativas

Você não fica rico fazendo física, mas você tem oportunidade de ir para todos os lugares que os ricos iriam se eles tivessem tempo.

Per Bak

3.1 Introdução

Como foi visto no capítulo 1, os conceitos e técnicas da mecânica estatística têm sido aplicados há muitos anos em uma grande variedade de sistemas complexos estendidos, na física e em outros campos, no esforço de entender suas propriedades emergentes. Em geral, sistemas estendidos apresentam comportamento crítico sem necessidade de qualquer sintonia fina de um parâmetro para estarem em um estado crítico. No estado crítico auto-organizado, há interações de longo alcance através das quais cada parte do sistema está sob influência de todas as demais. Mais precisamente, isto significa que muitos dos observáveis relevantes no sistema seguem uma lei de potência ou distribuição de Pareto-Lévy com um expoente não trivial. Distribuições de Pareto são conhecidas por ca-

racterizar, por exemplo, a distribuição de renda nas camadas de alta renda das sociedades ricas, como foi visto no capítulo 2.

A economia é, de longe, um dos sistemas estendidos mais complexos. Cada característica de um agente do mercado influencia seus parceiros econômicos e através deles todos os outros membros do mercado. O desenvolvimento econômico tem sempre sido considerado a força motriz na determinação das relações internas da sociedade e, segundo Marx, toda a história da humanidade é regida pelas leis da economia. De modo similar com o que acontece em paleontologia, ela segue um padrão de equilíbrio pontuado: guerras, fome, quebras nas bolsas de valores e revoluções são as mais evidentes e extremas ilustrações dessas explosões de atividade histórica. É então natural, mesmo que seja por força de mera analogia, procurar por evidências de comportamento crítico em sistemas econômicos. Nos últimos anos uma grande quantidade de esforço tem sido dedicada à análise de dados econômicos. De flutuações de bolsas de valores (LUX; MARCHESI, 1999), modelos de produção (BAK *et al.*, 1993), distribuição dos tamanhos de companhias (STANLEY *et al.*, 1996) ao surgimento do dinheiro (DONANGELO; SNEPPEN, 2000) e efeitos de controle no mercado (CUNIBERTI *et al.*, 2001), tem sido mostrado que o mercado econômico exibe propriedades características de um sistema crítico.

Neste trabalho, será focado um aspecto particular dos processos econômicos: o objetivo é modelar a competição entre diferentes agentes (países, empresas, etc.) agindo em um ambiente onde todas as trocas de recursos entre eles acontecem em um modo conservativo, ou seja, um modelo de mercado de trocas conservativas (MMTC) (PIA-NEGONDA *et al.*, 2003). Esta restrição tem várias motivações. Por um lado, pode-se argumentar que os recursos são objetos materiais, e conseqüentemente não podem ser criados ou destruídos por meio de trocas entre eles. Assim como discutido no capítulo 2, pode-se argumentar que nas trocas em dinheiro o circulante não pode ser criado ou destruído, e embora muitos recursos possam ser criados, por exemplo, conhecimento, ou destruídos, como combustível em um automóvel, é assumido que se essa situação ocorre

é às custas de outras, fazendo então com que a totalidade dos recursos disponíveis, em um particular instante de tempo, seja constante. Por outro lado, o uso de um modelo de mercado de trocas conservativas implica que a economia é um jogo de soma nula, algo que pode parecer estar em desacordo com a economia ortodoxa usual. Neste estágio é bom ressaltar que é também procurado um comportamento referência, ou seja, um comportamento contra o qual um sistema de soma não nula poderia (e deveria) ser comparado; qualquer estudo de crescimento de riqueza entre uma população de agentes requer entender o comportamento do sistema de referência (conservativo). Entretanto, os resultados também são válidos para sistemas em que a quantidade total de riqueza aumenta suave e uniformemente no tempo (sem saltos); por último, mas não menos importante, o modelo é livre de parâmetros.

Dentro deste contexto, os mecanismos de trocas conservativas conduzem a uma distribuição de renda do tipo Gibbs, onde muito poucos agentes extremamente ricos são estáveis no tempo e o resto está apenas acima de um certo limiar. Isso ocorre mesmo na ausência de um limite inferior para o parâmetro da riqueza (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000). Como nem débitos nem lucros ou impostos na riqueza são explicitamente incluídos neste modelo, o papel da geografia é reforçado. De fato, uma solução não geográfica de campo médio gera uma distribuição de riqueza completamente diferente. A solução globalmente acoplada pode ser comparada com os resultados obtidos em Bouchaud e Mézard (2000) e Burda *et al.* (2001) para modelos de mercado estocásticos e multiplicativos, e reforça as conclusões apresentadas em Huang e Solomon (2001), referente à condensação de riqueza com um número finito de agentes. Neste trabalho, a riqueza é definida como a quantidade total de recursos disponíveis para um agente. É uma simplificação, já que, por exemplo, em qualquer transação comercial a riqueza é, de certo modo, criada.

3.2 O modelo de mercado com trocas conservativas

A nossa *economia* será modelada como uma rede unidimensional, sendo que cada sítio da rede representa um agente econômico. Agentes com os vínculos mais próximos uns aos outros (geográficos ou outros) serão vizinhos na rede. Por simplicidade foram assumidas condições de contorno periódicas. Cada agente será caracterizado por algum parâmetro de riqueza (chamado apenas de riqueza) que representa sua prosperidade. A escolha exata deste parâmetro não é direta. Por exemplo, quando se pensa em países na economia mundial, o PIB (Produto Interno Bruto) ou alguma função de indicadores macroeconômicos seria uma escolha razoável. No caso de companhias, o patrimônio líquido (lucro), o preço de ações ou alguma combinação adequada deles com débitos a serem pagos são candidatos razoáveis. A riqueza representa a capacidade de “sobrevivência” no mercado econômico, assim como o fitness representa a capacidade de sobrevivência da espécie no modelo BS (BAK; SNEPPEN, 1993) discutido no capítulo 1. Para uniformizar os competidores e garantir que nenhum agente tenha uma vantagem injusta, a configuração inicial é escolhida de modo que a riqueza é distribuída randomicamente entre os agentes de uma distribuição uniforme entre 0 e 1, ou seja, a riqueza de cada agente é um número entre 0 e 1.

No mercado, todos os agentes se esforçam para melhorar sua situação. Em particular, o agente mais pobre é aquele que sente a pressão mais forte para promover meios de melhorar sua condição social. Vamos então aplicar, como no modelo BS (BAK; SNEPPEN, 1993), uma dinâmica de mínimos. Em cada passo de tempo, o agente mais pobre, ou seja, aquele com a mínima riqueza, tomará alguma ação (medida) tentando melhorar seu estado econômico. Isto é, ele mudará seus métodos de produção, pedirá dinheiro emprestado, aumentará a porcentagem de campos semeados ou tomará alguma outra medida almejando aumentar sua riqueza. Como o resultado de tal medida é incerto, este resultado é simulado como uma mudança randômica no parâmetro de riqueza deste agente;

por simplicidade escolhemos o novo parâmetro de riqueza como um número randômico extraído de uma distribuição uniforme (entre 0 e 1). Do ponto de vista teórico, a randomicidade no resultado pode ser entendida como um efeito combinado de várias coisas, como mudanças nas condições de mercado, a pobre compreensão dessas condições pelo agente, o agente não possuir as habilidades necessárias para fazer as escolhas certas, etc. Se a ação do agente mais pobre é, por exemplo, pedir dinheiro emprestado, este deve vir de algum lugar, então se assume que ele vem de seus dois primeiros vizinhos. Assim, qualquer riqueza que é ganha (ou perdida) pelo agente mais pobre será, na primeira versão do modelo (PIANEGONDA *et al.*, 2003), às custas de seus vizinhos e é assumido que ela será igualmente dividida entre seus dois vizinhos mais próximos. Deve-se ressaltar que, além da conservação, não é imposto nenhum outro limite na evolução da riqueza, então qualquer valor negativo é, em princípio, possível, o que corresponde a um agente ter dívida e não riqueza. Da mesma forma, valores de riqueza maiores que 1 também são, em princípio, permitidos. Como um sítio com riqueza negativa provavelmente será o sítio de mínimo num futuro próximo, é esperado que um sítio estenda-se apenas poucos passos “no vermelho” (riqueza negativa). Nesta versão simplificada do modelo, inadimplência não é levada em conta, isto é, qualquer agente pode permanecer para sempre em débito, embora com uma probabilidade muito baixa.

A dinâmica do MMTC pode ser resumida da seguinte maneira:

(1) Localiza-se o sítio x_{min} de menor riqueza $w(x)$;

(2) Substitui-se $w(x_{min})$ por w_{novo} , que é um novo número randômico entre 0 e 1 tirado de uma distribuição uniforme;

(3) Efetua-se a diferença, $\Delta = w_{novo}(x_{min}) - w(x_{min})$;

(4) Atualiza-se os vizinhos,

$$w(x_{min} - 1) = w(x_{min} - 1) - \Delta/2;$$

$$w(x_{min} + 1) = w(x_{min} + 1) - \Delta/2.$$

Se Δ for positivo, a riqueza dos vizinhos será reduzida de $\Delta/2$. Do contrário, será aumentada pela mesma quantidade. Um esquema deste modelo pode ser visto na figura 3.1.

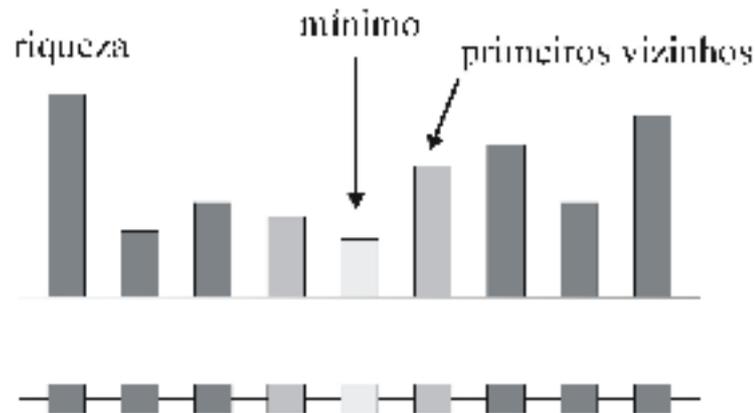


Figura 3.1: Esquema do modelo de mercado com trocas conservativas.

O nosso interesse está na distribuição de riqueza e na estabilidade dos agentes econômicos melhor adaptados, ou seja, com maior riqueza.

3.3 Resultados

3.3.1 Distribuição de riqueza

O modelo foi analisado através de simulações numéricas. A primeira observação interessante a ser constatada é que, depois de um transiente relativamente longo, o sistema atinge um estado crítico auto-organizado (SOC) com uma distribuição de riqueza estacionária. Um estado típico da distribuição da riqueza estacionária pode ser observado na figura 3.2 para $N = 1000$ agentes depois de 5×10^7 passos de tempo. Para nós, um passo de tempo corresponde a uma atualização (ou evento de redistribuição de renda). Sendo assim, passos de tempo consecutivos correspondem a consecutivas atualizações.

Note que, de modo muito similar ao modelo BS (apresentado no capítulo 1), quase

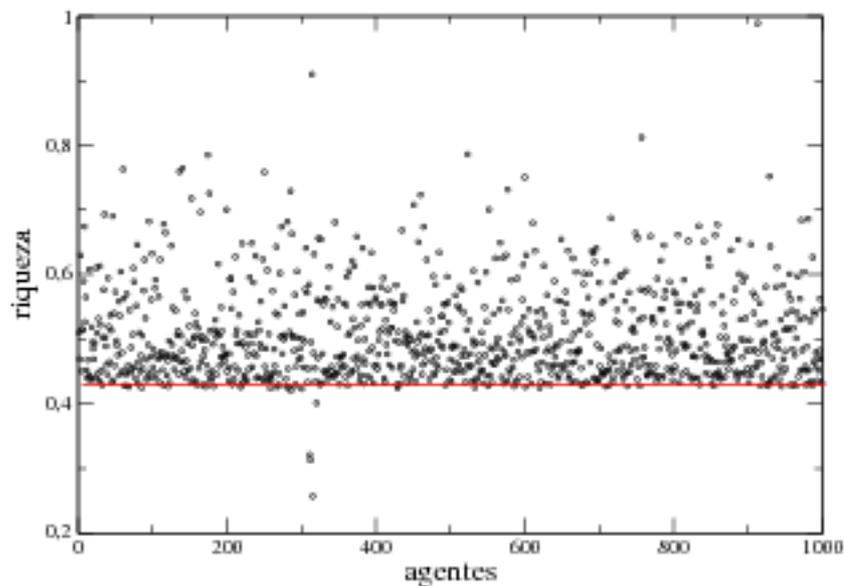


Figura 3.2: Imagem instantânea da riqueza no estado crítico estacionário para o modelo MMTC com $N = 1000$ agentes. Exceto para uma região localizada onde há alguns agentes com pouca riqueza devido à propagação de uma avalanche, todos os demais agentes têm riqueza acima do limiar auto-organizado $\eta \approx 0,43$.

todos os agentes econômicos estão acima de um certo limiar, um valor de riqueza crítico η_T , em torno de $\eta_T \approx 0,43$. Para o modelo BS, o limiar é maior sendo 0,667. Há um pequeno grupo de agentes abaixo deste limiar que fazem parte de uma avalanche de eventos de redistribuição de renda. Na biologia tais sítios são selecionados para mutação nos próximos passos de tempo. Na economia, a mutação representa a tomada de medidas econômicas que podem ou não resultar em uma melhora do estado econômico do agente. Nenhum agente acima deste limiar tomará medidas espontaneamente, mas eles podem ser atingidos pelos seus vizinhos pobres e então perder sua estabilidade econômica. A figura 3.2 representa uma situação depois que o sistema atingiu este estado crítico auto-organizado. Para ver como o sistema evolui durante o transiente tem-se a figura 3.3 que mostra a evolução do agente mínimo, ou seja, com a menor riqueza do mercado e do agente máximo (com a maior riqueza).

Note que no início da simulação o maior valor que o mínimo assume vai aumentando à medida que o tempo passa até que um limite superior é atingido, que pode ser

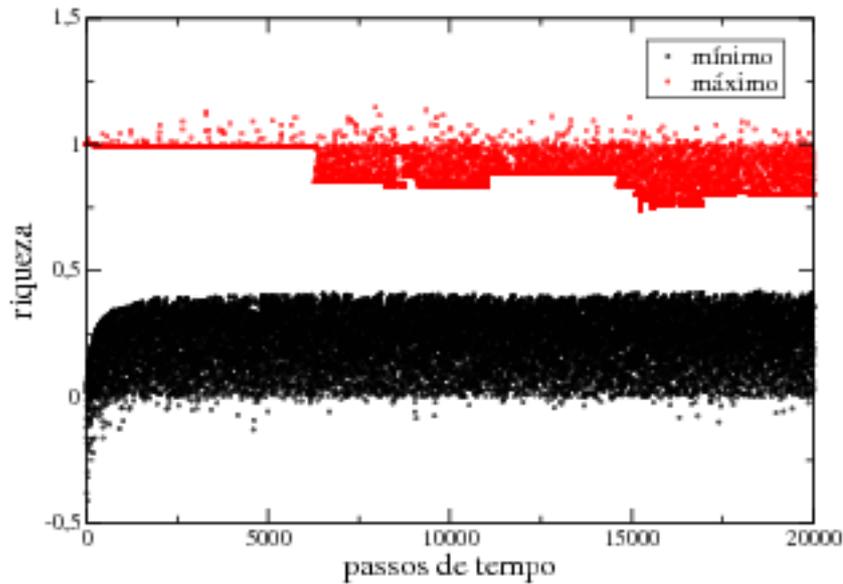


Figura 3.3: Evolução temporal dos máximos e mínimos de riqueza para um mercado de $N = 200$ agentes. O maior valor que o mínimo atinge estabiliza em torno de 10.000 passos indicando que o sistema atingiu o estado crítico, já o máximo mostra um comportamento oscilante.

tomado como uma aproximação inferior para o limiar η_T ; o sistema se auto-organizou. Quanto ao máximo, percebe-se que ele varia relativamente pouco, refletindo uma conduta de estabilidade, embora às vezes ele seja abalado, por curtos períodos de tempo, por avalanches de redistribuição de renda engatilhadas pelo agente mais pobre, em um dado instante de tempo. O máximo apresenta um comportamento oscilante. Diz-se que o sistema se auto-organiza, pois nenhum ajuste de parâmetros é necessário para que a evolução do sistema atinja um estado organizado e estável. Na verdade, o MMTTC é inclusive livre de parâmetros. Este estado estável e organizado também independe da configuração inicial do sistema.

O transiente necessário para que o sistema atinja o estado crítico auto-organizado depende do tamanho do sistema. Para uma cadeia de $N=1000$ agentes, a figura 3.4 mostra histogramas das distribuições de riqueza em diferentes instantes de tempo. O histograma é construído contando-se quantos agentes têm riqueza dentro de um determinado intervalo, no caso, a janela utilizada foi de 0,01. Como a simulação é iniciada atribuindo-se a

cada agente um número aleatório tirado de uma distribuição uniforme, no passo de tempo inicial o histograma é relativamente plano em relação àqueles em tempos posteriores. Pode-se ver desta figura que para $N=1000$ uma distribuição estacionária é atingida por volta de 500.000 passos de tempo. No caso de uma cadeia de 200 agentes o transiente encontrado foi em torno de 80.000 passos. Assim, pode-se dizer que o número de passos necessários para que um sistema de tamanho N atinja o estado estacionário é da ordem de N^2 .

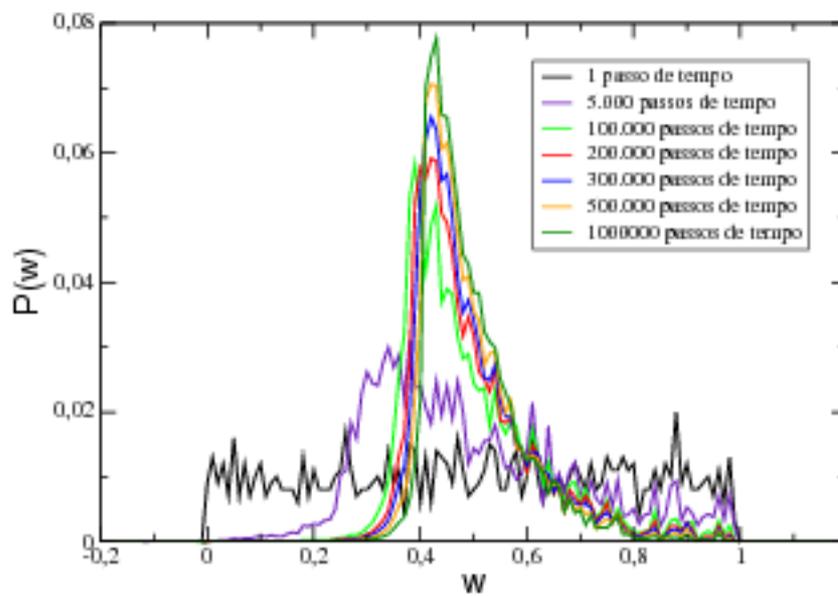


Figura 3.4: Histograma da distribuição de riqueza para um mercado de 1000 agentes em diferentes instantes de tempo. Em torno de 500.000 passos de tempo o sistema atinge um estado estacionário.

3.3.2 Criticalidade do MMTC

Até aqui foram discutidas evidências de que o sistema se auto-organiza em um estado estacionário. Agora será discutida a criticalidade deste estado auto-organizado. A criticalidade do modelo pode ser verificada através do cálculo de diversas quantidades no estado estacionário. Se for feito um gráfico do padrão de atividade¹ em função do tempo, assinalando-se um ponto na linha temporal toda vez que um agente se torna o mínimo da rede, tem-se uma estrutura similar àquela do modelo BS (cuja criticalidade foi discutida no capítulo 1), como pode ser visto na figura 3.5. A medida começou em um tempo arbitrário depois que o estado crítico auto-organizado foi atingido. De modo análogo como foi feito para o modelo BS, pode-se monitorar a evolução temporal de um agente ao longo da linha vertical. Por exemplo, será acompanhado o agente de posição $x = 200$. À medida que nos deslocamos ao longo da linha vertical do tempo, encontramos períodos tranquilos relativamente longos sem atividade, intercalados por períodos de explosões de atividade. Esse comportamento, como discutido no capítulo 1, é chamado de equilíbrio pontuado e é característico de sistemas auto-organizados no estado crítico. A figura 3.6 mostra o padrão de atividade para uma rede de 40 agentes, em um intervalo de 8.000 passos de tempo.

Para evidenciar melhor o comportamento de equilíbrio pontuado será contado o número de eventos de redistribuição de riqueza (pontos na figura 3.5) à medida que nos deslocamos ao longo da linha do tempo. Esse número é chamado de atividade acumulada. A figura 3.7 mostra a atividade acumulada em função do tempo para um dado agente, em particular o agente com posição $x = 62$. A atividade acumulada representa a quantidade de mudança na riqueza do agente. A natureza de equilíbrio pontuado da curva é óbvia. Há longos períodos de tranquilidade (platôs), onde não há atividade, separados por explosões de atividade que são as regiões sem platôs ou com platôs de apenas alguns passos de

¹Ou eventos de redistribuição de riqueza correspondentes ao sítio de mínimo.

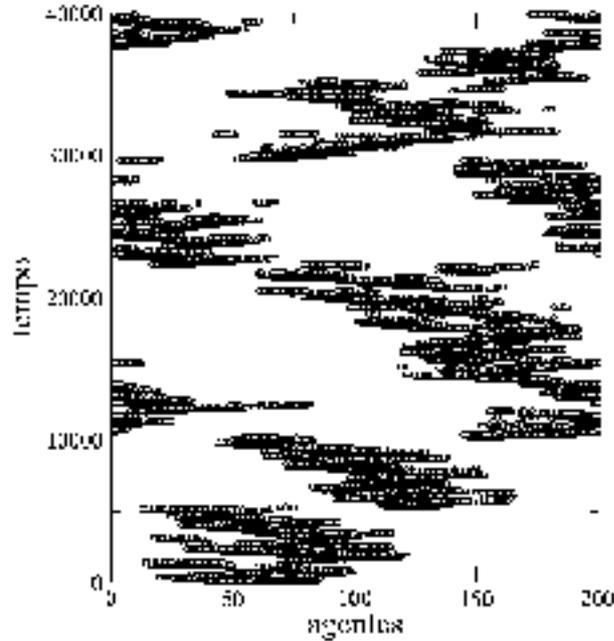


Figura 3.5: Evolução temporal da posição dos mínimos de riqueza para um mercado de $N = 200$ agentes, depois de um transiente de 10^6 passos.

tempo. Como já foi visto na seção 1.5.2, essa curva é chamada de escada do Diabo.

Pode-se calcular também duas importantes distribuições caracterizando os tempos de retorno da atividade para um dado sítio na rede. Uma delas é a distribuição da probabilidade dos tempos de primeiro retorno, $P_{pr}(T)$, que é a distribuição das durações dos períodos de tranquilidade (platôs na figura 3.7 ou “buracos” na figura 3.5) separando subsequentes pontos de retorno da atividade em um dado sítio. Aqui T é o tamanho dos platôs (número de passos de tempo consecutivos). Esta distribuição é normalizável, $\int_0^\infty P_{pr}(T) dT = 1$ (PACZUSKI *et al.*, 1996).

A distribuição dos tempos de primeiro retorno dos eventos de redistribuição de riqueza para um mercado de $N = 1000$ agentes em um intervalo de 1×10^9 passos de tempo, depois de um transiente de 10^6 passos, é uma lei de potência $P_{pr}(T) \sim T^{-\tau_{pr}}$ (figura 3.8), com expoente τ_{pr} em torno de 1,5 (mais precisamente $\tau_{pr} = 1,533 \pm 0,005$).

A outra distribuição, $P_{tr}(\mathbf{x}, T)$, é a probabilidade que a atividade na posição 0 no tempo 0 esteja na posição \mathbf{x} no tempo T . Esta quantidade não obedece a mesma normali-

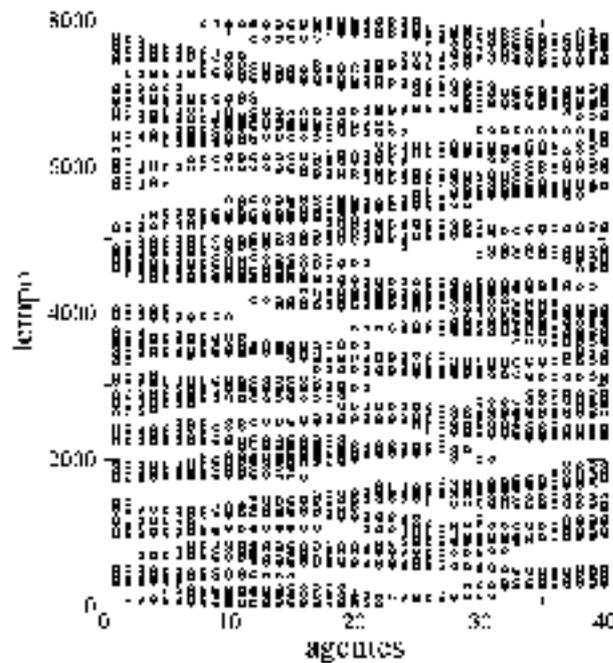


Figura 3.6: Evolução temporal da posição dos mínimos de riqueza para um mercado de $N = 40$ agentes, depois de um transiente de 10^6 passos.

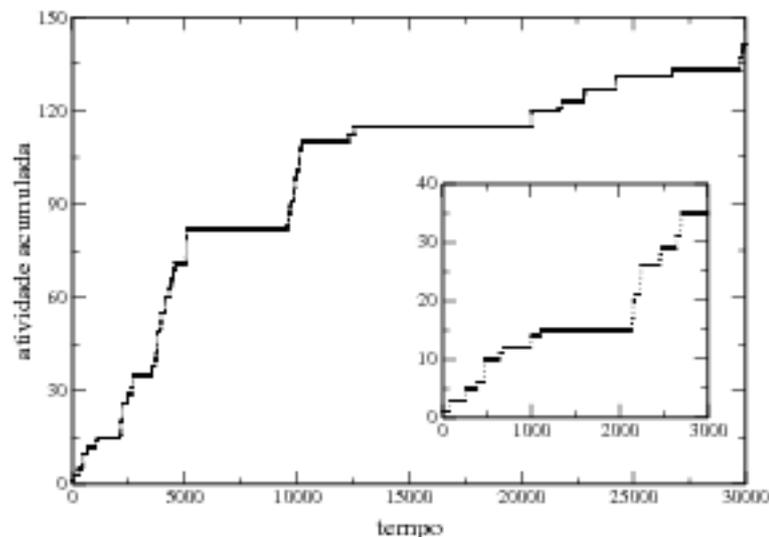


Figura 3.7: Atividade acumulada para um dado agente de um mercado de $N = 200$ agentes. A natureza de equilíbrio pontuado é evidente. O painel interno é uma ampliação do intervalo temporal de 1 a 3.000 passos.

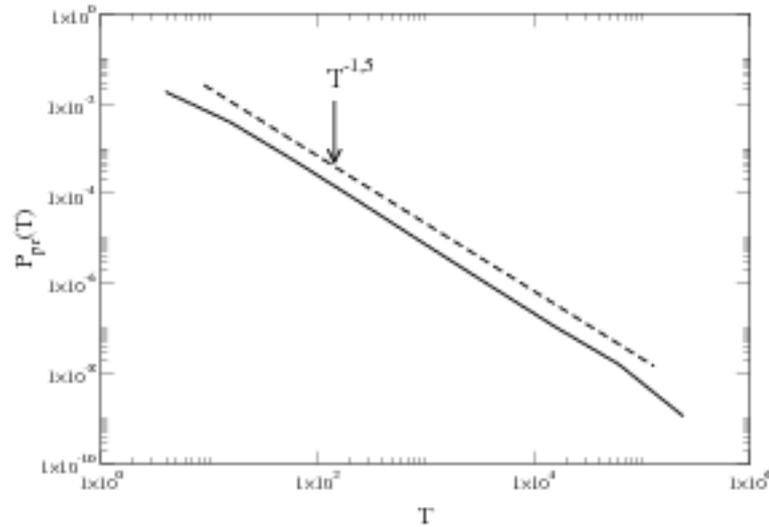


Figura 3.8: Distribuição dos tempos de primeiro retorno para um mercado de $N = 1000$ agentes para 1×10^9 passos de tempo, depois de um transiente de 1×10^6 passos. A distribuição segue uma lei de potência $P_{pr}(T) \sim T^{-\tau_{pr}}$, com o expoente τ_{pr} próximo de 1,5.

zação de $P_{pr}(T)$, mas sim $\int P_{tr}(\mathbf{x}, T) d\mathbf{x} = n$, onde n é o número médio de sítios ativos. Assim, $P_{tr}(0, T)$, é a probabilidade que a atividade no tempo T visite novamente o sítio que foi visitado no tempo 0. Ao contrário de $P_{pr}(T)$, esta não requer que os retornos sejam os primeiros retornos da atividade e portanto é chamada de distribuição de todos os tempos de retorno (PACZUSKI *et al.*, 1996).

A distribuição de todos os tempos de retorno dos eventos de redistribuição de riqueza para um mercado de $N = 1000$ agentes e 5×10^6 passos de tempo, depois de um transiente de 10^6 passos, é também uma lei de potência $P_{tr}(T) \sim T^{-\tau_{tr}}$ (figura 3.9), com expoente τ_{tr} em torno de 0,5 (mais precisamente $\tau_{tr} = 0,467 \pm 0,006$).

Estes expoentes são os mesmos da classe de universalidade de Bak-Sneppen. Esta é outra evidência de que o estado estacionário auto-organizado do MMTC é um estado SOC, já que as distribuições dos tempos de retorno da atividade no estado estacionário seguem leis de potência.

O espectro de atividade de muitos sistemas críticos é um espectro de potência do tipo $1/f^\beta$, que corresponde a uma função de correlação temporal do tipo lei de potência

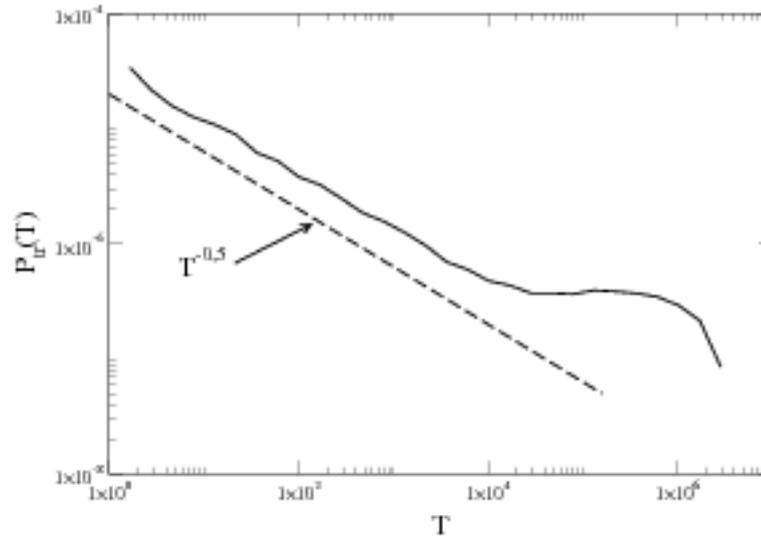


Figura 3.9: Distribuição de todos os tempos de retorno para um mercado de $N = 1000$ agentes, com um transiente de 1×10^6 passos e 5×10^6 passos de tempo. A distribuição segue uma lei de potência $P_{tr}(T) \sim T^{-\tau_r}$, com o expoente τ_r próximo de 0,5.

$G(t) \sim t^{-\alpha}$ (sem escala característica). Quando $\beta = 1$ a lei de potência de $G(t)$ é substituída por um decaimento logarítmico, que significa que o espectro de frequência da forma $1/f^\beta$ corresponde (quando $\beta \simeq 1$) a correlações temporais extremamente longas, o que é característico de um sistema crítico (JENSEN, 1998).

As avalanches são definidas da mesma forma como para o modelo BS (seção 1.5.2). Seja $w_{min}(t)$ o menor dos valores da riqueza $w(t)$ presentes no instante t . Quando o modelo é atualizado, o valor $w_{min}(t)$ muda. Sendo η_0 algum valor fixo de w , pode-se agora medir o intervalo de tempo entre sucessivas atualizações em que $w_{min}(t)$ passa pelo valor η_0 . Assumindo que $w_{min}(t) > \eta_0$ mas que, $w_{min}(t') < \eta_0$ para $t < t' < T$ e $w_{min}(T + t) > \eta_0$, diz-se então que uma avalanche de duração (ou tempo de vida) T aconteceu. Quando $\eta_0 \rightarrow \eta_T$ encontra-se que a densidade de probabilidade dos tempos de vida das avalanches (que é igual a dos tamanhos) $P(T)$ exhibe o comportamento de lei de potência $P(T) \sim T^{-\alpha}$, onde $\alpha = 1,007 \pm 0,013$, como pode ser visto na figura 3.10 para $N = 1000$. Esta forma da distribuição probabilística dos tempos de vida conduz ao seguinte espectro de frequência (seção 1.3.3): $S(f) = \int \frac{TP(T)}{1+(2\pi fT)^2} dT \approx f^{-2+\alpha}$. Como

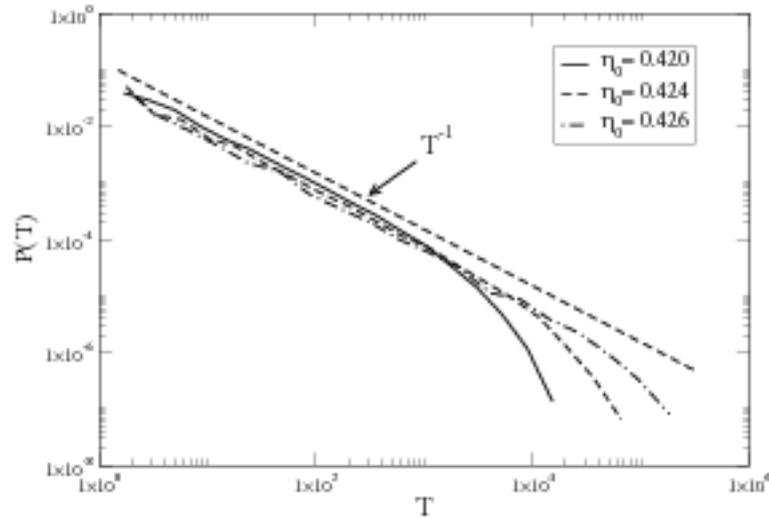


Figura 3.10: Espectro de potência da distribuição dos tempos de vida (ou tamanhos) T das avalanches no estado crítico. À medida que o limiar se aproxima do valor crítico $\eta_T \approx 0,43$ o espectro tende ao ruído $1/f$. Os resultados são para um mercado de $N = 1000$ agentes com 5×10^7 passos de tempo depois de um transiente de 10^6 passos.

$\alpha = 1,007 \pm 0,013$ temos que $S(f) \sim f^{-1}$, ou seja, o espectro segue uma lei do tipo $1/f$. Isto indica que o sistema está em um estado crítico. Este expoente é o mesmo que o da classe de universalidade de Bak-Sneppen, embora ambos os modelos tenham distribuições estacionárias de riqueza (*fitness*) diferentes. A distribuição das avalanches no tempo revela que há avalanches de todos os tamanhos (figura 3.11), em acordo com o fato de que a distribuição de lei de potência não tem uma escala característica.

A distribuição das distâncias d_x entre os eventos de redistribuição de renda consecutivos no estado SOC também é uma lei de potência $C(d_x) \sim d_x^{-\nu}$, com $\nu = 2,768 \pm 0,000$, como mostra a figura 3.12 para $N=1000$ e um intervalo de 10^7 passos, depois de um transiente de 10^6 passos de tempo. Este expoente também pertence à classe de universalidade do modelo BS e é mais um indicativo de que o estado auto-organizado é crítico.

Com todos esses resultados apresentados, foram reunidas evidências suficientes para se concluir que o estado auto-organizado é crítico e pertence à mesma classe de universalidade do modelo BS.

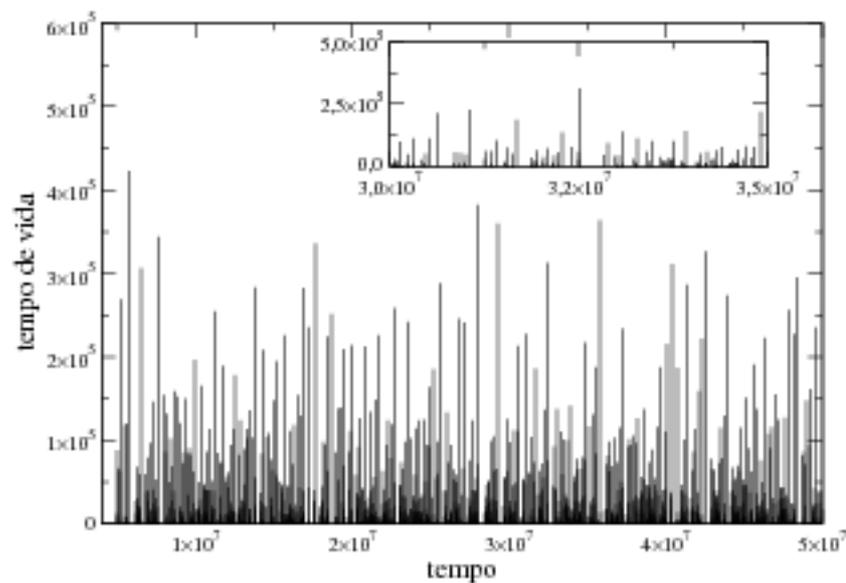


Figura 3.11: Evolução temporal das avalanches para um mercado de $N = 1000$ agentes com 5×10^7 passos de tempo depois de um transiente de 10^6 passos. Os tempos de vida T das avalanches foram obtidos usando um limiar de $\eta = 0,426$.

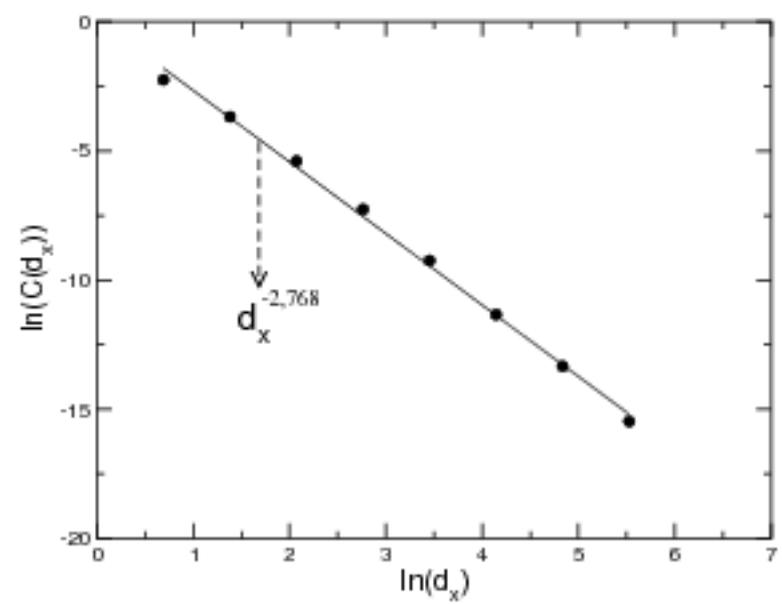


Figura 3.12: Distribuição das distâncias d_x entre os eventos de redistribuição de riqueza consecutivos para $N=1000$ e um intervalo de 10^7 passos, depois de um transiente de 10^6 passos de tempo.

3.3.3 A solução de campo médio em comparação ao caso de interações locais

Como vimos através de simulações numéricas do modelo e da análise dos observáveis relevantes do sistema, depois de um transiente relativamente longo, o sistema atinge um estado crítico auto-organizado (SOC) com uma distribuição de riqueza estacionária. O caso de acoplamentos globais (campo médio) corresponde à situação em que os agentes com os quais as trocas acontecem são escolhidos randomicamente e não baseados na proximidade geográfica (primeiros vizinhos). Distribuições típicas de riqueza são mostradas na figura 3.13 (curvas inferiores) para diferentes tamanhos de sistemas, $N = 200, 400$ e 1000 com um transiente de 10^6 passos de tempo e médias sobre 10^5 passos. As curvas superiores correspondem ao caso de interações locais (primeiros vizinhos). As distribuições foram divididas por N . Assim, os dados são superpostos e escalados.

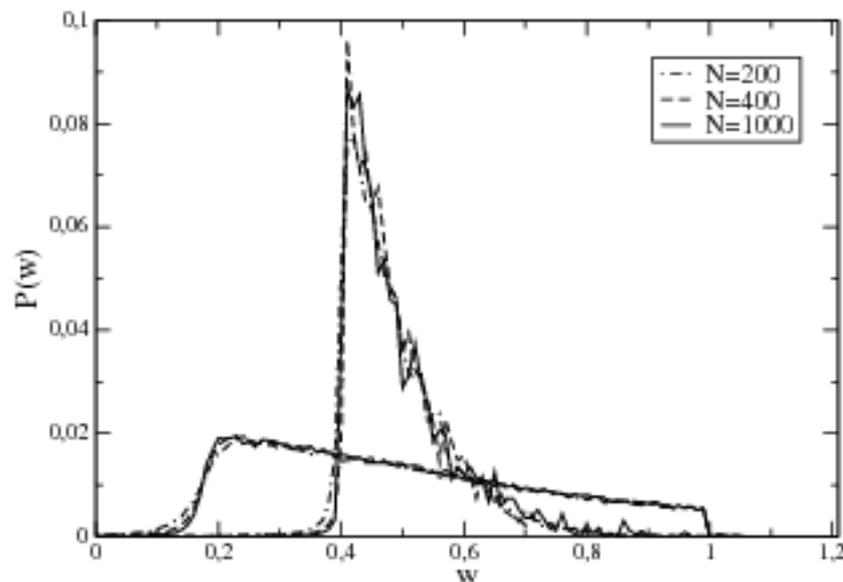


Figura 3.13: Distribuição de riqueza. O gráfico mostra a distribuição de riqueza $P(w)$ para o modelo com interações entre os primeiros vizinhos (curvas superiores) e interações globais (curvas inferiores). Em ambos os casos os dados são superpostos e escalados correspondendo a $N = 200, 400$ e 1000 . Os histogramas foram construídos usando 10^5 estados consecutivos depois de um transiente de 10^6 passos de tempo.

Vamos inicialmente retomar o caso local. Como em outros modelos de dinâmica de extremos, o sistema se auto-organiza em um estado em que quase todos os agentes estão acima de um certo limiar, $\eta_T \approx 0,4$, que é chamado de linha de pobreza. Acima deste limiar a distribuição dos agentes é exponencial, ou seja, há exponencialmente poucos agentes ricos enquanto a massa deles permanece no que foi chamado de classe média. A redistribuição de renda é então evidente. A distribuição exponencial é consistente com a distribuição de Boltzmann-Gibbs em (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2000) para o caso restrito de parâmetro de riqueza limitado e simetria de reversão temporal, embora esta última restrição não esteja presente no MMTC.

Fazendo o gráfico de $\ln(P(w))$ versus w^2 para $N = 10^4$, com um transiente de 10^7 passos, temos uma linha reta (figura 3.14), confirmando que a distribuição é do tipo Gibbs, $P(w) \approx \exp(\frac{-w^2}{2\sigma^2})$ com $\sigma = 0,228$ (IGLESIAS *et al.*, 2003).

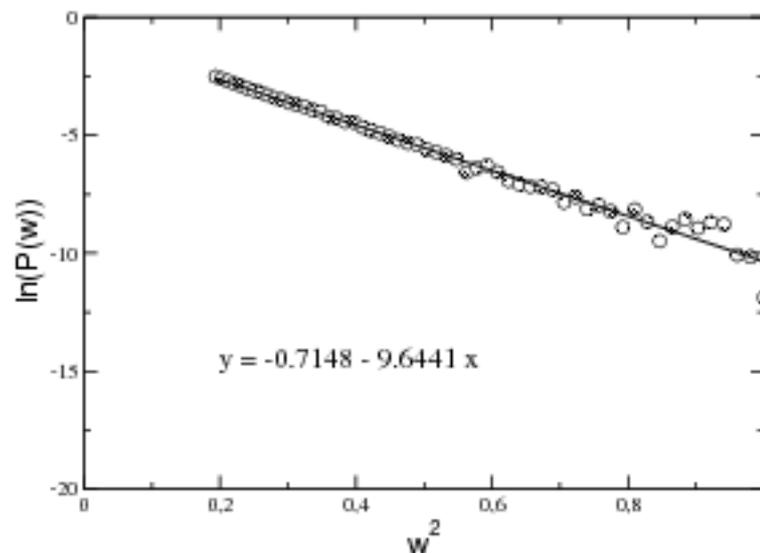


Figura 3.14: O gráfico mostra o logaritmo da distribuição de riqueza $P(w)$ para o caso com interações locais para $N = 10.000$, fazendo médias sobre 10^6 estados consecutivos e 10 sementes, depois de um transiente de 10^7 passos de tempo.

Vamos agora voltar a atenção para o caso de interações globais, apresentado na figura 3.13 (curvas inferiores). Esta solução de campo médio exibe um limiar menor e,

mais interessante, um comportamento quase linear acima do limiar. Isto difere dos modelos padrão de dinâmica de extremos onde ambas as distribuições são mais uniformes. Além disso, como já foi visto, a distribuição de avalanches segue uma lei de potência com o mesmo expoente que o da classe de universalidade de Bak-Sneppen. Note que as diferenças econômicas foram aumentadas no caso global; houve um aumento do número de agentes ricos e um aumento da miséria daqueles mais pobres. A distribuição também é do tipo Gibbs mas com uma “temperatura” maior, $\sigma = 0,567$ (IGLESIAS *et al.*, 2003). Neste caso, se pode identificar claramente 3 classes sociais: a rica, a classe média e a pobre. Assim, conclui-se que a globalização (interações globais) aumenta as desigualdades de riqueza.

3.3.4 O processo de acumulação de riqueza

Até aqui a atenção foi principalmente focada no estado final da economia, ou seja, na distribuição de riqueza do estado auto-organizado. Agora vamos discutir o processo de distribuição/acumulação de riqueza. Para isso, na figura 3.15 é apresentada a evolução temporal de N_η , a fração de agentes cuja riqueza é $w(t) < \eta$, para diferentes valores de η e para ambos os casos de interações global e local. Como os recursos foram distribuídos uniformemente no início, $N_\eta(t = 0) \approx \eta$. Para valores de $\eta \leq \eta_T$ essas frações decrescem vagarosamente mas de modo constante, mostrando então a velocidade de redistribuição de renda no sistema (que é maior no caso de interações globais do que no caso local). Como esperado, quanto maior o valor de η , menor é o progresso. Como pode ser claramente visto nesta figura, todas as frações com $\eta \leq \eta_T$ convergem para zero, enquanto para $\eta > \eta_T$ as frações crescem rapidamente para seu valor assintótico (sendo que esse crescimento é mais rápido no caso global). No caso local, quando o valor de η está próximo de 1, a fração rapidamente converge a 1, refletindo a existência de pequenos grupos privilegiados. Este mesmo argumento pode ser efetuado usando-se o índice de Gini e a função de Lorenz

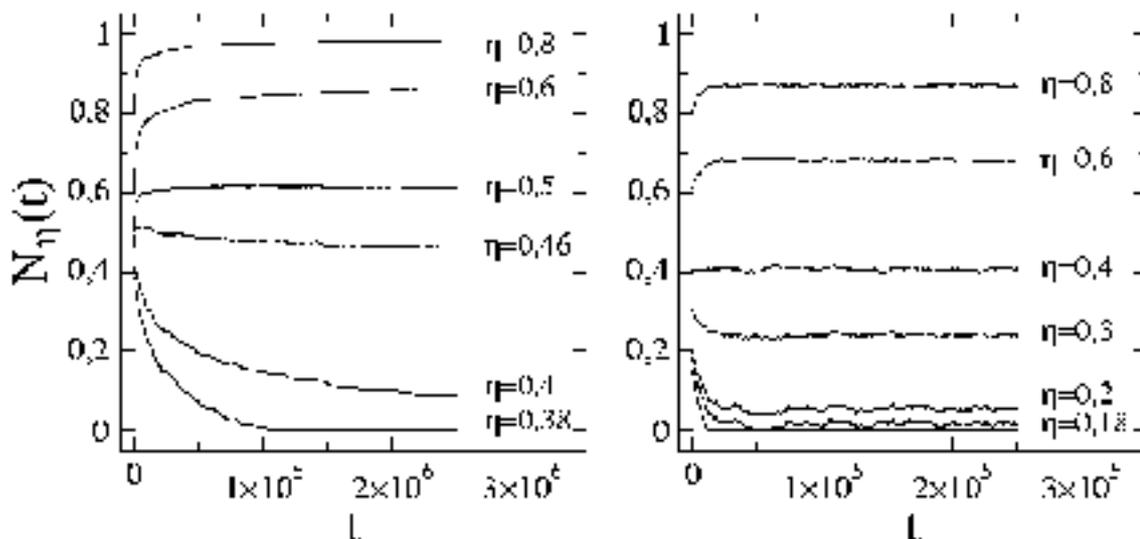


Figura 3.15: A fração do sistema cujo estado está abaixo de $w = \eta$, $N_\eta(t)$, é mostrado como uma função do tempo, para valores selecionados de η , como mostrados na legenda. Em todos os casos $N = 10000$. O painel à esquerda corresponde ao modelo local e o da direita corresponde ao modelo global (campo médio).

como visto no capítulo 2. Como neste caso a função densidade tem uma forma muito simples, esta análise é direta. Foi preferida a análise em termos de N_η devido a seu apelo intuitivo. Foi também observado que a probabilidade do mínimo se tornar mais rico em um passo de tempo é maior que $1/2$ e decresce à medida que o tempo passa, para finalmente convergir a um valor finito, $p \approx 0,77$ (figura 3.16). Ambos os efeitos são uma consequência do fato que as trocas entre agentes ocorrem de um modo conservativo. Em todo o caso a dinâmica contribui para um empobrecimento global compatível com a condição de soma nula.

Outra propriedade interessante deste modelo é que a fração de agentes no sistema com riqueza abaixo de um certo limiar não depende do tamanho N do mercado. De fato, a figura 3.17 mostra que esta fração é essencialmente constante para todos os tamanhos de mercado e diferentes valores do limiar, embora se observe a existência de um certo máximo nos casos locais. Além disso, esta fração na versão global é perceptivelmente menor do que no caso local (para um dado limiar), mas como mostrado na figura 3.13, a linha de pobreza está em torno de 0,2, bem abaixo do caso local.

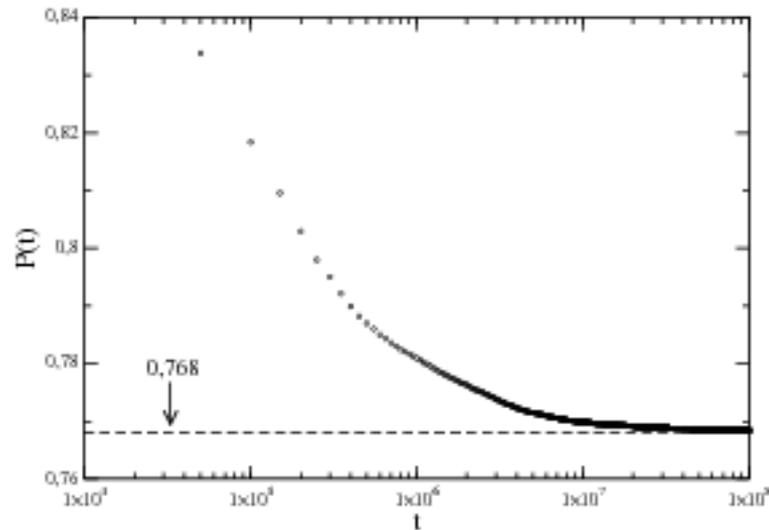


Figura 3.16: Probabilidade de um agente se tornar mais rico em um passo de tempo, ou seja, a probabilidade que seu valor de riqueza em $t + 1$ seja maior que em t . Foi utilizado um mercado de $N = 1000$ agentes e as medidas foram feitas a cada 5×10^4 passos num intervalo de 1×10^8 passos de tempo.

3.3.5 Estabilidade dos agentes mais ricos no MMT

Como foi visto, a figura 3.15 indica a existência de grupos privilegiados, os agentes mais ricos (máximos), que apresentam uma certa estabilidade econômica. Foi visto também que há exponencialmente poucos agentes muito ricos no caso de interações locais. Vamos agora apresentar evidências mais claras dessa estabilidade e tentar quantificá-la. Na figura 3.18a é mostrada a evolução temporal, no estado SOC, da posição do mínimo e do máximo de riqueza no sistema para um dado tempo t em uma janela de 10^4 passos de tempo. Pode-se ver que, enquanto o sítio de mínima riqueza está mudando constantemente, gerando avalanches de redistribuição de riqueza entre ele e seus primeiros vizinhos, o sítio mais rico é estável sobre períodos de tempo relativamente longos. Outra ilustração é a figura 3.19 para uma janela de 20.000 passos de tempo. De fato, o sítio de máxima riqueza quando afetado por uma avalanche pode recuperar seu status depois de um curto período de tempo. Essas breves interrupções usualmente produzidas por avalanches de curto tempo de vida, são refletidas como gaps (espaços) nas linhas de máximos.

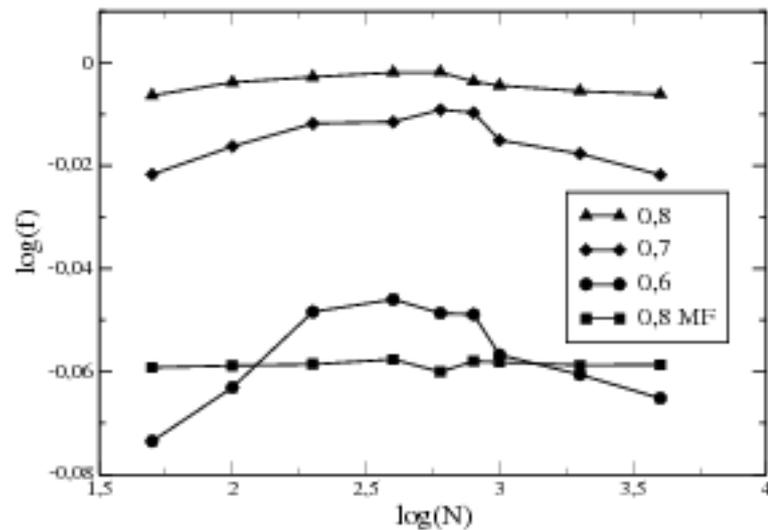


Figura 3.17: A fração de agentes no sistema abaixo de um certo limiar como uma função de N , para diferentes valores do limiar. O transiente considerado foi de 10^6 passos de tempo e foram feitas médias sobre 10^5 passos de tempo. Os resultados para ambos primeiros vizinhos e campo médio são incluídos.

Para quantificar essas observações, a figura 3.18b mostra a estatística do número de passos de tempo que um sítio permanece como máximo absoluto. Claramente uns poucos agentes passam a maior parte do tempo como máximos, enquanto o resto busca algum lugar na classe média. Foi também observado que não apenas o máximo absoluto é estável, mas também um privilegiado grupo, cuja riqueza está em torno do mesmo valor do máximo, permanece em suas prósperas posições por uma boa porção de tempo, como mostra a figura 3.21. A composição e a hierarquia deste privilegiado grupo somente são afetadas pelas avalanches que produzem os gaps mencionados acima; um reordenamento acontece, que é revertido após o término da avalanche. No caso de campo médio, os sítios ricos são também estáveis, mas por períodos de tempo mais curtos, como mostra a figura 3.20.

A figura 3.21 mostra os 3 maiores máximos de riqueza para cada instante de tempo (evolução temporal). Note que não só o máximo absoluto como também outros máximos (máximos relativos) são estáveis por períodos de tempo relativamente longos. Assim como na figura 3.15, esta figura também revela a existência de um grupo privilegiado

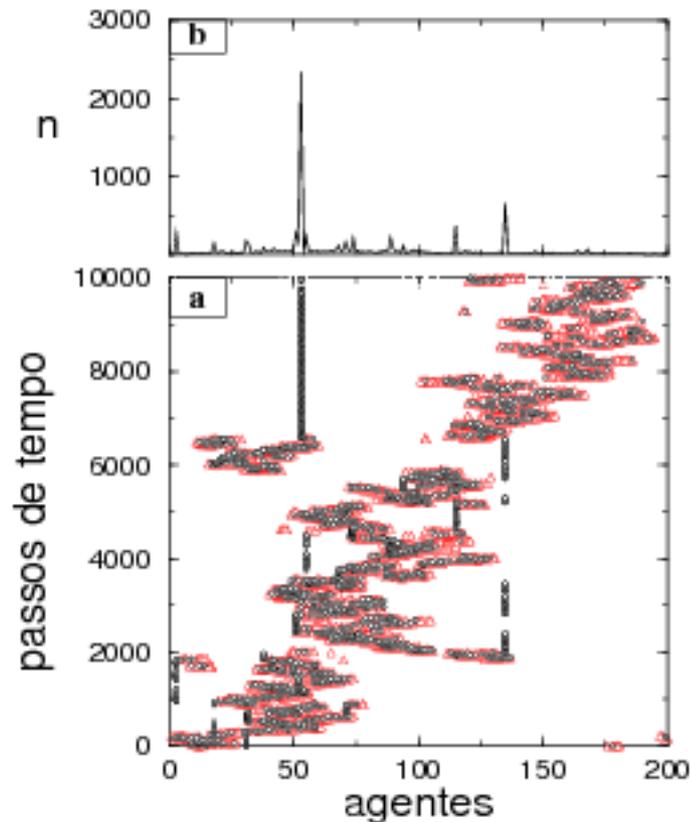


Figura 3.18: (a) Evolução temporal das posições dos máximos (círculos) e mínimos (triângulos) de riqueza. (b) Número de passos de tempo, n , que um dado agente tem tido a máxima riqueza. Os resultados nesta figura são para o caso de interações locais e correspondem a 10^4 passos de tempo depois de um transiente de 2×10^5 passos de tempo.

de agentes no mercado, no sentido de serem economicamente estáveis e terem grande riqueza. De fato, a figura 3.22 mostra a diferença entre a média temporal local da riqueza (média de cada agente) e a média temporal global da riqueza ($\sim 0,5$) para um mercado de $N = 200$ agentes, com um transiente de 10^6 passos de tempo e diferentes intervalos de tempo, mostrando que a média dos agentes mais ricos do mercado está bem acima da média global.

Por fim, a figura 3.23 mostra a evolução temporal dos valores de riqueza dos agentes para um mercado com $N = 20$ agentes em um painel de 3 dimensões: riqueza, agentes e tempo. Nesta figura pode-se observar a propagação de avalanches de redistribuição de renda no sistema assim como a estabilidade dos máximos relativos. Para melhor visualizar

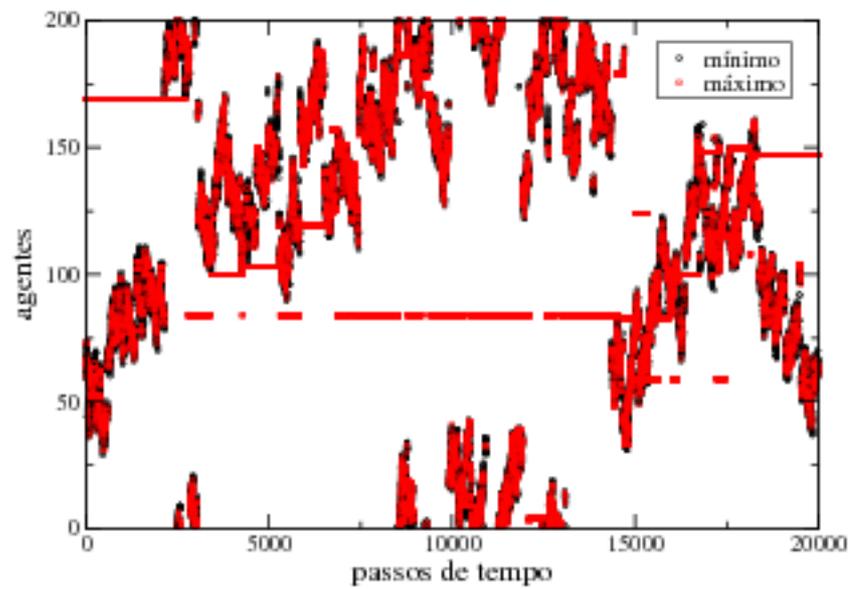


Figura 3.19: Evolução temporal das posições dos máximos (círculos) e mínimos (triângulos) de riqueza. O mercado é composto por $N = 200$ agentes.

tais informações, uma rede pequena foi escolhida.

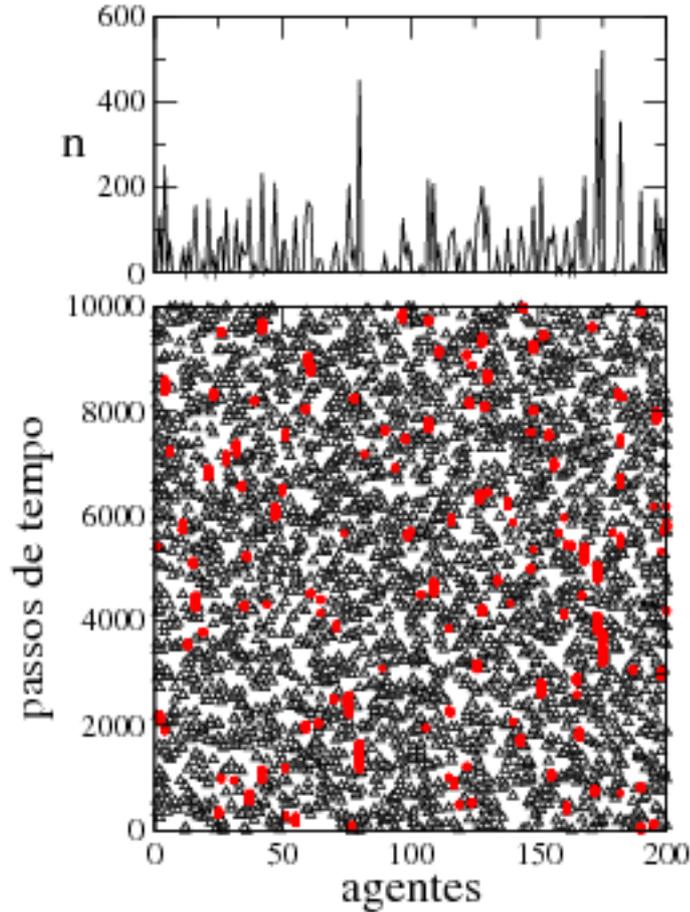


Figura 3.20: No painel inferior, mostra-se a evolução temporal das posições dos máximos (círculos) e mínimos (triângulos) de riqueza. No painel superior, apresenta-se o número de passos de tempo, n , que um dado agente tem tido a máxima riqueza. Os resultados nesta figura são para o caso global (campo médio) e correspondem a 10^4 passos de tempo depois de um transiente de 2×10^5 passos de tempo.

3.4 Considerações finais

Os resultados apresentados neste capítulo mostram que o MMTC, depois de um transiente relativamente longo, se auto-organiza em um estado crítico (SOC) com uma distribuição de riqueza estacionária, onde quase todos os agentes têm riqueza acima de um certo limiar, um valor de riqueza crítico $r_T \approx 0,4$, que é chamado de linha de pobreza. No caso de interações globais o limiar é bem menor, $r_T \approx 0,2$. Acima destes limiares, as distribuições são do tipo Gibbs, $P(w) \approx \exp(-\frac{w}{\sigma})$ com $\sigma = 0,228$ para o caso local e

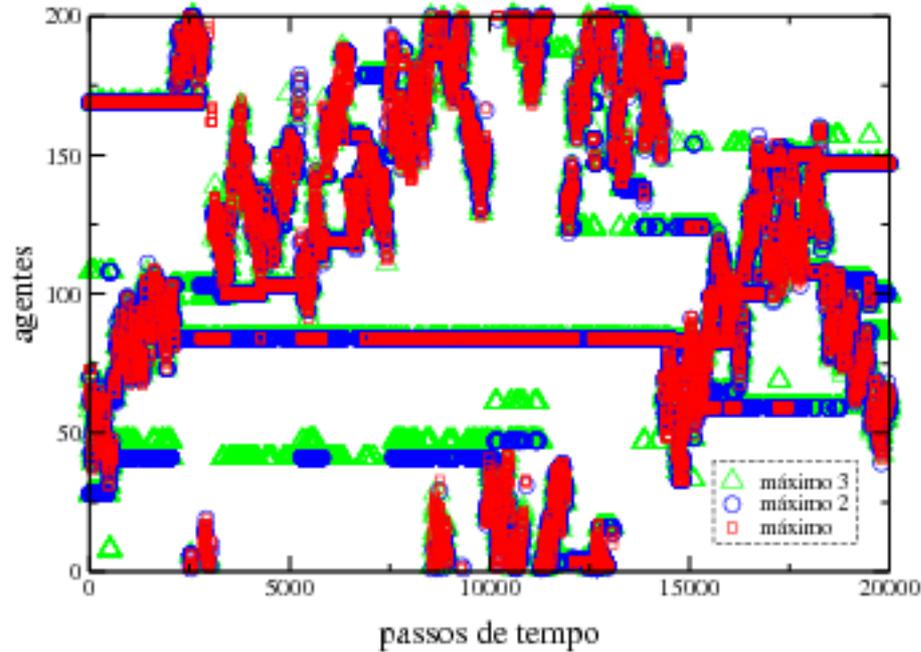


Figura 3.21: Evolução dos agentes com os 3 maiores valores de riqueza juntamente com os agentes que têm as 3 menores riquezas. O mercado tem $N = 200$ agentes e foi usado um transiente de 2×10^5 passos de tempo.

$\sigma = 0,567$ para o global (IGLESIAS *et al.*, 2003).

A criticalidade do modelo foi verificada através das simulações de diversas quantidades no estado estacionário. A evolução temporal do padrão de atividade (ou atividade acumulada) dos agentes é de equilíbrio pontuado. Além disso, as quantidades temporais medidas seguem leis de potência, que não têm uma escala típica, o que é característico de sistemas auto-organizados no estado crítico. As distribuições de probabilidade dos tempos de primeiro retorno dos eventos de redistribuição de renda (atividade) e de todos os tempos de retorno seguem leis de potência com expoentes $\tau_{pr} = 1,533 \pm 0,005$ e $\tau_{tr} = 0,467 \pm 0,006$, respectivamente. A distribuição das distâncias entre consecutivos eventos de redistribuição de renda é uma lei de potência com expoente $\nu = 2,768 \pm 0,000$. A distribuição das durações das avalanches também segue uma lei de potência com um expoente $\alpha = 1,007 \pm 0,013$, que corresponde a um espectro de frequência $1/f$, que se refere a correlações temporais extremamente longas, o que também é característico

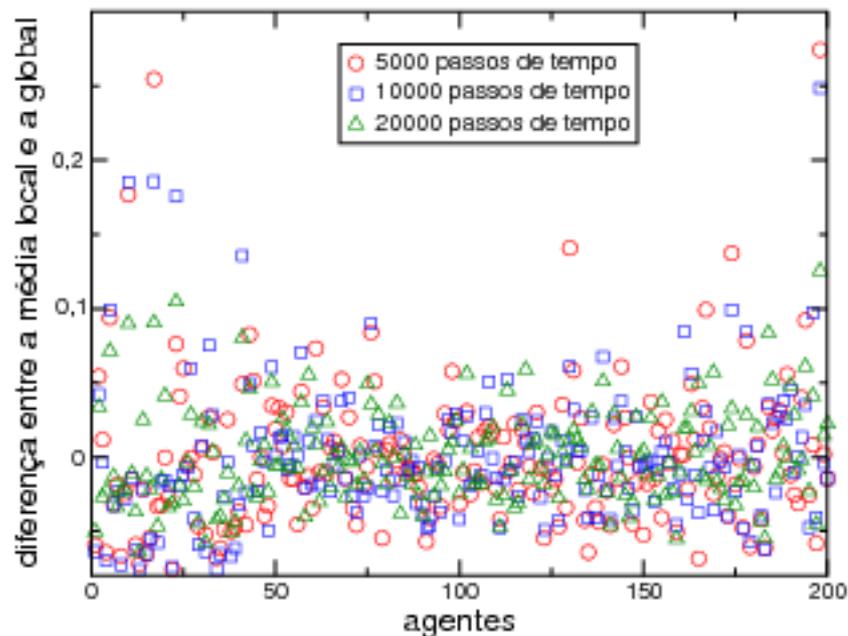


Figura 3.22: Diferença entre a média local (média de cada agente) e a média global ($\sim 0,5$) para um mercado de $N = 200$ agentes com um transiente de $2,5 \times 10^6$ passos de tempo para diferentes intervalos de tempo.

de sistemas no estado SOC. Estes quatro expoentes do MMITC pertencem à classe de universalidade do modelo Bak-Sneppen (BAK; SNEPPEN, 1993), embora este seja não conservativo e os modelos tenham distribuições estacionárias de riqueza (*fitness*) diferentes.

Existem pequeníssimos grupos privilegiados; não apenas o máximo absoluto do mercado é estável mas também um pequeno grupo de agentes com riqueza relativamente próxima dele passam grande parte do tempo como máximos relativos, como mostra a figura 3.21. Na figura 3.23 as linhas de grande riqueza constante ao longo do tempo representam esta estabilidade. Note que os sítios de máximo são abalados por avalanches de redistribuições de renda engatilhadas pelo agente de mínima riqueza, entretanto, eles recuperam frequentemente seu status econômico. Esse privilegiado grupo possui grande riqueza, que está bem acima da média do mercado como mostra a figura 3.22. No caso global, os máximos também apresentam estabilidade, mas o número de passos de tempo que eles passam com a máxima riqueza é menor, como mostra a figura 3.20.

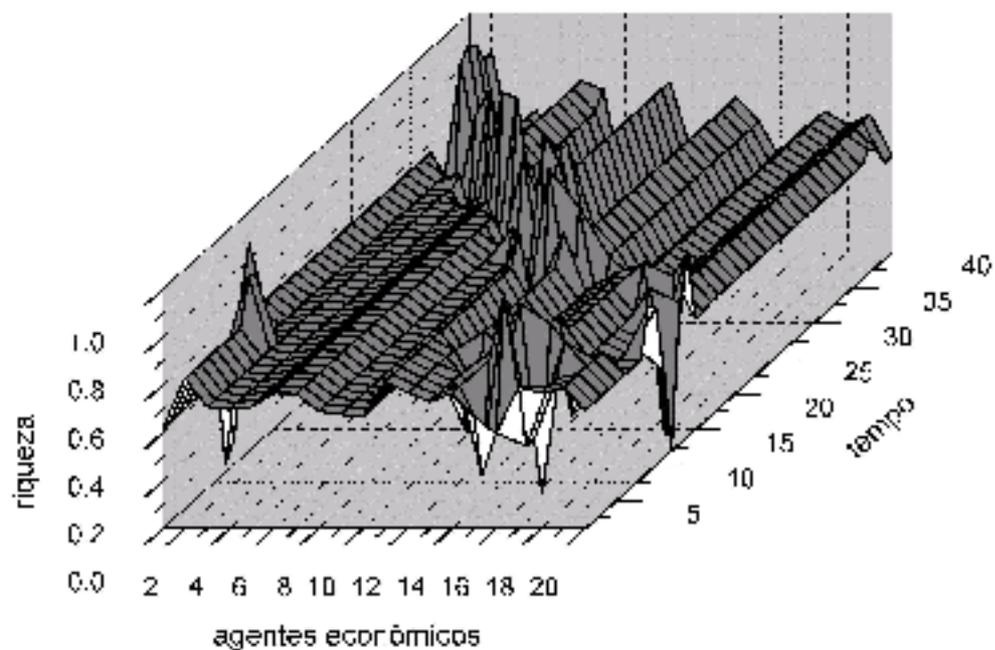


Figura 3.23: Painel tridimensional da propagação de avalanches de redistribuição de riqueza para um sistema com $N = 20$ agentes (caso local) depois de um transiente de 10^6 passos de tempo.

Como foi discutido, acima do limiar crítico a distribuição de riqueza é do tipo Gibbs, mas com uma “temperatura” maior no caso global comparado com o local. Esta lei não concorda com a lei de Pareto, e isto será discutido no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Conclusões

O modo de produção da vida material condiciona o processo geral de vida social, política e espiritual. Não é a consciência dos homens que determina o seu ser, mas, ao contrário, é o seu ser social que determina a sua consciência.

Karl Marx

Diversas conclusões podem ser tiradas dos resultados obtidos. Como em outros modelos de dinâmica de extremos, o modelo apresentado com trocas conservativas, depois de um transiente relativamente longo, se auto-organiza em um estado crítico (SOC) com uma distribuição de riqueza estacionária, onde quase todos os agentes têm riqueza acima de um certo limiar, um valor de riqueza crítico $\eta_T \approx 0,4$, que é chamado de linha de pobreza. O estado é dito auto-organizado, pois nenhum ajuste de parâmetros é necessário para que a evolução do sistema atinja um estado organizado e estável. Este estado auto-organizado é também independente da configuração inicial do sistema.

A criticalidade do modelo foi verificada através das simulações de diversas quantidades no estado SOC. A evolução temporal do padrão de atividade (ou atividade acumulada) dos agentes é de equilíbrio pontuado, com intervalos relativamente longos de tranquilidade intercalados por períodos de explosões de atividade, o que é característico de sistemas auto-organizados no estado crítico. Além disso, no estado crítico auto-

organizado, as quantidades temporais medidas seguem leis de potência, que não têm uma escala característica. As distribuições de probabilidade dos tempos de primeiro retorno dos eventos de redistribuição de renda (atividade) e de todos os tempos de retorno seguem leis de potência com expoentes $\tau_{pr} = 1,533 \pm 0,005$ e $\tau_{tr} = 0,467 \pm 0,006$, respectivamente. A distribuição das distâncias entre eventos consecutivos de redistribuição de renda é uma lei de potência com expoente $\nu = 2,768 \pm 0,000$. A distribuição da duração das avalanches também segue uma lei de potência com um expoente $\alpha = 1,007 \pm 0,013$, que corresponde a um espectro de frequência $1/f$, que como vimos se refere a correlações temporais extremamente longas, o que também é característico de sistemas no estado SOC. Estes quatro expoentes do MMTC pertencem à classe de universalidade do modelo Bak-Sneppen (BAK; SNEPPEN, 1993), embora este seja não conservativo e os modelos tenham distribuições estacionárias de riqueza (*fitness*) diferentes.

As trocas conservativas conduzem a uma distribuição de riqueza onde há muito poucos agentes ricos que são estáveis no tempo e o resto está apenas acima do limiar de pobreza. Acima deste limiar a distribuição dos agentes é exponencial, ou seja, há exponencialmente poucos agentes ricos enquanto a massa deles permanece no que chamamos de classe média. A redistribuição de riqueza é então evidente. A diferença de riqueza entre os agentes mais pobres e os mais ricos é dada por um fator em torno de 2,5. Esta desigualdade é pequena quando comparada com o mundo real. Por exemplo, no Brasil, os 20% mais ricos acumulam 64,2% da riqueza total¹, enquanto que para o nosso modelo os 20% mais ricos acumulam 25% da riqueza total. No caso global, os 20% mais ricos possuem 34,0%. Como o Brasil é um caso extremo de desigualdade, estas frações podem ser comparadas com, por exemplo, a Hungria. Para esta última, os 20% mais ricos acumulam 38,1% da riqueza total. Isto é equivalente a dizer que a “mão invisível” (SMITH, 1937) de redistribuição trabalha melhor no modelo do que no mundo real. A distribuição

¹http://www.wri.org/wri/wr-00-01/pdf/ei3n_2000.pdf, Sources: Luxembourg Income Study and World Bank

exponencial é consistente com a distribuição de Boltzmann-Gibbs em Drăgulescu e Yakovenko (2000), para o caso restrito de parâmetro de riqueza limitado e simetria de reversão temporal, embora essa última restrição não está presente no MMT. Nem comércio (trocas) nem custos de débito, impostos, poupança ou tributos na riqueza são explicitamente incluídos neste modelo. Isso reforça o papel exercido pela geografia. Como pode ser visto na figura 3.13, a solução não geográfica de campo médio gera uma distribuição de renda completamente diferente e, mais interessante, uma distribuição exponencial, porém quase linear acima de um limiar crítico, $\eta_T \approx 0,2$, que é bem menor do que no caso de interações locais. Isto difere dos modelos padrão de dinâmica de extremos onde ambas as distribuições de interação local e global são praticamente uniformes. De fato, os resultados para o mercado globalmente acoplado podem ser comparados com aqueles obtidos em (BOUCHAUD; MÉZARD, 2000; BURDA *et al.*, 2001) para modelos de mercado multiplicativos e estocásticos. Além disso, eles reforçam as conclusões apresentadas em (HUANG; SOLOMON, 2001) considerando a condensação de riqueza com um número finito de agentes. De acordo com a figura 3.15, que mostra a fração do sistema com riqueza abaixo de um dado η , o progresso econômico na sociedade é uniforme, mesmo que lento. Em todo caso, a probabilidade de um agente se tornar mais rico em um passo de tempo é bem maior que 50%, porém, decresce à medida que o tempo passa, até atingir um valor finito em torno de $p \approx 0,77$. Ambos os efeitos são uma consequência do fato de que as trocas entre os agentes ocorrem de um modo conservativo. Para $\eta \leq \eta_T$ a fração de agentes com $w(t) < \eta$ converge para zero, sendo que, como esperado, quanto maior o valor de η menor é o progresso (velocidade de redistribuição de renda). Para $\eta > \eta_T$ as frações crescem rapidamente para seu valor assintótico e em particular para η próximo a 1 a fração converge rapidamente para 1, refletindo a existência de pequeníssimos grupos privilegiados. De fato, não apenas o máximo absoluto do mercado é estável; um pequeno grupo de agentes com riqueza relativamente próxima dele passam grande parte do tempo como máximos relativos, enquanto o resto busca algum lugar na classe média. A com-

posição e a hierarquia desse grupo somente é abalada por avalanches de redistribuições de renda engatilhadas pelo agente de mínima riqueza. Entretanto, quando os máximos são afetados por tais avalanches eles recuperam rapidamente seu status econômico. Esse grupo então não é privilegiado apenas por possuir grande riqueza, mas também por sua estabilidade econômica. Como mostra a 3.22, os máximos possuem valores médios de riqueza bem acima da média global. No caso de interação global (figura 3.20), há também um pequeno grupo privilegiado, mas com estabilidade bem menor.

As diferenças econômicas foram aumentadas no caso global pois houve um aumento do número de agentes ricos e um aumento da miséria daqueles mais pobres. Neste caso se pode identificar claramente 3 classes sociais: a rica, a classe média e a pobre. Assim, conclui-se que a globalização (interações globais) aumenta o número de ricos, porém também o número e a miséria dos mais pobres, aumentando as desigualdades de riqueza.

Neste ponto é instrutivo comparar os resultados apresentados aqui com a lei de Pareto apresentada no capítulo 2, que sugere que a riqueza individual segue uma distribuição de lei de potência para a alta renda da sociedade. O MMTC exibe distribuição exponencial (tipo Gibbs) no limite local e uma distribuição mais achatada no limite de campo médio. Como explicado acima, o último caso corresponde a interações globais onde há uma fração relativamente grande de agentes ricos mas, como o limiar é muito menor do que no caso de interações locais, há também um número maior de agentes mais pobres. A lei de Pareto, em todo o caso, não é tão universal, como foi discutido no capítulo 2. Existem distribuições log-normal e exponenciais, então nosso modelo dá conta de um certo tipo de mercado em que o número de pessoas decresce exponencialmente com o nível de hierarquia, enquanto a riqueza cresce linearmente com ele. As leis de potência parecem corresponder ao setor mais rico da população. O que parece evidente é que não há lei de potência quando a dinâmica, como é o caso da nossa simulação, favorece os mais pobres (como foi visto pela probabilidade de 0,77 de aumentar a renda).

Todos os cálculos apresentados aqui foram realizados com os recursos totais disponíveis constantes. Isto foi feito por simplicidade e a fim de estudar um modelo livre de parâmetro como referência. Entretanto, se for tomado um sistema no qual a riqueza total aumenta linearmente com o tempo, os mesmos resultados se aplicariam, contanto que se renormalize a riqueza de cada agente em cada passo de tempo, de acordo com a nova riqueza total. Deste modo, a riqueza total tem um papel de parâmetro de escala global, mas não influencia a dinâmica do sistema. Um modelo mais realístico, porém com parâmetros, deveria incluir saltos, não linearidade no enriquecimento.

Resumindo, o MMTTC apresentado aqui fornece uma possível descrição da redistribuição de riqueza nos estágios iniciais da história econômica da humanidade, e indica algumas das possíveis forças motrizes, além das expansões de mercado, que influenciaram esse processo de redistribuição.

Capítulo 5

Referências

AOYAMA, H.; SOUMA, W.; NAGAHARA, Y.; OKAZAKI, M. P.; TAKAYASU, H.; TAKAYASU, M. Pareto's law for income of individuals and debt of bankrupt companies. **Fractals**, Singapore, v. 8, n. 3, p. 293-300, Sept. 2000.

BAK, P.; TANG, T.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 59, n. 4, p. 381-384, July 1987.

BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 38, n. 1, p. 364-374, July 1988.

BAK, P.; TANG, C. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. **J. Geophys. Res. B**, Washington, v. 94, n. 11, p. 15635-15637, Nov. 1989.

BAK, P.; SNEPPEN, K. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 71, n. 24, p. 4083-4086, Dec. 1993.

BAK, P.; CHEN, K.; SCHEINKMAN, J. A.; WOODFORD, M. Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics. **Ricerche Economiche**, Venezia, v. 47, p. 3-30, 1993.

BAK, P. **How nature works: the science of self-organized criticality**. Oxford: Oxford University Press, 1997.

BOUCHAUD, J.-P.; POTTERS, M. **Theory of financial risks: from statistical physics to risk management**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

BOUCHAUD, J.-P.; MÉZARD, M. Wealth condensation in a simple model of economy. **Physica A**, Amsterdam, v. 282, n. 3/4, p. 536-545, July 2000.

BURDA, Z.; JOHNSTON, D.; JURKIEWICZ, J.; KAMINSKI, M.; NOWAK, M. A.; PAPP, G.; ZAHED, I. Wealth condensation in Pareto macroeconomies. **Phys. Rev. E**, Melville, v. 65, p. 26102-26106, Jan. 2002.

CHAKRABORTI, A.; CHAKRABARTI, B. K. Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution. **Eur. Phys. J. B**, Les Ulis, v. 17, n. 1, p. 167-170, Sept. 2000.

CHATTERJEE, A.; CHAKRABARTI, B. K.; MANNA, S. S. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. **Physica A**, Amsterdam, v. 355, n. 1/2, p. 155-163, Apr. 2004.

CHRISTENSEN, K.; FOGEDBY, H. C.; JENSEN, H. J. Dynamical and spatial aspects

of sandpile cellular automata. **J. Stat. Phys.**, New York, v. 63, n. 3/4, p. 653-684, May 1991.

CHRISTENSEN, K.; OLAMI, Z. Scaling, phase transitions, and nonuniversality in a self-organized critical cellular-automaton model. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 46, n. 4, p. 1829-1838, Aug. 1992.

CHRISTENSEN, K.; OLAMI, Z. Sandpile models with and without an underlying spatial structure. **Phys. Rev. E**, Woodbury, v. 48, n. 5, p. 3361-3372, Nov. 1993.

CUNIBERTI, G.; VALLERIANI, A.; VEGA, J. L. Effects of regulation on a self-organized market. **Quant. Finance.**, Bristol, v. 1, n. 3, p. 332-335, May 2001.

DONANGELO, R.; SNEPPEN, K. Self-organization of value and demand. **Physica A**, Amsterdam, v. 276, n. 3/4, p. 572-580, Feb. 2000.

DRĂGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Statistical mechanics of money. **Eur. Phys. J. B**, Les Ulis, v. 17, n. 4, p. 723-529, Oct. 2000.

DRĂGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Evidence for exponential distribution of income in the USA. **Eur. Phys. J. B**, New York, v. 20, n. 4, p. 585-589, Apr. 2001a.

DRĂGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States. **Physica A**, Amsterdam, v. 299, n. 1/2, p. 213-221, Oct. 2001b.

FLYVBJERG, H.; SNEPPEN, K.; BAK, P. Mean field theory for a simple model of evolution. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 71, n. 24, p. 4087-4090, Dec. 1993.

GRASSBERGER, P.; MANNA, S. S. Some more sandpiles. **J. Phys.**, Les Ulis, v. 51, n. 11, p. 1077-1098, June 1990.

GRASSBERGER, P. Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system. **Phys. Rev. E**, Woodbury, v. 49, n. 3, p. 2436-2444, Mar. 1994.

GRINSTEIN, G.; LEE, D.-H.; SACHDEV, S. Conservation-laws, anisotropy and self-organized criticality in noisy nonequilibrium systems. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 64, n. 16, p. 1927-1930, Apr. 1990.

HUANG, Z.-F.; SOLOMON, S. Finite market size as a source of extreme wealth inequality and market instability. **Physica A**, Amsterdam, v. 294, n. 3/4, p. 503-513, May 2001.

IGLESIAS, J. R.; GONÇALVES, S.; PIANEGONDA, S.; VEGA, J. L.; ABRAMSON, G. Wealth redistribution in our small world. **Physica A**, Amsterdam, v. 327, n. 1/2, p. 12-17, Sept. 2003.

ITO, K. Punctuated-equilibrium model of biological evolution is also a self-organized criticality model of earthquakes. **Phys. Rev. E**, Woodbury, v. 52, n. 3, p. 3232-3233, Sept. 1995.

JENSEN, H. J.; CHRISTENSEN, K.; FOGEDBY, H. C. $1/f$ noise, distribution of lifetimes, and a pile of sand. **Phys. Rev. B**, Woodbury, v. 40, n. 10, p. 7425-7427, Oct. 1989.

JENSEN, H. J. $1/f$ noise from the linear diffusion equation. **Physica Scripta**, Stockholm, v. 43, n. 6, p. 593-595, June 1991.

JENSEN, H. J. **Self-organized criticality**: emergent complex behavior in physical and biological systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

LEVY, M.; SOLOMON, S. Power laws are logarithmic Boltzmann laws. **Int. J. Mod. Phys. C**, Singapore, v. 7, n. 4, p. 595-601, Aug. 1996.

LEVY, M.; SOLOMON, S. New evidence for the power-law distribution of wealth. **Physica A**, Amsterdam, v. 242, n. 1/2, p. 90-94, Aug. 1997.

LISE, S.; JENSEN, H. J. Transitions in nonconserving models of self-organized criticality. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 76, n. 13, p. 2326-2329, Mar. 1996.

LUX, T.; MARCHESI, M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. **Nature**, London, v. 397, n. 6719, p. 498-500, Feb. 1999.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Scaling behavior in the dynamics of an economic index. **Nature**, London, v. 376, n. 6535, p. 46-49, July 1995.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. **An introduction to econophysics**: correlations and complexity in finance. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

MASLOV, S.; PACZUSKI, M.; BAK, P. Avalanches and $1/f$ noise in evolution and growth

models. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 73, n. 16, p. 2162-2165, Oct. 1994.

McNAMARA, B.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality in vector avalanche automata. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 41, n. 4, p. 1867-1873, Feb. 1990.

OKUYAMA, K.; TAKAYASU, M.; TAKAYASU, H. Zipf's law in income distribution of companies. **Physica A**, Amsterdam, v. 269, n. 1, p. 125-131, July 1999.

OLAMI, Z.; FEDER, H. J. S.; CHRISTENSEN, K. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 68, n. 8, p. 1244-1247, Feb. 1992.

PACZUSKI, M.; MASLOV, S.; BAK, P. Field theory for a model of self-organized criticality. **Europhys. Lett.**, Les Ulis, v. 27, n. 2, p. 97-102, July 1994.

PACZUSKI, M.; MASLOV, S.; BAK, P. Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models. **Phys. Rev. E**, Woodbury, v. 53, n. 1, p. 414-443, Jan. 1996.

PARETO, V. **Cours d'économie politique**. Lausanne: F. Pichou, 1897. v. 2, p. 300-345.

PIANEGONDA, S.; IGLESIAS, J. R.; ABRAMSON, G.; VEGA, J. L. Wealth redistribution with conservative exchanges. **Physica A**, Amsterdam, v. 322, p. 667-675, May 2003.

SCAFETTA, N.; PICOZZI, S.; WEST, B. J. Pareto's law: a model of human sharing and creativity. Disponível em: <[Cond-mat/0209373](#)>. Acesso em: 03 mar. 2003.

SMITH, A. **An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations.** New York: Random House, 1937.

SNEPPEN, K.; BAK, P.; FLYBVJERG, H.; JENSEN, M. H. Evolution as a self-organized critical phenomenon. **Proc. Natl. Acad. Sci.**, Washington, v. 92, n. 11, p. 5209-5213, May 1995.

SOUMA, W. Physics of personal income. Disponível em: <[Cond-mat/0202388](#)>. Acesso em 03 jan. 2003.

STANLEY, M. H. R.; AMARAL, L. A. N.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LESCHHORN, H.; MAASS, P.; SALINGER, M. A.; STANLEY, H. E. Scaling behaviour in the growth of companies. **Nature**, London, v. 379, n. 6568, p. 804-806, Feb. 1996.

WIESENFELD, K.; TANG, C.; BAK, P. A physicist's sandbox. **J. Stat. Phys.**, New York, v. 54, n. 5/6, p. 1441-1458, Mar. 1989.