

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Propriedades Métricas de Sistemas Multiparamétricos Discretos[†]

César Abraham Torrico Chávez

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de *Mestre em Física*.

Porto Alegre, 24 de abril de 2008

[†]Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pelo Centro Latino-Americano de Física (ICTP-CLAF)

a Elías...

Resumo

Neste trabalho estudamos propriedades métricas de certas estruturas recentemente descobertas em diagramas de fase, chamadas de conjuntos tipo de Mandelbrot. Tais estruturas (conjuntos) são importantes pois aparecem repetidamente em sistemas dinâmicos, em particular, em equações diferenciais que descrevem lasers e outros modelos físicos. De particular interesse, são escalonamentos (scalings) de codimensão 2, *i.e.* que dependem da variação simultânea de dois parâmetros físicos para serem observados.

Através da obtenção de expressões exatas dos pontos de nascimento de domínios de estabilidade (“flores de cactus”), conseguimos demonstrar analiticamente que a velocidade de acumulação dos domínios converge para um valor limite constante igual à unidade. Outras taxas de convergência tais como, por exemplo, a orientação do eixo dos domínios com respeito à horizontal, a diminuição das alturas e das áreas dos domínios, também convergem para a unidade. Tal convergência foi também por nós encontrada no conjunto de Mandelbrot. Em ambos casos as convergências obedecem uma lei de potência com expoentes inteiros, em forte contraste com a convergência típica de Feigenbaum, que também segue uma lei de potências, porém com expoente fracionário. Por razões discutidas em detalhe dentro do trabalho, conjecturamos ser o escalonamento unitário de carácter geral sempre que se tenham famílias de fases periódicas participando de um processo de acumulação com adição de períodos.

Observamos que os conjuntos de números racionais (números de rotação) que rotulam as infinitas famílias de flores, (fases periódicas) nos conjuntos tipo-Mandelbrot, também exibem a mesma convergência unitária. Tal fato nos leva a crer que, dum ponto de vista teórico, este “scaling” parece originar-se de propriedades métricas dos racionais.

Além disto, complementamos o estudo das propriedades métricas dos conjuntos tipo-Mandelbrot com um estudo detalhado da sua estrutura interna, via multiplicadores das órbitas periódicas estáveis, reais e complexas. Observamos que a parte real (imaginária) dos multiplicadores define certos eixos de simetria transversal (longitudinal) em cada flor, que podem ser tomados como uma espécie de “sistema de coordenadas cartesiano”. Em tal sistema, observamos um ordenamento simétrico dos números de rotação das flores, de maneira similar ao ordenamento dos números racionais no círculo unitário. Mostrando desta forma que o interior de cada flor é isomorfo ao círculo unitário. A medida que nos aproximamos das zonas de transição isoperiódica (de órbitas complexas para reais), observamos uma rotação dos eixos transversais locais de cada flor em direção aos eixos longitudinais, até ambos ficarem alinhados, no limite da acumulação. Esta mudança não ocorre nos círculos do conjunto de Mandelbrot, onde ambos eixos permanecem perpendiculares até alcançar um tamanho nulo no ponto raiz. Isto parece mostrar que, apesar dos conjuntos Mandelbrot e tipo-Mandelbrot compartilharem várias propriedades métricas, a ausência de conectividade local nestes últimos modifica significativamente sua estrutura interna.

Abstract

In this work we study scaling properties of certain structures recently found in phase diagrams, called as Mandelbrot-like sets. Such structures (sets) are important because they appear repeatedly in dynamical systems, particularly, in differential equations that describe lasers and others physical models. Of particular interest, are scalings of codimension-2, i.e., that depend on the simultaneous variation of two physical parameters to be observed.

Through the obtention of exact expressions for the birth points of stability domains (“cactus flowers”), we proved analytically that the accumulation rate of the domains converges to a constant limit value equal to unity. Another convergence rates such as, for example, orientation of the domain axis with respect to the horizontal, the decrease of domains heights and areas, also converge to unity. We also founded this convergence in the Mandelbrot set. In both cases, the convergences obey a power law with integer exponents, in contrast with the typical Feigenbaum convergence, that also follows a power law but with fractional exponent. For the reasons discussed in detail along the work, we conjecture this unitary scaling to have a general character always that one have families of periodic phases participating in a process of accumulation with period adding.

We observed that the rational numbers sets that label the infinity flower’s families (periodic phases), in the Mandelbrot-like sets, also exhibit the same rate of convergence. This fact lead us to believe, from a theoretical point of view, that this scaling seems to arise from the metrical properties of rationals.

Besides this, we complemented the study of scalings in the Mandelbrot-like sets with a detailed study of their internal structure, via multipliers of the stable periodic orbits, both real and complex. We observed that the real (imaginary) part of multipliers define certain transversal (longitudinal) axis of symmetry in each flower, that can be take as a sort of local “cartesian coordinates system”. In such system, we observe a symmetric ordering of the rotation numbers of flowers, like the ordering of rational numbers in the unitary circle. Showing of this form that the inner of each flower is isomorphic to the unitary circle. As we approximate to the isoperiodic transition zones (of complex to real orbits), we founded a rotation of the transversal local axis of each flower toward the longitudinal axis, until both axis stay aligned, at the accumulation limit. This rotation does not occur inside the Mandelbrot set circles, where both axis remain perpendicular until they reach a null size at the root point. This seems to show that, in spite of Mandelbrot and Mandelbrot-like sets to share several metric properties, the lack of local connectivity in the latest modifies significantly their internal structure.

Sumário

Introdução	1
1 Propriedades métricas na dinâmica real	5
1.1 Revisão: mapa Quadrático	5
1.2 As constantes de Feigenbaum	11
1.3 Revisão: mapa de Hénon	17
1.4 Pontos de acumulações múltiplas	19
1.5 Rigidez das bifurcações	20
2 Propriedades métricas na dinâmica complexa	23
2.1 Propriedades métricas do conjunto de Mandelbrot	23
2.1.1 Escalonamento de Feigenbaum na dinâmica complexa	27
2.1.2 Escalonamento de Frame-Philip-Robucci	30
2.1.3 Escalonamento de Romera-Pastor-Montoya	31
3 Propriedades métricas dos conjuntos tipo-Mandelbrot: Dinâmica cúbica	33
3.1 Antecedentes	33
3.2 As duas formas normais do mapa cúbico	35
3.3 Propriedades métricas das “flores” do mapa cúbico	43
3.3.1 Velocidades de acumulação das flores	43
3.3.2 Propriedades métricas das alturas e áreas das flores na zona de acumulação	52
3.3.3 O escalonamento de Feigenbaum na dinâmica cúbica	57
3.4 Estrutura interna das flores em conjuntos tipo-Mandelbrot	59
3.4.1 Coordenadas locais	64
3.5 Comparação com as flores do conjunto de Mandelbrot	67
3.5.1 Coordenadas locais: comparação	78
Conclusões	84
A Cálculo das variedades e pontos de codimensão-2 via Maple	85
B Cálculo das velocidades limite, r_c via Maple	87
B.1 Dinâmica cúbica	87
B.2 Dinâmica quadrática	88
C Detalhes sobre as figuras	89

D	Cortes do locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$ no espaço (a, b, s)	90
D.1	$s = cte$	90
D.2	$b = cte$	91
D.3	$a = cte$	91
	Referências	91

Introdução

O estudo do espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos multi-paramétricos tem-se incrementado progressivamente nas últimas décadas, como resultado dum esforço coletivo de se entender um sem-número de fenômenos novos que aparecem quando mais de um parâmetro é variado simultaneamente. Em particular tem havido um grande interesse pelo plano bi-dimensional de parâmetros de famílias de mapas discretos, nos quais tem-se estudado propriedades de escala dos diagramas de bifurcações e, mais genericamente, vários fenômenos de codimensão-2, i.e. fenômenos cujo desenrolar necessita a variação simultânea de dois parâmetros físicos do modelo. O grupo de Física Computacional deste Instituto tem obtido alguns resultados que têm jogado luz sobre esta área da dinâmica não-linear. Tais resultados mostram, entre outras coisas, que o espaço de parâmetros, tanto de sistemas dinâmicos de tempo discreto (mapas) como o de tempo contínuo (fluxos), possui uma estrutura muito rica e muito bem organizada, envolvendo estruturas auto-similares que sugerem a existência de um sem-número de propriedades de escala, “scalings”, e sub-escalas, “subscalings”, que precisam ser explorados em detalhe devido a sua ampla generalidade.

Neste contexto, uma questão muito intrigante surgiu no Grupo durante um estudo recente do mapa de Hénon complexificado, onde se mostrou o aparecimento de estruturas tipo-Mandelbrot mesmo na situação totalmente inusitada da total *ausência* de pontos críticos. Alguns conjuntos particulares já haviam sido observados anteriormente na dinâmica cúbica complexa [1, 2], num cenário regido pela presença de três pontos críticos. Porém, foi observado que mesmo na ausência total de pontos críticos, é possível obter-se conjuntos tipo Mandelbrot com uma estrutura muito mais rica e variada, que convidam a uma investigação mais precisa tanto das suas estruturas propriamente ditas, quanto de suas várias propriedades métricas.

Neste contexto, a presente Dissertação é um estudo de algumas das propriedades métricas destes conjuntos tipo-Mandelbrot, porém usando como modelos as formas normais dos polinômios cúbicos complexos. Tais polinômios permitem-nos reduzir a dimensionalidade do sistema a ser estudado, passando, sem perda de generalidade, dum espaço de fases quadridimensional (do mapa de Hénon) para um espaço de fases bi-dimensional dos polinômios cúbicos complexos.

Nos capítulos um e dois fazemos uma revisão um tanto mais do que a estritamente necessária das propriedades métricas de sistemas discretos uni- e bi-dimensionais de variáveis reais e complexas reportadas na bibliografia. Nossa intenção é definir o contexto e, principalmente, no capítulo três, fazer uma comparação com as propriedades métricas dos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica.

No que segue desta introdução fazemos uma descrição sucinta dos conjuntos tipo Mandelbrot do mapa de Hénon na ausência de pontos críticos reportados por Endler *et al.* [3, 4], enfatizando as zonas das estruturas que serão estudadas no capítulo três. Agradecemos a A. Endler por permitir-nos incluir aqui as figuras 1, 2 e 3.

As primeiras tentativas de entender a dinâmica do mapa de Hénon em sua versão complexificada são trabalhos altamente matemáticos: Hubbard [5], Oberste-Vorth [6], Friedland, Milnor [7], Bedford, Lyubich, Smillie [8], Fornaes e Sibony [9]. A maioria destas pesquisas se concentraram

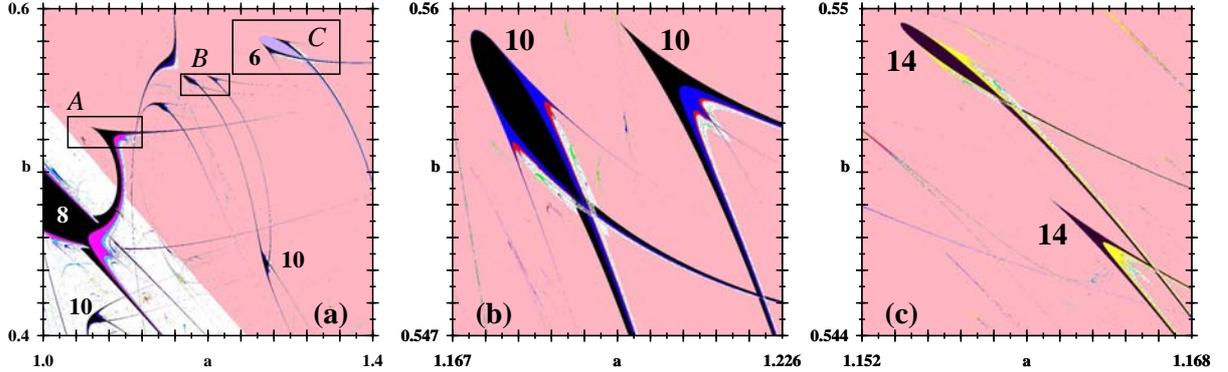


Figura 1: (a) Região do espaço de parâmetros do mapa de Hénon ilustrando ilhas de estabilidade caracterizadas por órbitas reais apenas. As caixas A, B e C são magnificadas nas figuras seguintes. (b) magnificação da caixa B, exemplificando duas famílias bastante típicas de ilhas de estabilidade, cuspidal e não-cuspidal, aqui para órbitas de período 10. (c) os mesmos dois tipos de ilhas, porém agora para período 14. Estas figuras exemplificam diagramas de fase como usualmente gerados durante os últimos 25 anos: considerando-se a estabilidade das órbitas *reais*, apenas. As figuras 2 e 3 mostram as estruturas adicionais surpreendentes descobertas ao acrescentar-se também a estabilidade das fases no domínio complexo. (Figura extraída da Ref. [3].)

no estudo da estrutura eminentemente topológica, tanto do espaço de fases quanto do espaço de parâmetros.

Foi assim que enquanto matemáticos restringiam seus estudos à dinâmica no domínio complexo, permitindo completa generalidade, outro grupo de pesquisadores, interessado nas aplicações práticas, necessitava considerar quase que exclusivamente a dinâmica no domínio real, escravizados por requerimentos impostos pelas interpretações físicas dos parâmetros e variáveis. Tal dicotomia gera uma visão disjunta e excludente complexo \times real.

Porém, como mencionado, uma dinâmica muito frutífera resulta da proposta de Endler e Gallas [3], ao quebrar-se tal dicotomia, i.e. ao permitirmos que os sistemas apresentem uma “dinâmica mista”, no sentido de, mantendo-se os *parâmetros* físicos de controle no domínio real, permitir que as *variáveis* físicas possam assumir valores no plano complexo. Em termos matemáticos, tal proposta significa romper as amarras impostas pelas condições de Cauchy-Riemann, o que tem por efeito romper as conhecidas simetrias do conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} . A novidade que se origina deste rompimento é o aparecimento abundante no espaço de parâmetros de domínios com formas, que se bem ainda com alguma semelhança ao conjunto \mathcal{M} , surgem porém com diversas formas, mais ricas em estrutura e com propriedades métricas que parecem ser um tanto distintas daquelas do prototípico conjunto de Mandelbrot. Para mais detalhes, ver Fig. 2 e Fig. 3, extraídas das Refs. [3, 4].

O mapa de Hénon com espaço de fase complexo $(x + i \xi) \times (y + i \eta)$ pode ser escrito como,

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + b y_t + \xi_t^2, \quad y_{t+1} = x_t, \quad (1a)$$

$$\xi_{t+1} = -2x_t \xi_t + b \eta_t, \quad \eta_{t+1} = \xi_t, \quad (1b)$$

onde ξ e η denotam as componentes complexas das variáveis x e y tradicionais, respectivamente. Se ambas componentes complexas forem nulas, as equações acima desacoplam-se e recaem na situação bem conhecida, do mapa de Hénon real.

A figura 1(a) mostra uma janela do espaço de parâmetros do mapa de Hénon real, contendo domínios de estabilidade orbital obtidos numericamente, considerando somente a estabilidade de órbitas reais, como é feito tradicionalmente na literatura. A caixa B na figura 1(a) é magnificada

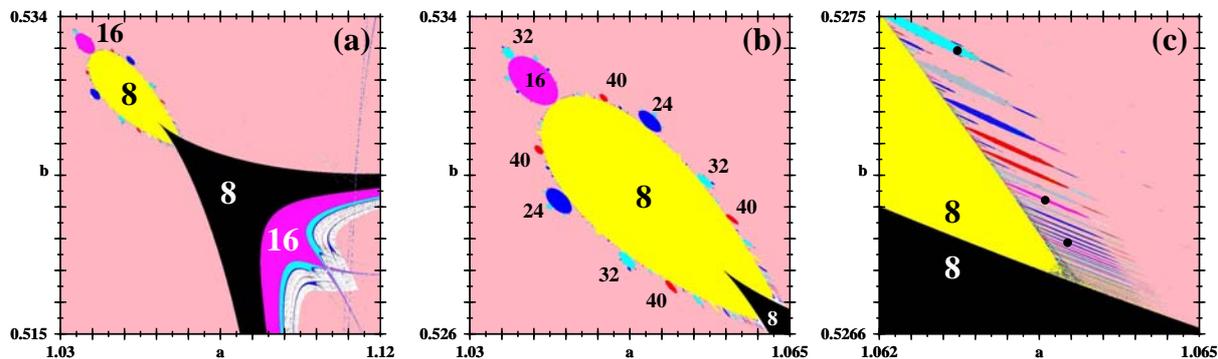


Figura 2: As infinitas ilhas adicionais, indicando regiões de estabilidade de órbitas *complexas* em torno da singularidade cuspidal de período 8. Estas infinitas flores de cactus (fases estáveis de soluções complexas) são um complemento surpreendente das ilhas “nuas” contidas na figura 1, e que não foram antecipadas durante os últimos 25 anos. (Figura extraída da Ref. [3].)

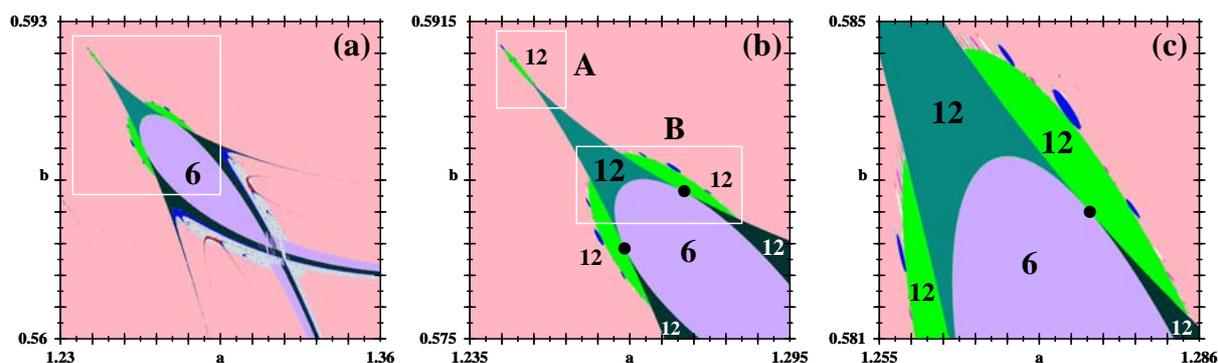


Figura 3: As infinitas ilhas adicionais, indicando regiões de estabilidade de órbitas *complexas* em torno da singularidade não-cuspidal de período 6 contida dentro da caixa C na figura 1. Estas infinitas flores de cactus (fases estáveis de soluções complexas) são um complemento surpreendente das ilhas “nuas” na figura 1, e que não foram antecipadas durante os últimos 25 anos. (Figura extraída da Ref. [3].)

na figura 1(b). Ela mostra dois tipos diferentes de estruturas singulares que se originam de um corpo central de período 10: uma estrutura cuspidal e uma estrutura arredondada (não-cuspidal). Estas estruturas podem ser descritas usando as duas formas normais de um polinômio cúbico definido pelo sinal de termo cúbico [10]. No capítulo três usaremos estas formas normais para estudar as propriedades métricas dos conjuntos tipo-Mandelbrot que nascem destas estruturas. A figura 1(c) mostra um par semelhante de estruturas surgindo desta vez a partir de um corpo central de período 14 (não mostrado). Os dois tipos de estruturas: cuspidal e arredondada das Figs. 1(b) e 1(c) aparecem também freqüentemente em diagramas de fase de modelos rígidos por conjuntos de equações diferenciais não-lineares [11, 12].

As estruturas nas caixas A e C da figura Fig. 1(a) aparecem magnificadas nas figuras 2 e 3, onde se incluem agora as novas “decorações” devido a órbitas complexas estáveis. O canto superior esquerdo na figura 2(a) mostra um exemplo do novo domínio tipicamente encontrado perto de singularidades cuspidais quando órbitas complexas estáveis são levadas em conta: o aparecimento de domínios semelhantes a “cactus”, isto é formas semelhantes a conjuntos de Mandelbrot distorcidos com estrutura auto-similar que complementam os domínios caracterizados

pelas órbitas reais, A cúspide preta na figura 2(a) tem período 8, o mesmo período do corpo central amarelo da flor de cactus magnificada na figura 2(b).

A figura 2c ilustra os novos fenômeno encontrados:

- (i) a *acumulação* das flores do cactus auto-similares, nas direções dos domínios isoperiódicos das órbitas reais, implicando séries de propriedades métricas até aqui totalmente desconhecidas,
- (ii) estruturas tipo Mandelbrot ordenamente “empacotadas” ao longo de *segmentos de linhas*, não curvas fechadas como as encontradas no conjunto de Mandelbrot.

A figura 3(a) ilustra as novas estruturas, com formato que lembra um “peixe espada”, encontradas genericamente no topo de singularidades não-cuspidais. Como mencionado anteriormente, os novos domínios vistos são também devidos a órbitas complexas estáveis. Eles complementam aqui a estrutura não-cuspidal no interior da caixa C na figura 1(a), devida à órbitas reais de período 6 cujas expressões analíticas foram reportadas nas refs. [13, 14].

Como mencionado no trabalho original, os resultados de Endler *et al.* [3, 4] levantam uma questão intrigante: se não são os pontos críticos, o que exatamente está por trás da auto-similaridade destes mais genéricos conjuntos tipo-Mandelbrot? Outra questão também intrigante é saber que propriedades métricas “novas” e/ou semelhantes tem estes conjuntos em relação ao conjunto prototípico de Mandelbrot. Esta ultima questão é o assunto que abordamos nesta Dissertação.

A explicação da prevalência dos conjuntos de Mandelbrot em famílias uni-paramétricas analíticas complexas motivaram a aplicação da teoria da *renormalização* [15] e esforços subseqüentes para inverter este procedimento por meio de *cirurgias* em polinômios quadráticos [16, 17, 18].

Também na dinâmica cúbica os produtos de conjuntos de Mandelbrot aparecem no espaço de parâmetros e foram observados em experimentos computacionais [1]. Os polinômios cúbicos em tais produtos podem ser renormalizados para produzir um par de mapas quadráticos [18]. A construção inversa, i.e. o fato que quaisquer duas quadráticas possam ser combinadas para obter um polinômio cúbico também foi demonstrado por Epstein e Yampolsky [18].

Esta relação próxima entre polinômios cúbicos e quadráticos faz-nos pensar que seus loci conexos possam igualmente compartilhar propriedades métricas, o que efetivamente mostramos ao longo deste trabalho. Acreditamos que os “scalings” encontrados aqui para o caso cúbico são também válidos para conjuntos tipo-Mandelbrot mais genéricos encontrados, por exemplo, no mapa de Hénon complexificado.

No capítulo três mostramos que de fato estes conjuntos tipo-Mandelbrot compartilham algumas propriedades métricas com \mathcal{M} mas também que eles têm várias propriedades muito diferentes, principalmente na dinâmica de sua estrutura interna.

Finalmente, um certo “scaling” igual à unidade reportado por Romera et al. [19] numa rota de acumulação de “midgets” ao longo da antena principal do conjunto de Mandelbrot, nos faz pensar que esta taxa de convergência limite igual à unidade das fases periódicas, tem um caráter muito geral, tanto nas rotas de acumulação no conjunto de Mandelbrot quanto nos conjuntos tipo-Mandelbrot. Tal generalidade não foi antecipada em nenhum trabalho anterior.

Além disso, obtivemos que a velocidade (limite) com a qual diminuem as fases periódicas na rota de acumulação é igual a **um** e idêntica para ambos conjuntos, fato que nos leva a conjecturar ser esta uma característica geral nas rotas de acumulação do conjunto de Mandelbrot e dos conjuntos tipo-Mandelbrot. Resultados preliminares indicam que tal velocidade de acumulação é válida não apenas para mapas discretos mas, também, para sistemas regidos por conjuntos de equações diferenciais (fluxos).

Capítulo 1

Propriedades métricas na dinâmica real

Este capítulo apresenta uma revisão breve das propriedades métricas do espaço de parâmetros de mapas discretos uni- e bi-paramétricos com variáveis reais. Na primeira parte são descritas as constantes α e δ de Feigenbaum [20, 21] que deram lugar à chamada “universalidade” do dobramento de períodos para mapas reais uni-paramétricos. Coligimos uma tabela atualizada que resume os valores experimentais das constantes de Feigenbaum. Descrevemos também resultados da literatura reportando propriedades métricas um tanto mais globais, que têm o escalamento Feigenbaum como um caso particular. Algumas delas são descritas na segunda parte deste capítulo.

O mapa quadrático $x_{t+1} = a - x_t^2$ em sua versão real tem servido como modelo para uma série de fenômenos da natureza assim como um laboratório para experimentos numéricos. Porém tal mapa quicá seja mais bem conhecido por haver revelado uma propriedade métrica “universal” comum à família de mapas unimodais a qual ele pertence. Esta observação conhecida como universalidade do dobramentos de períodos para mapas uni-paramétricos foi feita por Feigenbaum, e é descrita brevemente na primeira parte deste capítulo com a intenção de mostrar como os estudos das propriedades métricas de diagramas de bifurcação foram progredindo a partir deste evento, que serviu de semente para uma série de estudos posteriores cuja motivação era estabelecer propriedades métricas mais globais, aplicáveis não só a diagramas de bifurcação de mapas uni-paramétricos mas também a mapas com espaços de parâmetros bi-dimensionais. Tais resultados da literatura são descritos na segunda parte deste capítulo.

1.1 Revisão: mapa Quadrático

Os estudos de sistemas dinâmicos de tempo *discreto*, conhecidos também como equações de diferenças, relações de recorrência, mapas de iterações, ou simplesmente **mapas**:

$$z_{t+1} = f(z_t), \quad (1.1)$$

estão ainda na sua infância. Mesmo assim, nos últimos trinta anos um progresso excitante tem sido alcançado, graças à crescente disponibilidade de computadores rápidos e recursos computacionais gráficos [22]. Os mapas surgem de várias formas:

- como ferramentas para a análise de equações diferenciais (onde aparecem com “mapas de retorno”, de Poincaré),
- como modelos de fenômenos da natureza,
- ou como exemplos didáticos simples de sistemas apresentando “caos determinístico”.

Na dinâmica quadrática, onde $f(z)$ é uma uma expansão em série da forma

$$f(z) = a_0 + a_2(z - z_c)^2 + \dots, \quad a_2 \neq 0, \quad (1.2)$$

analítica na variável z com ponto crítico quadrático z_c . Tal forma geral engloba como casos particulares, por exemplo, o mapa estudado originalmente por Fatou [23],

$$f(z) = p + z^2, \quad z, p \in \mathbb{C}, \quad (1.3)$$

e o mapa estudado por Julia [24],

$$f(z) = \lambda z(1 - z), \quad z, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Já no caso real, i.e. quando restringimos $z \in \mathbb{R}$, estas equações de diferenças de primeira ordem se prestam para modelar sistemas dinâmicos em diversos campos, tais como, a biologia, a economia, a física, as ciências sociais, só para mencionar alguns. Apesar de serem simples e deterministas, tais equações podem exibir um conjunto surpreendente de comportamentos dinâmicos, desde pontos estáveis, passando por toda uma hierarquia de ciclos estáveis, até flutuações aparentemente aleatórias. Deixando desta forma abertos problemas fascinantes, alguns relacionados com os aspectos matemáticos da estrutura fina das trajetórias e alguns concernentes com as implicações práticas e aplicações [25].

Assim por exemplo temos os estudos de May [25], que ilustrou as complicações contidas no chamado “mapa logístico” de populações (ver Fig. 1.1), que é a forma mais simples de uma equação de diferenças não-linear de primeira ordem:

$$x_{t+1} = f(x_t) = r x_t(1 - x_t), \quad x, r \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Nesta equação, $0 < x_t < 1$ é uma medida adimensional da população [25] na n -ésima geração e $r \geq 0$ é a taxa de crescimento intrínseca do modelo. Quando x_t ultrapassa a unidade, as iterações subseqüentes divergem para ∞ . A função $f(x)$ atinge seu valor máximo $r/4$ para $x = 1/2$. Portanto a equação possui comportamento dinâmico não-trivial só se $r < 4$. Por outro lado, todas as trajetórias são atraídas a $x = 0$ se $r < 1$. Então para ter um comportamento dinâmico não trivial requeremos que $1 < r < 4$; fora disto a população se extingue.

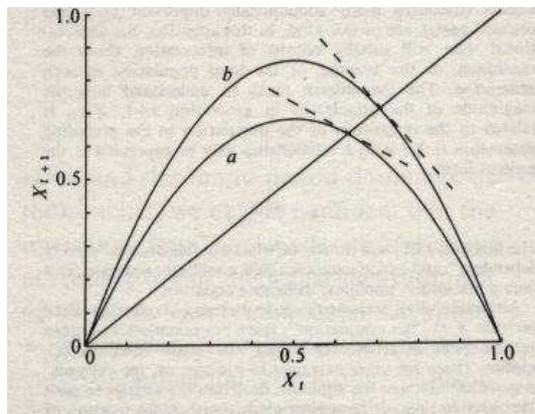


Figura 1.1: Uma forma típica da relação entre x_{t+1} e x_t descrita pela Eq. 1.1. As curvas são para a Eq. 1.5, com $r = 2.707$ (a); e $r = 3.414$ (b). As linhas pontilhadas indicam a tangente nos “pontos fixos” onde $f(x)$ intersecta a linha de 45° : para o caso a a tangente é menor do que 45° e o ponto fixo é estável; para b a tangente é maior do que 45° , e o ponto é instável. (Figura extraída da Ref. [26].)

O comportamento dinâmico da população pode ser estudado fixando o parâmetro de controle r e olhando os valores assintóticos das iteradas de x_t . Assim, por exemplo, como mencionado anteriormente, para uma taxa de crescimento baixa $r < 1$ a população sempre se extingue: $x_t \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$.

Para $1 < r < 3$ a população cresce e eventualmente alcança um estado estacionário não-nulo ver (Fig 1.2).

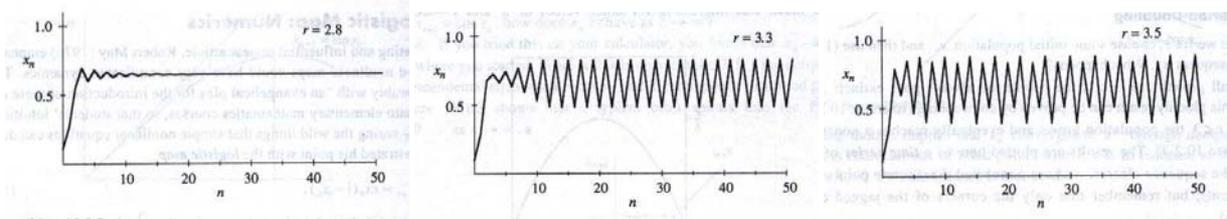


Figura 1.2: Séries periódicas (órbitas) das iteradas do mapa logístico 1.5 para distintos valores do parâmetro r

Para r maior, por exemplo $r = 3.3$ a população cresce de novo, porém fica *oscilando* entre uma população grande numa geração e uma população pequena na próxima geração, conforme mostrado na Fig. 1.2. Este tipo de oscilação, no qual x_t se repete a cada duas iterações

$$x_t = f(f(x_t)), \tag{1.6}$$

é chamado órbita cíclica de período-2.

Para um valor maior de r , digamos $r = 3.5$, a população se aproxima dum ciclo que agora se repete a cada quatro gerações, i.e. temos uma órbita de período-4, resultante do dobramento de período da órbita anterior, de período 2.

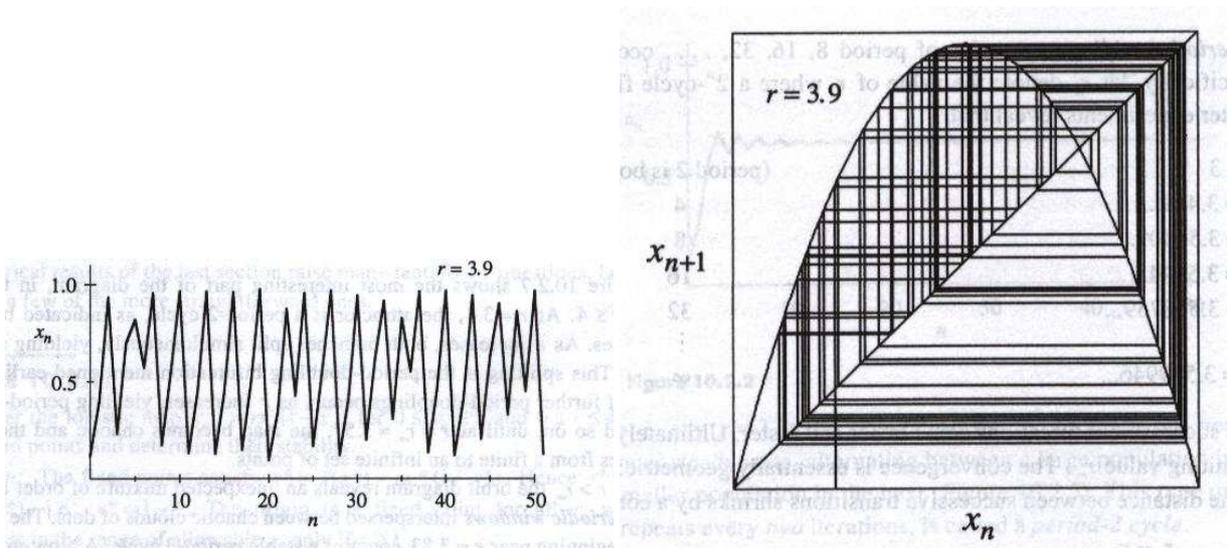


Figura 1.3: a) Série “caótica” das iteradas do mapa logístico 1.5. b) Diagrama reticulado correspondente à série caótica da Fig. 1.3a.

A medida que r aumenta temos uma seqüência ilimitada de **dobramentos de período**: $k = 8, 16, 32, \dots$. Se denotamos por r_n o valor de r onde o ciclo de período- 2^n aparece, encontramos a convergência mostrada na Tabela 1.1.

Da Tabela 1.1 notamos que as bifurcações são cada vez mais freqüentes quando o parâmetro cresce, e que $r_n \rightarrow r_\infty$, um valor limite. Esta convergência é essencialmente geométrica: no limite para n muito grande, a distância entre transições sucessivas se comprime por um fator constante ou taxa de convergência definida por:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|r_{n-1} - r_n|}{|r_n - r_{n+1}|} = 4.669 \dots, \tag{1.7}$$

Tabela 1.1: Convergência dos valores r_n onde as bifurcações de dobramento de período ocorrem.

k	r_n
2	3
4	3.449...
8	3.54409...
16	3.5644...
32	3.568759...
\vdots	\vdots
∞	3.569946...

Porém quando $r > r_\infty$, verifica-se que para muitos valores de r , a órbita $\{x_n\}$ nunca converge nem para um ponto fixo nem para um ciclo periódico; pelo contrário, o comportamento assintótico é aperiódico, como a da série de iteradas mostrada na Fig 1.3a. Em consequência, o correspondente “diagrama reticulado”mostrado na Fig 1.3b torna-se impressionantemente complexo para tais valores do parâmetro.

Mas, por outro lado, também se verifica que para certos valores de $r > r_\infty$ as órbitas voltam a ser periódicas de vez em quando. É assim que, com a finalidade de poder olhar o comportamento assintótico das iteradas x_t para “todos” os valores de r duma só vez, foram introduzidos os chamados *diagramas de bifurcações* que depois da sua introdução converteram-se numa ferramenta essencial da dinâmica não-linear. O correspondente diagrama de bifurcações para o mapa quadrático na forma normal logística 1.5 é mostrado na Fig. 1.4.

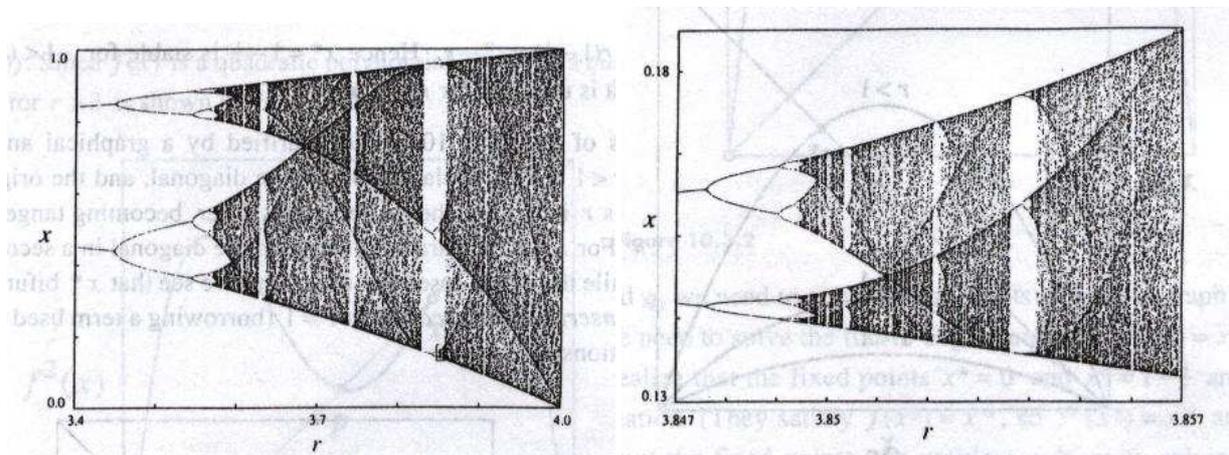


Figura 1.4: a) Janela do diagrama de bifurcações do mapa logístico 1.5. b) Magnificação duma pequena parte da janela de período-3 da Fig. 1.4a.

A partir do diagrama de bifurcações da Fig. 1.4, que mostra a região $3.4 \leq r \leq 4$, vemos que para $r = 3.4$ existe um atrator de período-2, indicado pelos dois ramos. À medida que r aumenta ambos ramos se ramificam simultaneamente, dando lugar a um ciclo de período-4. Esta ramificação é o dobramento de períodos descrito anteriormente. Depois, vê-se uma cascata continua de dobramentos de períodos 1×2^n , até que em $r = r_\infty \approx 3.57$, o mapa apresenta comportamento “caótico”, i.e. comportamento “aperiódico”, quando o atrator passa dum conjunto finito de pontos para um conjunto infinito de pontos.

Porém como mencionado anteriormente para $r > r_\infty$, o diagrama de bifurcações mostra uma alternância inesperada entre ordem e caos, com **janelas periódicas** imersas entre nuvens caóticas de pontos. A janela maior que começa perto de $r \approx 3.83$ contém um ciclo estável de período-3. Uma ampliação duma pequena parte desta janela de período-3 é mostrada na Fig. 1.4b, que ao ser comparada com a Fig. 1.4a, mostra uma estrutura auto-similar.

O análise de estabilidade dos ciclos periódicos é feita obtendo-se o espectro de autovalores. Assim, por exemplo, para o ciclo de período-1 os pontos fixos x^* satisfazem

$$x^* = f(x^*) = r x^* (1 - x^*). \tag{1.8}$$

Portanto, a origem $x^* = 0$ é um ponto fixo para qualquer r , enquanto que o outro ponto fixo $x^* = 1 - 1/r$ cai dentro do domínio permitido $0 \leq x \leq 1$ se $r \geq 1$. A estabilidade destes pontos é dada pelo multiplicador $f'(x^*) = r - 2rx^*$ associado a cada um deles. Como $f'(0) = r$, a origem é estável para $r < 1$ e instável para $r > 1$. No segundo ponto fixo, $f'(x^* = 1 - 1/r) = r - 2r(1 - 1/r) = 2 - r$. Portanto, $x^* = 1 - 1/r$ é estável para $1 < r < 3$, sendo instável para $r > 3$.

A análise anterior de estabilidade pode ser compreendida também olhando-se para a Fig. 1.5a. Quando $r < 1$ a parábola passa abaixo da diagonal, e a origem $x^* = 0$ é o único ponto fixo, i.e. todas as condições iniciais são atraídas para a origem. A medida que r aumenta, a altura da parábola cresce até ficar tangente à diagonal quando $r = 1$. Para $r > 1$ a parábola intersecta a diagonal no segundo ponto fixo $x^* = 1 - 1/r$, enquanto que, concomitantemente, a origem perde sua estabilidade, pois para este valor do parâmetro temos $f'(0) > 1$. Portanto, em $r = 1$ o ponto fixo $x^* = 0$ bifurca numa **bifurcação transcritical** i.e. os pontos fixos $x^* = 0$ e $x^* = 1 - 1/r$ trocam de estabilidade, quando $x^* = 0$ se torna instável, enquanto $x^* = 1 - 1/r$ passa a ser estável.

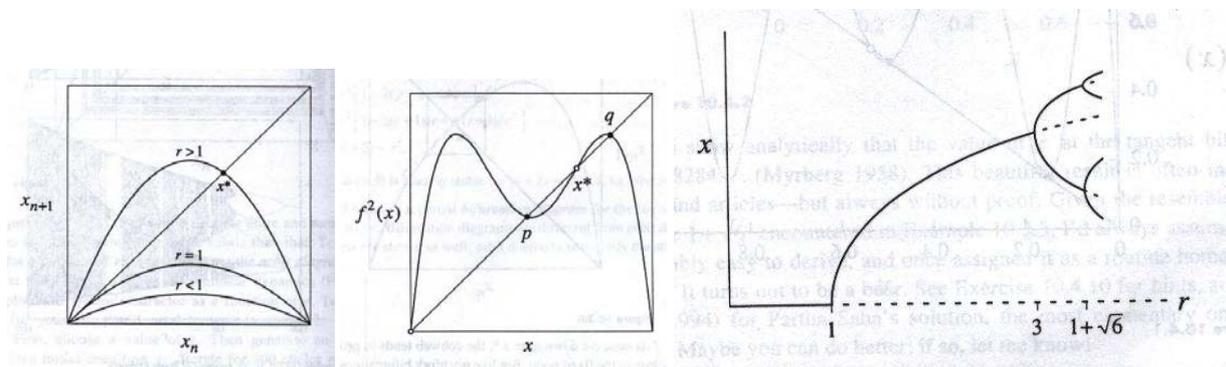


Figura 1.5: a) O mapa logístico $f(x)$, 1.5, para distintos valores de r . b) $f^2(x)$ do mapa logístico 1.9, os pontos pretos abertos denotam pontos fixos estáveis e os pontos abertos pontos fixos instáveis. c) Diagrama de bifurcação esquemático, incluindo as órbitas instáveis, indicadas por linhas pontilhada.

A mesma Fig. 1.5a ilustra que o segundo ponto fixo $x^* = 1 - 1/r$ também perde sua estabilidade, quando r é aumentado acima de $r = 3$. Porque para $r > 1$ a tangente nesse ponto x^* vai aumentando até alcançar seu valor crítico $f'(x^*) = -1$ quando $r = 3$. Produzindo-se nesse ponto $r = 3$ uma **bifurcação de dobramento de período**, também chamada de bifurcação de “flip”.

Analogamente como na análise de estabilidade do ciclo de período-2, teríamos de resolver o polinômio quártico

$$x = f(f(x)) \equiv f^2(x) = r^2 x (1 - x) [1 - r x (1 - x)] - x = 0. \tag{1.9}$$

*O multiplicador correspondente a uma órbita de período- k é simplesmente a derivada da k -ésima composição do mapa $f(x)$ consigo mesmo.

Porém, como os pontos fixos, $x^* = 0$ e $x^* = 1 - 1/r$, são soluções triviais deste polinômio, podem ser fatorados, fornecendo-nos uma equação de segundo grau, que resolvida em x nos dá as raízes:

$$p, q = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}, \quad (1.10)$$

que são reais para $r > 3$. Portanto o ciclo de período-2 existe para $r > 3$, e nasce *continuamente* a partir da bifurcação de dobramento de período do ponto fixo $x^* = 1 - 1/r = 2/3$ de período-1. Quando $r < 3$ as raízes são complexas, portanto as órbitas reais de período-2 não existem. A estabilidade do ciclo de período-2 novamente está dada pelo multiplicador associado a esta órbita de período-2. Em outras palavras, como p e q são *pontos fixos da segunda iterada do mapa*, $f^2(x)$, então o ciclo de período-2 é estável quando p e q são pontos fixos estáveis de f^2 . O multiplicador associado à órbita de período-2 é:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left. \frac{df(f(x))}{dx} \right|_{x=p} = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p) \\ &= r(1 - 2q)r(1 - 2p) \\ &= r^2[1 - 2(p + q) + 4pq] \\ &= r^2[1 - 2(r + 1)/r + 4(r + 1)/r^2] \\ &= 4 + 2r - r^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Portanto o ciclo de período-2 é linearmente estável para $|4 + 2r - r^2| < 1$, i.e., para $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

A análise de estabilidade das órbitas de período ímpar mostrados nas janelas da Fig. 1.4, em particular da órbita de período-3 existente na janela, $3.8254 \dots \leq a \leq 3.8415 \dots$ tem de ser feita a partir da equação orbital

$$x = f(f(f(x))) \equiv f^3(x), \quad (1.12)$$

porém ao invés de resolver explicitamente os pontos fixos deste polinômio de grau-8, uma análise gráfica é suficiente para entender-se o que se passa. Na Fig. 1.6 estão plotadas $f^3(x)$ para $a = 3.835$ e $a = 3.8$.

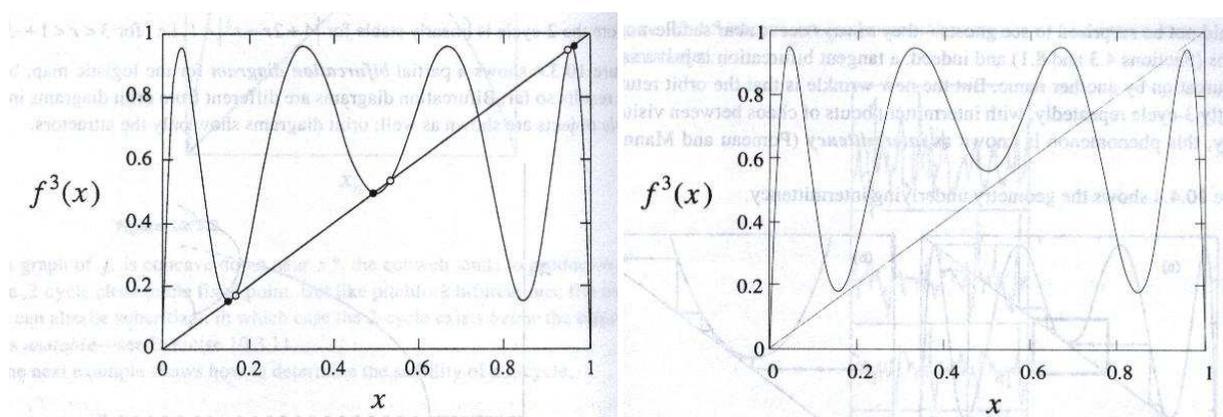


Figura 1.6: A função $f^3(x)$ do mapa logístico 1.5 para diferentes valores de r .

As interseções entre o gráfico e a diagonal correspondem às soluções de $f^3(x) = x$. Dentre as oito soluções, as seis soluções genuinamente de período-3 (i.e. soluções cujo período é efetivamente 3 e não menor) estão marcadas por pontos. Pontos pretos correspondem a ciclos de período-3 estáveis (notar a tangente de $f^3(x)$ nesses pontos), enquanto os pontos abertos denotam ciclos de período-3 instáveis.

Quando diminuimos o parâmetro para $r = 3.8$ na direção do regime caótico, as “montanhas” descem e os “vales” sobem, como conseqüência $f^3(x)$ se afasta da diagonal, de maneira que as interseções com a diagonal desaparecem, i.e. não temos mais o ciclo de período-3. Assim, para algum valor entre $r = 3.8$ e $r = 3.835$, o gráfico de $f^3(x)$ deve ser *tangente* à diagonal. É para este valor crítico de r que os ciclos estáveis e instáveis de período-3 colidem e se aniquilam numa **bifurcação tangente**. Esta bifurcação define o começo da janela de período-3. O valor exato da bifurcação tangente é $a = 1 + \sqrt{8}$ [27].

Os dobramentos de período dentro da janela de período-3 se dão de forma parecida ao nascimento do ciclo de período-3, porque quando se incrementa r , as “montanhas” se elevam e os “vales” descem na Fig. 1.6. A tangente de $f^3(x)$ nos pontos pretos decresce continuamente desde $+1$ até -1 . Ao atingir -1 temos uma bifurcação de dobramento de período que dá lugar ao nascimento do ciclo estável de período-6. Tais bifurcações repetem-se sucessivamente, dando lugar à cascata de dobramentos de período 3×2^n . Cascatas de dobramento similares ocorrem em todas as demais janelas periódicas.

Foi mencionado anteriormente que as iteradas assintóticas do mapa quadrático exibem comportamento aperiódico para certos valores do parâmetro r . No entanto para que um sistema possa ser chamado de “caótico” é preciso demonstrar a existência duma *dependência sensível nas condições iniciais*, no sentido que órbitas muito próximas se afastam exponencialmente. Um quantificador para esta dependência sensível é o **expoente de Lyapunov** associado à órbita em questão, que no caso dos mapas uni-dimensionais é dado por [28]:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}. \quad (1.13)$$

Notar a dependência em x_0 , porém para todos os pontos x_0 pertencentes à mesma bacia[†] de atração dum determinado atrator o expoente é o mesmo. Para pontos fixos e ciclos estáveis, $\lambda < 0$ (em particular $\lambda = -\infty$ para órbitas super-estáveis), enquanto que para atratores caóticos $\lambda > 0$. A Fig. 1.7 mostra os expoentes de Lyapunov das órbitas do mapa quadrático. Nela se nota que $\lambda < 0$ para $r < r_\infty \approx 3.57$, sendo zero nas bifurcações de dobramento de período bem como nas bifurcações tangentes. Os picos negativos correspondem a ciclos- 2^n . O aparecimento do regime caótico é visível perto de $r \approx 3.57$ onde λ passa a ser positivo pela primeira vez. Quando $r > 3.57$, λ vai aumentando, mas de tanto em tanto decai devido ao aparecimento de janelas periódicas, em particular é notória a janela de período-3 perto de $r = 3.83$.

1.2 As constantes de Feigenbaum

Antes de passar a descrever a “universalidade” quantitativa de Feigenbaum, relataremos brevemente a universalidade qualitativa encontrada nos sistemas dinâmicos. Metropolis *et al.* [29] consideraram mapas unimodais[‡] da forma

$$x_{t+1} = r f(x_t), \quad (1.14)$$

onde $f(x)$ adicionalmente satisfaz $f(0) = f(1) = 0$. Eles provaram que à medida que r é variado, a ordem na qual as soluções periódicas estáveis aparecem é *independente* do mapa unimodal a ser iterado. Isto é, *os atratores periódicos sempre ocorrem na mesma seqüência*, atualmente chamada de seqüência universal, **U-sequence**. Este resultado (expressado num

[†]A bacia dum atrator é o conjunto de todos os pontos cujas sucessivas iteradas tendem ao atrator.

[‡]Curvas suaves, côncavas para baixo e com um único máximo.

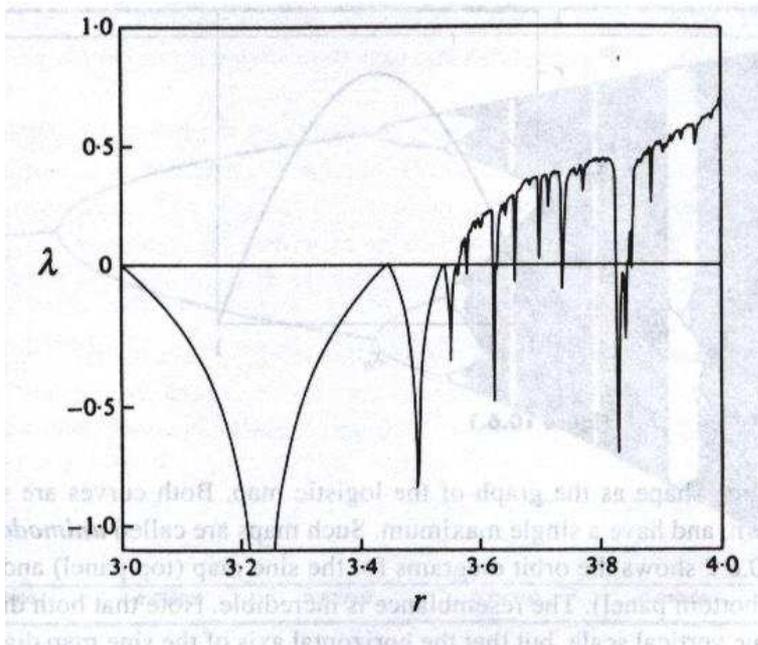


Figura 1.7: Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico 1.5.

teorema devido a Metropolis *et al.* [29]), implica que a forma algébrica específica de $f(x)$ é irrelevante, só interessando sua forma global. A seqüência-U até período $k = 6$ é dada por

$$1, 2, 2 \times 2, \quad 6, 5, \quad 3, 2 \times 3, \quad 5, 6, 4, 6, 5, 6.$$

O início desta seqüência é o familiar cenário de dobramentos de período: 1, 2 e 2×2 . Os períodos seguintes, 6, 5, 3, correspondem às janelas periódicas mais visíveis na Fig. 1.4. O período 2×3 é o primeiro dobramento de período do ciclo de período-3, da janela de período-3. Os últimos ciclos 5, 6, 4, 6, 5, 6 são menos familiares; eles ocorrem em janelas muito estreitas.

A seqüência-U foi encontrada em experimentos da reação de Belousov-Zhabotinsky [30]. Simoyi *et al.* [31] estudaram reação num reator de fluxo e encontraram um regime no qual estados periódicos e caóticos se alternam à medida que a taxa de fluxo é incrementada. Dentro da resolução experimental, os estados periódicos ocorreram na ordem exata predita pela seqüência-U.

A seqüência-U é qualitativa, porque ela dita a ordem, porém não os valores dos parâmetros, nos quais os atratores periódicos ocorrem.

A seguir relatamos a celebrada descoberta de Feigenbaum da universalidade quantitativa nos mapas unidimensionais. A história que acompanhou esta descoberta pode ser lida nas Refs. [32, 33, 34]. Assim por exemplo na Ref. [35] lemos que o artigo original de Feigenbaum [21] foi submetido a *Advances in Mathematics* em novembro de 1976 e foi recusado. Seu outro artigo original [20] submetido a *SIAM Journal of Applied Mathematics* também foi recusado.

Um trecho histórico tomado da Ref. [22] diz o seguinte.

Lá por 1975, Feigenbaum começou a estudar os dobramentos de período no mapa logístico. Primeiro ele desenvolveu uma “teoria de função geradora” complicada para prever r_n , i.e. o valor de r onde primeiro aparece um ciclo- 2^n . Para comprovar sua teoria numericamente, e como ele não era fluente com os computadores grandes, programou sua calculadora manual para computar os primeiros r_n . Como sua calculadora demorava no cálculo, Feigenbaum teve tempo para adivinhar onde ia ocorrer a próxima bifurcação. Ele notou uma regra simples: r_n convergia geometricamente, com a distância entre transições sucessivas comprimindo-se por um fator constante em torno de 4.669.

Feigenbaum [33] mesmo conta o seguinte:

Gastei parte do dia tentando interpolar o valor da taxa de convergência, 4.669, às constantes matemáticas que eu conhecia. A tarefa não foi frutífera, salvo pelo fato que esta fez o número memorável.

Logo Paul Stein me lembrou que o dobramento de período não é uma propriedade única do mapa quadrático mas também ocorre, por exemplo, em $x_{t+1} = r \sin(\pi x_t)$. Porém minha teoria de função geradora baseava-se fortemente no fato que a não-linearidade fosse simplesmente quadrática e não transcendental. Devido a isto, o meu interesse no problema diminuiu.

Aproximadamente um mês mais tarde, decidi calcular numericamente os r_n 's no caso transcendental. Este problema foi ainda mais lento de calcular que o caso quadrático. De novo, tornou-se claro que os r_n 's convergiam geometricamente, e todos de uma forma maravilhosa, a taxa de convergência foi o mesmo 4.669 que lembrei em virtude dos meus esforços para interpolá-lo.

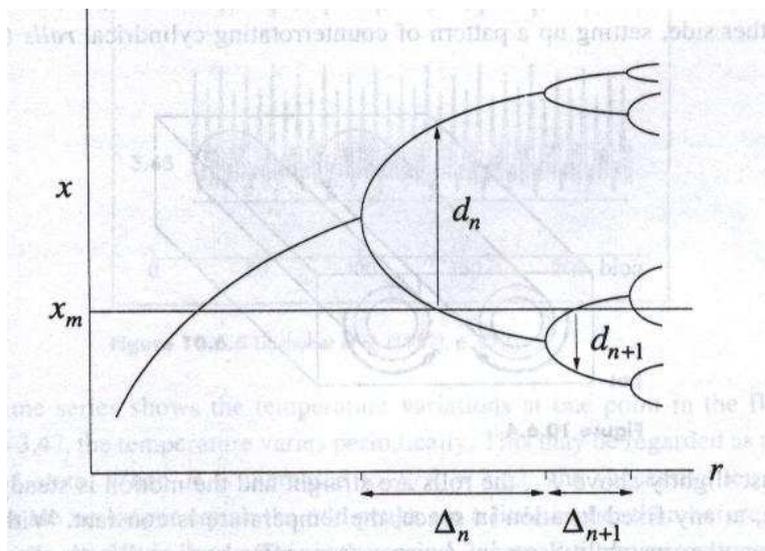


Figura 1.8: Diagrama de bifurcações ilustrando o significado das constantes universais α e δ (Figura extraída da Ref. [22]).

De fato a mesma taxa de convergência aparece *sem depender do mapa unimodal com máximo quadrático que seja iterado*. Neste sentido, o número

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669 \dots, \tag{1.15}$$

é dito ser **universal**. É uma nova constante matemática, tão essencial para dobramentos de período como π o é para círculos. Inicialmente acreditou-se que tal constante seria bem mais universal do que realmente o é: na verdade, apesar da convergência continuar a ser em geral geométrica, os valores limites dependem bastante dos sistemas considerados. A universalidade é, na verdade, muito mais restrita do que se esperava que fosse, inicialmente.

A Fig. 1.8 ilustra esquematicamente o significado de δ . Denotando por $\Delta_n = r_n - r_{n-1}$ a distância entre bifurcações consecutivas. Então $\Delta_n/\Delta_{n+1} \rightarrow \delta$ à medida que $n \rightarrow \infty$.

Também existe um “scaling” universal na direção- x . É um tanto difícil estabelecê-lo precisamente porque as forquilhas tem larguras distintas, ainda assim num mesmo valor de r (Ver a Fig. 1.4 para verificar isto). Para levar em conta esta não-uniformidade, definimos uma escala “standard” no eixo x da seguinte forma: Denotamos por x_m o máximo de f , e por d_n a distância desde x_m até o ponto *mais próximo* num ciclo- 2^n (ver Fig. 1.8). Então a taxa d_n/d_{n+1} tende

para um limite universal à medida que $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \rightarrow \alpha = -2.5029\dots, \quad (1.16)$$

independentemente da forma específica de f . O sinal negativo indica que o ponto mais próximo de x_m no ciclo- 2^n alterna-se para acima e para abaixo de x_m , conforme mostrado na Fig. 1.8. Assim os d_n são alternadamente positivos e negativos.

Feigenbaum desenvolveu uma teoria [21] que explicava porque α e δ são universais. Ele adaptou a idéia de *renormalização* da física estatística, e desta maneira encontrou uma analogia entre α , δ com os expoentes universais observados em experimentos de transições de fase de segunda ordem em ímãs, fluidos, e outros sistemas físicos [25].

Depois do trabalho de Feigenbaum, seqüências de bifurcações de dobramento de período foram medidas numa variedade de sistemas experimentais. Por exemplo, no experimento de convecção de Libchaber *et al.* [36], uma caixa contendo mercúrio líquido é esquentada por baixo. O parâmetro de controle é o número de Rayleigh R , uma medida adimensional do gradiente de temperatura imposto externamente de baixo para cima. Para R menor do que um valor crítico R_c , o calor é conduzido para cima sem que o fluido se movimente. Mas para $R > R_c$, o estado quiescente passa a ser instável, iniciando-se uma **convecção**, i.e., o fluido começa a ascender num lado, perde seu calor na parte de cima, e desce pelo outro lado, provocando um padrão de rolos cilíndricos girando em sentidos contrários. Para R justamente acima de R_c , os rolos são longitudinalmente retos e o movimento é estacionário. Mais ainda, num ponto qualquer do espaço, a temperatura é constante. Com mais calor, outra instabilidade ocorre. Uma onda propaga-se de trás para frente ao longo de cada rolo, fazendo com que a temperatura oscile em cada ponto [22].

Em experimentos tradicionais deste tipo, o calor pode ser aumentado, causando instabilidades posteriores até que eventualmente a estrutura de rolos é destruída e o sistema passa a ser turbulento. Libchaber *et al.* [36] queriam ser capazes de incrementar o calor *sem* desestabilizar a estrutura espacial. Por isto eles escolheram mercúrio, de esta maneira a estrutura de rolos pode ser estabilizada aplicando um campo magnético DC a todo o sistema. Além desta existem muitas otimizações no desenho experimental detalhados nas Refs. [36, 37, 38].

Os resultados experimentais ilustrados na Fig. 1.9(b), mostram que o sistema sofre uma seqüência de bifurcações de dobramentos de período à medida que o número de Rayleigh R é aumentado.

Cada uma das séries mostra as variações de temperatura num determinado ponto no fluido. Para $R/R_c = 3.47$, a temperatura varia periodicamente. Isto pode ser considerado como o estado básico de período 1. Quando R é incrementado a $R/R_c = 3.52$, os máximos sucessivos de temperatura não são mais iguais; os picos ímpares são um pouco mais altos que antes, e os picos pares são um pouco mais baixos. Este é o estado de período 2. Mais incrementos em R geram dobramentos de período adicionais, como as duas últimas séries da Fig. 1.9.

Uma medida cuidadosa dos valores de R nas bifurcações de dobramentos de período [36] mostra que $\delta = 4.4 \pm 0.1$, em acordo razoável com o resultado teórico $\delta \approx 4.669$.

A Tabela 1.2 adaptada de [28] e atualizada, resume os resultados experimentais obtidos em vários sistemas: convecção de fluidos, lasers, sistemas químicos e acústicos, circuitos não-lineares, etc. As estimativas experimentais de δ são mostradas junto com seus erros reportados pelos experimentadores.

É importante entender que essas medidas experimentais são difíceis. Assim por exemplo para obter um $\delta \approx 5$, cada bifurcação sucessiva requer uma melhoria de um fator cinco da capacidade de medir o parâmetro de controle externo. Também, o ruído experimental tende a destruir a estrutura de órbitas de períodos mais altos, tornando portanto difícil dizer precisamente o valor

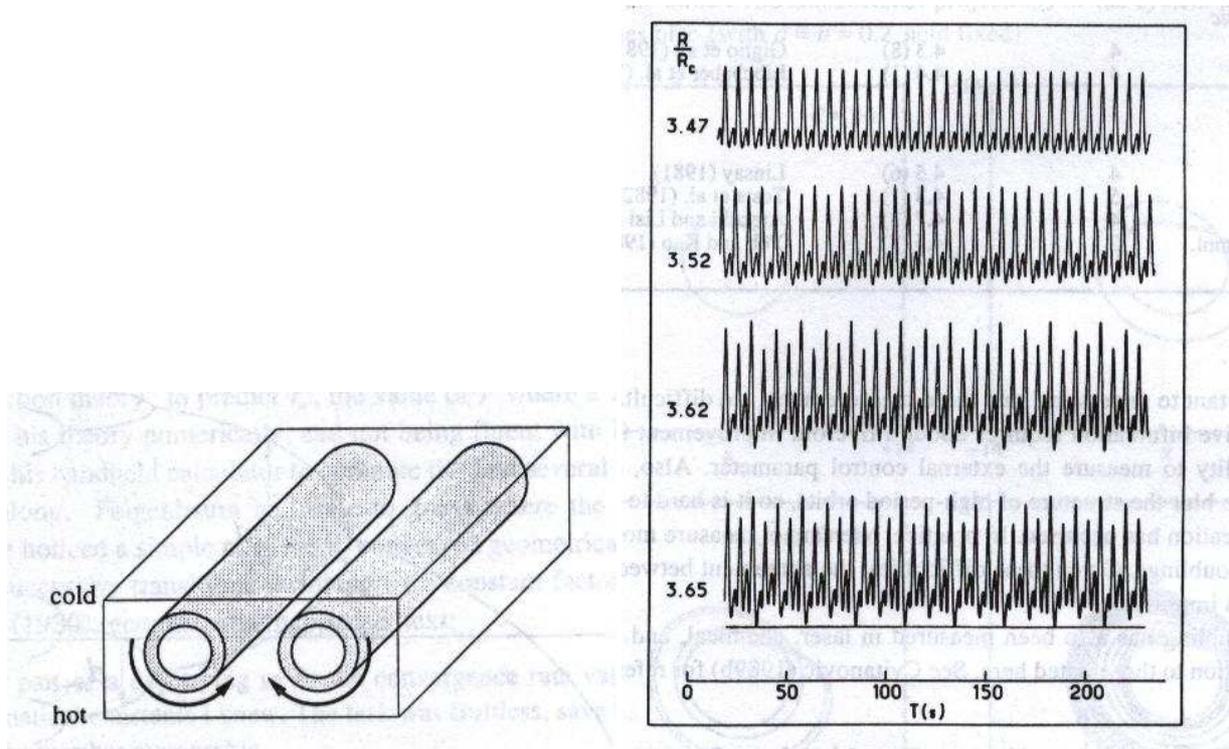


Figura 1.9: a) Rolos de convecção. b) Resultados experimentais de Libchaber *et al.* [36], p. 213.

exato do parâmetro onde bifurcações efetivamente ocorrem. Na prática, não se pode medir mais que cerca de cinco dobramentos de período. Levando em conta essas dificuldades, a concordância entre a teoria e os experimentos é boa [22].

Tabela 1.2: Um resumo das observações experimentais de dobramentos de período. Os números entre parênteses são estimativas dos erros experimentais; 4.3(8) significa 4.3 ± 0.8 . Uns poucos “experimentos” numéricos são incluídos para indicar a precisão de medida dos números universais alcançada em simulações numéricas. (Obs. No. denota o número de dobramento de períodos.)

Experimento	Autores	No.	δ	α	
<i>Hydrodinâmica:</i> water	1980: Gollub and Benson [39]	2			
	1981: Giglio, Musazzi and Perini [40]	4	4.3(8)		
	helium	1981: Libchaber and Maurer [37]	4	3.5(1.5)	
	mercury	1982: Libchaber, Laroche and Fauve [36]	4	4.4(1)	
	boiling two-phase flows	2004: R. Zboray et al. [41]			
	silicone	2007: Aa, Cao and Hu [42]	3	4.69(5)	

Continua na página seguinte...

Tabela 1.2 – Continuação

Experimento	Autores	No.	δ	α
<i>Plasma:</i>				
?	1987: Bora, Rai and Kaw [43]	2	4.138	
helium	1987: Braun et al. [44]	4		
argon	1987: Cheung and Wong [45]	2	4.4(3)	2.3(2)
argon	1992: Braun, Lisboa			
argon	and Gallas [46]	2		
?	1992: Papanyan and Grigoryan [47]	?	4.6(1)	2.6(6)
<i>Electrônica:</i>				
diode	1982: Linsay [48]	4	4.5(6)	
	1982: Testa, Pérez and Jeffries [49]	5	4.3(1)	2.4(1)
transistor	1982: Arecchi and Lisi [50]	4	4.7(3)	
Josephson simul.	1982: Yeh and Kao [51]	3	4.5(3)	2.7(2)
Josephson junct.	1982: Cirillo and Pedersen [52]	?		
Ferroresonant circet.	2005: Wornle, Harrison			
	and Zhou [53]	4	4.57778	
<i>Laser:</i>				
laser feedback	1981: Hopf et al. [54]	3	4.3(3)	O.K.
laser	1982: Arecchi et al. [55]	2		
laser	1983: Weiss, Godone			
	and Olafsson [56]	3		
<i>Acústica:</i>				
helium	1981: Lauterborn and Cramer [57]	3		
	1982: Smith, Tejwani and Farris [58]	3	4.8(6)	
	1988: Marriott and Delisle [59]	2		
	1989: Marriott and Delisle [60]	2		
<i>Química:</i>				
B-Zh reaction	1982: Simoyi, Wolf and Swinney [30]	3		
<i>Computação:</i>				
N-S truncation	1979: Franceschini and Tebaldi [61]	5	4.6(2)	2.5(1)
Brusselator	1981: Kay [62]	7	4.6(2)	
Optical bistab.	1982: Carmichael, Snapp			
	and Schieve [63]	8	4.6690(4)	
Impact oscillator	1983: Thompson and Ghaffari [64]	5	4.64	
	1984: Isomäki, Von Boehm			
	and Rätty [65]		4.7	
Damped oscillator	1983: Schulman [66]	5	4.68	
Detonations	2005: Ng et al. [67][68]		4.669	
Vernal memory	2005: O.P. Sklyarov [69]			

Continua na página seguinte...

Tabela 1.2 – Continuação

Experimento	Autores	No.	δ	α
Pulsating Detonations	2006: Henrick et al. [70]	4	4.66(9)	
<i>Teoria:</i>		∞	4.669...	2.503...

1.3 Revisão: mapa de Hénon

Em 1963 Lorenz [71] estudou um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem, que representavam um fluxo no espaço tri-dimensional, e cujas soluções tendiam para um “atrator estranho”. Uns treze anos depois, Hénon [72] introduziu um modelo muito mais simples que exibia as mesmas propriedades essenciais do sistema de Lorenz. Em vez de um complicado sistemas de equações diferenciais, a grande vantagem do modelo de Hénon era ser um simples mapa bidimensional definido pelas expressões [72]:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= 1 - ax_t^2 + y_t, \\y_{t+1} &= bx_t.\end{aligned}\tag{1.17}$$

A finalidade deste modelo “reducionista” era, por um lado, permitir uma exploração numérica mais rápida, mais precisa e detalhada, de forma que as soluções possam ser seguidas por um tempo muito mais longo que no caso dum sistema de equações diferenciais; por outra parte para fornecer um modelo que seja mais fácil de se analisar matematicamente. Hénon demonstrou numericamente que, para certos valores de parâmetros, o seu mapa parecia ter um atrator estranho com uma estrutura de conjunto de Cantor, o qual havia sido inferido por Lorenz [71], mas não pode ser observado diretamente porque a taxa de contração depois de um “circuito” era muito pequena: 7×10^{-5} [72]. Mais tarde a existência do atrator estranho no mapa de Hénon foi finalmente rigorosamente estabelecida por Benedicks e Carleson [73, 74], para valores de b muitíssimo perto de zero.

Desde sua introdução [72] o mapa de Hénon vem sendo continuamente estudado na literatura por apresentar uma não-linearidade quadrática, a de grau mais baixo possível, e por ter dimensão maior do que 1, o que faz com que seja bem mais realístico do que situações unidimensionais tão populares. Por isto, o mapa de Hénon é provavelmente o protótipo mais bem estudado e conhecido de sistemas dinâmicos multidimensionais, tanto com dissipação quanto sem.

Na literatura encontram-se expressões distintas para o mapa de Hénon, todas sendo entretanto equivalentes, após efetuarem-se transformações simples das equações. Uma das mais populares na literatura que tem a grande vantagem de produzir *polinômios mônicos*[§] como equações de movimento, é a seguinte:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a - x_t^2 + by_t, \\y_{t+1} &= x_t.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Este par de equações define a evolução temporal das variáveis (x_t, y_t) a partir dum ponto inicial (x_0, y_0) , sendo tal evolução regulada através de dois parâmetros (a, b) de controle. Ambas equações de movimento são contínuas, com inversa também contínua (difeomorfismo).

[§]Os polinômios mônicos, são aqueles cujo coeficiente do termo de maior grau é a unidade.

No mapa de Hénon as variáveis x, y definem um espaço de fases bidimensional enquanto que o par (a, b) define o espaço de parâmetros do sistema, no qual a é o parâmetro de não-linearidade e b é o parâmetro de dissipação. No intervalo $|b| < 1$ o mapa é dissipativo, sendo completamente dissipativo quando $b = 0$, valor no qual as variáveis desacoplam-se, com a dinâmica da variável x coincidindo com o mapa quadrático $x_{t+1} = a - x_t^2$, já amplamente estudado na literatura. Para $|b| = 1$ o mapa é não-dissipativo. Mais especificamente, para $b = 1$ o mapa reverte áreas enquanto que preserva áreas para $b = -1$. Portanto, neste último limite o mapa é Hamiltoniano.

O mapa de Hénon em sua versão real tem sido estudado intensivamente na matemática, na física e em outras ciências. Em aplicações práticas, sob certas condições o mapa de Hénon representa sistemas físicos reais tais como: um oscilador harmônico perturbado com um acoplamento não-linear ao termo de perturbação [75], modelos de laser de quatro níveis com perdas moduladas [76]; assim como aproximações para fenômenos físicos estudados em aceleradores de partículas, uma vez que pode ser deduzido do Hamiltoniano do movimento betatrônico bidimensional para uma rede de células periódicas com uma única não-linearidade de sextupólo concentrada na aproximação de um impulso. Também existem estudos de versões quânticas do mapa de Hénon [77].

Os primeiros estudos do espaço de parâmetros do mapa de Hénon real foram feitos por El Hamouly e Mira [78, 79]. Trabalhos subsequentes incluem [80, 81, 82, 73, 83, 6, 18, 84, 85, 13, 14, 86, 87] e as referências nelas contidas.

Em particular, é de nosso interesse os estudos feitos por Gallas [83], que mostram que o espaço de parâmetros do mapa de Hénon esta organizado numa forma muito regular, contento estruturas semelhantes a “camarões” imersas e dispostas de maneira hierárquica e bem ordenada numa chamada *Via Caótica* \mathcal{V} [83]. Esta visão do espaço de parâmetros faz supor a existência de propriedades métricas tanto locais quanto globais, que estudaremos nas seções seguintes.

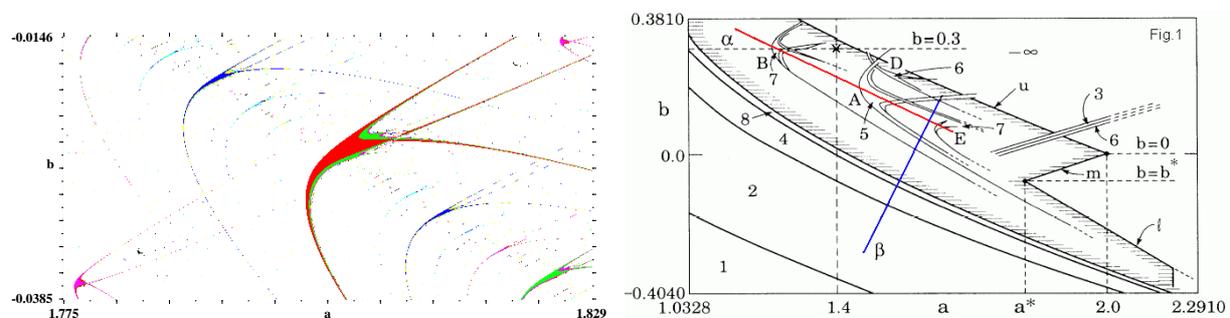


Figura 1.10: a) “Camarões” isoperiódicos imersos num mar caótico ao longo duma porção da direção α . b) Vista esquemática da *Via Caótica* \mathcal{V} , delimitada pela região achurada mostrando os vértices em $(2, 0)$ e (a^*, b^*) , a direção α com as estruturas paralelas entre elas e a linha β , sinalizando a “foliação” das “pernas” dos camarões. Figura extraída da Ref. [83], onde a nomenclatura é introduzida.

A impressionante regularidade encontrada consiste essencialmente em que todos os “camarões” aparecem alinhados ao longo de uma direção particular, α . Mas também há uma direção secundária β , que é aproximadamente perpendicular a uma densa “foliação das pernas” que emanam dos “camarões” (domínios isoperiódicos). Neste contexto mais geral, as propriedades métricas estudadas por Feigenbaum em mapas unimodais correspondem não mais que a um corte particular ao longo da direção *beta*. E mais ainda os diagramas de fase parecem mostrar que, a maior “atividade dinâmica” ocorre ao longo da direção α , sendo que a dinâmica ao longo de α determina e escraviza a dinâmica observada ao longo de β , e não ao contrário.

1.4 Pontos de acumulações múltiplas

Como mencionado na seção precedente, a regularidade encontrada nos diagramas de fase do espaço de parâmetros do mapa de Hénon, sugeria a existência de propriedades métricas locais de codimensão-2 (nas estruturas isoperiódicas). Um estudo mais detalhado destas propriedades foi feito por Beims e Gallas [88], que mostram a existência dum número infinito de pontos caracterizados pela acumulação simultânea de duas ou mais cascatas de bifurcação. Nela reportam uma determinação numérica dos vértices numa rede não-linear duplamente infinita que conduz a um ponto de dupla acumulação. Também, discutem a natureza teórico-numérica das irracionalidades que caracterizam os vértices.

Uma rede não-linear [89] aparece sempre que há uma interseção de famílias de curvas, mais exatamente *variedades*, que delimitam domínios de comportamentos físicos estáveis. Como os sistemas dinâmicos contêm muitas cascatas de bifurcação diferentes, sempre que essas cascatas se intersectam (i.e. coexistem), elas produzem uma rede não-linear no espaço de parâmetros. Na Fig 1.11a está mostrada esquematicamente uma rede não-linear de parâmetros, que corresponde ao espaço de parâmetros do mapa de Hénon, mostrado na Fig 1.11b. Neste caso a rede resulta da coexistência de duas cascatas de dobramento de período de órbitas estáveis: uma cascata de período 1×2^m e uma cascata de período 3×2^n . As famílias de curvas $\mathbf{u} \equiv \{u_k\}$ e $\mathbf{v} \equiv \{v_j\}$ delimitam domínios de estabilidade pertencentes às cascatas 1×2^m e 3×2^n respectivamente. A interseção destas duas famílias de arcos “parabólicos” define uma malha de pontos, “vértices”, composta por uma seqüência infinita de pontos especiais, no sentido que eles pertencem simultaneamente a *três* domínios de estabilidade distintos, i.e. três movimentos estáveis diferentes coexistem para cada um destes vértices.

Beims e Gallas [88] reportam as localizações precisas de vários destes vértices que compõem a rede não-linear da Fig 1.11a. A partir destes dados, na mesma referência foram obtidas algumas propriedades métricas das cascatas de bifurcações que dependem da variação simultânea de dois parâmetros.

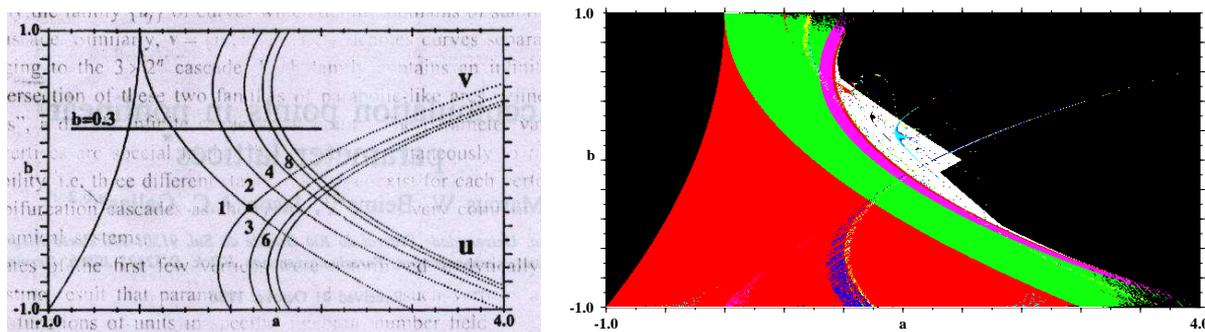


Figura 1.11: a) ilustração esquemática das duas famílias de arcos parabólicos, u_k e v_j , delimitando regiões de movimentos periódicos estáveis de períodos 1×2^m e 3×2^n respectivamente. O ponto preto indica o ponto de interseção de u_1 e v_1 . Os números representam a periodicidade dentro de cada região. b) localização dos arcos no espaço de parâmetros do mapa de Hénon. A Figura (a) foi extraída da ref. [88].

Quando $b = 0$ na Eq. 1.18 a dinâmica de x e y é a mais simples possível: x é regido pelo *mapa quadrático* $x \rightarrow a - x^2$ enquanto que y simplesmente segue x com um atraso de um passo de tempo. Portanto o escalonamento (“scaling”) observado ao longo da linha $b = 0$ coincide com

o escalonamento geométrico de Feigenbaum [21, 90, 28, 91]

$$\delta = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_l - a_{l-1}}{a_{l+1} - a_l} = 4.669 \dots \quad (1.19)$$

para sistemas uni-dimensionais, e o ponto de acumulação desta convergência é o ponto estudado por Myrberg há mais de 50 anos, no final dos anos 1950 [92, 93, 88]:

$$(a, b) = (1.401155189 \dots, 0.0). \quad (1.20)$$

Adicionalmente na ref. [88], foram computadas as convergências de codimensão-2:

$$u_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j v_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j \quad (1.21)$$

ao longo das cascatas de dobramento de período 1×2^m e 3×2^n respectivamente. Como era de se esperar, em ambos casos a taxa de convergência encontrada foi a $\delta = 4.669$, independentemente do corte ser feito ao longo de $b = 0$ ou ao longo das variedades v_1 e u_1 . O ponto de acumulação *dupla* $\mathcal{A}_{1,3}$, onde *duas* cascatas de bifurcação se acumulam simultaneamente é dado por [88]

$$\mathcal{A}_{1,3} = (1.56012804937528, -0.099195603261691). \quad (1.22)$$

1.5 Rigidez das bifurcações

Na seção anterior foi descrito brevemente o escalonamento de cascatas de dobramentos de período de codimensão-2. Porém, uma propriedade métrica um tanto mais global dos diagramas de bifurcação é conhecida como “rigidez”. No caso dos mapas escalares uni-paramétricos ela consiste essencialmente em que os diagramas de bifurcação de janelas periódicas não só são topologicamente equivalentes, mas também estão relacionados por uma mudança quase-linear de coordenadas paramétricas. Este fenômeno também é aplicável para famílias bi-paramétricas. Em ambos casos há uma família de mapas canônicos tais que tipicamente as bifurcações dentro duma janela periódica dum mapa escalar dado são bem aproximadas por uma transformação *linear* do diagrama de bifurcações do mapa canônico [94].

Uma característica central duma região de estabilidade periódica rodeada por comportamento caótico é um ponto no espaço de parâmetros no qual o mapa tem uma órbita “superestável” ¶. Perto duma órbita superestável de período n , a n -ésima iterada do mapa é geralmente bem aproximada por um mapa quadrático, e o diagrama de bifurcação canônico no caso uni-paramétrico é o da família quadrática $x \rightarrow x^2 - c$, que está mostrado na Fig. 1.12

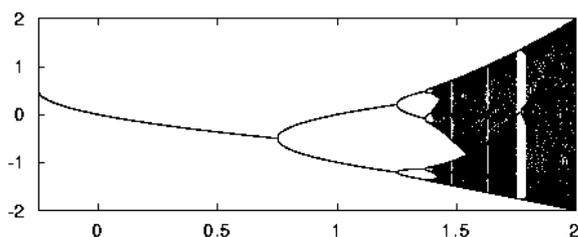


Figura 1.12: Diagrama de bifurcação do mapa quadrático $x \rightarrow x^2 - c$. Figura extraída da ref. [94].

Dentro do intervalo de parâmetros no qual é observado comportamento caótico, há intervalos mais pequenos nos quais há comportamento periódico, i.e. janelas periódicas. Um exemplo é a

¶Uma órbita superestável é uma órbita periódica que inclui um ponto crítico do mapa.

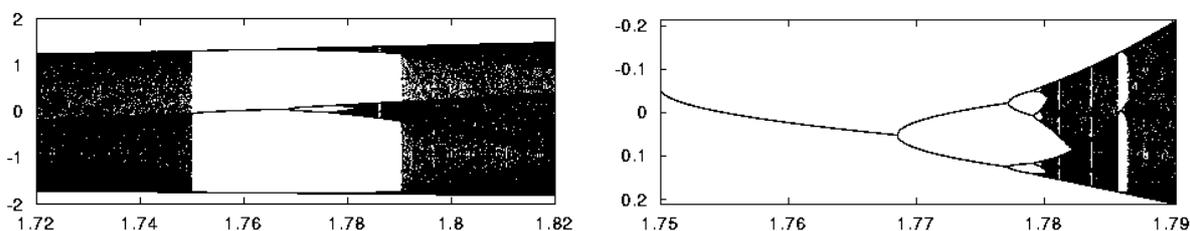


Figura 1.13: (a) Ampliação do intervalo $1.72 \leq c \leq 1.82$ no diagrama de bifurcação na Fig. 1.12. (b) Ampliação de (a) perto de $x = 0$, com o eixo vertical, virado de baixo para cima, para comparação com a Fig. 1.12. Figura extraída da ref. [94].

janela de período 3 na Fig. 1.12, perto de $c = 1.75$, mostrada em maior detalhe na Fig. 1.13(a). Nela se pode apreciar a criação da órbita estável de período 3 mediante uma bifurcação sela-nó e a destruição do atrator de três pedaços no parâmetro de crises. Estes dois fenômenos formam a fronteira da janela de período 3 no espaço de parâmetros, e entre estes dois parâmetros o diagrama de bifurcação é qualitativamente muito similar ao diagrama de bifurcação global.

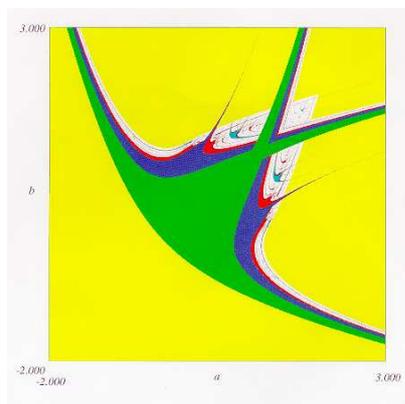


Figura 1.14: Diagrama de bifurcação para a família canônica $x \rightarrow (x^2 - a)^2 - b$. Figura extraída da ref. [94].

Na verdade existe uma correspondência quantitativa entre as janelas periódicas de famílias uni-paramétricas e o diagrama de bifurcação “canônico” do mapa quadrático $x \rightarrow x^2 - c$. Se o intervalo de parâmetros da janela é linearmente transformado para corresponder ao intervalo de parâmetros do diagrama canônico, como na Fig. 1.13(b), as bifurcações intermediárias ocorrem para valores de parâmetros similares, sendo que a correspondência é maior à medida que as janelas são mais pequenas. Para o mapa quadrático $x \rightarrow \mu - x^2$, a razão entre o comprimento da janela periódica e a distância desde a bifurcação sela-nó μ_0 , até a primeira bifurcação de dobramento de período μ_d , dada por:

$$m_c = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_c - \mu_0}{\mu_d - \mu_0} \rightarrow \frac{9}{4}, \tag{1.23}$$

converge para $\frac{9}{4}$ à medida que o período das janelas periódicas tende para infinito [95].

No caso bi-paramétrico, a órbita é superestável ao longo duma curva no espaço de parâmetros. E quando o mapa tem mais do que um ponto crítico, então em algum lugar ao longo da curva superestável a órbita pode tornar-se “duplamente superestável”, se incluir um segundo ponto crítico. Perto duma tal órbita duplamente superestável de período n , a n -ésima iterada do mapa é bem aproximada pela composição de dois mapas quadráticos, cada um dos quais depende

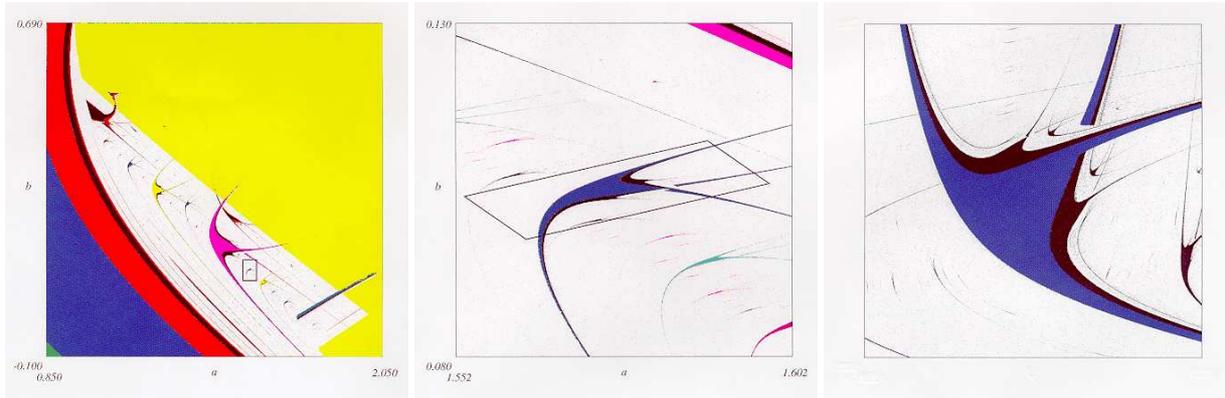


Figura 1.15: (a) Diagrama de bifurcação do mapa de Hénon $(x, y) \rightarrow (a - x^2 + b y, x)$. (b) Ampliação da caixa em (a). (c) Transformação linear do paralelogramo em (b). Figura extraída da ref. [94].

linearmente dos parâmetros. Tipicamente cada um destes mapas depende duma combinação linear diferente de parâmetros, e uma mudança linear de coordenadas conduz ‘a família bi-paramétrica canônica $x \rightarrow (x^2 - a)^2 - b$ [94], cujo diagrama de bifurcação está mostrado na Fig. 1.14, onde aparece a estrutura típica chamada de “camarão” [96, 97] ou “rabo de andorinha” [2], na bibliografia.

A propriedade métrica global de “rigidez” dos diagramas de bifurcação não está restrita a mapas uni-dimensionais, mas também é válida para mapas bi-dimensionais, conforme mostrado na Fig. 1.15. A Fig. 1.15(a) mostra o diagrama de bifurcação do mapa de Hénon 1.18 definido na página 17. Nela se observam os típicos “camarões” imersos no mar caótico. E, como no caso uni-paramétrico, existem pequenos domínios (janelas) que exibem comportamento periódico. Por exemplo, o camarão de período 9 dentro da caixa da Fig. 1.15(a) é mostrado ampliado na Fig. 1.15(b) rodeado por um paralelogramo, que uma vez transformado linearmente num quadrado, dá como resultado a Fig. 1.15(c) que, por sua vez, possui a mesma forma da família bi-paramétrica canônica, mostrado na Fig. 1.14.

Capítulo 2

Propriedades métricas na dinâmica complexa

Neste capítulo descrevemos algumas das convergências de codimensão 1 e 2 encontradas no conjunto de Mandelbrot. Entre as convergências de codimensão-2 temos os $\delta_{n/k}$'s e $\alpha_{n/k}$'s generalizados de Feigenbaum [26], que dão lugar a números “universais” generalizados. Uma revisão das convergências de codimensão 1 mostra que elas tem-se concentrado principalmente na antena do conjunto de Mandelbrot, e em sua maioria tendem para números inteiros [141, 19], em contraste com os valores obtidos no capítulo anterior.

No capítulo anterior descrevemos as propriedades métricas de mapas com variáveis *reais*. Em contraste, neste capítulo são descritas brevemente algumas propriedades métricas de codimensão 1 e 2 encontradas na dinâmica quadrática *complexa*, mais especificamente na dinâmica do conjunto de Mandelbrot. A intenção é compará-las no capítulo seguinte com as propriedades métricas dos conjuntos novos, ditos “tipo-Mandelbrot”. Os estudos das propriedades métricas do conjunto de Mandelbrot têm-se restringido basicamente a fenômenos de codimensão 1, ou seja escalonamentos que envolvem a variação de apenas um parâmetro, focados principalmente no que ocorre ao longo da antena deste conjunto, sendo poucos os estudos de propriedades métricas de codimensão 2, que necessitam a variação simultânea de dois parâmetros.

2.1 Propriedades métricas do conjunto de Mandelbrot

Consideremos a família de todos os mapas polinomiais quadráticos. A priori, um polinômio quadrático é especificado por três parâmetros complexos. Porém, através duma troca de coordenadas, qualquer destes polinômios pode ser transformado numa forma normal dependente de apenas um parâmetro. Uma forma bastante popular é

$$\begin{aligned} z_{t+1} = Q_c(z) &\equiv z^2 + c, & z &\equiv x + iy \\ & & c &\equiv a + ib \end{aligned} \tag{2.1}$$

No início do século 20, pelos trabalhos de Gaston Julia [24] e Pierre Fatou [23], foi estabelecido que para quaisquer sistema dinâmico descrito por um polinômio, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, o plano complexo z (*espaço de fases ou dinâmico*) pode ser decomposto em duas regiões disjuntas.

- Pontos que uma vez iterados convergem para um atrator (ponto fixo atrativo, órbita periódica ou infinito) formam o *conjunto de Fatou* [98].
- O *conjunto de Julia* J é seu complemento, que consiste em todos os demais pontos onde a função é mais difícil de descrever, devido à instabilidade das órbitas.

Fatou e Julia também mostraram que para um polinômio genérico,

- Se as órbitas de todos os pontos críticos são limitadas então o conjunto de Julia J é conectado*.
- Se as órbitas de todos os pontos críticos são ilimitadas então o conjunto de Julia J é um conjunto de Cantor totalmente desconectado [99].

Como $Q_c(z) = z^2 + c$ tem só um ponto crítico † , isto conduz a uma dicotomia básica: Seu conjunto de Julia J é ou conectado ou totalmente desconectado.

O *filled-in Julia set*, $K = K(f_c)$ é a união de todas as órbitas limitadas do mapa quadrático 2.1, definido matematicamente como $K = \{z \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(z) \not\rightarrow \infty\}$, onde $z \in \mathbb{C}$ e $Q_c^n(z)$ denota a n -ésima composição do mapa com ele próprio [100]. Na Fig. 2.3 estão mostrados alguns *filled-in Julia sets* $K = K(f_c)$ correspondentes ao conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} , definido assim:

O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} [101, 102] pode ser definido como o subconjunto compacto do espaço de parâmetros (ou plano- c) que consiste de todos os números complexos c para os quais $K(f_c)$ é conectado [103]. Também o conjunto (cactus) de Mandelbrot pode ser definido matematicamente como

$$\mathcal{M} = \{c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}$$

onde $z = 0$ é o ponto crítico do mapa 2.1 e $Q_c^n(z)$ denota a n -ésima composição do mapa com ele próprio [104, 105].

Usando a forma normal 2.1, podemos fazer uma figura do espaço de parâmetros consistente de todas as constantes complexas $c = (a, b)$. A cada pixel em tal figura, que corresponde a um pequeno quadrado no espaço de parâmetros, é atribuída uma cor, que depende da dinâmica do correspondente mapa quadrático. Uma destas figuras está mostrada na Fig. 2.1.

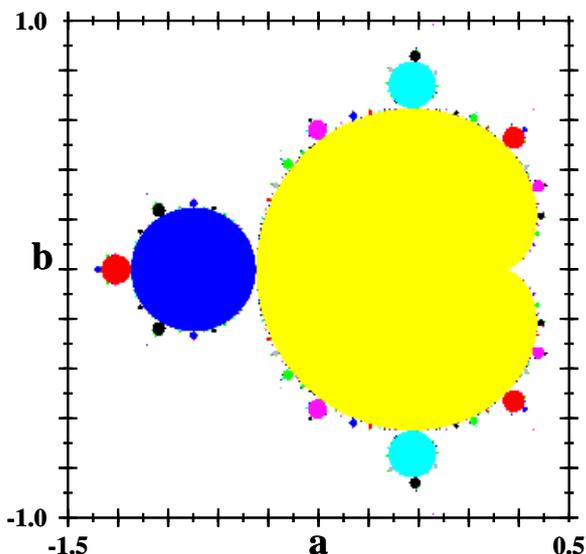


Figura 2.1: “Cactus” de Mandelbrot mostrando as regiões isoperiódicas com diferentes cores. O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} é o conjunto de todos os parâmetros c do mapa quadrático para os quais as iteradas do ponto crítico não escapam ao infinito, i.e. todos os pontos coloridos. Seu núcleo, o “cactus” de Mandelbrot é auto-similar, e é o conjunto de componentes conectadas de \mathcal{M} geradas (a partir dum único ponto fixo atrativo) por todas as possíveis seqüências de todas as possíveis k -furcações. A distinção entre ambos conjuntos é que \mathcal{M} não é auto-similar; cada nível de magnificação revela mais e mais “cabelo” (ver Fig. 2.2).

As primeiras figuras cruas (no espaço de parâmetros) deste conjunto foram feitas por Brooks e Matelski, como parte de um estudo dos grupos Kleinianos. Quase ao mesmo tempo, Hubbard (não publicado) fez figuras muito melhores dum espaço de parâmetros um tanto diferente que resultava da aplicação do método de Newton a equações cúbicas. Mandelbrot, talvez inspirado por

*I.e. que todos os conjuntos pequenos visíveis no entorno ou fora do corpo principal estão conectados ao corpo principal.

† O ponto crítico z_c é o valor de z para o qual a derivada do mapa $f(z)$ se anula, $f'(z) = 0$.

Hubbard, fez figuras correspondentes para polinômios quadráticos. Ele introduziu dois conjuntos diferentes, aos quais não deu nomes diferentes, porque achou que eram idênticos. As figuras de Mandelbrot eram um pouco melhores, e pareciam mostrar um número de “ilhas” isoladas. Então, conjecturou que o conjunto \mathcal{M} tinha muitas componentes conectadas distintas [103].

Embora as afirmações de Mandelbrot no seu primeiro artigo não estivessem totalmente corretas, ele teve o mérito por ser o primeiro a ressaltar a geometria extremamente complexa associada com o espaço de parâmetros de mapas quadráticos. Seu maior sucesso foi demonstrar a uma audiência muito ampla que tais objetos “fractais” complicados tem papel importante em várias ciências [103].

O primeiro avanço matemático real veio com os trabalhos de Douady e Hubbard em 1982 [106, 107]. Eles introduziram o nome de *conjunto de Mandelbrot* para o conjunto compacto \mathcal{M} , e forneceram um fundamento firme para o seu estudo matemático, provando por exemplo que \mathcal{M} é conectado, com complemento conectado. Enquanto que Mandelbrot decidiu empiricamente que suas ilhas isoladas estavam na realidade conectadas ao corpo principal por filamentos muito finos. Também neste primeiro artigo, eles mostraram que cada componente hiperbólica do interior de \mathcal{M} pode ser parametrizada canonicamente, e mostraram que a fronteira $\partial\mathcal{M}$ pode ser estudada usando os raios externos[‡] [103].

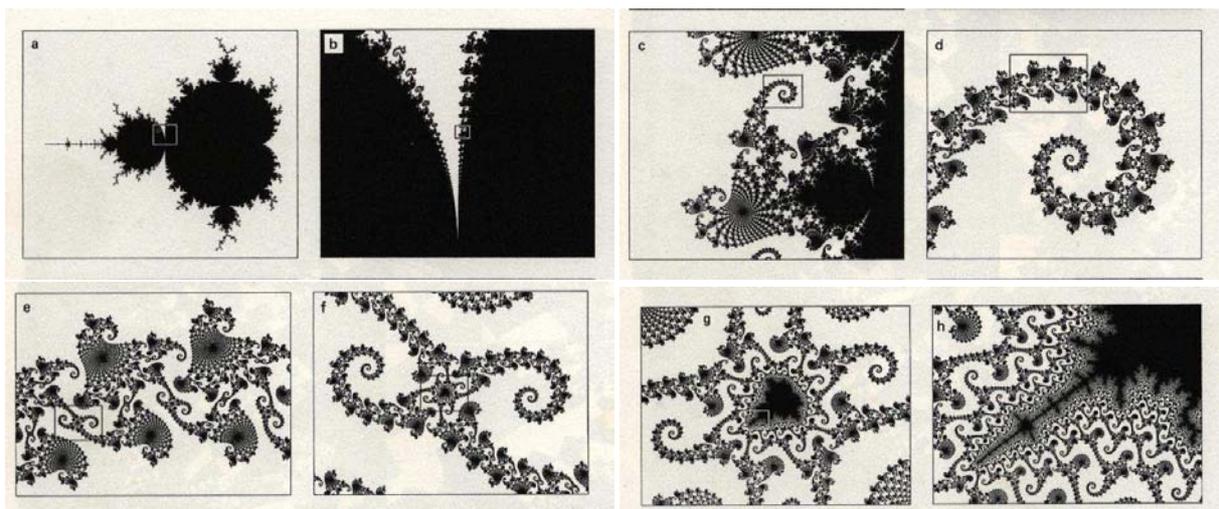


Figura 2.2: Oito ampliações sucessivas do conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} . Note a não auto-similaridade deste conjunto. Figura extraída da Ref. [100].

Os lóbulos visíveis em \mathcal{M} (ver Fig. 2.1) correspondem a valores de $c = (a, b)$ para os quais Q_c tem um ciclo atrativo de um determinado período k . Por exemplo, a cardióide central principal em \mathcal{M} consiste dos valores c para os quais Q_c tem um ponto fixo atrativo. Este pode ser obtido determinando os pontos fixos

$$z^2 + c = z, \tag{2.2}$$

que são atrativos

$$|Q_c'(z)| = |2z| < 1. \tag{2.3}$$

Assim, resolvendo

$$z^2 + c - z = 0, \quad 2z - 1 = 0, \tag{2.4}$$

[‡]Olhar a definição formal na Seção 3.4

simultaneamente, vemos que a fronteira desta região é dada por

$$c = z - z^2, \tag{2.5}$$

onde da segunda equação 2.4 temos a condição: $z = \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta}$. Então,

$$c(\theta) = \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta} - \frac{1}{4}e^{4\pi i\theta} \tag{2.6}$$

parametriza a fronteira do cardióide. Em $c(\theta)$, $Q_c(\theta)$ tem um ponto fixo que é neutro (racionalmente indiferente ou parabólico); a derivada de $Q_c(\theta)$ neste ponto fixo é $e^{2\pi i\theta}$ [108].

Para cada valor racional de θ , tem-se um lóbulo tangente à cardióide principal em $c(\theta)$. Para valores de c no lóbulo atachado à cardióide em $c(n/k)$, Q_c tem um ciclo atrativo de período k . Chamamos a este lóbulo o lóbulo n/k ou lóbulo com número de rotação n/k , ligado à cardióide principal e o denotamos por $B_{n/k}$.

É conhecido que, quando c passa da cardióide principal a $B_{n/k}$, através de $c(n/k)$, Q_c sofre uma n/k -bifurcação. Isto significa que: quando c está dentro da cardióide principal perto de $c(n/k)$, Q_c tem um ponto fixo atrativo com um ciclo repulsivo circundante de período k . Em $c(n/k)$ o ponto atrativo e o ciclo repulsivo somem para produzir o ponto fixo neutro com derivada $e^{2\pi in/k}$. Quando c está em $B_{n/k}$, Q_c agora tem um ciclo atrativo de período k e um ponto fixo repulsivo.

Quando $c = c(n/k)$, a dinâmica local (linearizada) é dada por uma rotação de um ângulo $2\pi(n/k)$. Como consequência, para $c \in B_{n/k}$ o ciclo atrativo gira em torno do ponto fixo repulsivo saltando aproximadamente $2\pi(n/k)$ radianos em cada iteração [108, 109].

A Fig. 2.3 mostra no centro o “cactus” de Mandelbrot \mathcal{M} rodeado por alguns dos seus *filled-in Julia sets* $K = K(f_c)$ dentro dos quais estão mostradas as órbitas periódicas (como pontos unidos por linhas), bem como o ponto crítico $z = 0$ (por um círculo preto aberto). A Fig. 2.3a mostra o K associado a um ponto $c = (a, b)$ (tabulado na parte superior da figura) dentro da cardióide principal de período 1, o mesmo para as Fig. 2.3b e Fig. 2.3c, que correspondem a pontos $c = (a, b)$ dentro dos lóbulos com números de rotação: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. A Fig. 2.3d mostra o K que corresponde a $c(1/4)$, i.e. a órbita mostrada dentro de K circunda em torno do ponto parabólico localizado no meio da órbita. As Fig. 2.3f e Fig. 2.3g mostram as órbitas de período 5 que “vivem” dentro dos K associados aos lóbulos com números de rotação: $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$ respectivamente. A diferença da natureza das órbitas de ambos lóbulos iso-periódicos está no fato de que no primeiro caso, $\frac{n}{k} = \frac{1}{5}$ os pontos da órbita dão $n = 1$ salto a cada vez, enquanto que no segundo caso $\frac{n}{k} = \frac{2}{5}$ eles dão $n = 2$ saltos a cada vez. Da mesma forma para o lóbulo com número de rotação: $\frac{2}{7}$, os pontos da órbita dão $n = 3$ saltos a cada iteração. Observar a direção anti-horária das órbitas. Finalmente a Fig. 2.3i mostra que os lóbulos localizados abaixo do eixo $b = 0$ de simetria produzem órbitas cíclicas com direções opostas i.e. no sentido horário.

Outro aspecto do conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} tem que ver com uma das suas propriedades mais fenomenais. Em certo sentido este conjunto pode ser considerado como “one-page-dictionary” dos conjuntos de Julia J . Este fato imediatamente dá uma idéia da sua inimaginável complexidade e também implica que \mathcal{M} não é auto-similar porque ele contém infinitos conjuntos de Julia J [100].

Mais precisamente, se olharmos \mathcal{M} com um microscópio focalizado em c , o que se enxerga parece muito com o que se vê em K com o mesmo microscópio focalizado ainda em c . E tal semelhança tende a ser perfeita (exceto por uma mudança de escala) quando o poder de magnificação é incrementado. A Fig. 2.4 mostra um exemplo disto, na parte superior dela está mostrada uma pequena janela na fronteira de \mathcal{M} magnificada por um fator de aproximadamente 10^6 que pode ser comparada com uma magnificação (fator $\sim 10^6$) do conjunto de Julia J a ela associado (na parte inferior) [100].

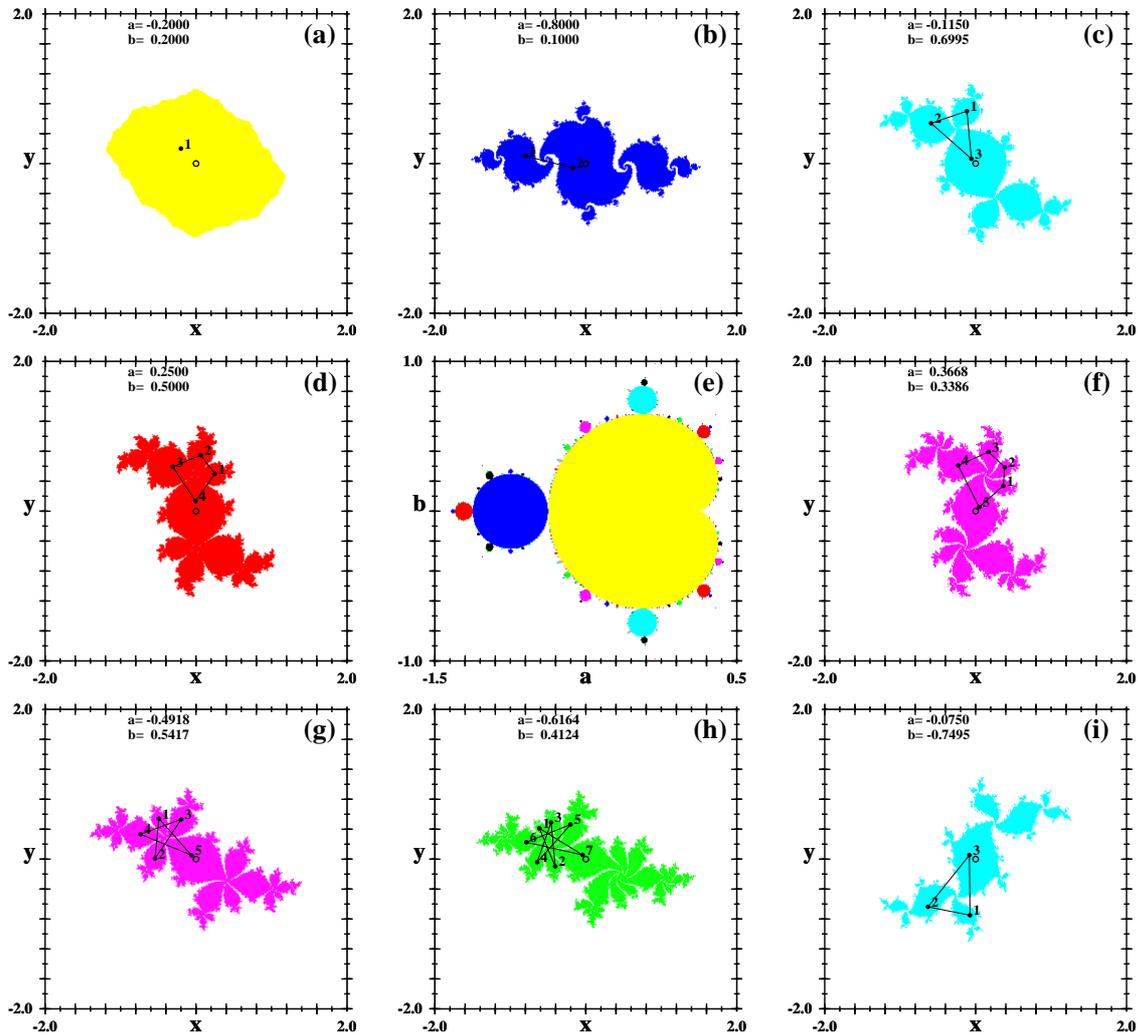


Figura 2.3: *Filled-in Julia sets* $K = K(f_c)$ associados a \mathcal{M} , mostrando as órbitas que “vivem” dentro deles, o ponto crítico $z_c = 0$ é mostrado como um círculo preto aberto. Os valores do parâmetro $c = (a, b)$ correspondentes a cada caso estão tabulados na parte superior da figura.

2.1.1 Escalonamento de Feigenbaum na dinâmica complexa

A teoria de universalidade de dobramentos de período encontrados em famílias de mapas reais uni-paramétricos [20, 21] tem sido generalizada a n/k -furcações de período no caso complexo. Uma n/k -furcação ocorre quando o multiplicador (autovalor) de uma órbita periódica estável passa através do valor $\omega = e^{(2\pi i n/k)}$ à medida que o valor do parâmetro é variado. Cada escolha de n define uma sequência diferente de n/k -furcações [26].

No caso de mapas reais $x \in \mathbb{R}$, uni-paramétricos $a \in \mathbb{R}$, o atrator assintótico pode ser representado convenientemente por uma “árvore de bifurcações,” i.e. por um gráfico bi-dimensional com a num eixo e os valores das iteradas assintóticas para um determinado a graficadas ao longo do outro eixo [25].

Entretanto, tal construção não é possível de se fazer para descrever o comportamento assintótico de iterações complexas, porque o espaço de iterações tem duas dimensões (reais), e as n/k -furcações são induzidas ajustando um par de parâmetros (reais). Portanto, a descrição das iteradas assintóticas de mapas complexos deve ser feita considerando a dinâmica no espaço de

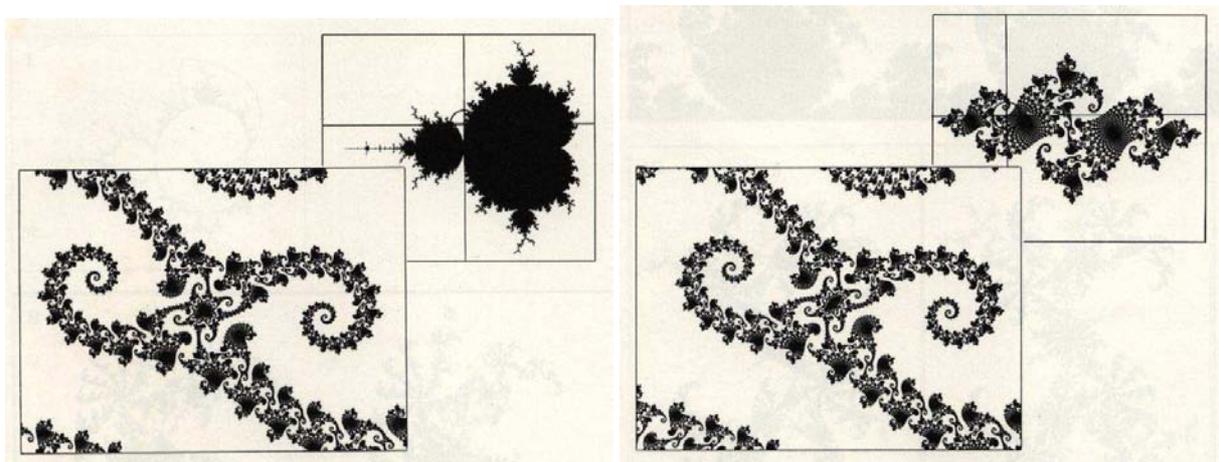


Figura 2.4: “Compressão de imagem” no conjunto Mandelbrot \mathcal{M} mostrada para $c = (-0.745429, 0.113008)$. Figura extraída da Ref. [100].

parâmetros e a dinâmica no espaço de fases por separado [26].

As n/k -furcações no conjunto de Mandelbrot estão mostradas na Fig. 2.5. Em realidade a generalização mencionada só é válida para o núcleo auto-similar do conjunto de Mandelbrot i.e. somente para o “cactus” de Mandelbrot.

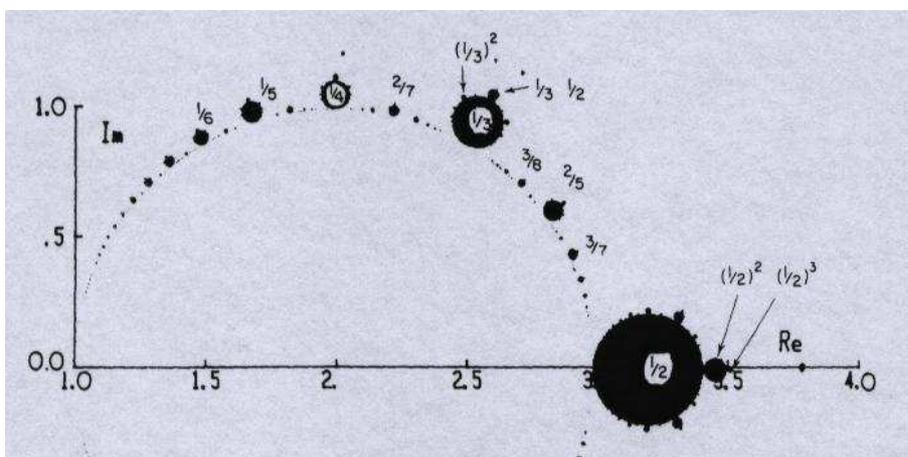


Figura 2.5: As n/k -furcações no conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} . Estão indicados os números de rotação $\frac{n}{k}$ das órbitas periódicas correspondentes aos lóbulos maiores de \mathcal{M} . Figura extraída da Ref. [26].

Como mencionamos anteriormente, numa situação genérica, um ciclo- k^m torna-se instável e se converte num ciclo- k^{m+1} quando o parâmetro c passa através dum valor tal que a estabilidade $\lambda_m(c)$ atinge o valor crítico

$$\lambda(c) = \omega = e^{i2\pi n/k}. \tag{2.7}$$

Para λ muito perto deste valor temos que [26]

$$\lambda_{m+1} = 1 - (\lambda_m - \omega) \frac{n^2}{\omega} + \dots, \tag{2.8}$$

assim

$$\frac{d\lambda_{k+1}}{dc} = -\frac{k^2}{w} \frac{d\lambda_m}{dc}, \tag{2.9}$$

portanto a transição na n/k -furcação é uma mudança de escala por um factor $-n^2/\omega$, que é independente de k , i.e. o lóbulo é n^2 vezes menor que o cactus e está rodado por um fator de fase de $-1/\omega$. Embora este escalonamento não seja exato, já que a análise anterior se aplica só a uma vizinhança infinitesimal da união do lóbulo ao cactus. Um cálculo exato mostra que esta é uma boa aproximação [26].

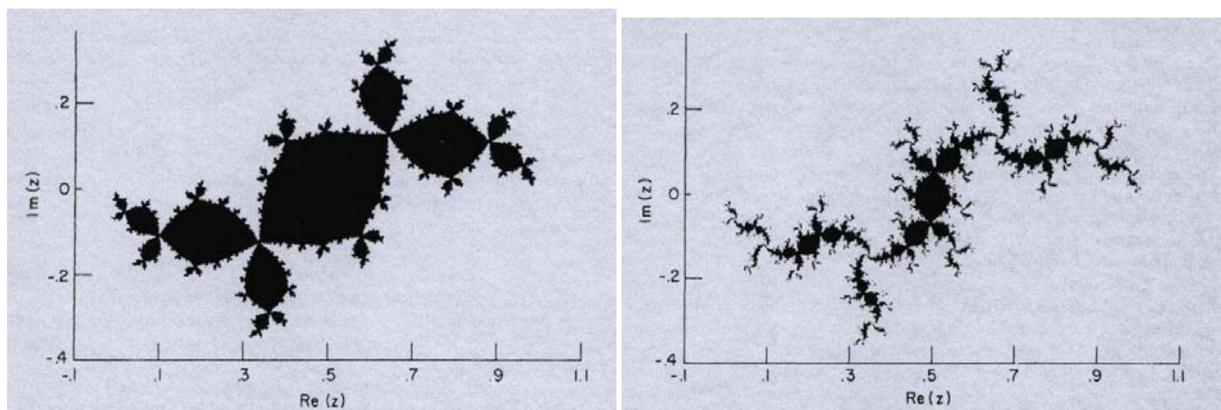


Figura 2.6: Bacias de atração do mapa 2.1 para os ciclo super-estáveis de período 3 e período 9 respectivamente. Notar que a bacia de período 3 é visível no centro da bacia de período 9, após um re-escalonamento e rotação apropriados. Figura extraída da Ref. [26].

O escalonamento exato é obtido comparando valores de c correspondentes a ciclos super-estáveis sucessivos $(n/k)^m$, i.e. valores c tais que $\lambda_m(c_m) = 0$. Como cada lóbulo é similar ao cactus inteiro, é de se esperar que as taxas dos tamanhos sucessivos das regiões de estabilidade correspondentes a ciclos sucessivos $(n/k)^m$ tendam para um limite à medida que $k \rightarrow \infty$:

$$\delta_{n/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_m - c_{m-1}}{c_{m+1} - c_m}. \tag{2.10}$$

A taxa de escalonamento $\delta_{n/k}$ nos diz quanto devemos trocar o parâmetro c para causar a próxima n/k -furcação [26]. Em particular, $\delta_{1/2} = 4.669\dots$ é a delta de Feigenbaum δ que corresponde à usual seqüência de dobramentos de período sobre o eixo real nos mapas uni-dimensionais [20, 90].

O escalonamento no espaço de parâmetros (os $\delta_{n/k}$'s generalizados de Feigenbaum) é sugerido pela aparente auto-similaridade dos cactus de Mandelbrot [110]. Da mesma forma a auto-similaridade dos conjuntos de Julia J (ou atratores assintóticos) sugerem um escalonamento no espaço de fases z . Por exemplo, esta auto-similaridade pode ser vista na Fig. 2.6 comparando a bacia de atração do ciclo-3 superestável com a do ciclo-9 superestável. Na Fig. 2.6b a bacia de atração do ciclo-3 é visível no centro, rodada e re-escalada por um fator cujo limite assintótico é a generalização do α de Feigenbaum para o caso de triplicação de períodos [26].

Esta taxa de escalonamento pode ser computada comparando os sucessivos ciclos super-estáveis, em sucessivos valores de parâmetros c_m, c_{m+1} . À medida que $k \rightarrow \infty$, a seqüência de c_m 's converge a c_∞ , e o ciclo k^m superestável converge para um ciclo- k^∞ que se assemelha a uma serie de ferraduras aninhadas, Fig. 2.7.

Nesta figura a seqüência $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots z_{12}$ traça uma ferradura grande. A seqüência $z_0 \rightarrow z_{13} \rightarrow z_{26} \rightarrow \dots z_{156}$ traça uma ferradura menor, e assim por diante. O atrator é auto-similar: as ferraduras de níveis sucessivos estão relacionados por re-escalamentos e rotações através dum número complexo que se aproxima assintoticamente

$$\alpha_{n/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k^m - z_0}{z_k^{m+1} - z_0}. \tag{2.11}$$

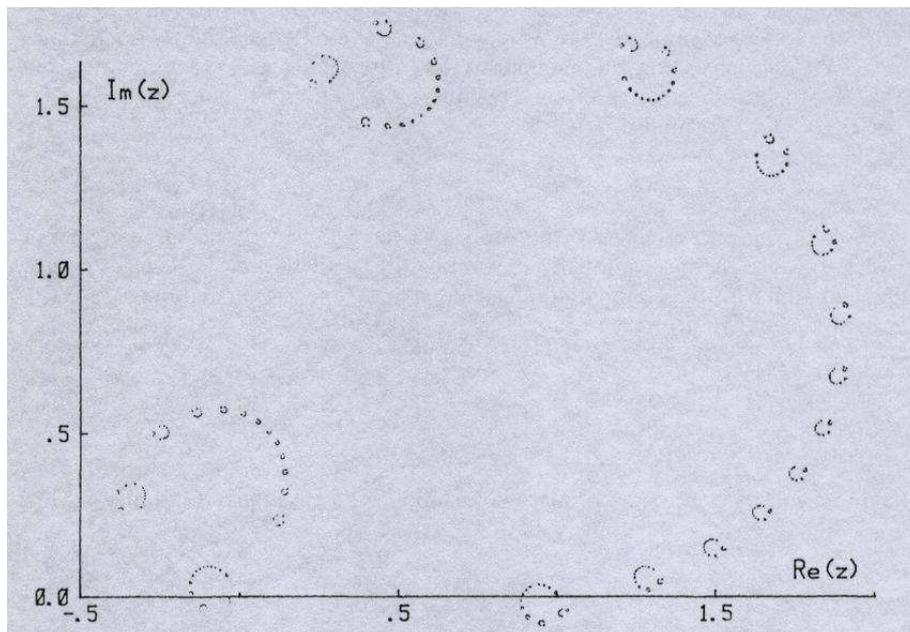


Figura 2.7: Os primeiros 30000 pontos do atrator do ciclo $1/13^\infty$, ou também chamado de “ferradura universal $1/13$.” A ferradura menor na origem é idêntica à ferradura total após um reescalamto e rotação pelo fator complexo de escala $\alpha_{1/13}$ Figura extraída da Ref. [26].

α caracteriza a escala de desdobramento da trajetória a cada nível de n/k -furcação. Novamente neste caso temos que para $n/k = 1/2$ a $\alpha_{1/2} = -2.5029\dots$, mostrando que a α de Feigenbaum [20] vem a ser um caso particular dos $\alpha_{n/k}$'s generalizados.

Isto está resumido nas equações Eq.(2.12) e Eq.(2.13).

$$g(z) = \alpha g^n(z/\alpha), \tag{2.12}$$

$$g_p(z) = [T^*g]_p(z) = \alpha g_1^n +_{p/\delta}(z/\alpha). \tag{2.13}$$

Os números universais podem ser organizados por números de Farey [111].

O dobramento de período, um caso especial da teoria descrita, é uma rota importante para transição ao caos, observada experimentalmente em muitos sistemas físicos diferentes. Aplicações físicas da universalidade complexa estão ainda por serem feitas.

2.1.2 Escalonamento de Frame-Philip-Robucci

Outro dos escalonamentos estudados no conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} , ou mais especificamente ao longo da antena de \mathcal{M} , é o devido aos “anões”[§] localizados ao longo desta antena. Como é sabido, na antena existem diferentes órbitas super-estáveis de período k . Se costuma chamar à órbita com o menor valor absoluto de parâmetro a primeira órbita de período k aparecida, e à órbita com o maior valor absoluto de parâmetro a última órbita de período k aparecida, porque elas aparecem no primeiro e no último lugar quando incrementamos o valor absoluto do parâmetro c [19]. A última órbita superestável de período p na banda caótica de período 1 tem a seqüência simbólica CLR^{p-2} [112]. A constante de escalonamento dessas órbitas, $\delta_{FPR} = 4.0$, foi determinada por Frame et al. [141]. Na Fig. 2.8 pode-se apreciar a convergência das órbitas periódicas super-estáveis para $3 \leq k \leq 16$. Notar que essas órbitas se acumulam em $c = -2$. Este escalonamento está mostrado na Fig.2.8. Mesmo não sendo possível mostrar os correspondentes “anões”, ela mostra os lugares onde eles estão localizados, usando o método da linha de escape [113, 19].

Uma demonstração e explicação matemática para esta constante de escala $\delta_{FPR} = 4.0$ foi feita posteriormente por Hurwitz, Frame e Peak [114].

[§]As pequenas cópias do conjunto de Mandelbrot são chamadas de “anões” (midgets).

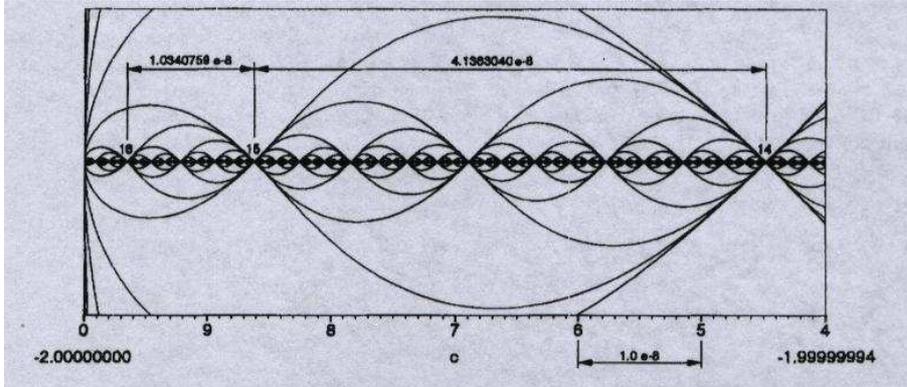


Figura 2.8: Esquema da constante de escala de Frame-Philip-Robucci na antena do conjunto de Mandelbrot devida aos “anões” superestáveis da banda caótica de período 1. $\delta_{FPR} = (4.1363040 \dots \times 10^{-8}) / (1.0340759 \times 10^{-9}) = 4.000000 \dots$ Figura extraída da Ref. [19].

2.1.3 Escalonamento de Romera-Pastor-Montoya

Na antena do conjunto de Mandelbrot, perto da cúspide do “anão” de período 3 [115] mostrado na Fig. 2.9a, tem duas seqüências de “anões” microscópicos que tem uma constante de escalonamento cujo valor presumivelmente é a unidade [19]. A Fig. 2.9a mostra uma ampliação da antena onde aparecem estas duas seqüências: uma delas é composta pelos “anões” de períodos 5, 8, 11, ... e a outra é composta pelos “anões” de períodos 7, 10, 13, ... Na Tabela 2.1 estão mostrados os seis valores das taxas de convergência

$$\delta_k = \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k - c_{k+1}}, \quad (2.14)$$

que foram obtidas na Ref. [19]. Nela os autores dizem que a convergência foi muito lenta, para poder determinar o valor limite com a precisão requerida, porém ainda assim o valor achado para a tríade de anões de períodos: $k = 12290, 12293$ e 12296 , foi de $\delta_u = 1.000 \dots$. Com este resultado eles conjecturaram que $\delta_u \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$. Ainda não foi reportada demonstração matemática para esta convergência. Uma ilustração esquemática desta constante de escala está mostrada na Fig. 2.9b.

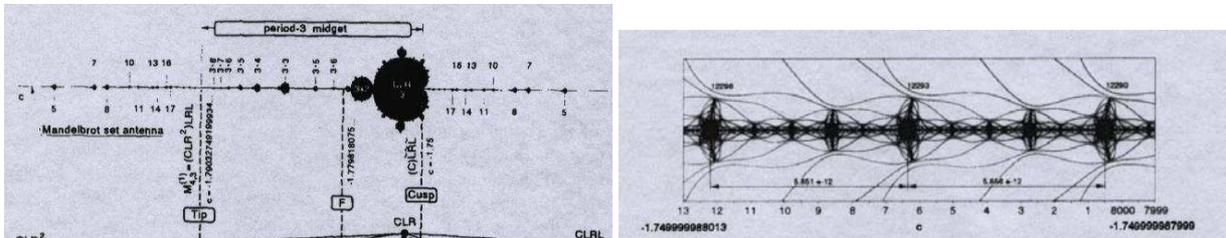


Figura 2.9: a) A cúspide e a extremidade do “anão” CLR na antena do conjunto de Mandelbrot (Figura extraída da Ref. [115]). b) Esquema da constante de escala de Romera-Pastor-Montoya na antena do conjunto de Mandelbrot perto da cúspide do anão de período 3 CRL. $\delta_{RPM} = (5.856 \dots \times 10^{-12}) / (5.851 \times 10^{-12}) = 1.000 \dots$ Figura extraída da Ref. [19].

Tabela 2.1: Mapa $x_{n+1} = x_n^2 + c$. Escalonamento igual à unidade perto da bifurcação tangente de período-3. Mais detalhes ver ref [19].

Período k	8	98	386	1538	6146	12290
	11	101	389	1541	6149	12293
	14	104	392	1544	6152	12296
δ_u	2.713...	1.092...	1.023...	1.005...	1.001...	1.000...

Capítulo 3

Propriedades métricas dos conjuntos tipo-Mandelbrot: Dinâmica cúbica

Neste capítulo reportamos resultados novos sobre as propriedades métricas dos conjuntos tipo Mandelbrot. Para tanto estudamos ambas formas normais da dinâmica cúbica que, dependendo do sinal do termo cúbico, geram dois tipos de estruturas singulares: uma estrutura cuspidal e uma estrutura arredondada (não-cuspidal), em torno das quais aparecem decorados os “cactus” dos conjuntos tipo-Mandelbrot. Em particular, encontramos que a velocidade (limite) igual à unidade com a que as fases periódicas diminuem na rota de acumulação, parece ter um caráter geral nas rotas de acumulação do conjunto de Mandelbrot e dos conjuntos tipo-Mandelbrot.

Nos dois capítulos anteriores fizemos uma revisão das propriedades métricas reportadas na literatura com a finalidade de poder compará-las com as propriedades métricas novas apresentadas neste capítulo, onde estudamos propriedades métricas dos conjuntos tipo-Mandelbrot recentemente encontrados por Endler e Gallas [3]. A ênfase é estudar acumulações ao longo da zona de acumulação das “flores” de cactus ao longo duma linha, um fenômeno novo encontrado nestes conjuntos que não se apresenta no conjunto de Mandelbrot. Na parte final, fazemos uma comparação das propriedades métricas encontradas nos conjuntos tipo-Mandelbrot com as propriedades equivalentes conhecidas para o conjunto de Mandelbrot.

3.1 Antecedentes

Entre os estudos prévios de propriedades métricas globais dos diagramas de bifurcação da dinâmica cúbica real, temos o fenômeno de “rigidez” descrito no capítulo um, aplicável a mapas escalares uni- e bi-paramétricos com espaços de fase uni- e bi-dimensionais. Na ref. [94] este estudo foi feito usando a seguinte forma normal de polinômios cúbicos:

$$f(x) = -x^3 + 3ax + b \quad a, b, x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

cujo diagrama de bifurcação é mostrado na Fig. 3.1(a). Nela pode-se apreciar um sem número de “shrimps”, que se assemelham ao “shrimp” anteriormente estudado para a família canônica [96, 97],

$$x \rightarrow (x^2 - a)^2 - b, \quad (3.2)$$

módulo uma simples transformação linear [94] (ver Fig. 1.14 na página 21). Assim, por exemplo, o “shrimp” de período 6 dentro da caixa na Fig. 3.1(a) é ampliado na Fig. 3.1(b) e, depois de transformado linearmente, fica com a mesma forma do “shrimp” da família canônica, conforme mostra a Fig. 3.1(c).

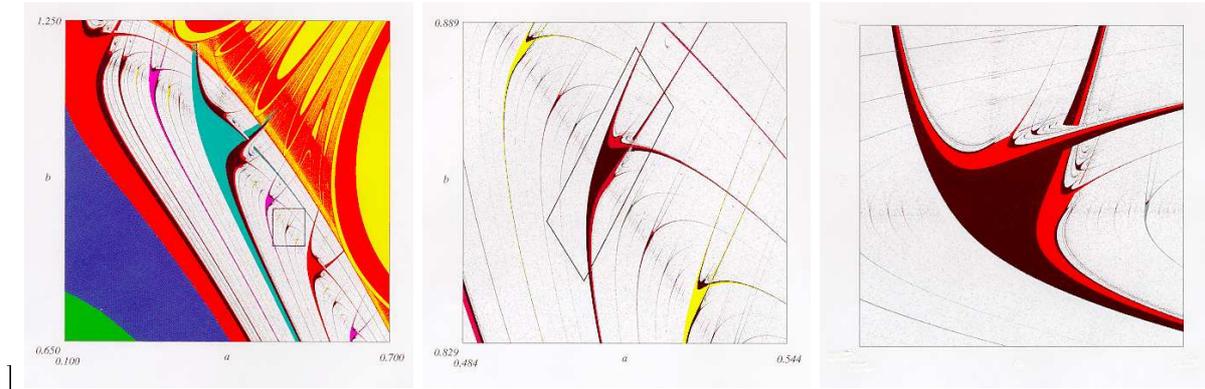


Figura 3.1: (a) Diagrama de Bifurcação da família cúbica real $x \rightarrow -x^3 + 3ax + b$. (b) Ampliação da caixa em (a). (c) Transformação linear do paralelogramo em (b). Figuras extraídas da ref. [94].

A Fig. 3.2(b) mostra uma visão mais geral do espaço de parâmetros da forma normal Eq. (3.1). Nela já pode-se apreciar a estrutura arredondada, similar àquela que também aparece no espaço de parâmetros do mapa de Hénon [3], conforme descrito na introdução desta Dissertação. Portanto é de se esperar que a complexificação do espaço de fases na dinâmica cúbica dê como resultado o aparecimento das estruturas tipo “cactus” (conjuntos tipo-Mandelbrot), complementando a estrutura arredondada.

O mapa cúbico 3.1 com variáveis complexas ($x + iy$) dá lugar ao seguinte mapa bi-dimensional

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= s x (x^2 - 3y^2 - 3a) + b \\ y_{t+1} &= -s y (y^2 - 3x^2 + 3a), \end{aligned} \tag{3.3}$$

cujos diagrama de bifurcações é mostrado na Fig. 3.2(c). Nele se observa o aparecimento dos novos domínios devidos a órbitas complexas estáveis, os chamados conjuntos “tipo-Mandelbrot”. Nós estamos interessados em estudar as propriedades métricas destas “novas” estruturas, principalmente nas zonas que apresentam os novos fenômenos encontrados nestes conjuntos, a saber, a acumulação das flores de cactus descrita na introdução.

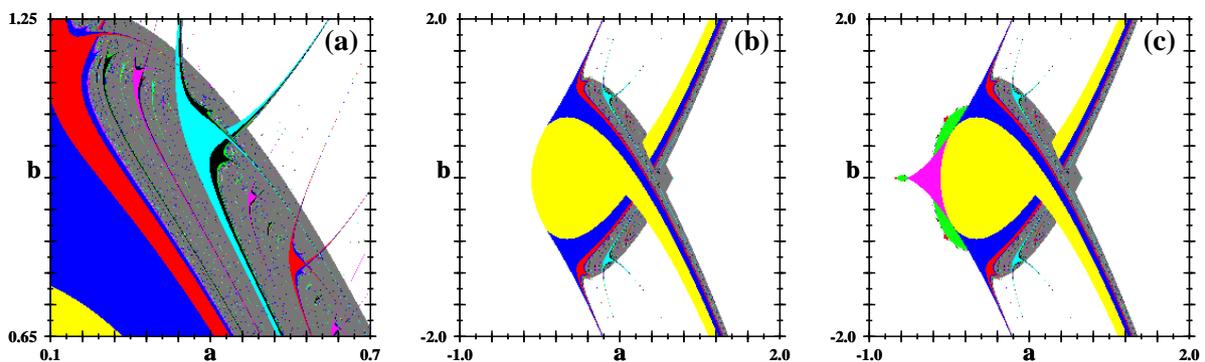


Figura 3.2: (a) A mesma Fig. 3.1(a) com uma nova codificação de cores para os domínios isoperiódicos. (b) Visão mais geral do espaço de parâmetros do mapa cúbico 3.1, obtido a partir das órbitas puramente reais. (c) Espaço de parâmetros do mapa cúbico 3.1 incluindo órbitas complexas.

3.2 As duas formas normais do mapa cúbico

Qualquer mapa polinomial $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grau $d \geq 2$ é conjugado de maneira afim a um que é *mônico** e *centrado*, que é da forma

$$f(z) = z^d + c_{d-2}z^{d-2} + \dots + c_0. \quad (3.4)$$

Esta forma normal é única a menos de uma conjugação por uma $(d-1)$ -ésima raiz da unidade, a qual tem por efeito substituir $f(z)$ por $g(z) = \omega f(z/\omega)$ onde $\omega^{d-1} = 1$, que substitui o conjunto de Julia $J(f)$ pelo conjunto de Julia rotado $J(g) = \omega J(f)$ [116].

O conjunto $\mathcal{P}(d)$ de todos os tais mapas mônicos e centrados, forma um espaço afim complexo $(d-1)$ -dimensional. Um polinômio $f \in \mathcal{P}(d)$ pertence ao *locus conexo complexo* $\mathcal{C}(d)$ se o seu conjunto de Julia $J(f)$ é conexo, ou equivalentemente se a órbita de cada ponto crítico (zero da derivada) está limitada. Este locus conexo é sempre um subconjunto *celular*[†] compacto de $\mathcal{P}(d)$. Isto foi provado por Branner e Hubbard [117] para o caso cúbico.

Um mapa polinomial f é *hiperbólico* se a órbita de todos seus pontos críticos converge a um ciclo atrativo [118].

Entre os pioneiros a estudar a dinâmica de mapas cúbicos complexos temos Branner e Hubbard [117, 119] que estudaram o espaço de parâmetros de polinômios cúbicos usando a seguinte parametrização específica:

$$f(z) = z^3 - 3a^2z + b, \quad (3.5)$$

de forma que os pontos críticos sejam $\pm a$. Eles exploraram o espaço de parâmetros $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ através de várias *decomposições* deste, de acordo ao comportamento dinâmico dos pontos críticos. O *locus conexo cúbico complexo* é definido como o conjunto $\mathcal{C}(3) \subset \mathbb{C}^2$ de todos os pares $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ para os quais o correspondente polinômio f tem seu *filled Julia set* $K(f)$ conexo. Branner e Hubbard [117, 119] mostraram que, assim como no caso quadrático, o locus conexo cúbico complexo é compacto e conexo com complemento conexo e, também, que este conjunto é *celular* i.e., a interseção de uma seqüência de discos fechados estritamente aninhados [117, 119, 18].

Introduzindo os invariantes

$$A = a^2 \quad \text{e} \quad B = b^2 \quad (3.6)$$

pode-se estudar o *espaço modular* $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ de mapas cúbicos complexos [1]. Se os coeficientes do polinômio cúbico são reais, o conjunto completo de invariantes (A, B) torna-se real. Assim podemos considerar o locus conexo complexo de mapas cúbicos complexos com coeficientes reais, o conjunto de pares $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tais que $K(f)$ seja conexo. Este locus $\mathcal{C}(3)_{\mathbb{R}}$ também é compacto, conexo e celular [1, 18].

Para muitos propósitos, é mais natural trabalhar no plano paramétrico- (A, b) , para $b = \pm\sqrt{B}$, de tal maneira que qualquer mapa cúbico é afinamente conjugado a um da forma:

$$f(z) = \sigma z^3 - 3Az + b, \quad \sigma = \pm 1. \quad (3.7)$$

De fato, quando se usa esta parametrização, os diagramas de bifurcação só podem incorporar cúbicas onde o coeficiente de maior grau já seja positivo ou negativo, tal como mostra a Fig. 3 da ref. [1].

Seguindo [120] nós trabalhamos com a seguinte forma normal alternativa porém equivalente para polinômios cúbicos complexos

$$f(z) = sz(z^2 - a) + z - b, \quad s = \pm 1, \quad (3.8)$$

*Como já dito em nota de rodapé na Seção 1.3, os polinômios mônicos, são aqueles cujo coeficiente do termo de maior grau é igual à unidade.

†Um conjunto celular é a interseção de uma seqüência de discos fechados estritamente aninhados.

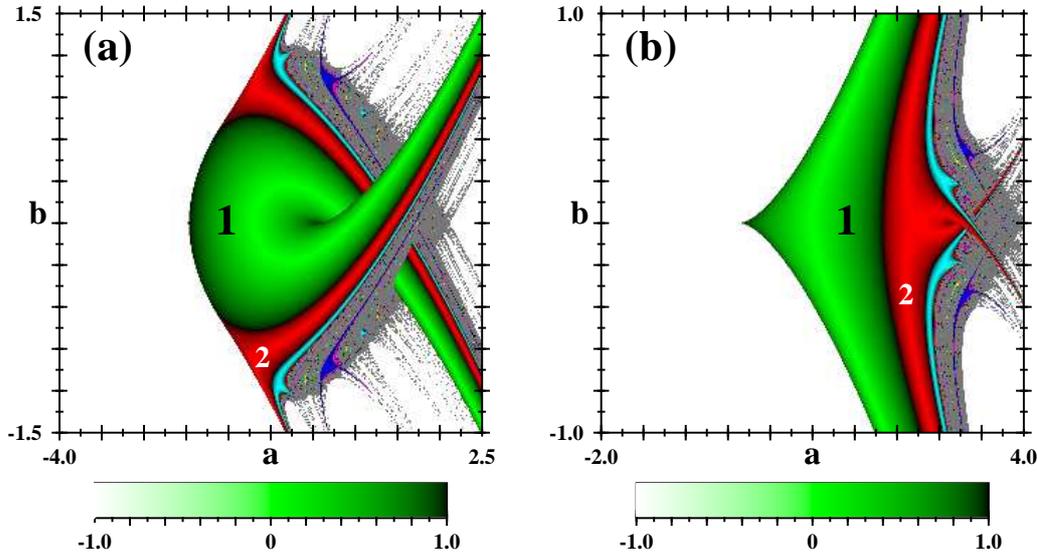


Figura 3.3: O espaço de parâmetros dos mapas cúbicos (Eq. 3.8) reais, $z \in \mathbb{R}$. Esquerda: forma normal cúbica com $s = -1$. Direita: forma normal cúbica com $s = +1$. A escala de cores codifica o valor da norma do multiplicador. Os números indicam o valor do período.

com pontos críticos, $z_{c\pm} = \pm \sqrt{(a-1/s)/3}$ onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ são parâmetros reais (motivações físicas). Ambas formas normais dadas pela Eq. 3.7 e Eq. 3.8 são equivalentes e estão relacionadas através duma transformação linear: $-3A \rightarrow (1-sa)$, $b \rightarrow -b$. Enquanto que é fácil reduzir qualquer mapa cúbico a uma das duas *formas normais* [10] da Eq.(3.8), não existe mudança de variável capaz de transformar o mapa com $s = +1$ no mapa com $s = -1$ [120].

A utilidade de se trabalhar com essas formas normais é que uma vez conhecida a dinâmica da forma normal, automaticamente conhecemos a dinâmica de todas as cúbicas que podem ser reduzidas a essa forma normal. O par de formas normais da Eq. 3.8 define sistemas dinâmicos em uma ou duas dimensões, dependendo se consideramos z como um número *real* ou *complexo*. Os diagramas de fase no espaço de parâmetros dos mapas cúbicos da dinâmica *real*: $z \in \mathbb{R}$, são mostrados na Fig. 3.3. As órbitas críticas que escapam ao infinito estão indicadas pela cor branca, as que se comportam caoticamente por cinza e as que convergem para órbitas periódicas atrativas por cores. Para mais detalhes sobre os diagramas de fase e os métodos usados para obtê-los ver seção 3.4 e apêndice C.

Os diagramas de bifurcação para ambas formas normais $s = \pm 1$, mostram o aparecimento de dois tipos de estruturas singulares: uma estrutura *cuspidal* para $s > 0$ e uma estrutura *arredondada* (não-cuspidal) para $s < 0$, de acordo com o sinal s do termo cúbico. Ambas estruturas coincidem com aquelas que aparecem no espaço de parâmetros do mapa de Hénon complexificado [3, 86, 87] e também num cenário muito distinto, dependente de equações diferenciais, não mapas: lasers de semicondutores [12, 121]. Desta maneira os polinômios cúbicos se prestam como modelos bem mais simples que, mantendo as características dinâmicas observadas em cenários mais complexos [3, 11, 12, 121], são consideravelmente mais fáceis de se tratar analiticamente.

Passar-se à dinâmica *complexa* $z \in \mathbb{C}$ significa simplesmente considerar $z \equiv x + iy \in \mathbb{C}$. Neste caso, a dinâmica uni-dimensional da Eq. 3.8 transforma-se no seguinte mapa bi-dimensional

$$x_{t+1} = s x_t (x_t^2 - 3y_t^2 - a) + x_t - b, \quad (3.9a)$$

$$y_{t+1} = -s y_t (y_t^2 - 3x_t^2 + a) + y_t. \quad (3.9b)$$

Assim, a passagem para o plano complexo tem o efeito de produzir um conjunto de equações *acopladas*. Neste terreno mais geral, a dinâmica obtida para $y_t \equiv 0$ nos remete ao caso unidimensional de partida.

A dinâmica complexa $z \in \mathbb{C}$, dá lugar ao aparecimento do locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$, no espaço de parâmetros (a, b) . Uma interseção deste locus com o espaço de parâmetros dos mapas cúbicos reais, $z \in \mathbb{R}$, é mostrada na Fig. 3.4. Na parte inferior desta figura mostramos ainda as correspondentes curvas de bifurcação que serão introduzidas na continuação. Este locus é descontínuo em $s = 0$, sendo que para $s > 0$ tem a forma dum “cactus” que nasce da estrutura cuspidal, enquanto que para $s < 0$ tem uma forma chamada de “tricorn” [2] que também nasce do topo da estrutura não-cuspidal.

Os discriminantes das equações orbitais:

$$f(z) = z, \quad f^2(z) \equiv f(f(z)) = z \quad (3.10)$$

de período 1 e 2, respectivamente são

$$\Delta_1 = 27b^2 - 4s^2a^3, \quad \Delta_2 = \Delta_1 d_a^2 d_b^3, \quad (3.11)$$

onde

$$d_a = 27sb^2 - 4(sa - 3)^3, \quad (3.12a)$$

$$d_b = 27sb^2 - 4(sa - 2)(sa + 1)^2. \quad (3.12b)$$

A variedade Δ_1 está relacionada ao nascimento das órbitas de período 1 mediante uma bifurcação tangente, como mostra a Eq. 3.17. As variedades d_a e d_b delimitam o nascimento das órbitas de período 2 mediante uma bifurcação tangente e uma bifurcação de dobramento de período, respectivamente (ver Eq. 3.20 e Eq. 3.19).

Os pontos orbitais de período 1 (x, y) são definidos pelos zeros dos polinômios

$$P(x) = p_1(x) [p_2(x)]^2, \quad Q(y) = y^3 q_1(y), \quad (3.13)$$

onde

$$p_1(x) = x^3 - ax - sb, \quad (3.14a)$$

$$p_2(x) = 8x^3 - 2ax + sb, \quad (3.14b)$$

$$q_1(y) = 4(a + y^2)(4y^2 + a)^2 - 27sb^2. \quad (3.14c)$$

Os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ foram obtidos fazendo-se a resultante de x_{t+1} e y_{t+1} em relação a y e x respectivamente.

As fronteiras dos domínios de estabilidade no espaço de parâmetros podem ser obtidas analiticamente eliminando as variáveis dinâmicas entre (i) as equações de movimento e (ii) a equação de autovalores que rege a estabilidade do sistema, como mostrado por Endler e Gallas [122]. Portanto, como a equação de autovalores para as órbitas de período 1 é dada por

$$\lambda = \frac{df(z)}{dz} = s(3z^2 - a) + 1. \quad (3.15)$$

Então tomando-se a resultante entre 3.15 e 3.8 em relação a z (i.e. eliminando z) obtemos a expressão analítica para a superfície $W_1 \equiv W_1(a, b, s; \lambda)$, a saber,

$$W_1(a, b, s; \lambda) = 27sb^2 - (\lambda + sa - 1)(\lambda - 2sa - 1)^2. \quad (3.16)$$

definida para todos os parâmetros (a, b, s) que levam a órbitas de período 1, válida para um autovalor arbitrário λ . Aqui denotamos por $W_{k\lambda}$ o conjunto de parâmetros (a, b, s) para os quais o mapa cúbico associado f tem uma órbita de período k com multiplicador $(f^{ok})'$ igual a λ . Casos notáveis são:

$$W_{1+} \equiv W_1(a, b, s; +1) = \Delta_1 = 27b^2 - 4s^2a^3, \quad (3.17)$$

$$W_{1^0} \equiv W_1(a, b, s; 0) = 27sb^2 - (sa - 1)(2sa + 1)^2, \quad (3.18)$$

$$W_{1-} \equiv W_1(a, b, s; -1) = d_b = 27sb^2 - 4(sa - 2)(sa + 1)^2. \quad (3.19)$$

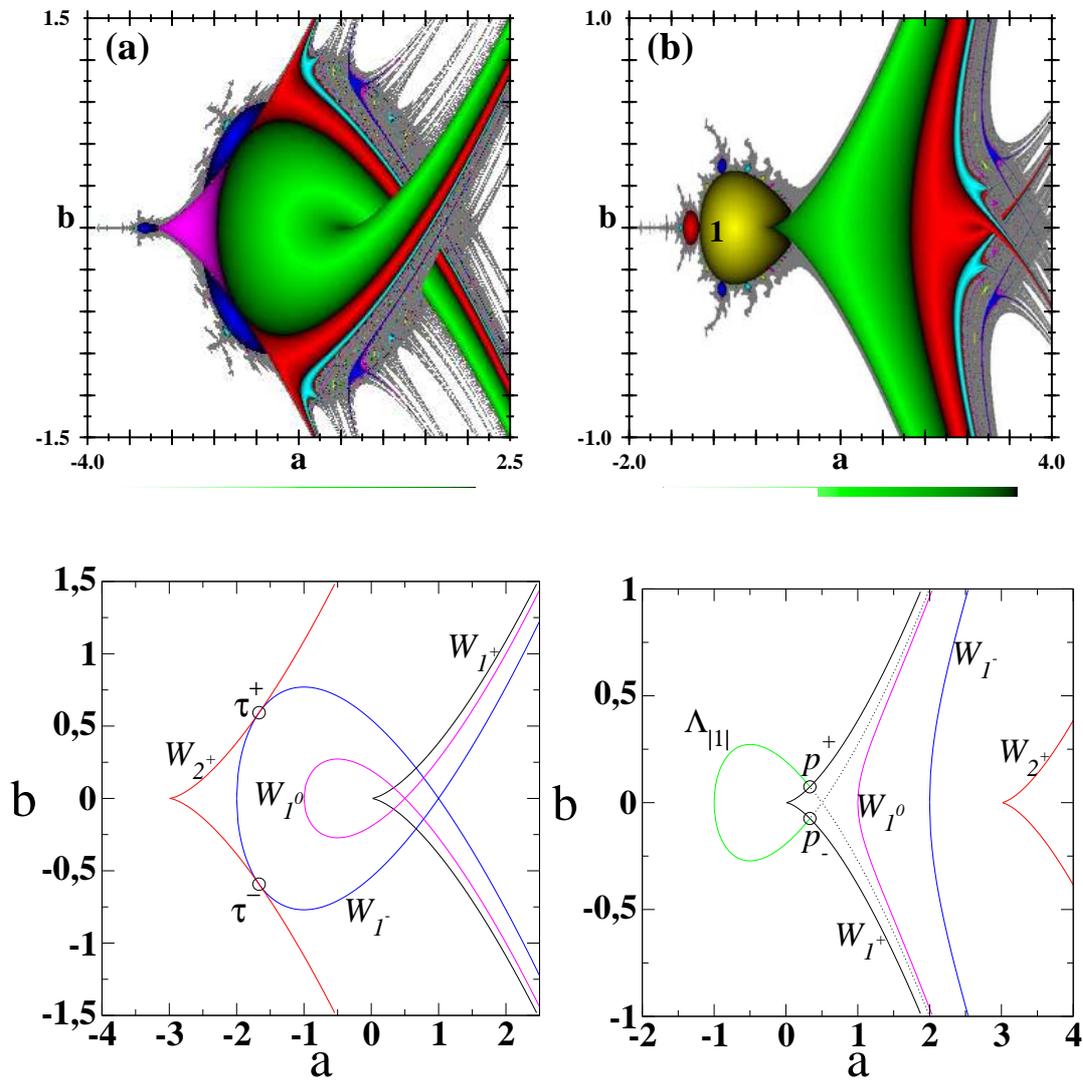


Figura 3.4: Linha superior: O espaço de parâmetros dos mapas cúbicos reais, $z \in \mathbb{R}$ da Fig. 3.3, intersectado com o locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$, da dinâmica complexa, i.e., $z \in \mathbb{C}$. Linha inferior: Curvas de bifurcação. Esquerda: cúbico $s = -1$. Direita: cúbico $s = +1$.

A primeira delas, W_{1+} , consiste de todos os parâmetros (a, b, s) para os quais o gráfico de f é tangente à diagonal, enquanto que

$$W_{2+} \equiv W_2(a, b, s; +1) = d_a = 27sb^2 - 4(sa - 3)^3 \quad (3.20)$$

fornece mapas para os quais o gráfico de $f \circ f$ é tangente à diagonal. Tais pontos de tangência são chamados *sela-nós* de período 1 e 2, respectivamente. Os gráficos destas bifurcações tangentes W_{1+} e W_{2+} têm uma forma cuspidal (ver Fig. 3.4) que faz com que os dois ramos da curva se toquem num ponto de tangência, e é justamente esta tangência de curvas no espaço de parâmetros que produz estabilidade no espaço de fases complexo [2, 14, 3]. Por esta razão temos o nascimento do “cactus” de período 1 na ponta da estrutura cuspidal W_{1+} de período 1 para o caso $s > 0$ mostrado na Fig. 3.4(b); e o “cactus” de período 2 na ponta da cúspide W_{2+} de período 2 para o caso $s < 0$, apenas visível na Fig. 3.4(a). Só que no caso $s < 0$ simultaneamente aparecem outros dois “cactus” de período 2 que são mais esticados, e nascem a partir da tangência das variedades W_{2+} e W_{1-} . Esta última variedade, W_{1-} , delimita o nascimento das órbitas estáveis de período 2 a partir das órbitas estáveis de período 1, mediante uma bifurcação de dobramento de período, $\lambda = -1$. Resumindo, poderíamos dizer que no caso $s < 0$ as tangências entre as curvas de bifurcação de período 2 dão lugar ao nascimento dum *tricorn* de período 2, distorcido nos pontos de tangência τ^\pm (3.23), mostrados na Fig. 3.4(c).

A forma do locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$ mostrado na Fig. 3.4, é remanescente ao conjunto de Mandelbrot, e de fato há muitas cópias do conjunto de Mandelbrot embutidas neste locus. Por exemplo, (i) o cactus de período 4 imerso na caixa A da Fig. 3.5(a) que está ampliado na Fig. 3.5(b), (ii) o cactus de período 2 da Fig. 3.6(a) e (iii) o mesmo cactus principal de período 1 ampliado na Fig. 3.5(a). Porém uma característica comum nestas cópias do conjunto de Mandelbrot é que elas tendem a ser descontinuamente distorcidas num ponto em particular, a saber no ponto sela-nó de período 1, também conhecido como o *ponto raiz* do conjunto de Mandelbrot $c = 1/4$. Este fenômeno é particularmente evidente na Fig. 3.6(a), que exhibe uma cópia grosseira do conjunto de Mandelbrot com o ponto raiz esticado para cobrir um segmento substancial da curva de bifurcação tangente W_{2+} (comparar Fig. 3.4(a)). Como resultado deste esticamento, o locus conexo cúbico complexo falha em ser localmente conexo, como foi provado por Lavaurs [123, 18], em contraste drástico à situação dos mapas quadráticos, cujo locus conexo (o conjunto de Mandelbrot) é amplamente aceito ser localmente conexo [2].

Finalmente, a variedade W_{10} (ver Fig. 3.4) é composta por todos os parâmetros com um ponto fixo superatrativo, $\lambda = 0$. Os loci destas órbitas superestáveis para ambos casos $s \pm 1$ correspondem às curvas mais brilhantes que sobressaem nas estruturas cuspidal e arredondada de período 1 da Fig. 3.4.

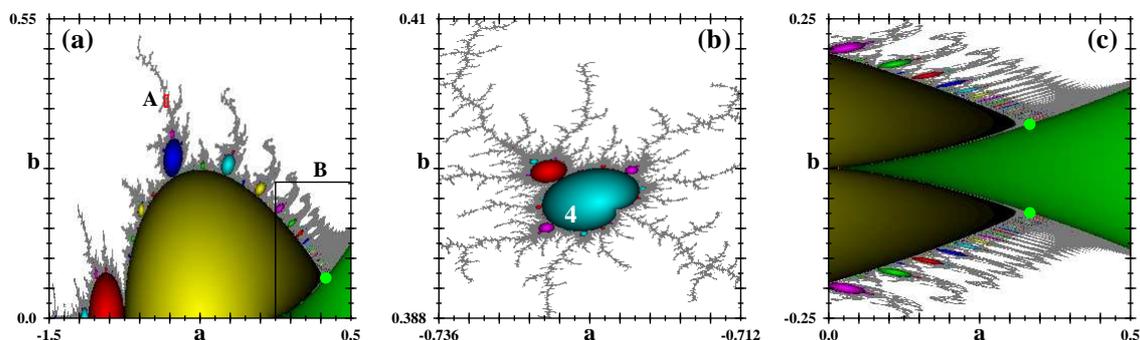


Figura 3.5: a) Ampliação mostrando o conjunto tipo-Mandelbrot correspondente à forma normal Eq. (3.8) com $s = +1$. b) Ampliação da caixa A. c) Ampliação da caixa B.

O corpo principal de período 1 (“cactus”) ampliado na Fig. 3.5(a) está delimitado pela curva

$$\Lambda_{|1|} \equiv 27sb^2 - (sa + 1)(2sa - 1)^2. \quad (3.21)$$

e por uma porção da curva de bifurcação tangente W_{1+} . Os parâmetros deste “cactus” produzem pares de órbitas *complexas conjugadas*, sendo que a soma σ das coordenadas z_n duma determinada órbita tem valor complexo [3]. À medida que variamos os parâmetros à direita perto do eixo de simetria $b = 0$ da Fig. 3.5(a) encontramos uma conversão contínua duma cascata 1×2^n de órbitas *complexas* numa cascata 1×2^n de órbitas *reais*.

Uma análise numérica das órbitas ao longo da variedade $\Lambda_{|1|}$ mostra que, dentro do cactus de período 1, temos duas órbitas complexas O_1 e O_2 estáveis e uma real O_3 instável, cujos autovalores são $\lambda_{1,2} = \lambda_R \pm i\lambda_I$ e $\lambda_3 = \lambda'_R$, respectivamente. Quando nos movemos ao longo da fronteira do cactus dada pela curva $\Lambda_{|1|}$ à esquerda da curva de bifurcação tangente W_{1+} (ver Fig. 3.4), os autovalores das órbitas satisfazem: $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \lambda_1\lambda_2 = 1$ e $|\lambda_3| > 1$. Porém quando passamos à direita da bifurcação tangente W_{1+} , sempre ao longo da curva $\Lambda_{|1|}$, as duas órbitas complexas tornam-se reais, sendo que uma das duas fica instável enquanto que a outra permanece estável, de maneira que o produto dos seus autovalores ainda satisfaz $\lambda_1\lambda_2 = 1$, mas $|\lambda_1| \neq |\lambda_2| \neq 1$. E a órbita real O_3 permanece instável, $|\lambda_3| > 1$. É por esta razão que a curva $\Lambda_{|1|}$ não tem uma discontinuidade ao atravessar a curva de bifurcação tangente W_{1+} .

A perda da conectividade local do locus conexo cúbico $\mathcal{C}(3)$ ilustrada nas figuras 3.5(c) e 3.6(b) por sua vez conduz ao aparecimento de novos fenômenos encontrados profusamente entre os quais temos[3, 4]:

- a *acumulação* de flores de cactus em direção dos domínios caracterizados por órbitas reais, implicando séries com propriedades métricas desconhecidas. No caso $s > 0$ as flores acumulam-se nos pontos de acumulação

$$p_{\infty}^{\pm} = \left(\frac{1}{3s}, \pm \frac{2}{27\sqrt{s}} \right), \quad (3.22)$$

que resultam da interseção das variedades $\Lambda_{|1|}$ e W_{1+} . Ver Fig. 3.5(c).

- e estruturas tipo-Mandelbrot ordenadamente “empacotadas” ao longo de *segmentos de linhas*, não curvas fechadas como as curvas características do conjunto de Mandelbrot. Ver figuras 3.5(c) e 3.6(b).

Outro ponto a ressaltar é o fato de que as variedades $\Lambda_{|1|}$ e W_{1+} têm a mesma forma algébrica, apesar de terem uma natureza completamente distinta. Pareceria que o aparecimento das fases complexas está essencialmente regulado pela tangência entre as variedades de forma cuspidal e “loop”, e a propósito estas duas últimas correspondem a duas das cinco *curvas cúbicas canônicas* descritas na ref. [132]. Mais adiante voltaremos a este ponto.

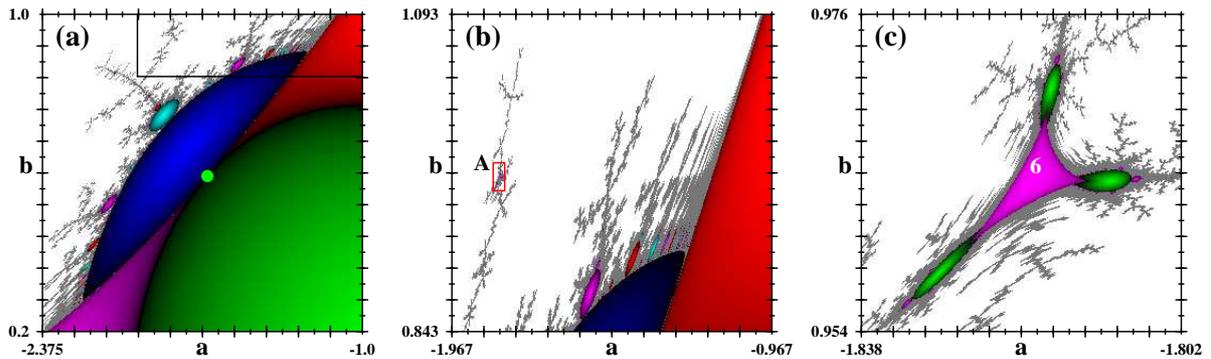


Figura 3.6: Conjuntos tipo-Mandelbrot correspondente à forma normal Eq. (3.8) com $s = -1$

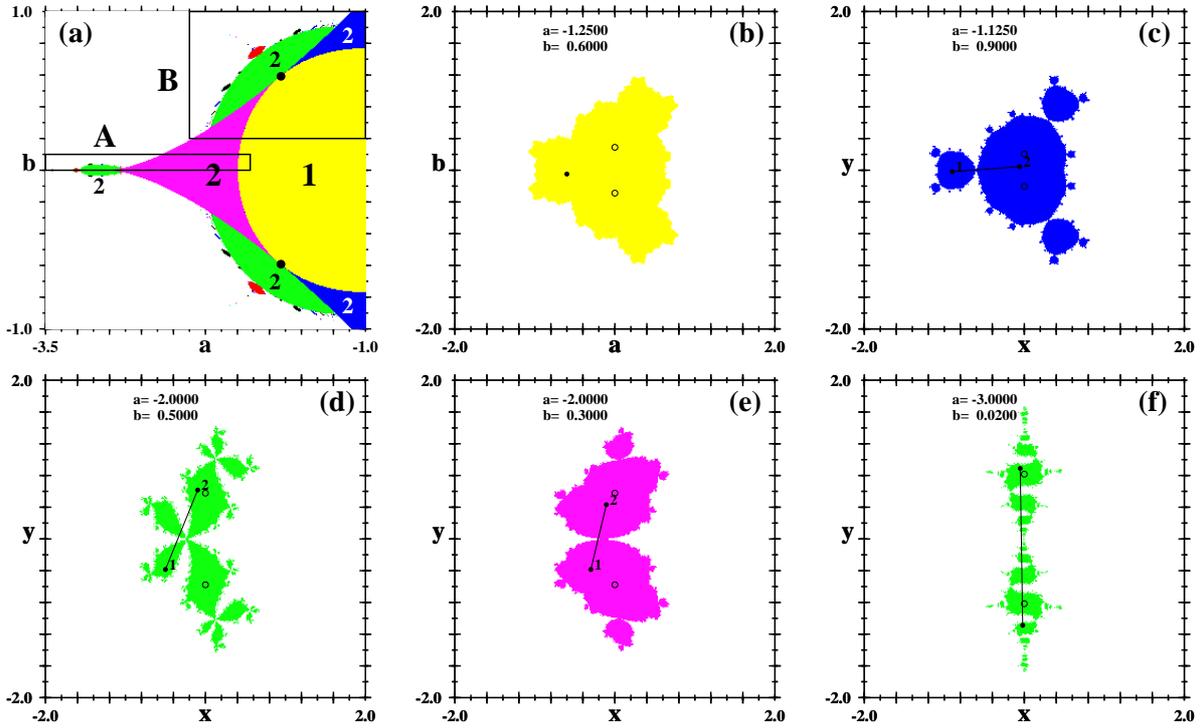


Figura 3.7: “Filled-in Julia sets” associados ao cúbico com $s = -1$.

Na outra estrutura não-cuspidal, Fig. 3.3, também chamada de “peixe espada” [3, 4], o locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$ que complementa o topo desta estrutura, tem a forma dum “tricorn” com duas de suas componentes distorcidas e esticadas ao longo da curva tangente W_{2+} , em torno dos pontos de tangência

$$\tau^\pm = \left(-\frac{5}{3s}, \pm \frac{16}{27\sqrt{-s}}\right) \tag{3.23}$$

dados pela interseção das variedades W_{1-} e W_{2+} (ver Fig. 3.4(a)).

As órbitas correspondentes aos quatro domínios de período 2 que circundam a estrutura não-cuspidal de período 1 ampliada na Fig. 3.6(a) tem naturezas distintas, conforme mostram os “filled-in Julia sets” (Fig. 3.7) associados a parâmetros dentro destes domínios.

O par trivial de ilhas azuis nos lados do núcleo central da Fig. 3.7(a), corresponde a dobramentos do período das órbitas reais de período 1. Portanto estas órbitas de período 2 estão restritas ao eixo x conforme mostra a Fig. 3.7(c). Enquanto que os domínios não-triviais são [3, 4]:

- as três ilhas verdes do “tricorn” de período 2 (Fig. 3.7(a)), devidas a órbitas *complexas conjugadas* cujas somas σ de coordenadas z_n é um número complexo. Dois exemplos de órbitas correspondentes a estes domínios são mostrados nas Figs. 3.7(d) e Fig. 3.7(f). O “filled-in Julia set” mostrado na Fig.3.7(d) corresponde a um ponto (a, b) dentro da ilha verde superior da Fig.3.7(a). O outro “filled-in Julia set”, mostrado na Fig.3.7(f), corresponde a um ponto (a, b) dentro da ilha verde localizada na cúspide do tricorn cuspidal em magenta. Em ambos casos pode-se apreciar o caráter assimétrico das órbitas em relação ao eixo $y = 0$, razão pela qual a soma das suas coordenadas é complexa.
- o outro domínio não-trivial é o domínio cuspidal de período 2, também chamado de “nariz” ou “tricorn”, mostrado em magenta na Fig.3.7(a). Este domínio surge a partir de órbitas

complexas para as quais a soma σ das coordenadas z_n é um número real, i.e., é formada por pontos orbitais *complexos conjugados*. O “filled-in Julia set” associado a este domínio é mostrado na Fig.3.7(e), na qual se percebe o caráter simétrico da órbita em relação ao eixo $y = 0$, dando como resultado para a soma das suas coordenadas um número real.

As *quatro* regiões de estabilidade mostradas na Fig.3.6(a) se encontram no ponto de tangência de codimensão 2 τ^+ ressaltado com um ponto verde na Fig.3.6(a) e definido pela Eq. 3.23. As bifurcações de codimensão 2, também conhecidas como *crisis duplas* [128, 129], ocorrem quando diferentes bifurcações de codimensão 1 se intersectam no plano bi-dimensional dos parâmetros de controle, tal como a interseção entre as curvas de bifurcação W_{1-} e W_{2+} na Fig. 3.4. Através da fronteira deste ponto temos uma conversão de órbitas complexas em pares de órbitas complexas *conjugadas*.

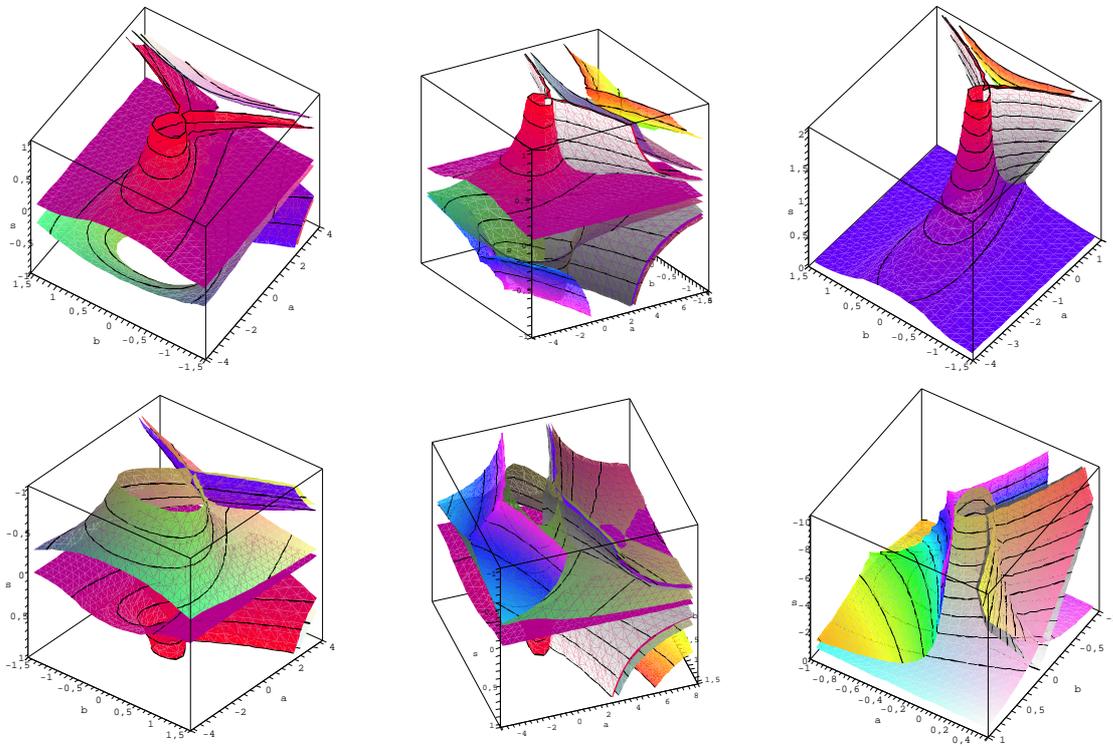


Figura 3.8: Variedades de bifurcação das órbitas de períodos 1 e 2 do mapa cúbico Eq. 3.8 no espaço de parâmetros (a, b, s) . $\Lambda_{|1|}$ em tons vermelhos, W_{1+} em tons cinza, W_{1-} em tons azuis e W_{2+} em tons verdes. Linha superior: mostrando zona $s < 0$. Linha inferior: mostrando zona $s > 0$. As curvas mostradas foram geradas usando o código Maple dado no apêndice A.

Uma vista um tanto mais completa das variedades obtidas anteriormente no espaço de parâmetros (a, b, s) é mostrada na Fig. 3.8. A primeira coluna mostra as variedades $\Lambda_{|1|}$ em tons vermelhos e W_{1-} em tons verdes. A segunda coluna inclui, além das duas anteriores, a variedade W_{1+} em tons cinza e W_{2+} em tons azuis. A última coluna também inclui todas as variedades, só que neste caso o parâmetro s é variado num intervalo $-10 < s < 10$ maior. A linha superior resalta a zona $s > 0$, enquanto que a linha inferior resalta a zona $s < 0$. A primeira vista se nota a discontinuidade das estruturas no plano $s = 0$, e que o parâmetro s , além de definir o sinal dos polinômios cúbicos, só é um factor de escala que regula o tamanho das curvas no espaço (a, b) .

Apesar de que não há mudança de variável capaz de transformar a *forma normal* [10] da

Eq.(3.8) com $s > 0$ na forma normal com $s < 0$ [120], parece que ambas estão de alguma forma relacionadas, já que a primeira coluna da Fig. 3.8 mostra que o locus do cactus de período 1 $\Lambda_{|1|}$ definido para $s > 0$ é uma espécie de *reflexo* em torno do plano $s = 0$ do locus de dobramento de período W_{1-} . Isto ocorre porque, como mencionamos anteriormente, ambas variedades tem a mesma forma algébrica, embora suas naturezas sejam completamente distintas. O locus da bifurcação tangente W_{1+} , mostrado em tons cinza, também é invariante frente à reflexão no plano de simetria $s = 0$ (ver Fig. 3.8). Não ocorre o mesmo com o locus da bifurcação tangente de período 2 W_{2+} , mostrado em tons azuis, já que neste caso, aparte de ter a simetria trivial em relação ao plano $a = 0$, quando variamos o parâmetro s só temos uma translação das curvas (de nível) cuspidais no plano (a, b) (comparar com a Fig. 3.4).

As figuras da terceira coluna da Fig. 3.8 dão uma idéia do comportamento assintótico das variedades quando $s \rightarrow \pm\infty$. Para o caso $s > 0$ vemos que o locus do cactus de período 1 $\Lambda_{|1|}$ em forma de laço vai-se fechando à medida que $s \rightarrow \infty$. Em conseqüência, os pontos de acumulação p_{∞}^{\pm} , vão-se aproximando assintoticamente à medida que $s \rightarrow \infty$, porém nunca se tocam, e o locus $\mathcal{C}(3)$ permanece localmente desconexo ao longo da bifurcação tangente W_{1-} . Algo parecido ocorre para o caso $s < 0$. Neste caso os dois pontos de tangência τ_{\pm} podem-se aproximar assintoticamente tanto quanto se queira, à medida que $s \rightarrow -\infty$, mas também nunca se juntam, conseqüentemente o tricorn segue tendo desconectividade local nas curvas de bifurcação tangente.

Um fato curioso a mencionar sobre as curvas de bifurcação dos polinômios cúbicos no espaço de parâmetros (a, b) , é que as cinco formas de curvas reportadas no catálogo de *curvas cúbicas canônicas* [132], aparecem também no espaço dos parâmetros (ver Fig. 3.8). A saber elas são curvas: “cuspidal”, “laço”, “serpentina”, “linha reta”, “quadrática” e uma “puntiforme”.

Parece que só é uma questão de convenção, se se considera os parâmetros como sendo as “variáveis” ou as variáveis normais como sendo as “variáveis”, embora trabalhar no espaço de parâmetros com as curvas de bifurcação seja tecnicamente bem mais complicado.

3.3 Propriedades métricas das “flores” do mapa cúbico

3.3.1 Velocidades de acumulação das flores

Conforme mencionado na seção anterior e na introdução, a discontinuidade do locus conexo complexo dos conjuntos tipo-Mandelbrot no ponto raiz leva à aparição de novos fenômenos nas zonas onde ocorre esta perda. Talvez o mais visível deles seja a *acumulação* de “flores” duma mesma altura, ao longo da fronteira do “cactus” em direção às zonas de transição iso-periódica de órbitas complexas para reais. Uma questão importante é saber a velocidade (taxa de convergência) com que esta acumulação ocorre e qual o valor limite desta convergência.

Para estudar esta propriedade métrica tomaremos como modelo o cactus de período 1 da Fig.3.5(a), que corresponde à forma normal cúbica com $s > 0$. Como o corpo principal do cactus tem período 1, os cálculos se simplificam bastante, permitindo-nos inclusive obter expressões analíticas exatas.

Para calcular a velocidade de acumulação das flores, usaremos os pontos $(a_{(k,n)}, b_{(k,n)})$ de nascimento das flores com números de rotação $\frac{n}{k}$ no espaço de parâmetros. Numa primeira tentativa, tais pontos foram obtidos de maneira aproximada, resolvendo numericamente um sistema de equações. Depois foram deduzidas as expressões analíticas que fornecem a localização exata de nascimento das flores no espaço de parâmetros. A seguir, descrevemos a primeira tentativa.

Resolvendo em λ a variedade W_1 (3.16) deduzida na seção anterior, na página 37 obtemos os

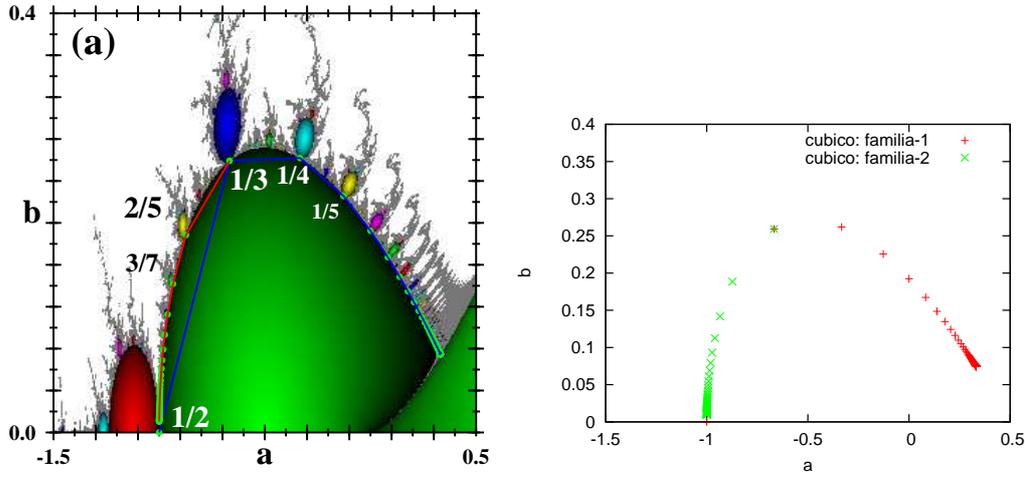


Figura 3.9: a) Diagrama de fases da forma normal cúbica com $s = +1$, mostrando os pontos de nascimento das flores e as famílias de flores: *família 1* unida pelos segmentos l_k (em azul) e *família 2* unida pelos segmentos l_k (em vermelho). b) Pontos de nascimento das flores da *família 1* e *família 2*.

multiplicadores

$$\lambda_1 = 1 + a + \frac{1}{2} \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} + 3\sqrt{3}b)} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} - 3\sqrt{3}b)}, \quad (3.24a)$$

$$\lambda_2 = 1 + a + \omega_1 \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} + 3\sqrt{3}b)} + \omega_2 \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} - 3\sqrt{3}b)}, \quad (3.24b)$$

$$\lambda_3 = 1 + a + \omega_2 \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} + 3\sqrt{3}b)} + \omega_1 \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} - 3\sqrt{3}b)}, \quad (3.24c)$$

onde Δ_1 é dado pela Eq. (3.11), $\omega_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ e $\omega_2 = \omega_1^*$ é seu complexo conjugado, (notar que $\lambda_3 = \lambda_2^*$). Como λ_2 e λ_3 são complexos conjugados, a partir deles podemos obter a fronteira do corpo principal do “cactus”, que é definido pela condição:

$$|\lambda|^2 = \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (3.25)$$

Os pontos $(a_{(k,n)}, b_{(k,n)})$, de nascimento das flores no espaço de parâmetros, estão associados às k raízes da unidade pela relação

$$\lambda = e^{i2\pi n/k} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha), \quad (3.26)$$

onde $\alpha = \frac{2\pi n}{k}$, k denota o período e $n = 0, 1, \dots, k-1$ é um índice que enumera as flores com um mesmo período k e $\frac{n}{k}$ é o número de rotação de cada flor. Substituindo a Eq. (3.24b) na Eq. (3.26) e separando as partes real e imaginária, obtemos o seguinte sistema:

$$1 + a - \frac{1}{2} \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} + 3\sqrt{3}b)}$$

$$-1/2 \sqrt[3]{a^3 + 1/2 \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} - 3\sqrt{3}b)} = \cos(\alpha), \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} & 1/2 \sqrt{3} \sqrt[3]{a^3 + 1/2 \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} + 3\sqrt{3}b)} \\ -1/2 \sqrt{3} \sqrt[3]{a^3 + 1/2 \sqrt{\Delta_1} (\sqrt{\Delta_1} - 3\sqrt{3}b)} &= \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (3.27b)$$

Que uma vez resolvido numericamente nas variáveis, a e b (para (k, n) fixos) nos fornecerá os pontos $(a_{(k,n)}, b_{(k,n)})$, onde nascem as “flores” (fases complexas). Os resultados obtidos usando este procedimento são completamente equivalentes aos obtidos usando as expressões exatas para $a_{(k,n)}$ e $b_{(k,n)}$, que são deduzidas a seguir.

Para obter as expressões exatas dos pontos $(a_{(k,n)}, b_{(k,n)})$ usamos as equações orbitais Eqs. (3.9a) e (3.9b) de período 1 com $s > 0$,

$$s x(x^2 - 3y^2 - a) + x - b = x, \quad (3.28a)$$

$$-s y(y^2 - 3x^2 + a) + y = y. \quad (3.28b)$$

A partir delas podemos expressar os parâmetros a e b em termos de x e y observando que da Eq. 3.28b temos

$$a = 3x^2 - y^2, \quad (3.29)$$

e substituindo na Eq. (3.28a), que nos dá

$$b = -2s x(x^2 + y^2). \quad (3.30)$$

A estabilidade do ponto fixo é determinada pelo multiplicador

$$\lambda = (\lambda_x, \lambda_y) = s(3z^2 - a) + 1, \quad (3.31)$$

onde

$$\lambda_x = (3x^2 - 3y^2 - a) + 1, \quad (3.32)$$

$$\lambda_y = 6xy. \quad (3.33)$$

Teremos uma $\frac{n}{k}$ -furcação de período (processo de nascimento das flores) quando λ for igual à k -ésima raiz da unidade:

$$\lambda = (\lambda_x, \lambda_y) = 1 = e^{i2\pi n/k} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha), \quad (3.34)$$

onde $\alpha = 2\pi n/k$, ($n = 1 \dots k - 1$). Portanto, nesta k -furcação

$$\lambda_x = (3x^2 - 3y^2 - a) + 1 = \cos(\alpha) \quad (3.35a)$$

$$\lambda_y = 6xy = \sin(\alpha). \quad (3.35b)$$

Substituindo a Eq. (3.29) na Eq. (3.35a) e isolando x e y temos

$$x = \frac{\sin(\alpha)}{6s} \sqrt{\frac{2s}{1 - \cos(\alpha)}}, \quad (3.36)$$

$$y = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2s}}. \quad (3.37)$$

Finalmente, substituindo as equações (3.36) e (3.37) nas equações (3.29) e (3.30), obtemos que os pontos no espaço de parâmetros são dados por

$$a_{(k,n)} = \frac{\sin(\alpha)^2}{6s(1-\cos(\alpha))} - \frac{1-\cos(\alpha)}{2s} \quad (3.38a)$$

$$b_{(k,n)} = -\frac{\sin(\alpha)}{3} \sqrt{\frac{2s}{1-\cos(\alpha)}} \left[\frac{\sin(\alpha)^2}{18s(1-\cos(\alpha))} + \frac{1-\cos(\alpha)}{2s} \right]. \quad (3.38b)$$

Depois de alguma álgebra tais expressões ficam mais simplificadas

$$(a_{(k,n)}, b_{(k,n)}) = \left(\frac{2\cos(\alpha)-1}{3s}, \pm \frac{(5-4\cos(\alpha))\sqrt{2(\cos(\alpha)+1)}}{27\sqrt{s}} \right), \quad (3.39)$$

onde lembramos que $\alpha = 2\pi n/k$ com $n = 1 \dots k-1$, e $\frac{n}{k}$ é o número de rotação da flor de período k .

Fazendo uso da Eq. 3.39 podemos rotular as flores que nascem do cactus usando os seus números de rotação $\frac{n}{k}$. Isto foi feito na Fig. 3.9, onde se pode apreciar que o ordenamento dos períodos das flores que nascem do corpo principal do cactus, segue o mesmo ordenamento padrão dos círculos da cardióide do conjunto de Mandelbrot (comparar com a Fig. 3.22 na página 69). Isto é de esperar-se porque estamos lidando com um conjunto tipo-Mandelbrot. Além disto os valores dos períodos das flores são os mesmos, pois em ambos casos o corpo principal do cactus tem período 1.

Lembramos que a notação dos *números de rotação* associados a cada flor consiste em associar-se a cada flor unida ao cactus um número racional n/k , onde k é o período do ciclo atrativo dos conjuntos de Julia J nessa flor. O ciclo atrativo tende a rotar em torno do ponto fixo central, dando aproximadamente n/k revoluções a cada iteração. Por esta razão, a flor é chamada de flor n/k . De fato, todos os pares de parâmetros (a, b) nessa flor têm essencialmente o mesmo comportamento dinâmico [108].

Algumas das propriedades destes números de rotação são as seguintes:

- Percorrendo-se o cactus no sentido anti-horário, os números de rotação seguem o ordem usual dos racionais em $[0, 1]$ [138].
- O número de rotação da maior flor situada entre n/k e n'/k' é $(n+n')/(k+k')$ e obedece “seqüência de Farey” [111, 108].

Ao longo da fronteira do corpo principal de período 1 do cactus do conjunto tipo-Mandelbrot da Fig. 3.9a, podemos notar um número infinito de escalonamentos (scalings) e sub-escalonamentos em diferentes direções de acumulação. Porém essencialmente podemos distinguir duas direções principais de acumulação:

1. Como já mencionamos anteriormente, uma delas é na direção da transição isoperiódica de órbitas complexas para reais e envolve a família de flores maiores com números de rotação:

$$\text{família 1 : } \quad \frac{n}{k} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}, \quad (3.40)$$

as quais, no limite, tem uma mesma altura constante não nula (Olhar definição de altura na 3.73).

2. A outra direção de acumulação é na de uma determinada flor de período k . Por exemplo, na Fig. 3.9a, a família de flores que se acumula na direção da flor de período 2 está caracterizada pelos seguintes números de rotação:

$$\text{família 2: } \quad \frac{n}{k} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots \right\}. \quad (3.41)$$

À diferença da anterior família anterior nesta família a altura das flores tende a zero.

Para fins de comparação entre as diferentes famílias de flores existentes dentro deste conjunto tipo-Mandelbrot basta apenas considerar as *famílias* envolvendo períodos 1 e 2, já que a Fig. 3.9a nos faz supor que as demais famílias de flores do tipo da *família 2*, i.e., famílias de flores que se acumulam em direção a uma determinada flor de período k , terão as mesmas propriedades métricas que a *família 2* que estamos considerando.

Na seção anterior obtivemos os pontos de acumulação, p_{∞}^{\pm} para cúbicos com $s > 0$, a partir da interseção do locus $\Lambda_{|1|}$ (3.21) que define a fronteira do cactus de período 1 com o locus da bifurcação tangente W_{1+} (3.17). Tais pontos de acumulação também podem ser obtidos a partir dos pontos $(a_{(k,n)}, b_{(k,n)})$ da Eq. 3.39 tomando o limite, quando o período k das flores da *família 1* tende para infinito, $k \rightarrow \infty$. Consequentemente, neste limite, $\alpha = \frac{2\pi n}{k} \rightarrow 0$ e $\cos \alpha \rightarrow 1$. Substituindo tais fatos na Eq. 3.39 é imediato verificar que p_{∞}^{\pm} é dado por (3.22). Este ponto está ressaltado com um ponto verde na Fig.3.5(c).

Tendo as expressões exatas Eq. (3.39) dos pontos de nascimento das flores, assim como os conjuntos de números de rotação ((3.40) e (3.41)), que identificam as famílias de flores 1 e 2, passamos a determinar a velocidade com que as flores acumulam-se nas direções especificadas. Por exemplo a velocidade de convergência na direção do parâmetro a , é definida da forma típica de Feigenbaum:

$$r_{ak} = \frac{|a_{(k-1,n)} - a_{(k,n)}|}{|a_{(k,n)} - a_{(k+1,n)}|}, \quad n = 1, k = 3, 4, 5, \dots, \quad (3.42)$$

para a *família 1*. E por:

$$r_{ak} = \frac{|a_{(k-2,n-1)} - a_{(k,n)}|}{|a_{(k,n)} - a_{(k+2,n+1)}|}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, k = 5, 7, 9, \dots, \quad (3.43)$$

para a *família 2*. Analogamente, na direção do parâmetro b , a velocidade de convergência é dada por:

$$r_{bk} = \frac{|b_{(k-1,n)} - b_{(k,n)}|}{|b_{(k,n)} - b_{(k+1,n)}|}, \quad n = 1, k = 3, 4, 5, \dots, \quad (3.44)$$

para a *família 1*. E por:

$$r_{bk} = \frac{|b_{(k-2,n-1)} - b_{(k,n)}|}{|b_{(k,n)} - b_{(k+2,n+1)}|}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, k = 5, 7, 9, \dots, \quad (3.45)$$

para a *família 2*.

As velocidades acima estão definidas em função de um único parâmetro, e nos dão uma idéia da velocidade de convergência numa só direção do espaço de parâmetros (a, b) . Para obter a velocidade dos pontos $(a_{(k,n)}, b_{(k,n)})$ no plano (a, b) levando em conta ambas direções simultaneamente, podemos definir uma velocidade em termos das longitudes (distâncias) entre pontos sucessivos. Estas longitudes estão mostradas esquematicamente na Fig. 3.9a por linhas que

unem os pontos sucessivos onde nascem as flores das *famílias* 1 e 2. Porém, em vez de calcular as longitudes exatas entre pontos sucessivos, usaremos uma versão simplificada de distância, para minimizar erros nos cálculos numéricos. Isto não implica perda de generalidade porque só estamos interessados no quociente das longitudes e na convergência deste quociente. Assim, as longitudes l_k entre o ponto $a_{(k-1,n)}$ e o ponto $a_{(k,n)}$ são definidas da seguinte forma:

$$l_k = |a_{(k-1,n)} - a_{(k,n)}| + |b_{(k-1,n)} - b_{(k,n)}|, \quad n = 1, k = 3, 4, 5, \dots, \quad (3.46)$$

para a *família* 1. E por:

$$l_k = |a_{(k-2,n-1)} - a_{(k,n)}| + |b_{(k-2,n-1)} - b_{(k,n)}|, \quad n = 2, 3, 4, \dots, k = 5, 7, 9, \dots, \quad (3.47)$$

para a *família* 2. As velocidades de convergência destas longitudes l_k , são dadas por

$$r_{lk} = \frac{l_k}{l_{k+1}}, \quad k = 3, 4, 5, \dots, \quad (3.48)$$

para a *família* 1. E por

$$r_{lk} = \frac{l_k}{l_{k+2}}, \quad k = 5, 7, 9, \dots, \quad (3.49)$$

para a *família* 2.

Os valores limite destas velocidades

$$r_{ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{ak}, \quad (3.50)$$

$$r_{bc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{bk}, \quad (3.51)$$

$$r_{lc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{lk}, \quad (3.52)$$

correspondentes a cada família, podem ser obtidos analiticamente uma vez que temos as expressões exatas de $a_{(k,n)}$ e $b_{(k,n)}$.

Assim, por exemplo, para a *família* 1, podemos obter $r_{ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{ak}$ a partir da Eq. (3.42). Previamente, como $\alpha = 2\pi n/k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, podemos usar as aproximações

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}, \quad \sin(\alpha) \approx \alpha. \quad (3.53)$$

Substituindo a Eq. (3.53) na Eq. (3.38a) obtemos

$$a_{(k,n)} = \frac{\sin(\alpha)^2}{6s(1 - \cos(\alpha))} - \frac{1 - \cos(\alpha)}{2s} \approx \frac{1}{3s} - \frac{\pi^2 n^2}{k^2 s}. \quad (3.54)$$

A seguir, substituímos a Eq. (3.54) com $n = 1$ na Eq. (3.42) e depois de alguma álgebra encontramos que

$$r_{ak} = \frac{|(k+1)^2(1-2k)|}{|(k-1)^2(1+2k)|}, \quad (3.55)$$

que no limite quando $k \rightarrow \infty$ resulta em

$$r_{ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(k+1)^2(1-2k)|}{|(k-1)^2(1+2k)|} \rightarrow 1. \quad (3.56)$$

De maneira similar para a *família* 2, substituímos a Eq. (3.54) na Eq. (3.43) para obter

$$r_{ak} = \frac{\left| -\frac{\pi^2(n-1)^2}{(k-2)^2 s} + \frac{\pi^2 n^2}{k^2 s} \right|}{\left| -\frac{\pi^2 n^2}{k^2 s} + \frac{\pi^2(n+1)^2}{(k+2)^2 s} \right|}, \quad (3.57)$$

que depois de alguma álgebra nos conduz a

$$r_{ak} = \left| \frac{\pi^2 k^2 (2n - 1) - \pi^2 n^2 (4k - 4)}{-\pi^2 n^2 (4k + 4) + \pi^2 k^2 (2n + 1)} \frac{(k + 2)^2}{(k - 2)^2} \right| \quad (3.58)$$

e que, novamente no limite quando $k \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow \infty$, se reduz a

$$r_{ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \left| \frac{\pi^2 k^2 (2n - 1) - \pi^2 n^2 (4k - 4)}{-\pi^2 n^2 (4k + 4) + \pi^2 k^2 (2n + 1)} \frac{(k + 2)^2}{(k - 2)^2} \right| \rightarrow 1. \quad (3.59)$$

Uma exploração dos demais limites via o código Maple fornecido no apêndice B, mostra que as velocidades r_{bk} e r_{lk} verificam os seguintes valores limites para ambas famílias:

$$r_{bc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n=1} \frac{|b_{(k-1,n)} - b_{(k,n)}|}{|b_{(k,n)} - b_{(k+1,n)}|} \rightarrow 1, \quad (3.60)$$

$$r_{bc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{|b_{(k-2,n-1)} - b_{(k,n)}|}{|b_{(k,n)} - b_{(k+2,n+1)}|} \rightarrow 1, \quad (3.61)$$

$$r_{lc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n=1} \frac{l_k}{l_{k+1}} \rightarrow 1, \quad (3.62)$$

$$r_{lc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{l_k}{l_{k+2}} \rightarrow 1. \quad (3.63)$$

Os resultados analíticos mostrados anteriormente podem ser confirmados pelos resultados numéricos que são descritos a seguir.

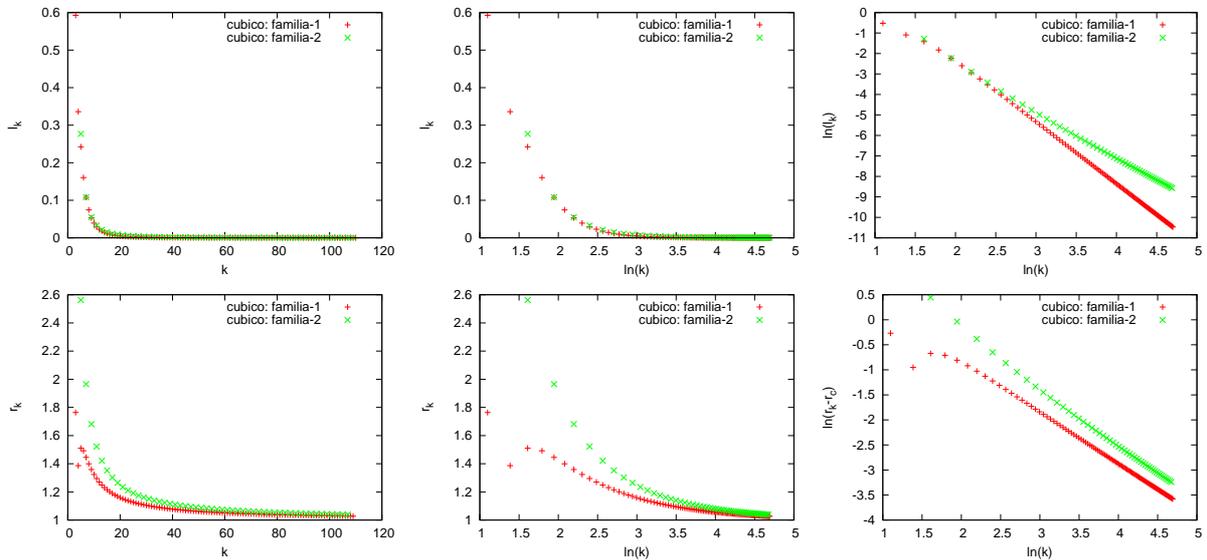


Figura 3.10: Comportamento das longitudes l_k e velocidades de convergência r_{lk} das flores da família 1 e 2 da dinâmica cúbica. Linha superior: l_k . Linha inferior: r_{lk} .

Usando-se as expressões de r_{lk} correspondentes a ambas famílias, calculamos os valores numéricos destas velocidades. Estes valores são mostrados na Tabela 3.1 onde incluímos apenas alguns períodos com a finalidade de caracterizar a convergência destas velocidades à medida que $k \rightarrow \infty$. Dos dados na Tabela 3.1 podemos notar uma clara convergência das velocidades de ambas famílias para a unidade, de acordo com os resultados analíticos obtidos anteriormente.

Tabela 3.1: Velocidades de convergência $rl_k = \frac{l_k}{l_{k+1}}$ das famílias 1 e 2 da dinâmica cúbica. As longitudes l_k estão mostradas esquematicamente na Fig. 3.9.

família 1		família 2	
k	rl_k	k	rl_k
2	1.763849673692339E+00	3	2.562268582635243E+00
10	1.294768455462311E+00	11	1.421175139125654E+00
100	1.030130201177003E+00	101	1.040737839946816E+00
200	1.015035025554307E+00	201	1.020198566248176E+00
300	1.010015933519153E+00	301	1.013423816481280E+00
400	1.007509065691045E+00	401	1.010051540510849E+00
500	1.006005841689579E+00	501	1.008033236534195E+00
600	1.005004075218156E+00	601	1.006689864619779E+00
700	1.004288717398672E+00	701	1.005731390887522E+00
800	1.003752304048830E+00	801	1.005013131777378E+00
900	1.003335159082250E+00	901	1.004454842138007E+00
998	1.003007497621276E+00	995	1.004032682643424E+00

Por outro lado, aproveitando os dados da Tabela 3.1, podemos estudar a lei de convergência obedecidas pelas velocidades. Para tanto, fizemos a Fig. 3.10.

As Figs. 3.10(a), (b) e (c) na linha superior mostram o comportamento das longitudes $l_k = l_k(k)$ em escalas normal, semi-logarítmica e di-logarítmica, respectivamente. Nesta mesma ordem de escalas, as Figs. 3.10(d), (e) e (f) da linha inferior mostram o comportamento das velocidades rl_k de convergência.

A Fig. 3.10(a) mostra o comportamento de $l_k = l_k(k)$ para ambas famílias. Como é de esperar, o valor limite de l_k para ambas famílias é nulo:

$$l_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} l_k \rightarrow 0. \tag{3.64}$$

A Fig. 3.10(d) mostra que o valor limite de rl_k é

$$r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} rl_k \rightarrow 1, \tag{3.65}$$

para ambas famílias.

Os gráficos da coluna central da Fig. 3.10 mostram que os dados não são linearizados como uma escala semilogarítmica, porém o fazem para uma escala di-logarítmica, conforme mostram os gráficos na coluna lateral direita da Fig. 3.10. Portanto, podemos supor que eles seguem leis de potência da forma:

$$l_k = \alpha k^\gamma, \tag{3.66}$$

$$rl_k - r_c = \alpha k^\gamma. \tag{3.67}$$

Adicionalmente, a Fig. 3.10(c) nos permite notar que as longitudes l_k da família 1 decaem mais rapidamente para seu valor limite nulo, que as longitudes da família 2. Os valores das constantes α e γ para cada caso estão tabulados na Tabela 3.2. Notar que tanto o expoente $\gamma \approx -3$ das longitudes l_k da família 1 como o expoente $\gamma \approx -2$ da família 2 tendem para valores *inteiros* à medida que nos aproximamos do limite $k \rightarrow \infty$. Algo parecido ocorre com o expoente $\gamma \approx -1$ das velocidades de convergência rl_k , i.e., também neste caso o expoente tende para um valor limite

inteiro, só que neste caso o expoente γ é o *mesmo* para ambas famílias. Tal fato sugere tratar-se duma propriedade mais geral, possivelmente comum a todas as famílias de flores. Isto, porque não apenas a velocidade limite $r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{lk} \rightarrow 1$ com que as flores de “cactus” se aproximam dum ponto de acumulação é a mesma, independentemente da família de flores considerada, mas também a lei $\gamma \approx -1$ com que se atinge este limite é a mesma, independentemente da família de flores considerada

Tabela 3.2: Constantes α e γ obtidas por regressão linear para $l_k = \alpha k^\gamma$ e $r_{lk} - r_c = \alpha k^\gamma$ da dinâmica cúbica.

	Dinâmica cúbica			
	l_k	l_k	r_{lk}	r_{lk}
	família 1	família 2	família 1	família 2
$\ln(\alpha)$	3.73528 ± 0.001058	1.47433 ± 0.01725	1.23841 ± 0.002008	1.8171 ± 0.009516
γ	-3.02263 ± 0.0002631 ($r^2 = -0.990$)	-2.14424 ± 0.00416 ($r^2 = -0.995$)	-1.02788 ± 0.0005002 ($r^2 = -0.990$)	-1.08421 ± 0.002303 ($r^2 = -0.995$)

A respeito de convergências para números inteiros, neste caso uma convergência para a unidade $r_c \rightarrow 1$, é necessário lembrar (como foi mencionado no capítulo 2) que na bibliografia [141, 114] foram reportadas convergências de codimensão 1 (i.e. variando apenas um parâmetro) para valores inteiros: 4 e 1, respectivamente, ao longo da antena do conjunto de Mandelbot. Só que no nosso trabalho consideramos uma convergência de codimensão-2 (variando simultaneamente dois parâmetros), nas rotas de acumulação que envolvem adição de períodos.

Esta convergência da velocidade $r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{lk} \rightarrow 1$ encontrada nas zonas de acumulação parece ter caráter geral tanto para: os conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa, também foi verificada para os conjuntos tipo-Mandelbrot do mapa de Hénon complexificado (com parâmetros reais) [124], e também para o conjunto de Mandelbrot (como será mostrado na seção 3.5).

Curiosamente os conjuntos de números de rotação que rotulam as flores das famílias: *família 1* e *família 2* tem a mesma convergência quando $k \rightarrow \infty$:

1. No caso da *família 1* de flores maiores com números de rotação $\frac{n}{k} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots\}$ que corresponde à acumulação na direção da transição iso-periódica de órbitas complexas para reais, os números racionais associados aos números de rotação tem a seguinte convergência:

$$r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}}{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}} \tag{3.68}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k-1} \rightarrow 1 \tag{3.69}$$

2. Na outra direção de acumulação da *família 2* com números de rotação, $\frac{n}{k} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n-1}{k-2}, \frac{n}{k}, \frac{n+1}{k+2}, \dots\}$, a convergência dos racionais associados aos números de rotação é a seguinte:

$$r_k = \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{k} - \frac{n-1}{k-2}}{\frac{n+1}{k+2} - \frac{n}{k}} \tag{3.70}$$

$$r_k = \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{k+2}{k-2} \rightarrow 1 \tag{3.71}$$

Ou mais genericamente se consideramos um família de flores com números de rotação $\frac{n}{k} = \{\dots, \frac{n-n'}{k-k'}, \frac{n}{k}, \frac{n+n'}{k+k'}, \dots\}$, onde $n' = 0, 1, 2, \dots$ e $k' = 1, 2, 3, \dots$ podem assumir todas as combinações possíveis porém uma vez escolhidos os valores de n' e k' eles são fixos para uma determinada família de flores, assim por exemplo para a *família 1*: $n = 1$, $n' = 0$ e $k' = 1$, enquanto que para a *família 2*: $n' = 1$ e $k' = 2$. Então fazendo o respectivo cálculo e simplificando obtemos

$$\begin{aligned} r_k &= \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+n'}{k+k'} - \frac{n}{k}}{\frac{n}{k} - \frac{n-n'}{k-k'}} = \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n'}{n} - \frac{k'}{k} k - k'}{\frac{n'}{n} - \frac{k'}{k} k + k'} \\ r_k &= \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{k - k'}{k + k'} \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (3.72)$$

porque n' e k' são fixos. Como este resultado é válido para qualquer família de flores, e em particular para as famílias 1 e 2 consideradas, podemos inferir que qualquer das infinitas famílias de flores que acumulam em uma determinada direção exibirá a mesma convergência unitária $r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{lk} \rightarrow 1$. Além disso este resultado faz-nos crer que o escalamento unitário encontrado no espaço de parâmetros pode ser entendido como um reflexo das propriedades métricas dos conjuntos de números racionais (números de rotação) que rotulam os conjuntos de flores. Uma discussão adicional deste assunto é feita mais adiante, na Seção 3.5.

3.3.2 Propriedades métricas das alturas e áreas das flores na zona de acumulação

A acumulação de famílias de flores com uma altura tendendo a uma constante é um fenômeno que aparece nos conjuntos tipo-Mandelbrot e que não está presente no conjunto de Mandelbrot [1, 2, 3]. No caso dos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica, i.e. no locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$, este fenômeno é observável tanto para polinômios com o termo cúbico positivo $s > 0$, conforme mostra a Fig. 3.5 na página 39, como para polinômios com o termo cúbico negativo $s < 0$ (ver Fig. 3.6 na página 40). Como mencionamos anteriormente, este fenômeno se apresenta porque o ponto raiz destes conjuntos tipo-Mandelbrot é descontinuamente esticado ao longo da bifurcação tangente das órbitas reais, embora seja justamente esta bifurcação tangente ou, mais genericamente, esta tangência de curvas de bifurcação, que dá lugar à estabilização de órbitas complexas, é esta mesma tangência que é responsável por introduzir a descontinuidade no ponto raiz dos conjuntos tipo-Mandelbrot.

A seguir determinamos a velocidade com que as alturas das flores da dinâmica cúbica se aproximam do seu valor limite constante, bem como a velocidade com que as áreas das flores diminuem até alcançar seu valor limite nulo. Em ambos casos também obtemos a lei que seguem as convergências.

Para tanto, definimos a “altura”, h_k duma determinada flor de período k como sendo a distância desde o ponto de nascimento da flor $(a_{(k,n)}, b_{(k,n)})$ até o ponto $(a_{(2k,n)}, b_{(2k,n)})$ onde a flor bifurca numa outra flor secundária de período $2k$. De novo, usando uma versão simplificada de distância para minimizar erros nos cálculos, temos que a altura duma determinada flor de período k e número de rotação $\frac{n}{k}$ é dada por:

$$h_k = |a_{(2k,n)} - a_{(k,n)}| + |b_{(2k,n)} - b_{(k,n)}|, \quad (3.73)$$

onde $a_{(k,n)}$ e $b_{(k,n)}$ são dados pela Eq. 3.39. Os pontos de nascimento das flores secundárias $(a_{(2k,n)}, b_{(2k,n)})$ foram obtidos numericamente a partir dos diagramas de fase. Na Tabela 3.3

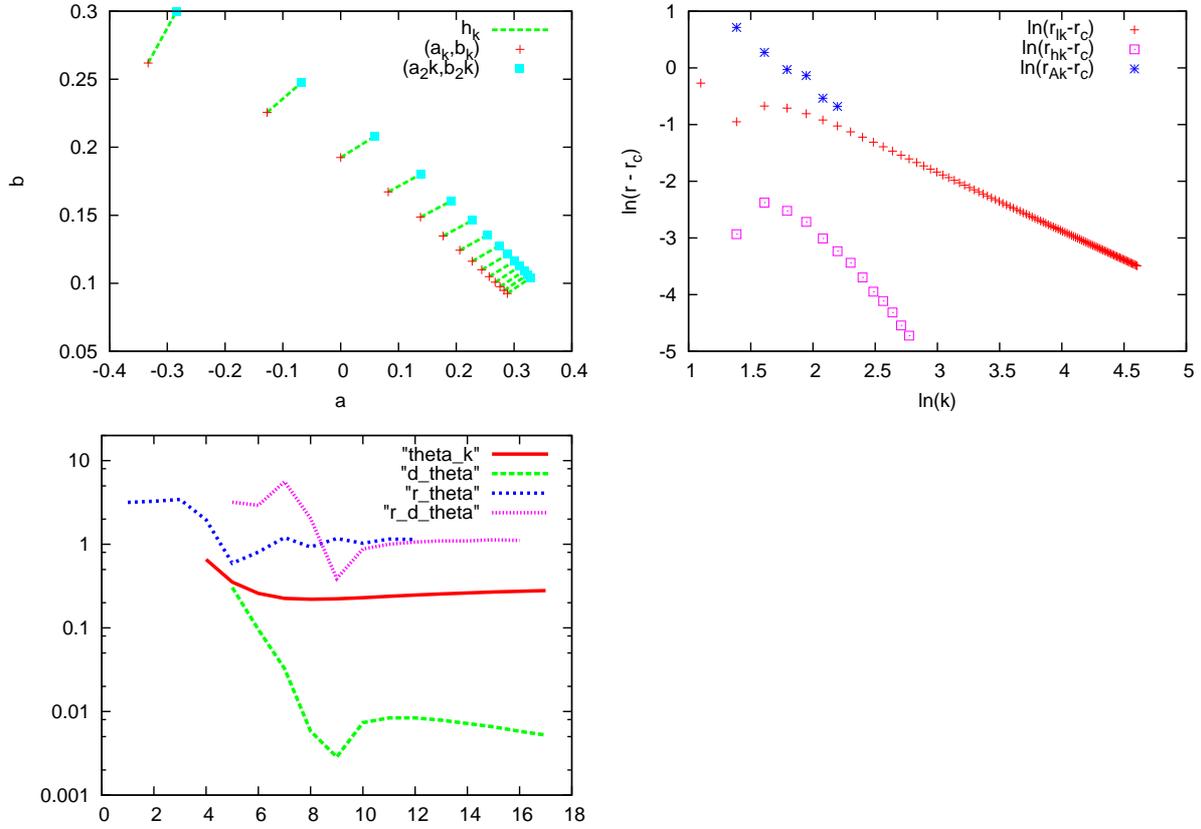


Figura 3.11: a) Alturas h_k das flores da família 1. b) Velocidades de convergência r_{lk} , r_{hk} e r_{Ak} da família 1. c) Ângulos θ_k e suas velocidades de convergência (ver texto).

estão tabulados os pontos, $(a_{(2k,n)}, b_{(2k,n)})$, as alturas h_k e a velocidade

$$r_{hk} = \frac{h_k}{h_{k+1}}, \quad (3.74)$$

com que estas alturas h_k aproximam-se do seu valor limite constante não-nulo, $h_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} h_k \approx 0.05$. Novamente temos uma convergência para a unidade: $r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{hk} \rightarrow 1$.

Na Fig. 3.11b estão plotadas as velocidades r_{hk} , juntamente com as velocidades de convergência das longitudes, r_{lk} obtidas anteriormente. Podemos notar que as velocidades r_{hk} , também seguem uma lei de potência

$$r_{hk} - r_c = \alpha k^\gamma, \quad (3.75)$$

com $\gamma \approx -3$ (ver Tabela 3.4), distintamente do caso das longitudes, que tinham um expoente $\gamma \approx -1$.

Aproveitando os dados da Tabela 3.4 também foram computados os ângulos

$$\theta_k = \arctan \left(\frac{|b_{(2k,n)} - b_{(k,n)}|}{|a_{(2k,n)} - a_{(k,n)}|} \right), \quad (3.76)$$

que as flores fazem com a horizontal, assim como as diferenças entre ângulos θ_k consecutivos de duas flores contíguas definidas como:

$$\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}, \quad (3.77)$$

Tabela 3.3: Pontos de nascimento ($a_{(2k,n)}, b_{(2k,n)}$) das flores secundárias que nascem da família 1. Alturas h_k e velocidades de convergência, r_{hk} , r_θ e $r_{\Delta\theta}$ correspondentes à família 1.

k	$a_{(2k,n)}$	$b_{(2k,n)}$	h_k	r_{hk}	r_θ	$r_{\Delta\theta}$
4	-0.28453177	0.29955853	0.08646869	1.05323814		
5	-0.06735786	0.24769565	0.08209795	1.09290803	1.36950617	3.18357773
6	0.05942508	0.20814381	0.07511881	1.08036038	1.14458967	2.92505651
7	0.13887960	0.18022742	0.06953125	1.06600853	1.02650560	5.59965156
8	0.19138796	0.16052174	0.06522579	1.04926855	0.98716240	2.03817943
9	0.22805184	0.14622074	0.06216310	1.03938890	0.96801813	0.38856473
10	0.25447324	0.13561204	0.05980736	1.03210030	0.96480495	0.87672189
11	0.27412207	0.12753177	0.05794724	1.02479022	0.96597409	0.99916510
12	0.28918512	0.12127090	0.05654546	1.01927693	0.96901100	1.06397365
13	0.30098896	0.11633214	0.05547605	1.01636495	0.97252113	1.09675018
14	0.31035920	0.11235995	0.05458281	1.01336047	0.97556771	1.09721616
15	0.31794147	0.10913043	0.05386317	1.01063447	0.97887784	1.13228140
16	0.32418278	0.10647157	0.05329639	1.00887973	0.98133388	1.11045507
17	0.32936455	0.10425794	0.05282730			

cujo valor limite é

$$\Delta\theta_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\theta_k \rightarrow 0. \quad (3.78)$$

E, finalmente, suas respectivas velocidades de convergência:

$$r_{\theta k} = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}}, \quad (3.79)$$

e

$$r_{\Delta\theta k} = \frac{\Delta\theta_k}{\Delta\theta_{k+1}}. \quad (3.80)$$

Na Fig. 3.11(c) estão plotadas θ_k , $\Delta\theta_k$, $r_{\theta k}$ e $r_{\Delta\theta k}$. A forma de $\theta_k = \theta_k(k)$ e $\Delta\theta_k = \Delta\theta_k(k)$ é semelhante a um potencial de força central. As suas velocidades de convergência, $r_{\theta k}$ e $r_{\Delta\theta k}$ oscilam amortecidamente em torno dos seus valores limite, que de novo vem a ser

$$r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{\theta k} \rightarrow 1, \quad (3.81)$$

e

$$r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{\Delta\theta k} \rightarrow 1, \quad (3.82)$$

conforme mostra a Fig. 3.11(c).

Passamos agora ao estudo da diminuição das áreas das flores à medida que estas acumulam-se em direção às zonas de transição isoperiódica de órbitas reais para complexas (ver Fig. 3.5(c) na página 39), e a lei com que esta diminuição ocorre. Neste estudo foi usada uma abordagem puramente numérica, devido à impossibilidade de se obter as expressões exatas das fronteiras das flores de períodos maiores a um. Mas nem por isso o cálculo das tais áreas foi trivial, porque primeiro foi necessário discriminar entre flores de **mesmo** período k porém com números de rotação, $\frac{n}{k}$ e $\frac{n'}{k}$, **distintos**. Levando em conta que no cálculo dos diagramas isoperiódicos cada ponto (pixel) (a, b) só está especificado pelo período k das órbitas associado a ele. Com apenas esta informação do período é impossível selecionar as flores de nosso interesse, porque existem

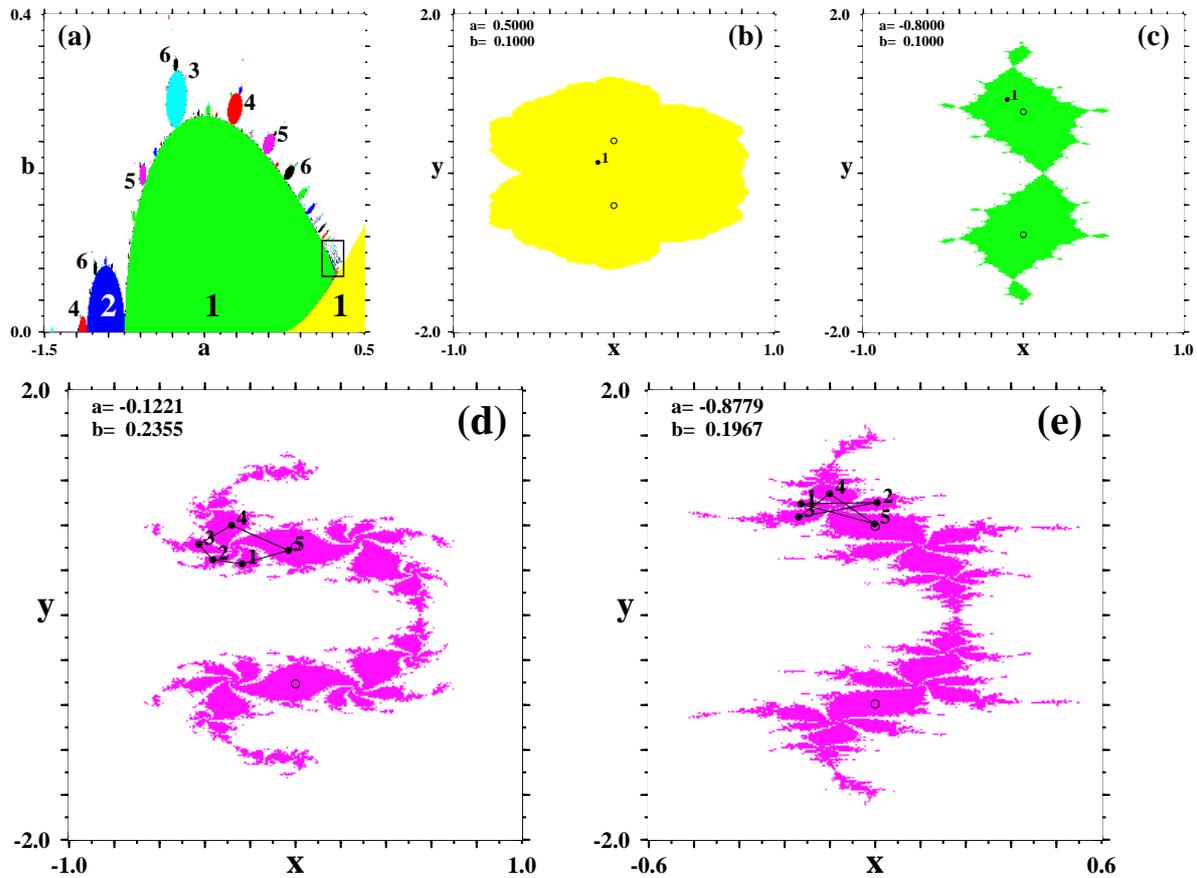


Figura 3.12: “Filled-in Julia sets” associados ao conjunto tipo-Mandelbrot do mapa cúbico com $s = +1$. Os parâmetros (a, b) estão tabelados no extremo superior esquerdo dos conjuntos de Julia J . Os círculos pretos abertos denotam os pontos críticos.

infinitas flores como os mesmos períodos das flores maiores pertencentes à família $1 \equiv \{\frac{n}{k} : \frac{n}{k} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. O único número que permite diferenciar entre duas flores do mesmo período k , é o numerador n do número de rotação $\frac{n}{k}$ de cada flor.

Na bibliografia [138] estão reportados três métodos equivalentes para calcular n . O mais simples adaptado ao nosso caso parece ser o seguinte.

- Tomamos (a, b) dentro da flor de período k . O ciclo atrativo de $f_{(a,b)}(z)$ tem período k e está repartido em k componentes do interior de $J(f_{(a,b)})$ (conjunto de Julia) que tocam-se num dos pontos fixos, z_{fixo} . Se observamos a ação de $f_{(a,b)}(z)$ no ciclo- k , veremos que $f_{(a,b)}(z)$ gira em torno de z_{fixo} dando n saltos, girando no sentido dos ponteiros do relógio (ou inverso), a cada iteração.

Na Fig. 3.12 são mostrados os conjuntos de Julia $J(f_{(a,b)})$ associados a um determinado ponto (a, b) no espaço de parâmetros. Tomando por exemplo (a, b) dentro das flores $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$, e olhando seus respectivos ciclos 5 atrativos mostrados nas Fig. 3.12d e Fig. 3.12e, verificamos que a órbita $f_{(a,b)}(z)$ gira em torno de z_{fixo} dando $n = 1$ salto no caso da flor $\frac{1}{5}$ e $n = 2$ saltos no caso da flor $\frac{2}{5}$. Usando esta informação foi escrito um algoritmo para selecionar só as flores da família-1, para depois calcular suas áreas. O resultado é mostrado na Fig. 3.13.

As áreas das flores mostradas nas Figs. 3.13(a) e Fig. 3.13(b) foram medidas em unidades arbitrárias (pixels) uma vez que só estamos interessados no quociente destas áreas e na convergência

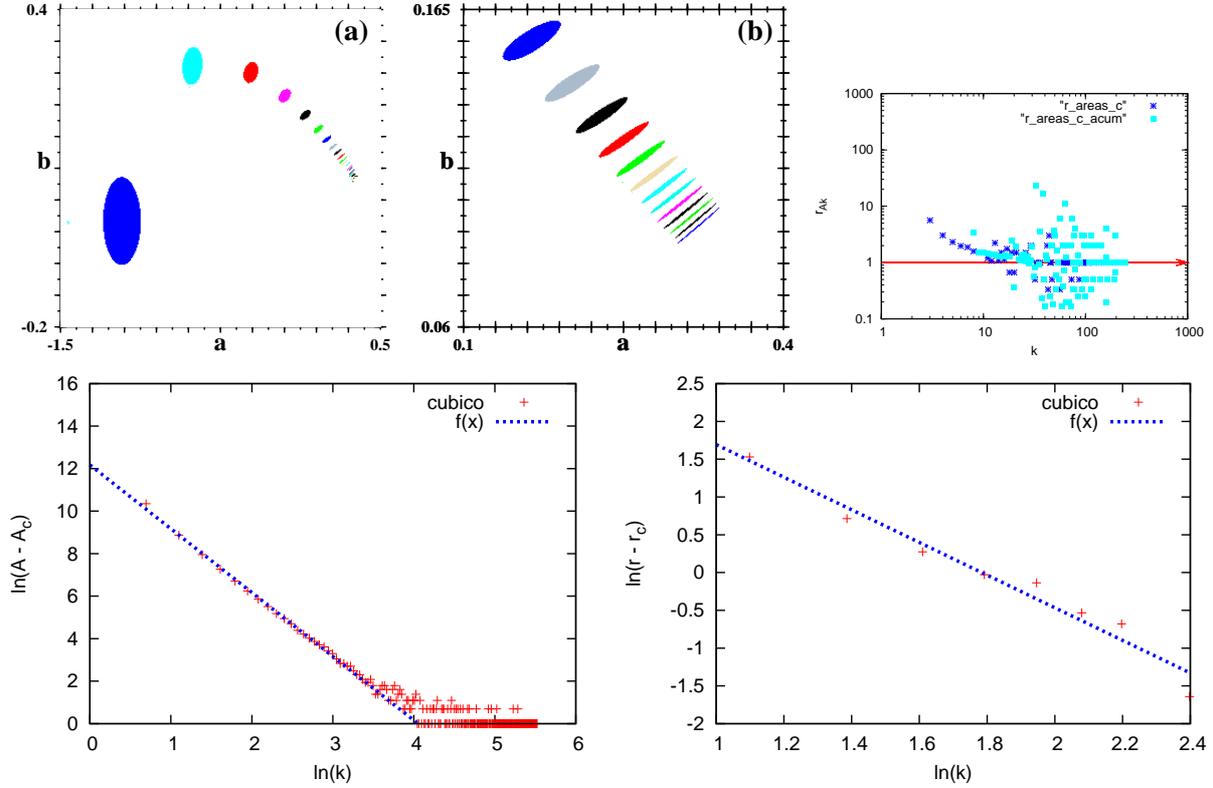


Figura 3.13: a) Áreas das flores da *família* 1. b) Ampliação da zona de acumulação. c) A_k vs. k . d) e) Regressão linear para A_k e r_{Ak} , respectivamente.

deste quociente. Nos testes de cálculo das áreas das flores usando uma resolução de 900×900 pixels verificou-se (como era de se-esperar) que o erro na determinação das áreas aumenta rapidamente à medida que o período cresce, porque as áreas das flores diminuem rapidamente. Apesar desta limitação, foram armazenados os dados das medidas das áreas das flores até a flor de período $k = 250$, embora uma boa parte destes dados tenha sido descartada nos ajustes.

A Fig. 3.13(d) mostra que a diminuição das áreas das flores da *família* 1 também segue uma lei de potência da forma

$$A_k - A_c = \alpha k^\gamma, \quad A_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \rightarrow 0. \quad (3.83)$$

(ver Tabela 3.4 para os valores de α e γ). A taxa de diminuição das áreas das flores da *família*

Tabela 3.4: Constantes α e γ obtidas por regressão linear para: $h_k = \alpha k^\gamma$, $A_k - A_c = \alpha k^\gamma$, $r_{hk} - r_c = \alpha k^\gamma$ e $r_{Ak} - r_c = \alpha k^\gamma$. da dinâmica cúbica.

		Dinâmica cúbica		
	$h_k = \alpha k^\gamma$	$A_k - A_c = \alpha k^\gamma$	$r_{hk} - r_c = \alpha k^\gamma$	$r_{Ak} - r_c = \alpha k^\gamma$
$\ln(\alpha)$	0.383837 ± 0.09297	12.1752 ± 0.07825	3.76055 ± 0.4006	3.8529 ± 0.322
γ	-2.1902 ± 0.03774 ($r^2 = -0.994$)	-3.00356 ± 0.03374 ($r^2 = -0.961$)	-3.06228 ± 0.148 ($r^2 = -1.000$)	-2.15935 ± 0.1733 ($r^2 = -0.976$)

1, definida como:

$$r_{Ak} = \frac{A_k}{A_{k+1}}, \quad (3.84)$$

é plotada na Fig. 3.13(c), onde estão incluídos todos os dados, i.e. até período $k = 250$. Nesta figura já se pode apreciar a convergência $r_{Ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{Ak} \rightarrow 1$, principalmente para períodos baixos onde as medidas numéricas das áreas das flores são mais precisas. Esta convergência pode ser confirmada analiticamente usando a Eq.3.84 e o fato que a diminuição das áreas segue a lei de potência da Eq.3.83, i.e. $A_k \sim k^\gamma$, com $\gamma = -3$. Assim, tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$, temos que:

$$r_{Ac} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{k^\gamma}{(k+1)^\gamma} = \frac{(k+1)^3}{k^3} \rightarrow 1, \quad (3.85)$$

A Fig. 3.13(e) mostra que a taxa de diminuição das áreas das flores r_{Ak} também decai com uma lei de potência da forma

$$r_{Ak} - r_{Ac} = \alpha k^\gamma, \quad r_{Ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{Ak} \rightarrow 1. \quad (3.86)$$

Os valores das constantes α e γ para ambos os casos são tabulados na Tabela 3.4, na qual pode-se apreciar que as áreas das flores decaem ao seu valor limite nulo $A_c = 0$ com a mesma lei de potência com que as longitudes l_k decaem também para seu valor limite nulo $l_c = 0$, i.e., em ambos casos o expoente é $\gamma \approx -3$, em comparação com o decaimento mais lento ($\gamma \approx -2$) das alturas h_k para seu valor limite não nulo $h_c \approx 0.05$. Por outro lado as velocidades de convergência: r_{lk} , r_{hk} e r_{Ak} nos três casos têm um mesmo valor limite $r_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \rightarrow 1$, porém este valor limite é alcançado seguindo leis de potência distintas: $\gamma \approx -1$ para r_{lk} , $\gamma \approx -2$ para r_{Ak} e $\gamma \approx -3$ para r_{hk} (olhar a Fig. 3.11(b) na página 53 onde estão mostradas juntas as três taxas de convergência r_{lk} , r_{Ak} e r_{hk}).

3.3.3 O escalonamento de Feigenbaum na dinâmica cúbica

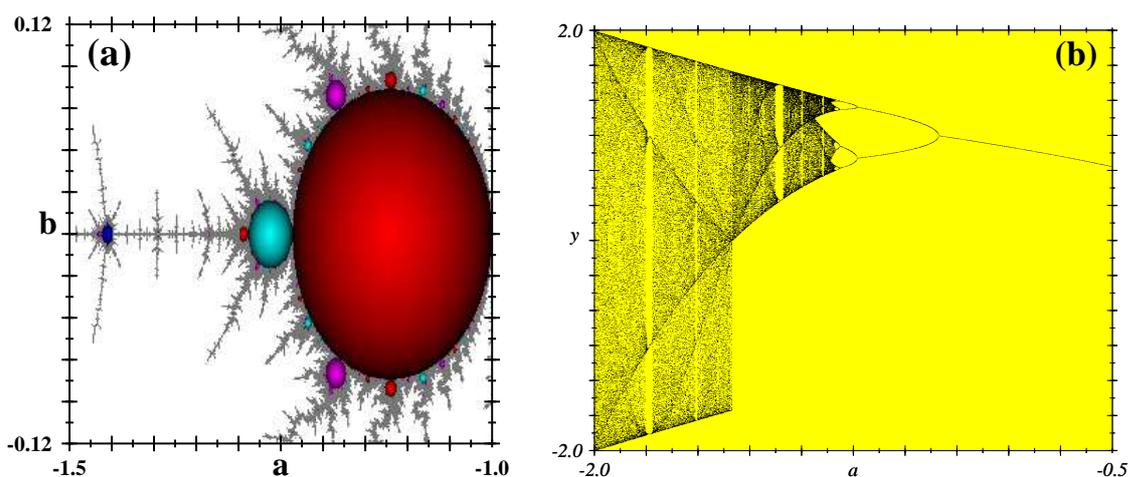


Figura 3.14: a) Zoom da antena do conjunto tipo-Mandelbrot da Fig. 3.5(a). b) Diagrama de bifurcação da antena do conjunto tipo-Mandelbrot da Fig. 3.5(a).

Para o caso do conjunto de Mandelbrot é sabido [26, 20, 21] que ao longo da linha $b = 0$ da Fig. 3.22b se tem o escalonamento (“scaling”) de Feigenbaum, i.e. a taxa de convergência dos diâmetros dos círculos de dobramento de período localizados ao longo da antena do conjunto de

Mandelbrot tende para a constante de Feigenbaum, $\delta = 4.669\dots$. Como no nosso caso temos a mesma rota de dobramento de períodos ao longo da antena do conjunto tipo-Mandelbrot (Ver Fig. 3.9a e Fig. 3.14) é de se esperar que tenhamos o mesmo escalonamento de Feigenbaum.

Para verificar isto, foi feito o cálculo dos pontos das bifurcações de dobramento de período ao longo da linha $b = 0$ (até o dobramento, $k = 64 \rightarrow 2k = 128$), a partir dos quais puderam-se obter os “diâmetros” dos “círculos”

$$d_k = |b_{2k} - b_k|, \tag{3.87}$$

para ter-se finalmente a taxa de convergência dos diâmetros

$$r_{dk} = \frac{b_k}{b_{2k}}. \tag{3.88}$$

Tabela 3.5: Pontos de bifurcação, b_k de dobramento de período ao longo da antena do conjunto tipo-Mandelbrot e taxa de convergência, r_{dk} dos “diâmetros” dos círculos da antena.

k	$2k$	b_k	r_{dk}
1	2	-0.999620996209962	
2	4	-1.23590835908359	
4	8	-1.28796787967880	4.53879252386715
8	16	-1.29920299202992	4.63364485981313
16	32	-1.30161801618016	4.65217391304317
32	64	-1.30213602136021	4.66216216216298
64	128	-1.30224802248022	4.62499999999504

Estas taxas de convergência r_{dk} estão tabuladas na Tabela 3.5, onde vemos uma convergência de r_{dk} para a constante de Feigenbaum, apesar que o último dado correspondente ao dobramento de período $k = 64 \rightarrow 128$ está um tanto desviado desta convergência devido a incertezas no cálculo deste período elevado.

Olhando as equações 3.9a e 3.9b das órbitas, vemos que, para o caso que estamos considerando, i.e. $s = 1$, $b = 0$ e $a < -1$, as equações ficam reduzidas a

$$x_{t+1} = x_t(x_t^2 - 3y_t^2 - a) + x_t, \tag{3.89a}$$

$$y_{t+1} = -y_t(y_t^2 - 3x_t^2 + a) + y_t, \tag{3.89b}$$

e ficam ainda mais reduzidas se consideramos que, devido a termos $a < s = 1$, os pontos críticos são imaginários puros

$$x_{\pm}^* = 0, \tag{3.90}$$

$$y_{\pm}^* = \pm \sqrt{(s-a)/3} i. \tag{3.91}$$

Portanto, a dinâmica passa a ser uni-dimensional e só na variável complexa y_t

$$x_{t+1} = 0, \tag{3.92a}$$

$$y_{t+1} = -y_t^3 - a y_t + y_t. \tag{3.92b}$$

Na Fig. 3.14b mostramos um diagrama de bifurcações deste sistema, que exhibe os dobramentos de período.

3.4 Estrutura interna das flores em conjuntos tipo-Mandelbrot

Na seção anterior foram estudadas algumas propriedades métricas nas zonas de acumulação dos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa, usando como padrões de comparação duas famílias de flores: *família 1* e *família 2*, que diferem essencialmente em que a primeira delas é composta por flores cujas alturas tendem para uma constante não-nula e acumulam-se em direção à zona de transição isoperiódica de órbitas complexas para reais, enquanto que na *família 2* as alturas das flores tendem a zero, e acumulam-se em direção a uma determinada flor de período k . Apesar dessas diferenças, ambos tipos de famílias de flores têm praticamente as mesmas propriedades métricas, porque exibem as mesmas taxas de convergência limite iguais à unidade em todos os casos estudados. Além disso, todas as convergências obedecem uma lei de potência com expoentes que tendem para inteiros à medida que nos aproximamos do ponto final de acumulação.

Antes de passar à próxima seção, que se ocupa de fazer uma comparação entre as propriedades métricas obtidas nos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa com as propriedades métricas do prototípico conjunto de Mandelbrot, nesta parte nos ocupamos de estudar a estrutura interna das flores dos conjuntos tipo-Mandelbrot, com o intuito de ter uma visão mais qualitativa do interior das flores bem como do mesmo conjunto em si. Para tanto recorreremos ao cálculo dos multiplicadores das órbitas periódicas reais e complexas.

O *multiplicador* [139] correspondente a uma órbita de período k envolvendo os pontos orbitais $z_0, z_1, z_2, \dots, z_k \equiv z_0$ é simplesmente a derivada de $f_k(z, a, b)$ que é k -ésima composição da função $f(z, a, b)$ consigo mesma. Mais explicitamente o multiplicador m_k [‡] é dado por:

$$\begin{aligned} m_k &= f'_k(z, a, b) = \frac{df_k(z, a, b)}{dz} \\ &= f'(z_0)f'(z_1) \cdots f'(z_{k-1}), \end{aligned} \quad (3.93)$$

que aplicado à Eq. (3.8) resulta,

$$m_k = \{s(3z_0^2 - a) + 1\} \{s(3z_1^2 - a) + 1\} \cdots \{s(3z_{k-1}^2 - a) + 1\}. \quad (3.94)$$

Notar que, como também estamos levando em conta órbitas complexas i.e. $z \equiv (x + iy)$, o multiplicador, $m_k \equiv (m_{kx}, m_{ky})$ não só tem parte real, m_{kx} , mas também tem uma parte complexa m_{ky} . Dizemos que a paridade de m_{kx} (m_{ky}) é positiva quando $m_{kx} > 0$ ($m_{ky} > 0$) e negativa quando $m_{kx} < 0$ ($m_{ky} < 0$).

Na Fig. 3.15 estão mostrados os diagramas de fase (isoperiódicos) correspondentes às duas formas normais Eq. (3.8) da dinâmica cúbica complexa, nos quais foi incluído um gradiente de tons de acordo com o valor da norma do multiplicador, $|m_k| = \sqrt{m_{kx}^2 + m_{ky}^2}$. Os diagramas foram obtidos seguindo as órbitas dos pontos críticos do mapa e testando a periodicidade de cada órbita. Os períodos $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ são representados em verde, vermelho, azul, cian, amarelo, magenta, verde, \dots , i.e., módulo seis cores. As órbitas caóticas estão representadas em cinza, enquanto que as órbitas que divergem para o atrator do infinito são representadas em branco. A legenda de tons na parte inferior de cada diagrama corresponde ao valor da norma do multiplicador, $-1 \leq m_k \leq 1$.

Estes diagramas de fase que incluem um gradiente de acordo ao valor da norma dos multiplicadores, já foram mostrados ao longo deste capítulo, por serem muito úteis para dar uma idéia mais cabal das estruturas periódicas no espaço de parâmetros, já que entre outras coisas eles ressaltam: os loci das órbitas super-estáveis [140] $m_k = 0$, que são as curvas mais brilhantes nos

[‡]Por definição, uma órbita periódica é dita ser *atrativa* ou *repelente* ou *indiferente* (= *neutra*) dependendo se seu multiplicador satisfaz $|m_k| < 1$ ou $|m_k| > 1$ ou $|m_k| = 1$. Uma órbita é chamada de *superestável* se $m_k = 0$.

diagramas, assim como as bifurcações de dobramento de período e as bifurcações tangentes onde $|m_k| = 1$. Nas estruturas “cuspidal” e “arredondada” correspondentes às órbitas reais (Fig. 3.15), ressaltam as linhas mais coloridas caracterizadas por $m_k = 0$, tais “loci superestáveis” [140] definem “centros” de estabilidade dentro de cada domínio isoperiódico. A partir da Eq. 3.94, notamos que todos os $m_k = 0$ originam-se de trajetórias no espaço de fases que passam através de pelo menos um dos zeros da derivada de $f_{(a,b)}(z)$ Eq.(3.8), a saber, $z_k = \pm \sqrt{(a - 1/s)/3}$.

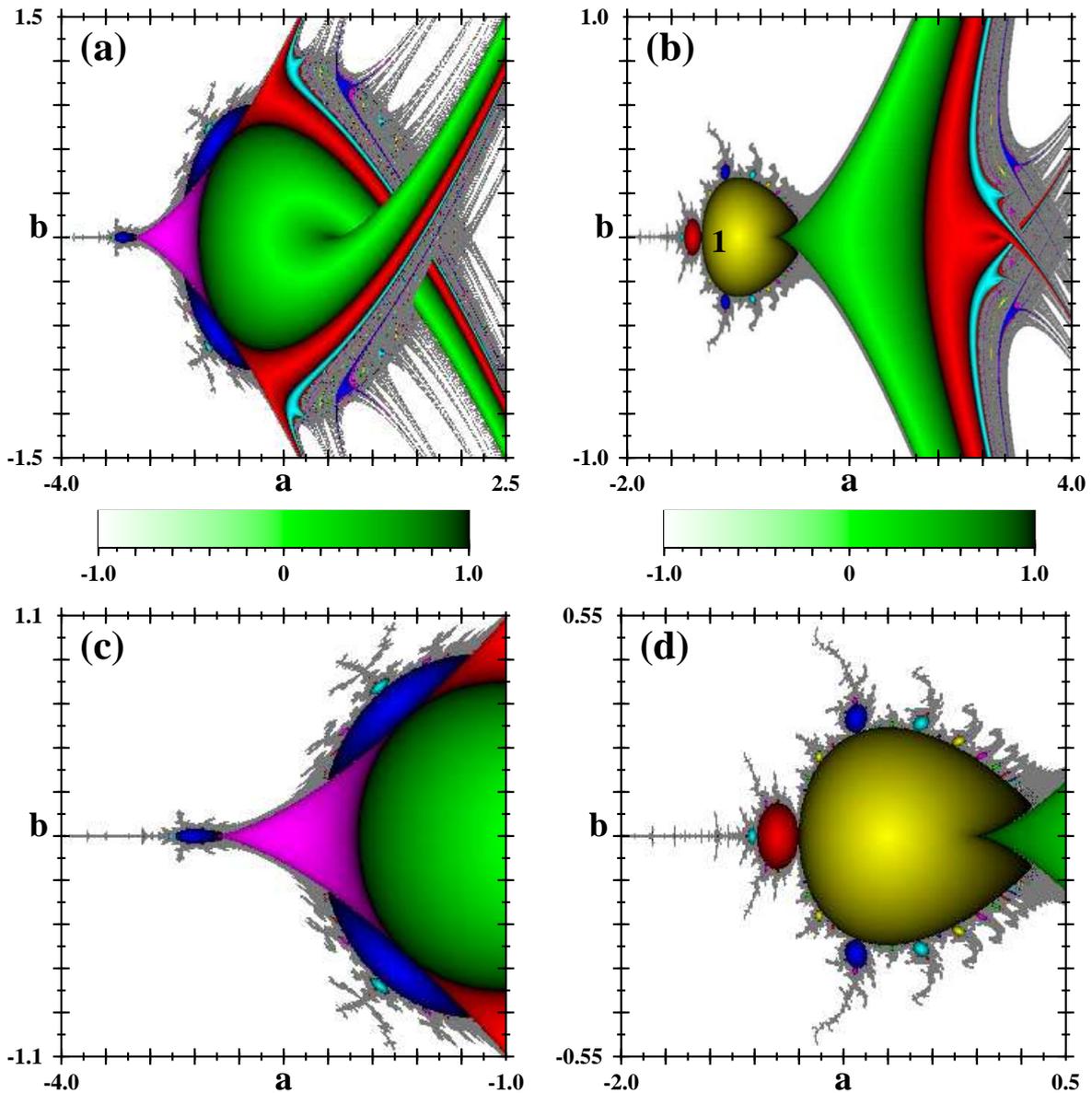


Figura 3.15: Diagramas de fase para ambas formas normais do mapa cúbico da Eq. 3.8 incluindo um degrade de tons de acordo com o valor da norma do multiplicador $|m_k|$ associado a cada órbita de período- k . Coluna Esquerda: cúbico $s = -1$. Coluna Direita: cúbico $s = +1$.

Na linha inferior da Fig. 3.15 estão ampliados os conjuntos tipo-Mandelbrot devidos às órbitas complexas, correspondentes às duas formas normais (3.8) dos polinômios cúbicos. Em ambos casos observamos que o “locus superestável” de cada domínio isoperiódico se concentra no “centro” de cada região. No caso das flores, este “locus superestável” é um ponto no “centro” de cada flor,

e as fronteiras de cada flor estão caracterizadas por $|m_k| = 1$. No caso da forma normal cúbica com $s < 0$ o ponto de codimensão 2 está localizado na reunião das quatro regiões isoperiódicas que satisfazem $|m_k| = 1$.

Apesar da norma do multiplicador já nos dar uma boa idéia da dinâmica interna das estruturas periódicas no espaço de parâmetros, uma opção um tanto mais interessante parece ser plotar a parte real $m_{kx} \equiv \Re(m_k)$ e imaginária $m_{ky} \equiv \Im(m_k)$ do multiplicador m_k por separado, tal como mostram as figuras descritas a seguir.

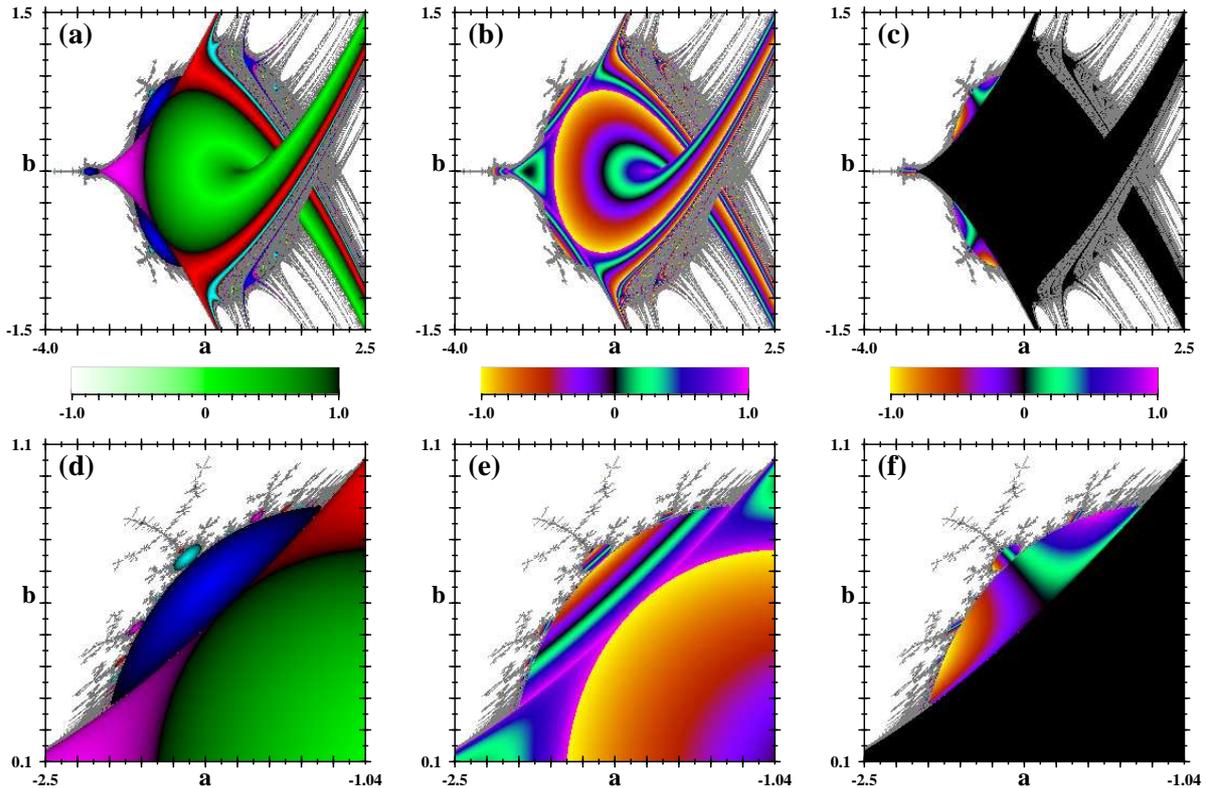


Figura 3.16: Diagramas de fase da forma normal do mapa cúbico Eq. 3.8 com $s = -1$ mostrando: a norma $|m_k|$ (coluna 1), a parte real m_{kx} (coluna 2) e a parte imaginária m_{ky} (coluna 3) do multiplicador $m_k \equiv (m_{kx}, m_{ky})$.

A Fig. 3.16 corresponde ao caso $s < 0$, onde a primeira coluna mostra os diagramas de fase com a norma do multiplicador $|m_k|$, a segunda coluna com a parte real do multiplicador $\Re(m_k)$ e a terceira com a parte imaginária $\Im(m_k)$. Notar os domínios em cor preta da Fig. 3.16(c) que denotam parte imaginária nula $\Im(m_k) = 0$, refletindo o fato que na estrutura arredondada as órbitas estáveis são reais, assim como na parte triangular do “tricorn”. Na Fig. 3.16(b), que mostra a parte real do multiplicador, pode-se apreciar a típica alternância das bifurcações de dobramento de período ($m_{kx} = -1$) e as bifurcações tangentes ($m_{kx} = 1$), no meio das quais temos em cor preta os “loci” superestáveis caracterizados por $m_{kx} = 0$.

Na segunda linha da Fig. 3.16 está ampliado o domínio correspondente ao conjunto tipo-Mandelbrot que nasce da tangência da bifurcação de dobramento de período (tom amarelo) com a bifurcação tangente (tom magenta). A parte real do multiplicador Fig. 3.16(e) mostra que tanto o corpo principal do “cactus” como cada “flor” que dele nasce, i.e., cada domínio individual de estabilidade, está dividido em dois quadrantes, tendo cada um deles paridades distintas $m_{kx} < 0$ ou $m_{kx} > 0$, e as linhas que delimitam estas regiões de paridade distinta

estão definidas por $m_{kx} = 0$. O mesmo acontece com a parte imaginária do multiplicador na Fig. 3.16(f), já que esta também define linhas $m_{ky} = 0$ que separam quadrantes com paridades distintas. Quando duas destas linhas se intersectam, definem os “centros” de estabilidade dentro de cada flor (domínio periódico) caracterizados por $m_k = (m_{kx}, m_{ky}) = 0$ também visíveis quando plotamos diretamente a norma do multiplicador (ver Fig. 3.16(d)).

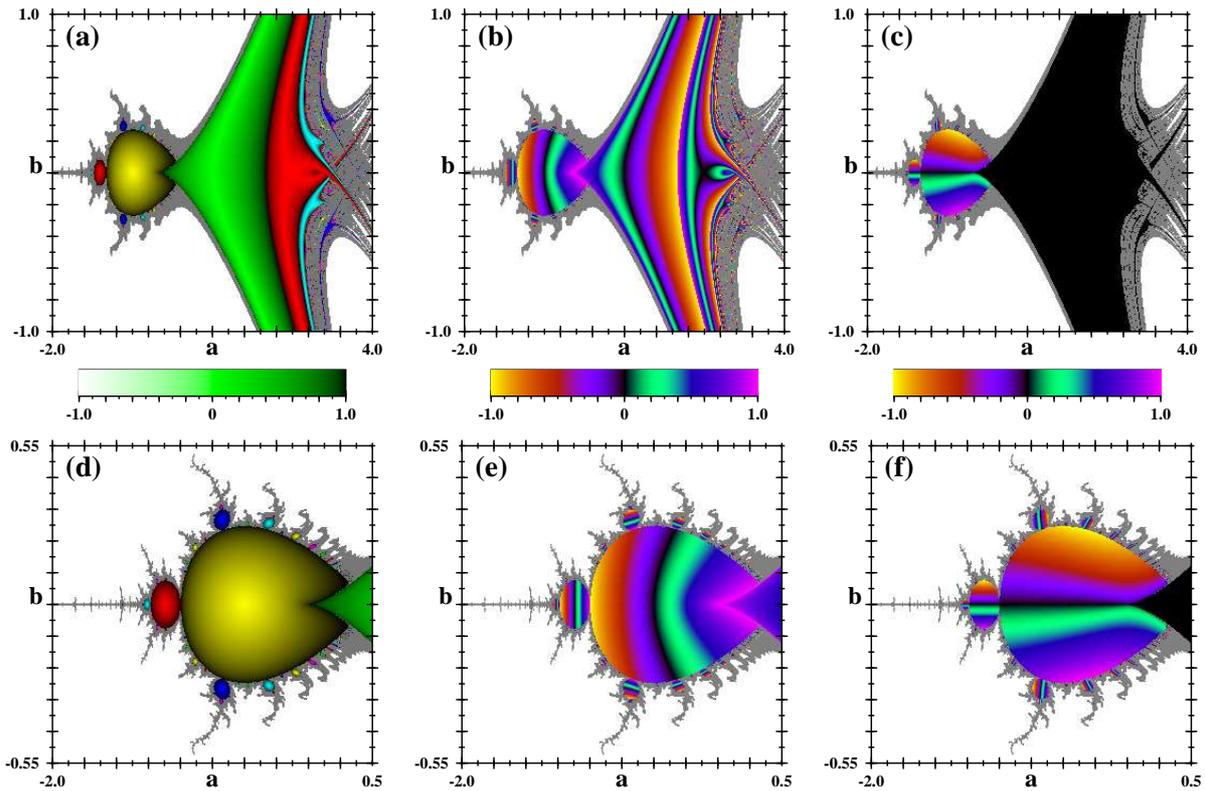


Figura 3.17: Diagramas de fase da forma normal do mapa cúbico Eq. 3.8 com $s = 1$ mostrando: a norma $|m_k|$ (coluna 1), a parte real m_{kx} (coluna 2) e a parte imaginária m_{ky} (coluna 3) do multiplicador $m_k \equiv (m_{kx}, m_{ky})$.

Desta maneira, as linhas dadas por $\Re(m_k) = 0$ e $\Im(m_k) = 0$ definem “eixos de simetria”, tanto no corpo principal do “cactus”, como em cada “flor” que nasce do cactus.

Por outro lado também notamos da Fig. 3.16(e) que a parte real do multiplicador $\Re(m_k)$ é a que rege o nascimento de flores via bifurcação de dobramento de período ao longo do eixo de simetria dado por $\Im(m_k) = 0$.

A Fig. 3.17 mostra os multiplicadores para o caso $s > 0$. De maneira similar ao caso anterior, também neste notamos que os domínios em preto na Fig. 3.17(c) correspondentes à estrutura cuspidal tem parte imaginária do multiplicador nula, devido a que nestas regiões só temos órbitas estáveis reais. A partir das ampliações da segunda linha notamos que, de novo neste caso, os loci definidos por $\Re(m_k) = 0$ definem cortes transversais dentro de cada flor, enquanto que os loci $\Im(m_k) = 0$ definem cortes longitudinais que, por sua vez, também separam quadrantes de paridades distintas.

A Fig.3.18 mostra alguns detalhes adicionais encontrados. Por exemplo, o fato de plotarmos o produto $m_{kx}m_{ky}$ nos permite olhar simultaneamente os dois eixos, transversal e longitudinal, que dividem cada domínio isoperiódico em quatro quadrantes, definindo desta maneira uma espécie de “sistema de coordenadas cartesiano” em cada flor. Uma flor de período 5 é mostrada ampliada

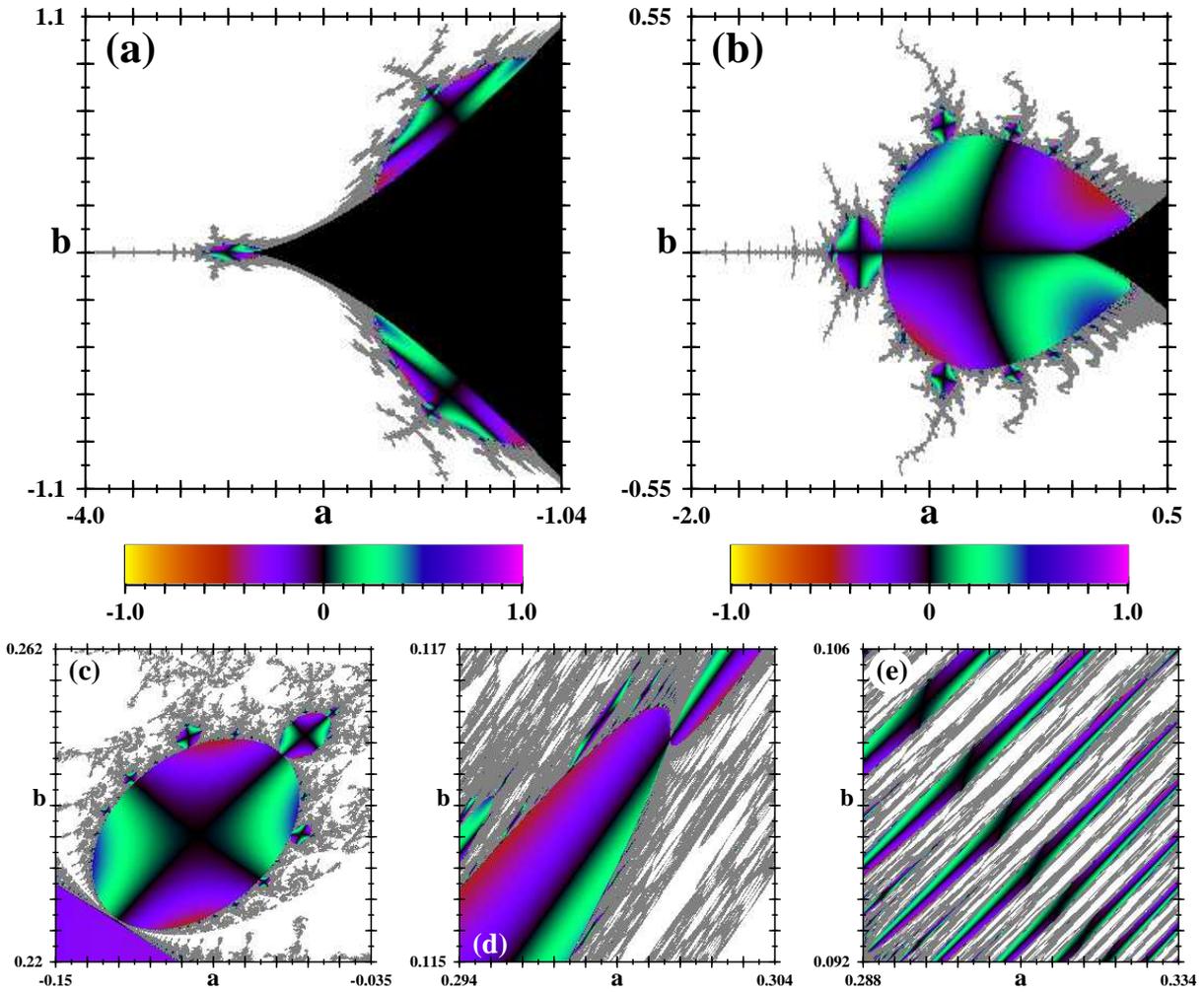


Figura 3.18: Linha superior: Diagramas de fase de ambas formas normais (esquerda, $s = -1$, direita, $s = 1$) mostrando o produto $m_{kx}m_{ky}$ das partes real m_{kx} e imaginária m_{ky} dos multiplicador $m_k \equiv (m_{kx}, m_{ky})$. Linha inferior: Ampliações de algumas zonas de interesse.

na Fig. 3.18(c). Nela notamos que o eixo longitudinal definido pelo locus $\Im(m_k) = 0$ segue sempre uma linha reta à medida que a flor de período k vai dobrando seu período *ad infinitum* ao longo deste eixo. Porém, à medida que nos aproximamos do ponto de acumulação p_∞^+ (3.22), as flores maiores de período k vão ficando cada vez mais delgadas e as flores secundárias que nascem da bifurcação de dobramento de período, vão nascendo cada vez mais deslocadas na direção da zona de acumulação, conforme mostra uma ampliação da flor de período 13 na Fig. 3.18(d), porém como mencionado anteriormente o eixo que define o corte longitudinal na flor permanece reto. Este padrão da Fig. 3.18(d), observado no espaço de parâmetros lembra em certa forma o *nó degenerado* [22] do espaço de fases (Fig. 3.19(a)). No espaço de fases um nó degenerado pode ser entendido como uma deformação dum *nó ordinário*. O nó ordinário tem duas auto-direções independentes; todas as trajetórias são paralelas à auto-direção lenta, à medida que $t \rightarrow \infty$, e à auto-direção rápida, à medida que $t \rightarrow \infty$ (Fig. 3.19(b)). Supondo que os parâmetros do sistema sejam variados de tal forma que as duas auto-direções se cortem mutuamente, então algumas das trajetórias ficam comprimidas na região de colapso entre as duas auto-direções, enquanto que as trajetórias que sobrevivam serão puxadas localmente para formar o nó degenerado (Fig. 3.19(c)).

No caso das flores do “cactus” esse padrão de “nó degenerado” no espaço de parâmetros se forma à medida que as flores se aproximam do ponto de acumulação. Lembramos que no caso do conjunto de Mandelbrot existe esta semelhança entre o espaço de parâmetros e o espaço de fases, que é chamada de “compressão de imagem” (ver Fig. 2.4 na página Fig. 28), conforme foi mencionado no capítulo 2. Portanto, o fenômeno descrito anteriormente pode ser visto semelhantemente, como um tipo de “compressão de imagem” nos conjuntos tipo-Mandelbrot.

Outro dos fenômenos encontrados na zona de acumulação é ilustrado na Fig. 3.18(e), na qual se pode apreciar claramente que o eixo transversal das flores, definido por $\Re(m_k) = 0$, vai girando em direção ao eixo longitudinal das flores definido por $\Im(m_k) = 0$, alinhando-se com este à medida que nos aproximamos do ponto de acumulação. Na verdade, é isto o que faz com que as flores menores vão nascendo cada vez mais deslocadas na direção da zona de acumulação já que, como foi mencionado anteriormente, a parte real do multiplicador $\Re(m_k)$ é a que rege o nascimento das flores secundárias, via bifurcações de dobramento de período. No limite no ponto de acumulação os eixos transversal e longitudinal coincidem, em total contraste com o que ocorre no caso do conjunto de Mandelbrot, conforme será mostrado na Seção seguinte.

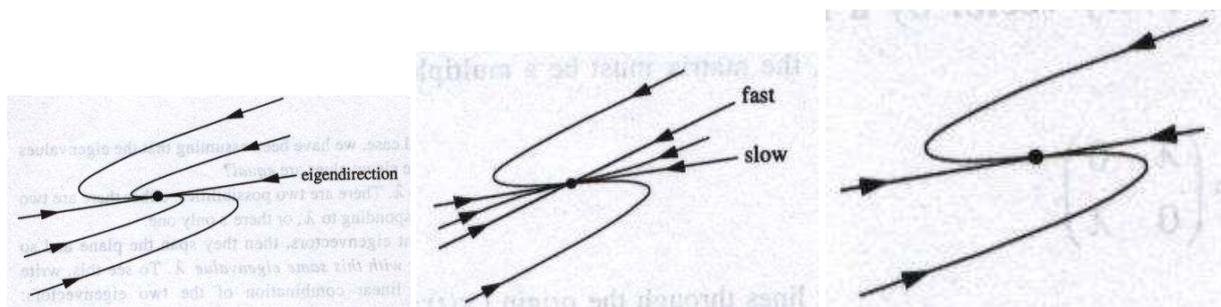


Figura 3.19: a) Padrão típico dum nó degenerado no espaço de fases. b) Nó ordinário. c) Nó degenerado. Figuras extraídas do livro de Strogatz [22].

3.4.1 Coordenadas locais

Tínhamos visto que a parte real $\lambda_x \equiv \Re(m_k)$ e imaginária $\lambda_y \equiv \Im(m_k)$ dos multiplicadores nos fornecia uma espécie de sistema de coordenadas cartesianas em cada “flor” (domínio isoperiódico), com $\lambda_x = 0$ e $\lambda_y = 0$ definindo os eixos de simetria transversal e longitudinal, respectivamente. Em particular é simples de se obter as expressões algébricas que definem os loci para um valor arbitrário λ_x e λ_y , para os domínios de período 1. Fazendo uma eliminação das variáveis dinâmicas x e y entre as equações orbitais de período 1

$$\begin{aligned} s x(x^2 - 3y^2 - a) + x - b &= x, \\ -s y(y^2 - 3x^2 + a) + y &= y, \end{aligned}$$

e suas respectivas equações de autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_x &= (3x^2 - 3y^2 - a) + 1, \\ \lambda_y &= 6xy. \end{aligned}$$

Quando deixamos em função da variável λ_x as equações se fatorizam nas variedades

$$\begin{aligned} W_1(a, b, s; \lambda_x) &\equiv 27sb^2 - (\lambda_x + sa - 1)(\lambda_x - 2sa - 1)^2 \\ &= s(27b^2 - 4s^2a^3) + (3s - 6s\lambda_x + 3s\lambda_x^2)a + \end{aligned}$$

$$1 + 3\lambda_x^2 - 3\lambda_x - \lambda_x^3, \quad (3.97)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_x \equiv & s(27b^2 - 4s^2a^3) + (18s^2\lambda_x - 18s^2)a^2 + \\ & (-24s\lambda_x^2 - 24s + 48s\lambda_x)a + 8\lambda_x^3 - 8 + 24\lambda_x - 24\lambda_x^2. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Onde $\lambda_x = \cos(2\pi n/k)$, com $n = 1, 2, \dots, k-1$ e $k = 1, 2, \dots$. A primeira delas não é outra coisa que a variedade W_1 (3.16) obtida anteriormente, que define os loci das órbitas estáveis reais de período 1 com um auto-valor (multiplicador) arbitrário λ_x , dentro da estrutura cuspidal e arredondada, uma vez que os parâmetros dentro delas dão lugar a órbitas com um multiplicador real $\lambda = \lambda_x$. Entretanto, a variedade Λ_x nos fornece os loci para um λ_x arbitrário dentro do “cactus” de período 1 mostrado na Fig. 3.20. Notar que em ambas variedades 3.97 e 3.98 aparece como primeiro termo a variedade da bifurcação tangente W_{1+} (3.17), e aproveitando que temos a expressão algébrica dos loci em função de $\alpha = 2\pi n/k$ podemos tomar o limite quando $k \rightarrow \infty$, i.e., $\lambda_x \rightarrow 1$, e obter a forma assintótica das variedades W_1 e Λ , fazendo isto na (3.97) e (3.98) verificamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_x = W_{1+} = 27b^2 - 4s^2a^3, \quad (3.99)$$

a bifurcação tangente é o limite assintótico das variedades W_1 e Λ_x .

São de particular interesse os loci que conectam pontos simétricos de nascimento das flores caracterizados pelos números de rotação $\frac{n}{k}$. Assim por exemplo a Fig. 3.20(d) mostra os loci que passam pelos pontos de nascimento das flores da *família-1*. Pode-se notar que à medida que nos aproximamos ao ponto de acumulação p_∞^+ , i.e., à medida que o período $k \rightarrow \infty$, os loci Λ_x tendem para a bifurcação tangente.

Por outro lado, para a parte imaginária do multiplicador, fazendo a eliminação das variáveis dinâmicas e deixando em função da variável λ_y as equações se fatorizam nas variedades

$$\begin{aligned} W_{1+} &= 27b^2 - 4s^2a^3, \quad (3.100) \\ \Lambda_y &\equiv 6912\lambda_y^2s^4(9a^2 + 4\lambda_y^2)^2 + 1259712b^2(27b^2 + 4s^2a^3) \\ &= 6912\sin\left(\frac{2\pi n}{k}\right)s^4\left(9a^2 + 4\sin\left(\frac{2\pi n}{k}\right)^2\right)^2 + 1259712b^2(27b^2 - 4s^2a^3). \end{aligned} \quad (3.101)$$

A primeira delas é a mesma bifurcação tangente W_{1+} já obtida anteriormente (3.17). Enquanto que a variedade Λ_y nos fornece os loci para λ_y arbitrário. A forma desta família de loci Λ_y se assemelha à forma dum potencial atrativo à medida que o período cresce tal como mostra a Fig. 3.20, ao mesmo tempo que vai-se alinhando com o locus Λ_x . A obtenção da variedade assintótica quando $k \rightarrow \infty$ é imediata a partir da (3.101), uma vez que $\alpha \rightarrow 0$ e $\sin(\alpha) \rightarrow 0$. Portanto também neste caso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_y = W_{1+} \quad (3.102)$$

a variedade assintótica é a bifurcação tangente.

Outro ponto a mencionar é que os loci definidos por $\Re(m_k) = 0$ e $\Im(m_k) = 0$ definem eixos de simetria, no caso concreto mostrado na Fig. 3.20(e) estes eixos passam pelos pontos de nascimento das flores com números de rotação: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Esta simetria dos números de rotação respeito ao eixo horizontal é plausível notando que uma flor com número de rotação $\frac{n}{k}$ localizada no quadrante superior está ligada a sua parceira simétrica com número de rotação $\frac{n'}{k'} = 2\frac{n}{k}$. Da mesma forma temos uma simetria entre os números de rotação no quadrante esquerdo do eixo de

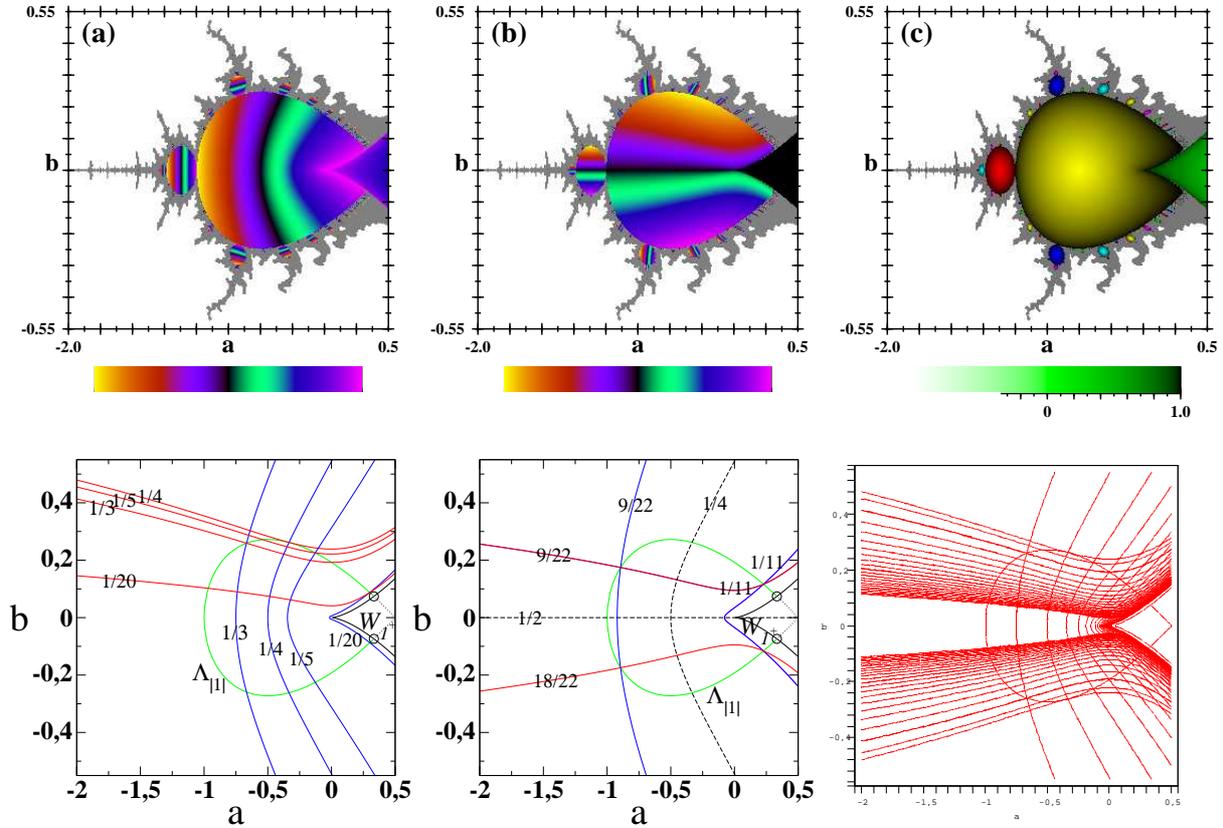


Figura 3.20: Diagramas de fase da forma normal do mapa cúbico Eq. 3.8 com $s = 1$ mostrando: a) $\Re(m_k)$, b) $\Im(m_k)$ e c) $|m_k|$. Linha inferior: Loci $\Lambda_x = cte$ e $\Lambda_y = cte$.

simetria vertical, que neste caso está associado à flor com número de rotação $\frac{1}{4}$, já que as flores com número de rotação $\frac{n}{k}$ localizadas no quadrante direito estão ligadas às flores localizadas no quadrante esquerdo com números de rotação $\frac{n'}{k'} = \frac{1}{4} + |\frac{n}{k} - \frac{1}{4}|$. Esta simetria não é outra coisa que a simetria do círculo com respeito a um sistema de coordenadas que passa pelo seu centro, mostrando desta forma que a estrutura interna de cada flor é isomorfa à estrutura interna do círculo de raio unitário, uma vez que os números de rotação ao longo da fronteira do cactus seguem o mesmo ordenamento que os números racionais do círculo unitário.

A Fig. 3.20(f) nos dá uma ideia do que seria o “sistemas de coordenadas cartesiano” dentro de cada flor, sistema definido pelas iso-curvas $\Lambda_x = cte$ e $\Lambda_y = cte$. Como será visto na seção a seguir, no caso quadrático do conjunto de Mandelbrot as iso-curvas verticais $\Lambda_x = cte$ são semelhantes às do caso cúbico, enquanto que as iso-curvas horizontais $\Lambda_y = cte$ que deveriam definir os eixos horizontais, degeneram em parábolas que conectam os extremos dos eixos horizontais do quadrante superior do círculo unitário com os seus eixos horizontais localizados no quadrante inferior, ver Fig. 3.30 na página 81. Esta degenerescência ocorre porque, o sistema de coordenadas equivalente no círculo unitário é deformado não linearmente, ocasionando que o ponto de acumulação localizado inicialmente em $(a, b) = (1, 0)$ seja deslocado para o interior do círculo devido à bifurcação tangente no ponto raiz $(a, b) = (1/4, 0)$ do conjunto de Mandelbrot.

Enquanto que no caso cúbico mostrado na Fig. 3.20(f) este ponto raiz é esticado ao longo da curva de bifurcação tangente, de maneira que a bifurcação tangente rompe a ligação existente entre os eixos horizontais do quadrante superior e inferior, produzindo uma espécie de quebra da simetria do caso quadrático. Mas por sua vez também ocasiona uma perturbação ao sistema de

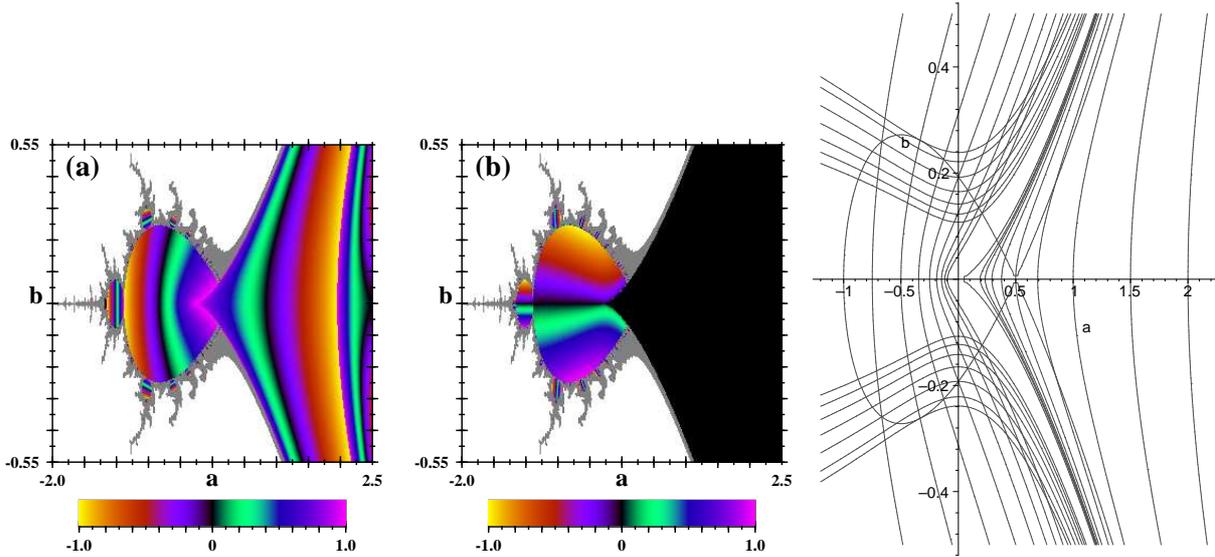


Figura 3.21: Diagramas de fase da forma normal do mapa cúbico Eq. 3.8 com $s = 1$ mostrando: a) $\Re(m_{kx})$ e b) $\Im(m_{ky})$. Loci correspondentes aos números de rotação da família-1 de flores.

coordenadas do círculo unitário, curvando o seu espaço de parâmetros, e fazendo com que os eixos horizontais e os verticais fiquem alinhados perto do locus tangente. Longe da bifurcação tangente, ou mais explicitamente longe da tangência de curvas a perturbação no sistema de coordenadas diminui e o sistema coordenado tem os eixos quase perpendiculares muito semelhantes a um sistema de coordenadas equivalente no círculo unitário, ver Fig. 3.30 na página 81.

Assim, poderíamos concluir dizendo que, as tangências no espaço de parâmetros produzem perturbações que levantam degenerescências (quebram simetrias) e também curvam o espaço de parâmetros localmente.

A Fig. 3.21 ressalta a simetria entre os domínios de estabilidade correspondentes a órbitas complexas e reais. Olhando os domínios de período 1, notamos que no “cactus” de período 1 o valor de λ_x varia continuamente desde -1 passando por 0 até alcançar 1 na bifurcação tangente. Logo no domínio cuspidal de período 1 varia inversamente, i.e., de 1 até -1 na bifurcação de dobramento de período. Um aspecto interessante é notar que fazendo uso dos mesmos números de rotação da família 1 do “cactus” de período 1, se pode desenhar os loci $W_1(\lambda_x = \cos(2\pi n/k)) = cte$ (3.97) dentro da estrutura cuspidal de período 1, tal como foi na Fig. 3.21(c). Se pode observar que neste caso que à medida que $k \rightarrow \infty$ os loci $W_1(\lambda_x) = cte$ se acumulam na direção à bifurcação tangente W_{1+} (3.97). Isto nos faz crer que a estrutura e o ordenamento interno nos conjuntos tipo-Mandelbrot é isomorfa à estrutura e o ordenamento interno dos domínios das órbitas reais, “shrimps”. Podendo estes últimos de alguma forma ser ordenados fazendo uso dos números de rotação, que regem o ordenamento das flores dos conjuntos tipo-Mandelbrot.

3.5 Comparação com as flores do conjunto de Mandelbrot

Em continuação fazemos uma comparação entre as propriedades métricas das flores dos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa estudadas na seção anterior, com as propriedades métricas equivalentes das flores do prototípico conjunto de Mandelbrot definido

matematicamente como $\mathcal{M} = \{c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}$ onde $z = 0$ é o ponto crítico do mapa

$$\begin{aligned} z_{t+1} = Q_c(z) &\equiv c - z^2, & z &\equiv x + iy \\ c &\equiv a + ib \end{aligned} \quad (3.103)$$

e $Q_c^n(z)$ denota a n -ésima composição do mapa com ele próprio [104, 105]. Isto com a finalidade de conhecer quais são essencialmente as propriedades métricas que os distinguem, assim como as que são comuns a ambos tipos de conjuntos, se é que elas existem.

Começando pelas velocidades de acumulação das flores nas direções de acumulação. Neste caso também precisamos obter os pontos $(a_{(k,b)}, b_{(k,n)})$ onde as flores nascem. Da mesma forma que para o caso cúbico, numa primeira instância estes pontos foram obtidos de forma aproximada, resolvendo numericamente um sistema de equações similar ao sistema Eq.(3.27a) e Eq.(3.27b), porém este procedimento não será mostrado aqui. Diretamente passamos a deduzir as expressões exatas dos mencionados pontos. Para isto de novo recorreremos às equações orbitais de período 1 dadas por

$$c + z^2 = z, \quad (3.104)$$

$$a + x^2 - y^2 = x, \quad (3.105)$$

$$b + 2xy = y. \quad (3.106)$$

A partir das quais podemos expressar os parâmetros a e b em termos de x e y :

$$a = x - x^2 + y^2, \quad (3.107)$$

$$b = y - 2xy. \quad (3.108)$$

A estabilidade do ponto fixo (soluções da Eq.3.104) é dada pelo multiplicador

$$\lambda = 2z,$$

$$\lambda_x + i\lambda_y = 2(x + iy). \quad (3.109)$$

Então teremos uma k -furcação de período k (processo de nascimento das flores) quando λ for a k -ésima raiz da unidade:

$$\lambda = 1 = e^{i2\pi n/k},$$

$$\lambda_x + i\lambda_y = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), \quad (3.110)$$

onde $\alpha = 2\pi n/k$, ($n = 1 \dots k - 1$). Por tanto nesta k -furcação

$$\lambda_x = 2x = \cos(\alpha) \quad (3.111)$$

$$\lambda_y = 2y = \sin(\alpha). \quad (3.112)$$

e isolando x e y temos

$$x = \frac{\cos(\alpha)}{2}, \quad (3.113)$$

$$y = \frac{\sin(\alpha)}{2}. \quad (3.114)$$

$$(3.115)$$

Finalmente substituindo as equações (3.114) e (3.115) nas (3.108) e (3.108) obtemos os pontos de nascimento das flores no espaço de parâmetros:

$$a_{(k,b)} = \frac{\cos(\alpha)}{2} - \frac{\cos(\alpha)^2}{4} + \frac{\sin(\alpha)^2}{4}, \quad (3.116)$$

$$b_{(k,n)} = \frac{\sin(\alpha)}{2} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{2}, \quad (3.117)$$

onde lembramos que $\alpha = 2\pi n/k$ com $(n = 1 \dots k - 1)$. A partir destas expressões se verifica imediatamente, tomando o limite $k \rightarrow \infty$ e $\alpha \rightarrow 0$ que o ponto raiz do conjunto de Mandelbrot esta localizado em $(a, b) = (\frac{1}{4}, 0)$.

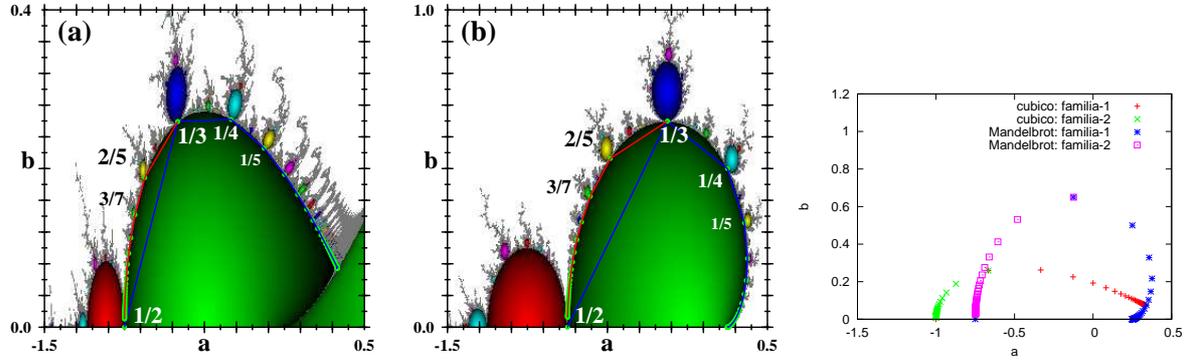


Figura 3.22: a) Conjunto tipo Mandelbrot da dinâmica cúbica com $s = +1$. b) Conjunto de Mandelbrot. c) Pontos de nascimento das flores das *famílias-1* e *2* dos conjuntos a) e b).

A Fig.3.22(b) mostra as flores do conjunto de Mandelbrot rotuladas com os números de rotação $\frac{n}{k}$. Em particular as famílias de flores: *família-1* e *2* estão mostradas unidas pelas longitudes l_k definidas anteriormente. Como neste caso também temos as expressões exatas dos pontos de nascimento das flores, então podemos obter os valores limite das velocidades r_{ak} , r_{bk} e r_{lk} de forma analítica para ambas famílias. Assim por exemplo procedemos com o cálculo da velocidade limite $r_{bc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{bk}$ para a *família-1*. Levando em conta que como $\alpha = 2\pi n/k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, podemos usar de novo as aproximações

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} \quad \sin(\alpha) \approx \alpha. \quad (3.118)$$

na Eq.(3.117) para obter

$$b_{(k,n)} = \frac{\sin(\alpha)}{2} - \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{2} \approx \frac{2\pi^3 n^3}{k^3}. \quad (3.119)$$

Com esta aproximação a velocidade r_{bk} está dada por

$$r_{bk} = \frac{\left| \frac{2\pi^3 n^3}{(k-1)^3} - \frac{2\pi^3 n^3}{k^3} \right|}{\left| \frac{2\pi^3 n^3}{k^3} - \frac{2\pi^3 n^3}{(k+1)^3} \right|} \quad (3.120)$$

com $n = 1$ para a *família-1*. Logo, depois de alguma álgebra e tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ obtemos finalmente

$$r_{bc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{3k(k-1) + 1(k+1)^3}{3k(k+1) + 1(k-1)^3} \right| \rightarrow 1 \quad (3.121)$$

De maneira similar no caso da *família-2*, usando a aproximação Eq. 3.119 a velocidade de convergência na direção do parâmetro b está dada por

$$r_{bk} = \frac{\left| \frac{2\pi^3 (n-1)^3}{(k-2)^3} - \frac{2\pi^3 n^3}{k^3} \right|}{\left| \frac{2\pi^3 n^3}{k^3} - \frac{2\pi^3 (n+1)^3}{(k+2)^3} \right|} \quad (3.122)$$

que depois de alguma álgebra no limite quando $k \rightarrow \infty$ nos conduz a

$$r_{bc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{n^3[6k(k-1) + 8] - k^3[3n(n-1) + 1](k+2)^3}{n^3[6k(k+1) + 8] - k^3[3n(n+1) + 1](k-2)^3} \right| \rightarrow 1 \quad (3.123)$$

Uma exploração dos demais limites via as linhas de Maple adjuntas no apêndice B, mostra que também as velocidades r_{ak} e r_{lk} verificam os seguintes valores limites para ambas as famílias:

$$r_{ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n=1} \frac{|a_{(k-1,n)} - a_{(k,n)}|}{|a_{(k,n)} - a_{(k+1,n)}|} \rightarrow 1, \quad (3.124)$$

$$r_{ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{|a_{(k-2,n-1)} - a_{(k,n)}|}{|a_{(k,n)} - a_{(k+2,n+1)}|} \rightarrow 1, \quad (3.125)$$

$$r_{lc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n=1} \frac{l_k}{l_{k+1}} \rightarrow 1, \quad (3.126)$$

$$r_{lc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{l_k}{l_{k+2}} \rightarrow 1. \quad (3.127)$$

Estes resultados analíticos são confirmados pelos resultados numéricos que são descritos a continuação. Na Fig. 3.23 estão mostrados juntos os resultados numéricos correspondentes tanto ao conjunto tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa como ao conjunto de Mandelbrot. A linha superior da Fig. 3.23 mostra o comportamento das longitudes l_k , enquanto que a linha inferior exhibe as velocidades de convergência r_{lk} . A Fig. 3.23(a) mostra o decaimento das longitudes para seu valor limite nulo, $l_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} l_k \rightarrow 0$. Na Fig. 3.23(c) vemos que as longitudes l_k da *famílias-1* decai com a mesma lei de potência $\gamma \approx -2$ independentemente se a *famílias-1* pertencem ao conjunto tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa ou ao conjunto de Mandelbrot (i.e. independentemente da não linearidade). O mesmo ocorre para *famílias-2*, só que neste caso $\gamma \approx -2$ (ver Tabela 3.6).

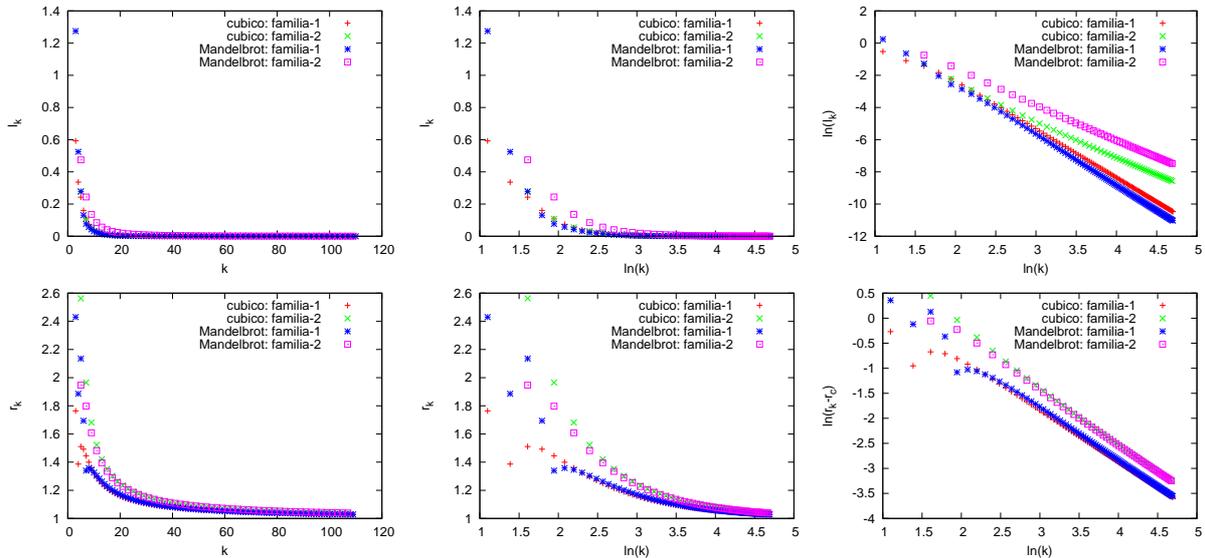


Figura 3.23: Comportamento das longitudes l_k e velocidades de convergência r_{lk} das flores das famílias: *família-1* e *família-2* do conjunto tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica e do conjunto de Mandelbrot. Linha superior: l_k . Linha inferior: r_{lk} .

Por outro lado a Fig. 3.23(d) mostra que a velocidade de convergência r_{lk} tende para o **mesmo** valor limite, $r_{lc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{lk} \rightarrow 1$, independentemente da não linearidade e a família

de flores considerada, o que sugere uma propriedade mais geral comum a ambos conjuntos, que possivelmente seja um reflexo das propriedades métricas dos conjuntos de números de rotação que rotulam as flores, conforme foi discutido na seção anterior para o caso cúbico complexo. Ou quiça também esta propriedade esteja relacionada com algumas propriedades métricas dos chamados “raios externos”, como será discutido mais adiante.

Passamos agora ao tema das áreas das flores de ambos conjuntos. Comparando as figuras Fig. 3.22(a) e Fig. 3.22(b) na página anterior se pode indagar que o decaimento das áreas A_k para seu valor limite nulo $A_c \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \rightarrow 0$, teria que ser mais rápido no caso do conjunto de Mandelbrot. Esta suposição é confirmada pela Fig. 3.24(d) na qual estão mostrados juntos os decaimentos das áreas A_k de ambos conjuntos. No caso da dinâmica cúbica tínhamos que o decaimento seguia uma lei de potência com $\gamma \approx -3$, enquanto que na dinâmica quadrática este decaimento também segue uma lei de potência mas é muito mais rápido, $\gamma \approx -5$ (ver Tabela 3.8).

Porém apesar da diferença anterior, a taxa de diminuição das áreas r_{A_k} no limite quando $k \rightarrow \infty$ é a **mesma** $r_{Ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{A_k} \rightarrow 1$, para ambos conjuntos conforme mostra a Fig. 3.24(c), na qual estão plotadas as taxas de convergência r_{A_k} de ambos conjuntos, prestar atenção sobretudo aos períodos baixos onde a medida numérica das áreas das flores é mais precisa. Porém de novo neste caso assim como no caso cúbico podemos confirmar esta convergência usando o fato que também na dinâmica quadrática as áreas das flores decaem com uma lei de potência $A_k \sim k^\gamma$, com $\gamma = -5$. Então tomando o limite temos

$$r_{Ac} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{k^\gamma}{(k+1)^\gamma} = \frac{(k+1)^5}{k^5} \rightarrow 1. \tag{3.128}$$

Adicionalmente a Fig. 3.24(e) inclusive mostra que a lei de potência com que esta velocidade limite $r_{Ac} \rightarrow 1$ é alcançada é a mesma para ambos conjuntos, conforme mostram as pendentes de ambas retas que em ambos casos são $\gamma \approx -2$ (ver também os dados da Tabela 3.8).

Tabela 3.6: Constantes α e γ obtidas por regressão linear para: $l_k = \alpha k^\gamma$ da dinâmica cúbica e quadrática.

	Dinâmica cúbica		Dinâmica quadrática	
	família-1	família-2	família-1	família-2
$\ln(\alpha)$	3.73528 ± 0.001058	1.47433 ± 0.01725	3.84447 ± 0.009588	2.42569 ± 0.01344
γ	-3.02263 ± 0.0002631 ($r^2 = -0.990$)	-2.14424 ± 0.00416 ($r^2 = -0.995$)	-3.16832 ± 0.002384 ($r^2 = -0.990$)	-2.11515 ± 0.003242 ($r^2 = -0.995$)

A seguir, descrevemos brevemente o conceito de linhas de campo (raios externos) do conjunto de Mandelbrot e algumas das suas propriedades métricas, com a intenção de tentar explicar as convergências: $r_{lc} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{lk} \rightarrow 1$ e $r_{Ac} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} r_{A_k} \rightarrow 1$, comuns tanto aos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa como ao conjunto de Mandelbrot.

Apesar de fazermos a descrição dos raios externos para o conjunto de Mandelbrot, estes também estão completamente definidos nos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa [117, 118].

Assim, olhando para o espaço de fases, começamos lembrando que é sabido que, se $c = (a, b) \in \mathcal{M}$ então o “filled-in Julia set”, K_c associado a este parâmetro c é conexo [100].

Também é conhecido que existe um mapeamento um-a-um e biholomórfico $\S \phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus D$ (onde D é o disco unitário fechado), para o qual $\phi_c(z) \sim z$ quando $z \sim \infty$, e que satisfaz o

\S ambos ϕ_c e ϕ_c^{-1} são holomórficos i.e. analíticos complexos.

Tabela 3.7: Constantes α e γ obtidas por regressão linear para: $r_{lk} - r_c = \alpha k^\gamma$ da dinâmica cúbica e quadrática.

	Dinâmica cúbica		Dinâmica quadrática	
	r_{lk}		r_{lk}	
	família-1	família-2	família-1	família-2
$\ln(\alpha)$	1.23841 ± 0.002008	1.8171 ± 0.009516	1.37685 ± 0.002211	1.74773 ± 0.007698
γ	-1.02788 ± 0.0005002 ($r^2 = -0.990$)	-1.08421 ± 0.002303 ($r^2 = -0.995$)	-1.05193 ± 0.0005506 ($r^2 = -0.990$)	-1.07052 ± 0.001863 ($r^2 = -0.995$)

Tabela 3.8: Constantes α e γ obtidas por regressão linear para: $A - A_c = \alpha k^\gamma$ e $r_{Ak} - r_c = \alpha k^\gamma$, correspondentes à família-1 da dinâmica cúbica e quadrática.

	família-1			
	A_k		r_{Ak}	
	Dinâmica cúbica	Dinâmica quadrática	Dinâmica cúbica	Dinâmica quadrática
$\ln(\alpha)$	12.1752 ± 0.07825	14.6084 ± 0.3259	3.8529 ± 0.322	4.39792 ± 0.6292
γ	-3.00356 ± 0.03374 ($r^2 = -0.961$)	-5.04401 ± 0.1406 ($r^2 = -0.961$)	-2.15935 ± 0.1733 ($r^2 = -0.976$)	-2.13165 ± 0.356 ($r^2 = -0.979$)

seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} \setminus D & \xleftarrow{\phi_c} & \mathbb{C} \setminus K_c \\
 f_0 \downarrow & & \downarrow f_c \\
 \mathbb{C} \setminus D & \xleftarrow{\phi_c} & \mathbb{C} \setminus K_c
 \end{array} \tag{3.129}$$

Em outras palavras, $f_0(z) = \phi_c(f_c(\phi_c^{-1}(z)))$, i.e. a iteração de f_0 fora de D é equivalente à iteração de f_c fora de K_c [100, 134].

Como uma consequência imediata temos que

$$g_c(z) = \log(|\phi_c(z)|) \tag{3.130}$$

é a *função potencial* para K_c . As curvas equipotenciais de D são justamente círculos concêntricos e as curvas equipotenciais de K_c podem ser obtidas como imagens desses círculos através de ϕ_c^{-1} . Uma representação importante do potencial $g_c(z)$ para propósitos gráficos e matemáticos é dada por [100]:

$$g_c(z_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |z_{t+1}|}{2^t}, \tag{3.131}$$

onde $z_{t+1} = Q_c(z) \equiv c - z_t^2$, $t = 1, 2, \dots$. A convergência é muito rápida sempre que $|z_{t+1}|$ seja grande. Usando esta informação no espaço de fases Douady e Hubbard [135] estenderam este resultado para o espaço de parâmetros, demonstrando que existe um mapeamento um-a-um e biholomórfico

$$\Phi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \setminus D \tag{3.132}$$

$D = \{z : |z| \leq 1\}$, que é dado por $\Phi(c) = \phi_c(c)$. Que fornece uma função potencial para \mathcal{M}

$$G(c) = \log|\Phi(c)|, \tag{3.133}$$

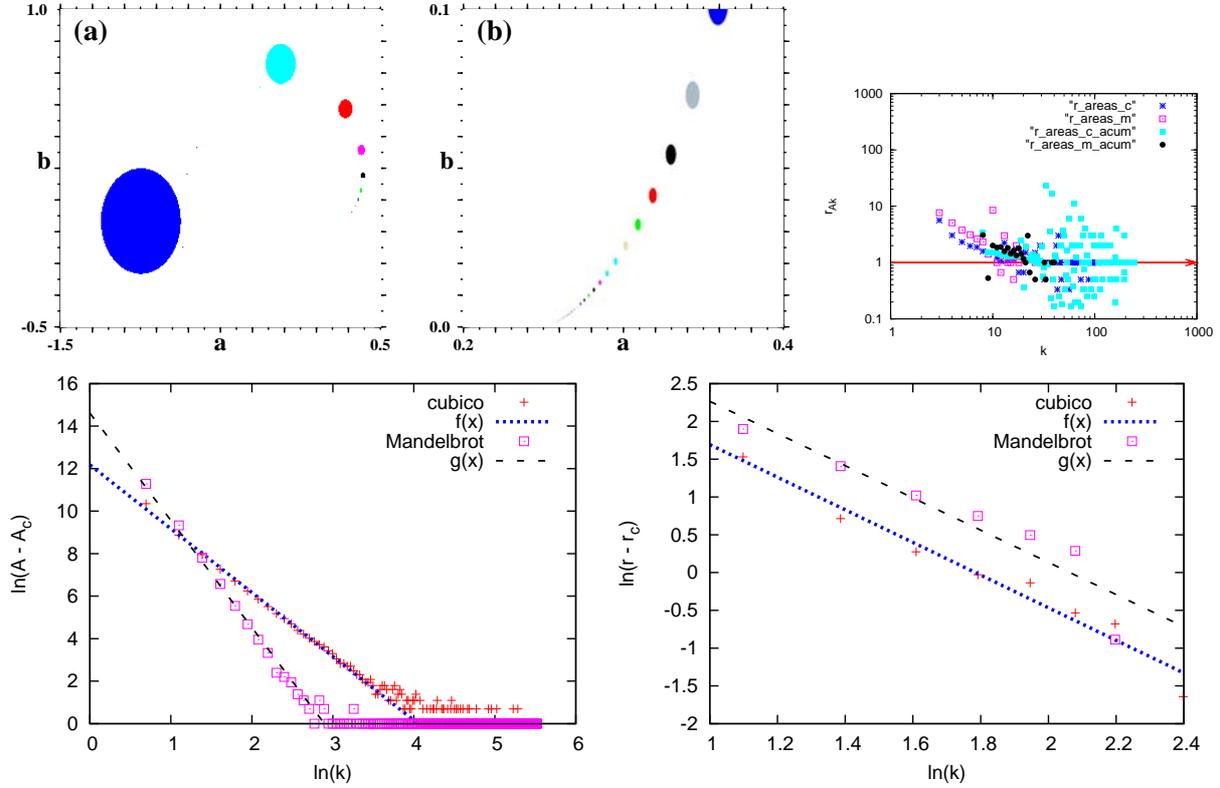


Figura 3.24: Comportamento das áreas A_k das flores da *família-1* do conjunto tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica e do conjunto de Mandelbrot. O ultimo gráfico mostra o comportamento das velocidades de convergência r_{A_k} das áreas das flores da *família-1* de ambos conjuntos.

que, de maneira similar à Eq.(3.131), pode ser representada por

$$G(c) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |z_{t+1}|}{2^t}, \tag{3.134}$$

onde $z_{t+1} = Q_c(z) \equiv c - z_t^2$, $t = 1, 2, \dots$. Onde, novamente a convergência é rápida sempre que $|z_{t+1}|$ for grande. A existência de Φ acima significa que todas as curvas equipotenciais de \mathcal{M} são semelhantes a círculos, i.e. imagens de círculos concêntricos em torno de D sob a ação de Φ^{-1} .

Uma consequência disto é que \mathcal{M} é conexo [100] ¶. Isto parece ser um resultado verdadeiramente notável em vista da complexidade das estruturas vistas na fronteira de \mathcal{M} [136] (ver Fig. 2.2 na página 25).

O potencial de \mathcal{M} é crucial para entender \mathcal{M} . Porém também as linhas de campo que são ortogonais às curvas equipotenciais têm grande importância, porque podem ser vistas como um “sistema de coordenadas polares” para o complemento $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ de \mathcal{M} em \mathbb{C} .

E podem ser definidas formalmente como as imagens das linhas de campo do potencial $D = \{z : |z| \leq 1\}$ sob a ação de Φ^{-1} (ver Fig. 3.25):

$$L_\alpha = \{\Phi^{-1}(r e^{2\pi i \alpha}) : r > 1\} \tag{3.136}$$

¶A esfera de Riemann é dada por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Suponhamos que U seja um subconjunto simplesmente conectado de $\hat{\mathbb{C}}$ tal que o complemento $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ é infinito. Então o **Teorema do Mapeamento de Riemann** afirma que *tem-se um isomorfismo conforme*

$$\phi : U \rightarrow D. \tag{3.135}$$

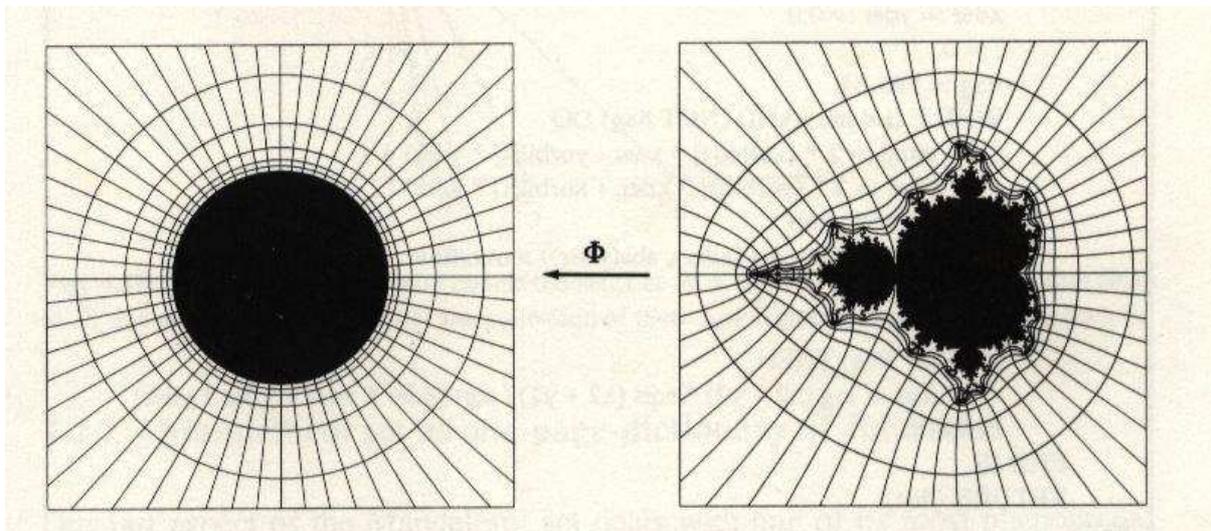


Figura 3.25: Linhas equipotenciais e de campo para o conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} . (Figura extraída da Ref. [100]).

onde o ângulo α numa determinada linha de campo de D é usado como um índice conveniente para as linhas de campo de \mathcal{M} . A respeito destas linhas de campo, uma das questões abertas mais proeminentes acerca de \mathcal{M} , era saber se realmente as linhas de campo, L_α “aterrizam” na fronteira de \mathcal{M} , i.e., formalmente era saber se o seguinte limite existia:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Phi^{-1}(r e^{2\pi\alpha}). \tag{3.137}$$

A resposta parecia ser afirmativa (como uma conseqüência dum resultado famoso devido a Caratheodory ^{||}), se o fato de \mathcal{M} ser conexo implicaria que também seja *localmente conectado* **, o que nem sempre é verdade. Não obstante, Douady e Hubbard mostraram que o limite 3.137 existe, i.e. \mathcal{M} é localmente conexo se $\alpha = \frac{p}{q}$ é um número racional [137].

Na Fig. 3.26 são mostradas algumas linhas de campo, também chamadas de raios externos para o conjunto de Mandelbrot com seus respectivos rótulos $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{p}{2^k-1}$, onde $p = 1, \dots, k-1$ e k denota o período da “flor” ou “bulbo”. Notar que sempre dois raios “aterrissam” no ponto de nascimento das flores. Por exemplo, olhando as flores maiores da *família* 1 que estamos considerando, notamos que no ponto de nascimento da flor de período 2 chegam os raios $\alpha = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$ e $\alpha = \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3}$. Na flor de período 3 os raios $\alpha = \frac{1}{2^3-1} = \frac{1}{7}$ e $\alpha = \frac{2}{2^3-1} = \frac{2}{7}$. Na flor de período 4 os raios $\alpha = \frac{1}{2^4-1} = \frac{1}{15}$ e $\alpha = \frac{2}{2^4-1} = \frac{2}{15}$, e assim por diante. Esta propriedade é conseqüência dum importante Teorema devido a Douady e Hubbard ^{††}.

O ponto de nascimento do bulbo (flor) com número de rotação $\frac{n}{k}$ é chamado de ponto raiz do bulbo $\frac{n}{k}$ de \mathcal{M} e este ponto divide \mathcal{M} em dois sub-conjuntos. A componente (subconjunto) que contém o bulbo $\frac{n}{k}$ é chamada de “extremidade” $\frac{n}{k}$. Este último subconjunto inclui todos

^{||}**Teorema de Carathéodory:** *O mapa inverso de Riemann $\Psi : D \rightarrow U$ se estende continuamente a um mapeamento do disco fechado \hat{D} a \hat{U} se e só se a fronteira ∂U é localmente conectada, ou se e só se o complemento $\mathbb{C} - U$ é localmente conectado.*

Por definição, um espaço topológico X é **localmente conectado no ponto $x \in X$ se existe arredores de x em X arbitrariamente pequenos.

^{††}**Teorema de Douady e Hubbard:** *Suponhamos que um bulbo B consiste de valores de c para os quais o mapa quadrático tem um ciclo atrativo de período k . Então o ponto raiz deste bulbo é o ponto de aterragem de exatamente 2 raios, e os ângulos de cada um destes raios têm período k sob a função “dobramento de ângulo modulo 1”.*

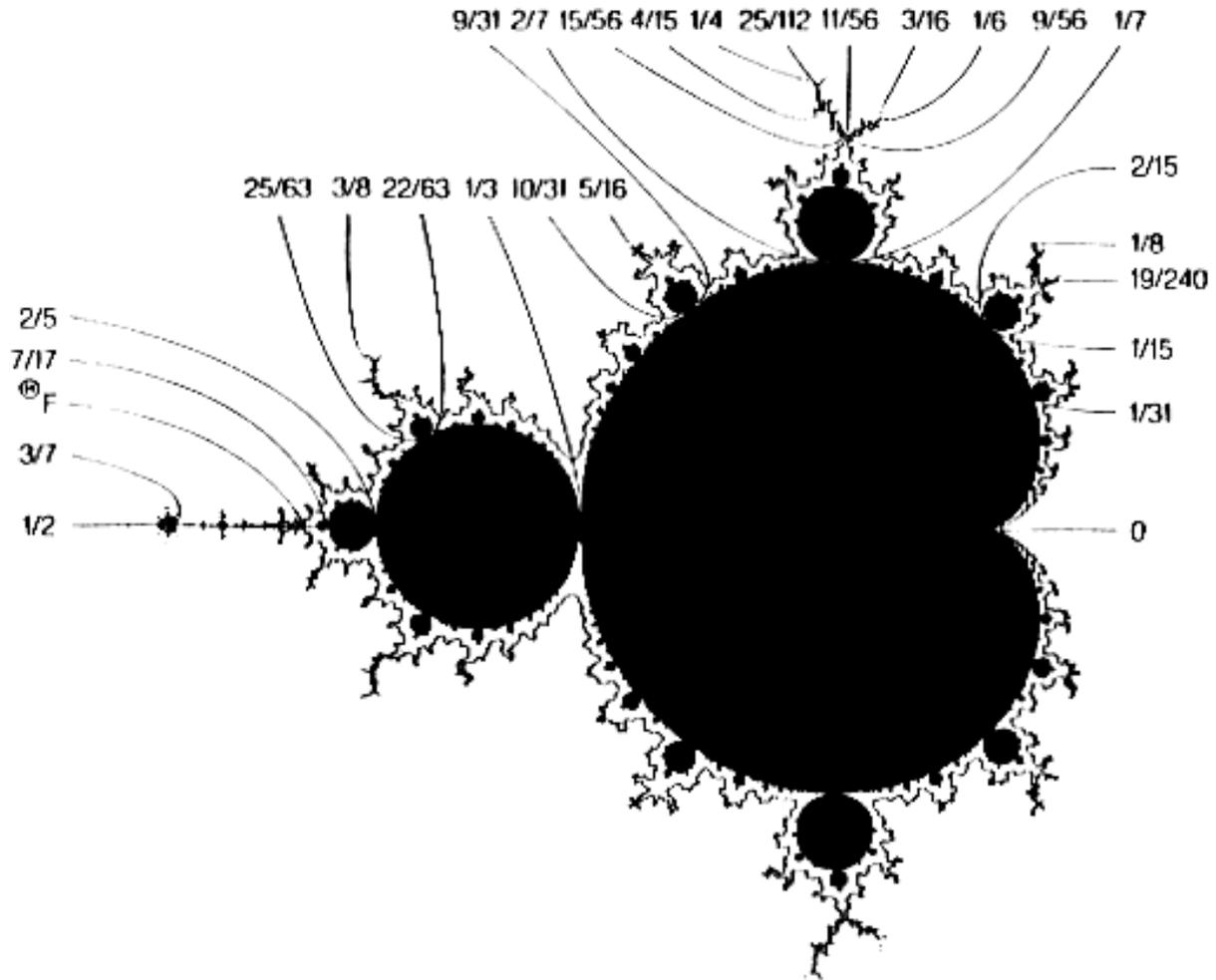


Figura 3.26: Alguns raios externos do conjunto de Mandelbrot. Figura extraídas da Ref. [133].

os domínios associados a órbitas periódicas delimitados pela fronteira fractal que faz o papel de “limite” entre os domínios periódicos e o domínio correspondente ao atrator do infinito (ver Fig. 3.26).

Um teorema de Devaney [108, 109] diz que se forem conhecidos os raios externos que aterrissam no ponto raiz do bulbo $\frac{n}{k}$, então o tamanho da “extremidade” $\frac{n}{k}$ é dado por $\frac{1}{2^k-1}$ [108, 109]. Em realidade este tamanho corresponde à distância angular:

$$\Delta\alpha = \frac{n+1}{2^k-1} - \frac{n}{2^k-1} = \frac{1}{2^k-1}. \tag{3.138}$$

entre os dois raios externos: $\frac{n}{2^k-1}$ e $\frac{n+1}{2^k-1}$, que chegam à raiz do bulbo $\frac{n}{k}$.

Podemos relacionar este tamanho angular $\Delta\alpha$ da “extremidade” $\frac{n}{k}$ com a área A'_k da “extremidade” $\frac{n}{k}$ usando (por simplicidade) o disco unitário fechado D mostrado esquematicamente na Fig. 3.5, uma vez que o conjunto de Mandelbrot é simplesmente uma deformação deste disco. Assim, as áreas A'_k compreendidas entre dois raios externos serão proporcionais às distâncias angulares $\Delta\alpha_k$ entre estes dois raios:

$$A'_k = \pi r^2 \frac{\Delta\alpha_k}{2\pi}, \quad A'_{k+1} = \pi r^2 \frac{\Delta\alpha_{k+1}}{2\pi}. \tag{3.139}$$

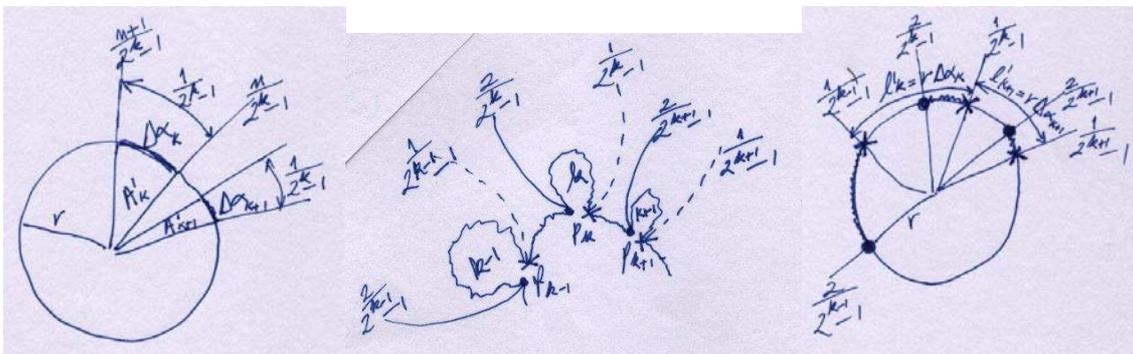


Figura 3.27: a) Esquema mostrando as áreas A'_k e A'_{k+1} . b) Esquema para ilustrar o cálculo da distância l'_k entre os pontos p_k e p_{k+1} . c) Esquema equivalente a b) só que ressaltando agora a proporcionalidade $l'_k \sim \Delta\alpha_k$.

Porém, como estamos interessados na taxa de convergência limite, então

$$r_{A'_c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A'_k}{A'_{k+1}} = \frac{\Delta\alpha_k}{\Delta\alpha_{k+1}} = \frac{\frac{1}{2^{k-1}}}{\frac{1}{2^{(k+1)-1}}} = \frac{2^{(k+1)} - 1}{2^k - 1} \rightarrow 2. \quad (3.140)$$

Lembramos que $A'_k = A_p$ denota a área total da “extremidade” $\frac{n}{k}$, i.e. a área de todos os domínios periódicos A_{p-k} nessa “extremidade” $\frac{n}{k}$.

Procedemos de maneira similar para obter os perímetros l'_k entre os pontos de nascimento das “extremidades” $\frac{n}{k}$. Para tanto, tomamos por exemplo os três pontos genéricos $\ddagger\ddagger$: p_{k-1} , p_k e p_{k+1} , de nascimento das flores de períodos: $k-1$, k e $k+1$ pertencentes à família 1. Os três pares de raios externos que “aterrissam” nestes três pontos são os seguintes:

- os raios $\frac{2}{2^{(k-1)-1}}$ e $\frac{1}{2^{(k-1)-1}}$ aterrissam na flor de período $k-1$,
- os raios $\frac{2}{2^k-1}$ e $\frac{1}{2^k-1}$ aterrissam na flor de período k ,
- e os raios $\frac{2}{2^{(k+1)-1}}$ e $\frac{1}{2^{(k+1)-1}}$ aterrissam na flor de período $k+1$.

Assim, da Fig. 3.5 notamos que o perímetro entre os pontos $p_{(k-1)}$ e p_k , denotado por $l'_k = r\Delta\alpha_k$, será proporcional à distância angular entre os raios $\frac{1}{2^{(k-1)-1}}$ e $\frac{2}{2^k-1}$. Da mesma forma, o perímetro entre os pontos p_k e $p_{(k+1)}$, denotado por $l'_{k+1} = r\Delta\alpha_{k+1}$, será proporcional à distância angular entre os raios $\frac{1}{2^k-1}$ e $\frac{2}{2^{(k+1)-1}}$. Portanto, tomando o limite obtemos que

$$r_{l'_c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l'_k}{l'_{k+1}} = \frac{\frac{1}{2^{(k-1)-1}} - \frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{(k+1)-1}}} \rightarrow 4. \quad (3.141)$$

Lembramos novamente que $l'_k = l_{p-k}$ denota o perímetro total da “extremidade” $\frac{n}{k}$, i.e., o perímetro dos domínios periódicos l_{p-k} .

Antes de poder comparar estas duas últimas convergências Eqs. 3.140 e 3.141 com as que foram encontradas anteriormente nas famílias 1 e 2, devemos notar o seguinte.

Nós calculamos as áreas A_k dos bulbos da família 1. Mas considerando uma “extremidade” genérica $\frac{n}{k}$, notamos que ela contém um bulbo principal $\frac{n}{k}$ de período k e no resto ela tem infinitos

$\ddagger\ddagger$ Para melhor compreensão usando a Fig. 3.26 pode-se olhar um caso específico, por exemplo $k=2$.

outros domínios periódicos, todos eles conectados, uma vez que \mathcal{M} é um conjunto conectado. Mas como não estamos interessados numa só “extremidade” mas numa família de “extremidades” que vão-se acumulando em direção ao ponto de acumulação, teríamos que corrigir as áreas A_k adicionando a todas elas as áreas dos demais domínios periódicos, porém isto não afetaria o resultado final uma vez que estamos interessados na taxa de diminuição das áreas e não no valor absoluto das áreas. Portanto o fato de só termos considerado os bulbos principais $\frac{n}{k}$, i.e., a *família 1* é completamente válido, em outras palavras a área A_k que calculamos numa determinada flor de período k que pertence à *família 1* dá conta das áreas A_{p-k} das demais flores que se encontram na extremidade $\frac{n}{k}$ e estão unidas a ela. Portanto, $A_k \sim A_{p-k}$.

Equivalentemente, as longitudes l_k obtidas como as distâncias entre os pontos de nascimento das flores dão conta dos perímetros l_{p-k} que encerram as fases periódicas. Portanto, $l_k \sim l_{p-k}$.

As convergências das Eqs. 3.140 e 3.141, encontradas para os perímetros l_k e áreas A_k usando os “raios externos” do “locus conexo”, não concordam com as convergências encontradas analiticamente e numericamente anteriormente, porque estas últimas (3.140) e (3.141) são uma medida do **exterior** do conjunto de Mandelbrot, e não estão relacionadas aos “scalings” no interior do locus que são as que tem interesse físico, por exemplo a δ de Feigenbaum [20, 125], uma vez que o interior do locus corresponde aos movimentos periódicos estáveis.

Finalmente, passamos agora a comparar a estrutura interna dos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica complexa com o conjunto de Mandelbrot propriamente dito, usando para tanto os multiplicadores $m_k \equiv (m_{kx}, m_{ky})$ associados às órbitas periódicas.

Como foi adiantado anteriormente na Seção que trata da estrutura interna dos conjuntos tipo-Mandelbrot, o fato de rompermos as condições de Cauchy-Riemann implica na perda da propriedade de “conectividade local” nos conjuntos tipo-Mandelbrot, como se pode verificar comparando as duas figuras da primeira linha da Fig. 3.28, onde se adverte que apesar da semelhança dos conjuntos tipo-Mandelbrot com o conjunto de Mandelbrot (donde provém o nome deles), estes conjuntos tipo-Mandelbrot tendem a ser discontinuamente distorcidos num particular ponto, a saber o ponto sela-nó de período 1 $c = (a, b) = (1/4, 0)$, também conhecido como o *ponto raiz* do conjunto de Mandelbrot. Este fenômeno é particularmente mais evidente no caso $s < 0$, conforme mencionamos anteriormente.

A segunda linha da Fig. 3.28 mostra a parte real m_{kx} e imaginária m_{ky} do multiplicador $m_k \equiv (m_{kx}, m_{ky})$ para ambos conjuntos. A estrutura interna de ambos conjuntos parece ser a mesma, porém uma observação mais detalhada da orientação dos eixos que cortam cada flor nas figuras linha da Fig. 3.28, já permite perceber uma certa diferença entre ambos conjuntos, à medida que nos aproximamos do ponto de acumulação. No caso do conjunto de Mandelbrot à medida que nos aproximamos do ponto de acumulação, que por sua vez é também o ponto raiz, os eixos $m_{ky=0}$ que definem os cortes longitudinais nas flores permanecem sempre perpendiculares à fronteira do corpo principal do “cactus”, e os eixos $m_{kx} = 0$ que definem os cortes transversais nas flores sempre têm uma orientação tangente à fronteira do corpo principal do “cactus”.

Em forte contraste, como mencionado na Seção anterior, no caso do conjunto tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica, à medida que nos aproximamos do ponto de acumulação localizado na zona de transição iso-periódica de órbitas complexas estáveis para reais, tanto os eixos longitudinais $m_{ky=0}$ quanto os eixos transversais $m_{kx} = 0$ têm uma dinâmica de rotação. Este fenômeno é mostrado mais claramente na Fig. 3.29, na qual se percebe que no conjunto tipo-Mandelbrot os eixos longitudinais $m_{ky=0}$ vão se afastando da perpendicular à fronteira do corpo principal do “cactus”, e os eixos transversais $m_{kx=0}$ vão se afastando da tangente à fronteira do corpo principal do “cactus”. Como foi mencionado anteriormente este afastamento da direção tangente por parte dos eixos transversais $m_{kx=0}$, que regem o nascimento das flores secundárias mediante bifurcações de dobramento de período, faz com que o ponto de nascimento das flores secundárias vá se deslocando na direção da acumulação, o que por sua vez produz o padrão de nó degenerado

no espaço de parâmetros, como comentado anteriormente.

3.5.1 Coordenadas locais: comparação

Da mesma forma que no caso cúbico, no caso quadrático os loci caracterizados por $\Lambda_x = cte$ e $\Lambda_y = cte$ definem um “sistema de coordenadas cartesiano” em cada círculo anexado à cardióide. Para obter suas expressões algébricas, também neste caso fazemos uma eliminação das variáveis dinâmicas entre as equações orbitais de período 1

$$a + x^2 - y^2 = x, \quad (3.142)$$

$$b + 2xy = y, \quad (3.143)$$

e suas respectivas equações de autovalores

$$\lambda_x = 2x = \cos(\alpha), \quad (3.144)$$

$$\lambda_y = 2y = \sin(\alpha). \quad (3.145)$$

Por um lado usando fato que na fronteira da cardióide o autovalor têm módulo igual a um, $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$, obtemos a equação da cardióide:

$$256a^4 - 96a^2 + 32a - 3 + 512a^2b^2 - 96b^2 + 256b^4 = 0. \quad (3.146)$$

Enquanto que deixando em função de λ_x ou λ_y arbitrários obtemos:

$$\Lambda_x = (4\lambda_x^2 - 8\lambda_x + 4)a + \lambda_x^4 - 4\lambda_x^3 + 5\lambda_x^2 - 2\lambda_x - 4b^2 \quad (3.147)$$

$$\Lambda_y = 4b^2 + (4a - 1)\lambda_y^2 - \lambda_y^4 \quad (3.148)$$

onde lembramos que $\lambda_x = \cos(2\pi n/k)$ e $\lambda_y = \sin(2\pi n/k)$. Ambas variedades, Λ_x e Λ_y , definem curvas parabólicas no espaço de parâmetros (a, b) (respeito ao eixo $b = 0$), que se deslocam à medida que λ_x e λ_y variam, tal como mostra a Fig. 3.30.

Quando $k \rightarrow \infty$ na vizinhança da acumulação temos, que como, $\lambda_x \rightarrow 1$ e $\lambda_y \rightarrow 0$, a variedade assintótica é um ponto, i.e., o ponto de acumulação sela-nó também chamado de *ponto raiz*, $(a, b) = (\frac{1}{4}, 0)$ do conjunto de Mandelbrot. A diferença do caso cúbico, no qual a variedade limite era a bifurcação tangente.

Os sistemas de coordenadas dos conjuntos tipo-Mandelbrot e do conjunto de Mandelbrot, podem ser comparados com um sistema equivalente definido num círculo de raio unitário. Para isto ligamos os números racionais simétricos com respeito ao eixo horizontal e vertical, como mostra a Fig. 3.30. Como mencionamos anteriormente o sistema de coordenadas local do corpo principal do conjunto de Mandelbrot tem uma espécie de degenerescência nos eixos horizontais, uma vez que estes estão ligados do lado direito. No caso cúbico temos uma espécie de quebra de simetria introduzida pela tangência de curvas no espaço de parâmetros, e uma curvatura do sistema de coordenadas perto da bifurcação tangente. Outra possível vantagem do sistema de coordenadas nos conjuntos tipo-Mandelbrot é que, aparte da estrutura interna ser isomorfa ao círculo unitário, a estrutura interna dos domínios de estabilidade devidos a órbitas reais parece ser uma reflexão da estrutura interna dos domínios dos “cactus”, abrindo desta forma a possibilidade de ordenar os “shrimps” usando os números de rotação das flores.

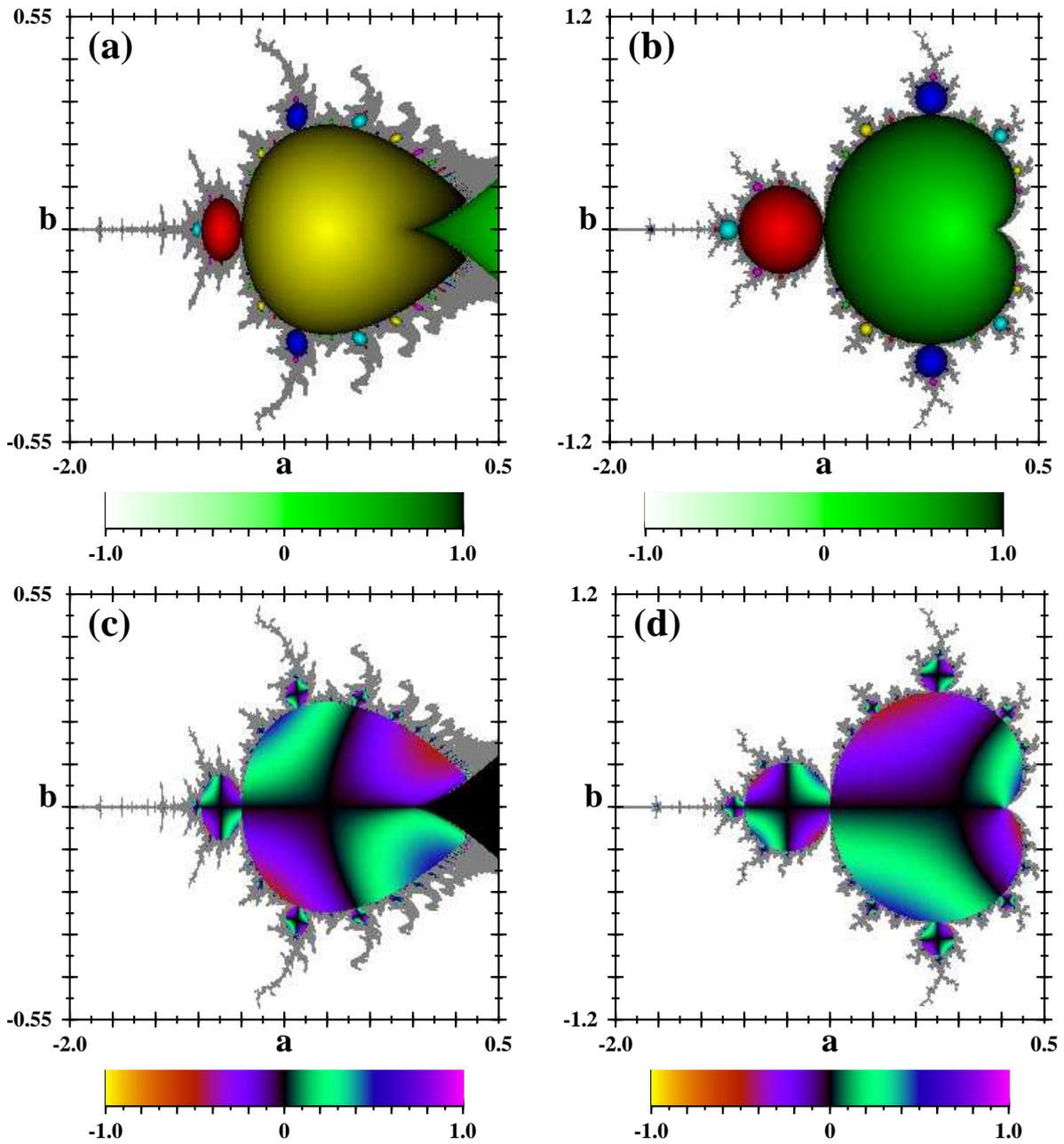


Figura 3.28: Linha superior: Diagramas de fase mostrando a norma do multiplicador $|m_k|$: conjunto tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica ($s = 1$) e conjunto de Mandelbrot. Linha inferior: Diagramas de fase mostrando o produto $m_{kx}m_{ky}$.

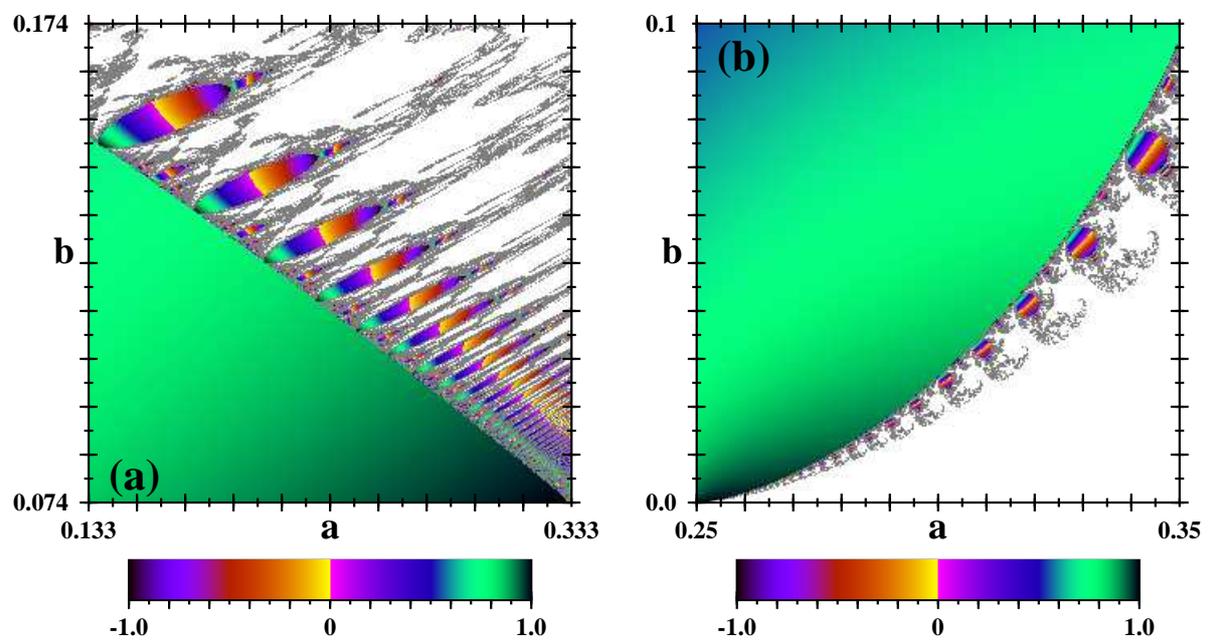


Figura 3.29: Ampliações nas zonas de acumulação mostrando a dinâmica de rotação dos eixos $m_{kx} = 0$ e $m_{ky} = 0$ no caso do conjunto tipo-Mandelbrot (esquerda) e a ausência de rotação no conjunto de Mandelbrot.

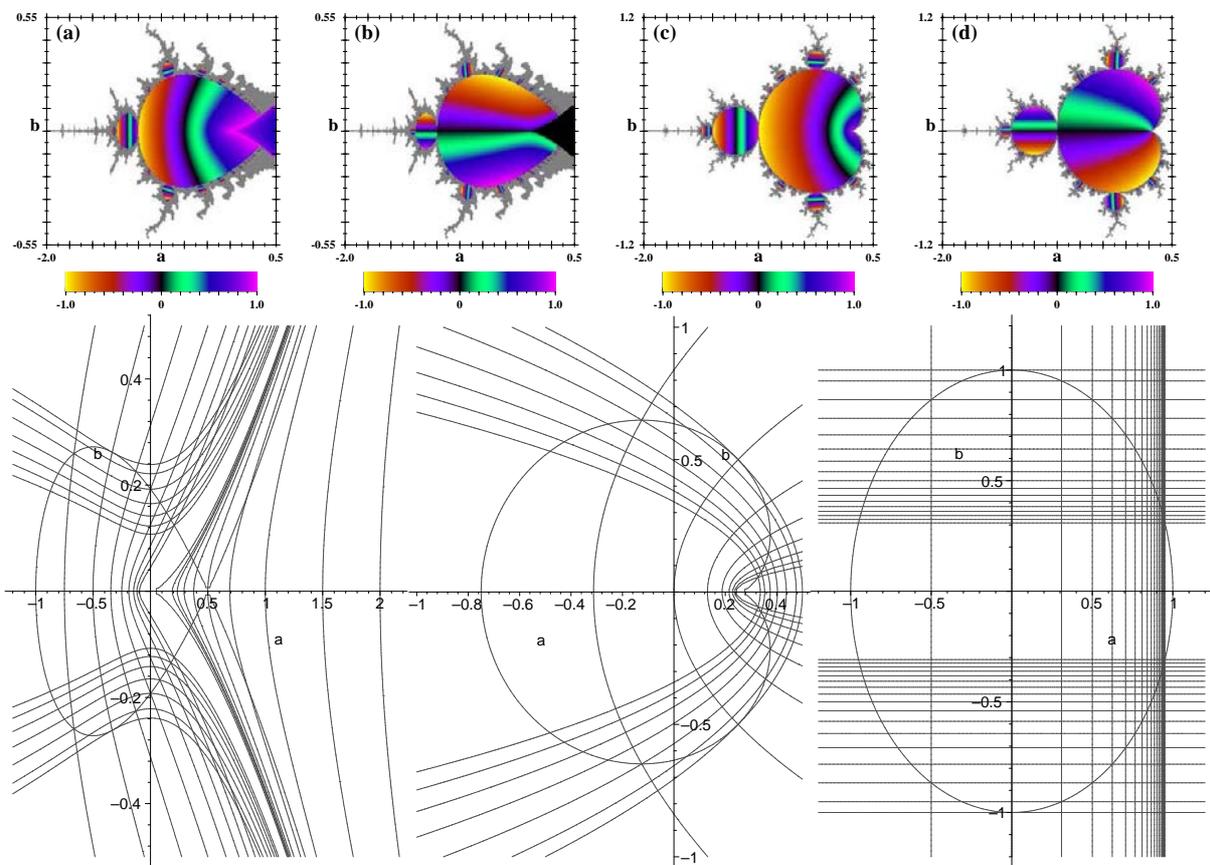


Figura 3.30: Linha superior: Diagramas de fase mostrando a parte real e imaginária do multiplicador: conjunto tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica ($s = 1$) e conjunto de Mandelbrot. Linha inferior: Loci $\Lambda_x = cte$ e $\Lambda_y = cte$ correspondentes aos números de rotação da família-1, da dinâmica cúbica, quadrática e do círculo unitário.

Conclusões

Nesta Dissertação estudamos as propriedades métricas do espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos multiparamétricos modelados por mapas de variável contínua com evolução temporal discreta, que possuem a possibilidade de movimentos estáveis complexos, para parâmetros reais. Para tanto usamos como modelo paradigmático as duas *formas normais* de polinômios cúbicos complexos com coeficientes reais.

Em particular, nos concentramos nos “scalings” nas zonas onde o locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$, perde sua conectividade local. Entre outras coisas, tal fato leva à aparição de novos fenômenos no espaço de parâmetros, tais como a acumulação de famílias de “flores de cactus” numa mesma altura ao longo de linhas retas, em direção às zonas de transição isoperiódica de órbitas complexas para órbitas reais.

O trabalho foi feito simultaneamente de dois modos complementares: (i) trabalho numérico do levantamento “cartográfico” dos diagramas de fase no espaço dos parâmetros de controle, dos quais obtemos as propriedades métricas, e (ii) trabalho analítico, onde obtemos as expressões analíticas exatas das bifurcações tangentes e de dobramento de período que delimitam os movimentos reais de períodos 1 e 2 no espaço de parâmetros, e a expressão algébrica da fronteira do “cactus”, corpo principal do locus $\mathcal{C}(3)$, que contém órbitas complexas de período 1. A semelhança da forma algébrica desta última variedade, válida para polinômios com termo cúbico positivo, com a curva de bifurcação de dobramento de período para polinômios com termo cúbico negativo, nos permite verificar uma simetria com respeito ao plano $s = 0$, apesar de ambas variedades terem naturezas distintas e não existir mudança de variável que permita passar numa forma normal para a outra.

A obtenção das expressões que dão a localização exata dos pontos de nascimento das flores que brotam deste “cactus” nos permitiu mostrar analiticamente que a velocidade limite com que as flores se acumulam tende para uma constante igual à *unidade*. Até onde sabemos da revisão bibliográfica feita nos capítulos um e dois, esta convergência de codimensão-2 ainda não foi observada na extensa literatura. Esta mesma taxa de convergência limite igual à unidade, foi igualmente por nós observada em estudos de propriedades métricas tais como: a orientação do eixo das flores com respeito à horizontal, a velocidade com que as alturas da família de flores diminui até alcançar uma altura constante, e a velocidade com que as áreas das flores diminui à medida que elas se acumulam.

Com a intenção de comparar estas propriedades métricas, fomos verificar algumas delas no conjunto de Mandelbrot, e encontramos a mesma taxa de convergência limite igual à unidade. Isto sugere que o escalonamento por nós encontrado não depende da nonlinearidade do mapa considerado. A isto corrobora o fato que os polinômios cúbicos podem ser *renormalizados* para produzir um par de mapas quadráticos ou também a construção inversa chamada de “intertwining surgery” [16] que consiste em combinar dois mapas quadráticos para obter um cúbico que foi demonstrado por Epstein *et.al.* [18].

Como visto no capítulo dois, Romera et al. [19] encontraram um escalonamento igual à unidade em codimensão 1, na *acumulação* de “anões” (midgets) ao longo da antena principal do conjunto de Mandelbrot. Apesar de ser em codimensão 1, tal escalonamento parece estar relaci-

onado com o de codimensão 2 aqui encontrado. Em comum, ambos estudos envolvem *famílias de fases periódicas* (“flores” ou “midgets”) que participam dum processo limite de *acumulação* com adição de períodos.

A isto devemos acrescentar que um cálculo posterior feito por A. Endler [124], para o cactus de período 6 do espaço de parâmetros do mapa de Hénon complexificado, também verifica a mesma taxa de convergência limite igual à unidade. Todas estas evidências fazem-nos pensar que nossa determinação do escalonamento de codimensão 2 unitário possa ter um caráter bem mais geral. Ou seja, sempre que tivermos *famílias de fases periódicas* participando em *rotas de acumulação com adição de períodos* nos conjuntos tipo-Mandelbrot e no conjunto de Mandelbrot, eles apresentarão taxa de acumulação limite igual à unidade.

Do ponto de vista teórico, a origem matemática desta convergência nos conjuntos tipo-Mandelbrot parece estar nas propriedades métricas dos números racionais (números de rotação) que rotulam as infinitas famílias de flores (fases periódicas) nos conjuntos tipo-Mandelbrot.

Dum ponto de vista prático o escalonamento unitário torna-se importante, tanto porque possa ser verificado experimentalmente, quanto por também ter sido verificado num modelo eminentemente físico como é o mapa de Hénon, cujo espaço de parâmetros apresenta regiões isomórficas ao espaço de parâmetros do laser de CO₂ com perdas moduladas [11].

Um ponto importante adicional é mencionar que as convergências em codimensão 2 para a unidade seguem leis de potência com expoentes que tendem para inteiros, em forte contraste com a convergência de Feigenbaum, que segue uma lei de potência com um expoente fracionário.

O estudo das propriedades métricas nos conjuntos tipo-Mandelbrot da dinâmica cúbica foi complementado com um estudo da estrutura interna do locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$, via multiplicadores λ_k das órbitas periódicas. Quando olhamos o espaço de parâmetros com os “olhos” da norma dos multiplicadores, saltam à vista as típicas curvas superestáveis devidas a órbitas reais e por outro lado no locus $\mathcal{C}(3)$ ressaltam os *centros* de super-estabilidade localizados no meio das flores de cactus. Porém, o fato de plotar só a parte real ou só a parte imaginária dos multiplicadores das órbitas periódicas por separado, nos permite descobrir algumas simetrias dentro das flores. No primeiro caso, i.e., quando plotamos $\Re(\lambda_k)$, os loci dados por $\Re(\lambda_k) = 0$ definem cortes transversais em cada flor. Ao plotarmos $\Im(\lambda_k)$ encontramos por sua vez que os loci dados por $\Im(\lambda_k) = 0$, definem cortes longitudinais nas flores. Desta forma os mencionados cortes definem eixos, que podem ser vistos como uma espécie de “sistema de coordenadas cartesiano” local dentro de cada flor.

A respeito deste sistema de coordenadas poderíamos concluir dizendo que, as tangências no espaço de parâmetros produzem perturbações no sistema coordenado que levantam degenerescências (quebram simetrias) e também curvam o espaço de parâmetros localmente.

De particular interesse é o comportamento destes eixos locais dentro das flores localizadas perto das zonas onde temos ausência de conectividade local. Uma inspeção nestas zonas de transição isoperiódica (de órbitas complexas para reais), mostra que à medida que as flores se aproximam dos domínios devidos a órbitas reais, o eixo transversal $\Re(\lambda_k) = 0$ de cada flor começa a girar em direção do eixo longitudinal local $\Im(\lambda_k)$, até, possivelmente no limite $k \rightarrow \infty$, ficar alinhado e coincidir com este último. As várias taxas de convergência limite iguais à unidade encontradas nesta zona, que foram mencionadas anteriormente, nos fazem supor que a velocidade limite com que esta rotação de eixos ocorre também seja igual à unidade, porém ainda não fizemos o cálculo que confirme ou não tal conjectura. Um questão complementar seria fazer um estudo detalhado da influência desta dinâmica de rotação da parte real do multiplicador, no comportamento das órbitas no espaço de fases.

Esta dinâmica de rotação do eixo transversal local em direção ao eixo longitudinal local dentro de cada flor, não foi encontrada no conjunto de Mandelbrot, sistema dinâmico no qual ambos eixos permanecem perpendiculares, até alcançar um tamanho “nulo” ao aproximar-se do

ponto raiz. Isto mostra que, apesar dos conjuntos Mandelbrot e tipo-Mandelbrot compartilharem várias propriedades métricas, talvez por apresentarem a mesma estrutura topológica, a ausência da propriedade de conectividade local nestes últimos modifica radicalmente sua estrutura interna. Tal possibilidade permanece a ser investigada.

Apêndice A

Cálculo das variedades e pontos de codimensão-2 via Maple

```
restart;
## Definicao do mapa
s_aux:=1; #for arbitrary s ->put s_aux=0 and comment s below

s:=1;

zz:=s*z*(z^2-a)+z-b;

#####
# estabilidade

eige:=diff(zz,z)-lambda;

# na equacao acima se lambda =+1 temos uma bifurcacao
# de dobra e se lambda =-1 teremos uma bifurcacao
# de dobramento de periodo
#####
#Podemos obter a expressao geral para as
#curvas no espaco de parametros para as quais um
# autovalor ou multiplicador(lambda) generico fazendo:

res:=resultant(eige,zz-z,z);
#logo

fold:=subs(lambda=1,res);
per_doub:=subs(lambda=-1,res);

#####
#A partir desta equacao podemos obter a expressao
# exata do autovalor (lambda) em termos dos
#parametros de controle a,b:

sols:=solve(res,lambda);
```

```

# o corpo principal do conjunto tipo mandelbrot e
# obtido aplicando a condicao de |lambda|=1
# ou no nosso caso sols[2]*sols[3] = 1 uma vez que
# as raizes sols[2] e sols[3] sao complexas conjugadas

if(s_aux>0) then
mandel:=sols[2]*sols[3]-1;#only for s>=0
fi;

#####
#periodo 2
zzz:=s*zz*(zz^2-a)+zz-b;
eq2:=factor(simplify(factor(zzz-z)/(zz-z)));
fold2:=factor(discrim(eq2,z));
#separacao dos fatores
fat1:=(-8-12*s*a+4*s^3*a^3-27*s*b^2);
fat2:=(-108+108*s*a-36*s^2*a^2+4*s^3*a^3-27*s*b^2);

### fazendo o grafico
with(plots):

#### grafico de todas as curvas de bif de periodo 1 :
#implicitplot({mandel=0,fold=0,per_doub=0},a=-1..3,b=-1..1,grid=[100,100] );

## pontos de codimensao sao raizes de:
printf("#####codimension2 points only for s<0#####");
bb:=factor(resultant(per_doub,fat2,a));
aa:=factor(resultant(per_doub,fat2,b));

sols_a:=solve(aa,a);
sols_b:=solve({bb},{b});

#simplified varieties
printf("#####simplifying varieties#####");

fold := (-27*b^2+4*s^2*a^3);
per_doub:=(-27*s*b^2-12*s*a-8+4*s^3*a^3);
fat2:=(-108+108*s*a-36*s^2*a^2+4*s^3*a^3-27*s*b^2);

with(plots):
if (s_aux>0) then
implicitplot([mandel=0,fold=0,per_doub=0,fat2=0],a=-2..4,b=-2..2,grid=[100,100]
,color=[green,red,blue,cyan]);#s>0
elif (s_aux<0) then
implicitplot([fold=0,per_doub=0,fat2=0],a=-3.5..3.5,b=-2..2,grid=[100,100]
,color=[red,blue,cyan]);#s<0
else
implicitplot3d({per_doub=0,fat2=0,fold=0},a=-3.5..3.5,b=-2..2,s=-1..1,grid=[23,23,23] );
fi;

```

Apêndice B

Cálculo das velocidades limite, r_c via Maple

B.1 Dinâmica cúbica

As seguintes linhas em Maple servem para obter os limites mencionados na página 49.

```
restart;
#n:=1;s:=1;
alpha:=(n,k)-> ((2*Pi*n)/k);
x:=sin(alpha)*sqrt((2*s)/(1-cos(alpha)))/(6*s);
y:=sqrt((1-cos(alpha))/(2*s));
a:=sin(alpha)^2/( 6*s(1-cos(alpha)) ) - (1-cos(alpha))/(2*s);
b:= -sin(alpha)*sqrt(2*s/(1-cos(alpha)))/
3*(      sin(alpha)^2/(18*s(1-cos(alpha)))      + (1-cos(alpha))/(2*s) );
aa:=3*x^2 -y^2;
bb:=-2*s*x*(x^2+y^2);
aaa:=(s,n,k)->sin(((2*Pi*n)/k))^2/( 6*s(1-cos( ((2*Pi*n)/k))) ) -
(1-cos( ((2*Pi*n)/k) ))/(2*s);
bbb:=(s,n,k)-> -sin( ((2*Pi*n)/k))*sqrt(2*s/
(1-cos(((2*Pi*n)/k))))/3*(      sin(((2*Pi*n)/k) )^2/
(18*s(1-cos( ((2*Pi*n)/k))))      + (1-cos( ((2*Pi*n)/k)))/(2*s) );
a_k_1:=aaa(1,1,k-1);
a_k:=aaa(1,1,k);
a_k1:=aaa(1,1,k+1);
ra:=simplify(abs(a_k-a_k_1)/abs(a_k1-a_k));
limit(ra, k=infinity);
b_k_1:=bbb(1,1,k-1);
b_k:=bbb(1,1,k);
b_k1:=bbb(1,1,k+1);
rb:=( abs(b_k-b_k_1) / abs(b_k1-b_k));
limit(rb, k=infinity);
l_k_1:=abs(a_k-a_k_1)+abs(b_k-b_k_1) ;
l_k1:=abs(a_k1-a_k)+abs(b_k1-b_k) ;
#r1:=l_k1/l_k_1;
r1:=l_k_1/l_k1;
limit(r1, k=infinity);
```

B.2 Dinâmica quadrática

As seguintes linhas em Maple servem para obter os limites mencionados na página 70.

```

restart;
#n:=1;s:=1;
signo:=-1;#sign of the quadratic map
alpha:=(n,k)-> ((2*Pi*n)/k);
x:=cos(alpha)/(signo*2 );
y:=sin(alpha)/(signo*2 );

a:=cos(alpha)/(2*signo) - ( cos(alpha)^2 -sin(alpha)^2 )/(4*signo);
b:=(sin(alpha) - cos(alpha)*sin(alpha))/(2*signo);
aa:=x -signo*(x*x -y*y);
bb:=y -signo*(2*x*y);

aaa:=(signo,n,k)->cos( (2*Pi*n)/k)/(2*signo)-
( cos((2*Pi*n)/k)^2 -sin((2*Pi*n)/k)^2 )/(4*signo);
#bbb:=(signo,n,k)->(sin((2*Pi*n)/k) -
cos((2*Pi*n)/k)*sin((2*Pi*n)/k))/(2*signo);
bbb:=(signo,n,k)->(sin((2*Pi*n)/k)*(1 - cos((2*Pi*n)/k)))/( 2*signo ) ;

a_k_1:=aaa(1,1,k-1);
a_k:=aaa(1,1,k);
a_k1:=aaa(1,1,k+1);
ra:=simplify(abs(a_k-a_k_1)/abs(a_k1-a_k));
limit(ra, k=infinity);
b_k_1:=bbb(1,1,k-1);
b_k:=bbb(1,1,k);
b_k1:=bbb(1,1,k+1);
rb:=simplify( abs(b_k-b_k_1) / abs(b_k1-b_k));
#limit(rb, k=infinity);
l_k_1:=abs(a_k-a_k_1)+abs(b_k-b_k_1) ;
l_k1:=abs(a_k1-a_k)+abs(b_k1-b_k) ;
#r1:=l_k1/l_k_1;
r1:=l_k_1/l_k1;
limit(r1, k=infinity);

```

Apêndice C

Detalhes sobre as figuras

A função potencial para o conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} pode ser representada por [106]

$$G(c) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |z_t|}{2^t}, \quad (\text{C.1})$$

onde

$$z_t = z_{t-1}^2 + c, \quad z_0 = c, \quad t = 1, 2, \dots \quad (\text{C.2})$$

A distância entre c e a fronteira de \mathcal{M} pode ser estimada como

$$d(c, M) \leq \frac{2 \sinh G(c)}{\|\nabla G(c)\|}, \quad (\text{C.3})$$

e ainda quando c esta muito proximo a $\partial\mathcal{M}$ a distância é muito proxima à razão

$$d(c, M) \lesssim \frac{2G(c)}{\|\nabla G(c)\|} = \frac{2\|z_t\|}{\|\partial z_t / \partial c\|} \log \|z_t\|. \quad (\text{C.4})$$

Análogamente, no caso cúbico

$$z_t = s z_{t-1} (z_{t-1}^2 - a) + z_t - b, \quad s = \pm 1, \quad (\text{C.5})$$

a distância $d(p; \mathcal{C}(3)_{\mathbb{R}})$ desde o ponto $p = (a, b)$ à fronteira do locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)_{\mathbb{R}}$ estará dada por

$$d(p, \mathcal{C}(3)_{\mathbb{R}}) \sim \frac{2\|z_t\|}{\sqrt{\|\partial z_t / \partial a\|^2 + \|\partial z_t / \partial b\|^2}} \log \|z_t\|. \quad (\text{C.6})$$

O algoritmo para estimar a distância DEM/M (*distance estimator*) fornecido na ref. [100] foi adaptado para o caso cúbico introduzindo a Eq. C.6, e foi usado para obter as fronteiras fractais caóticas dos diagramas de bifurcação. Remarcas adicionais sobre dethales gráficos podem ser encontradas na ref. [130].

Apêndice D

Cortes do locus conexo cúbico complexo $\mathcal{C}(3)$ no espaço (a, b, s)

D.1 $s = cte$

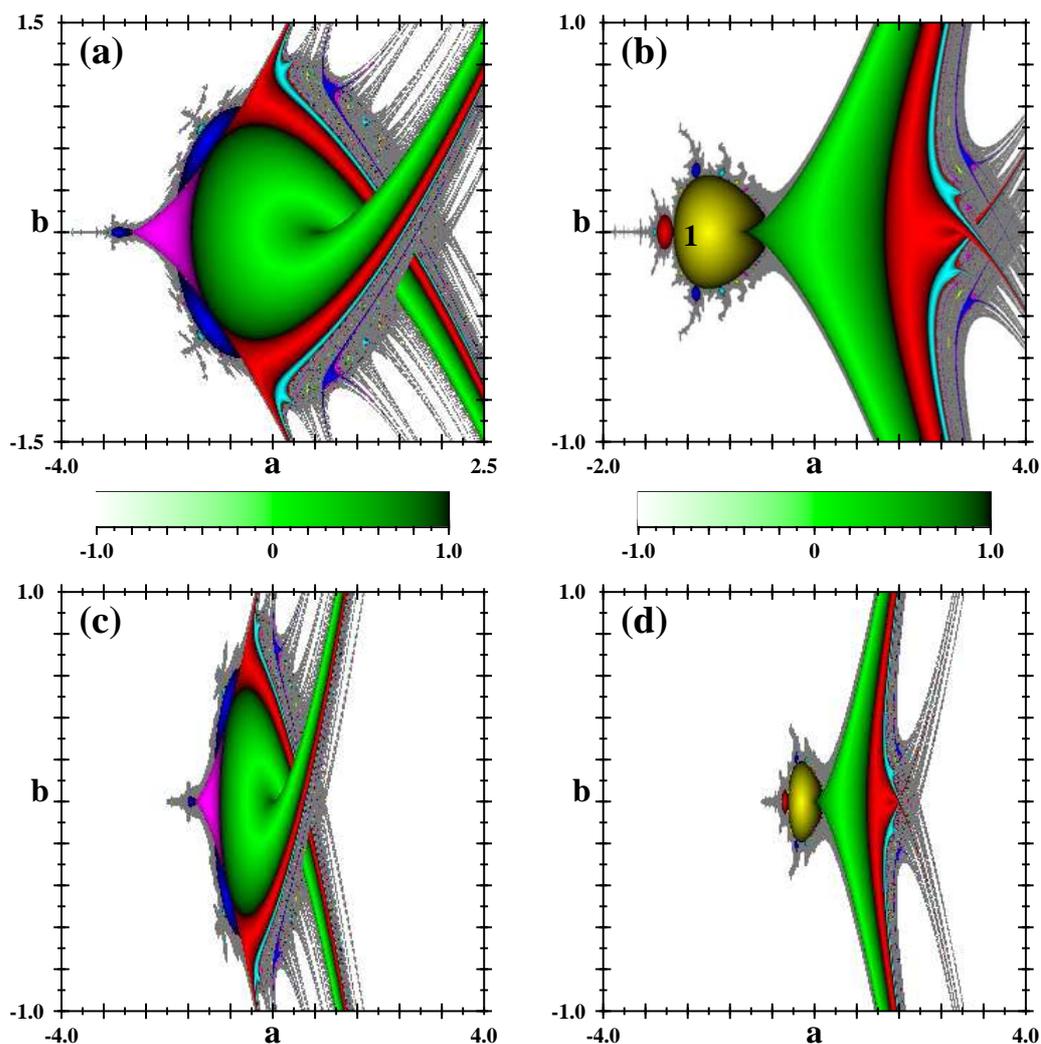


Figura D.1: a) $s = -1.0$, b) $s = 1.0$, c) $s = -2.0$ d) $s = 2.0$.

D.2 $b = cte$

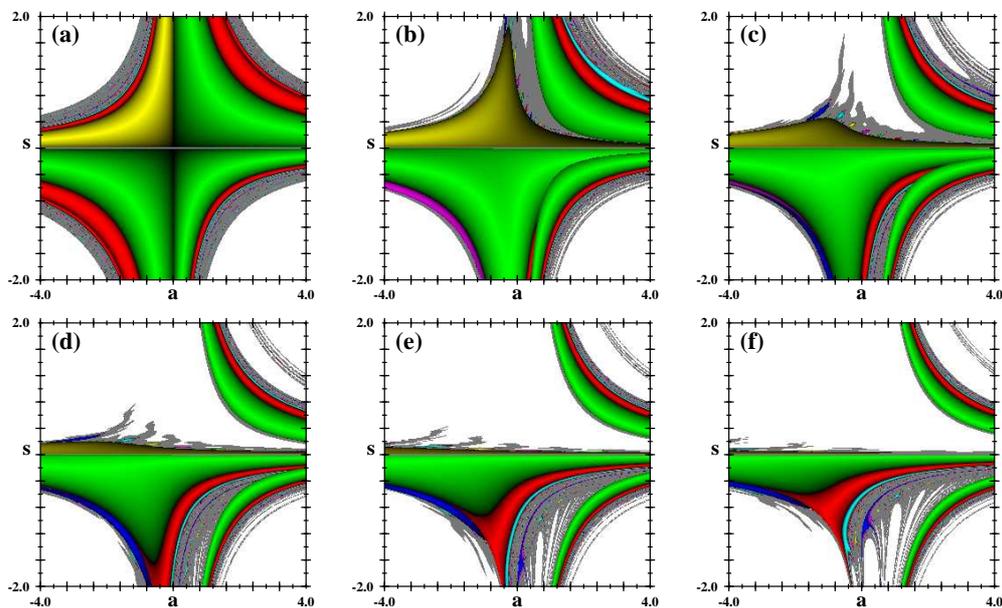


Figura D.2: a) $b = 0.0$, b) $b = 0.2$, c) $b = 0.4$, d) $b = 0.6$, e) $b = 0.8$, f) $b = 1.0$.

D.3 $a = cte$

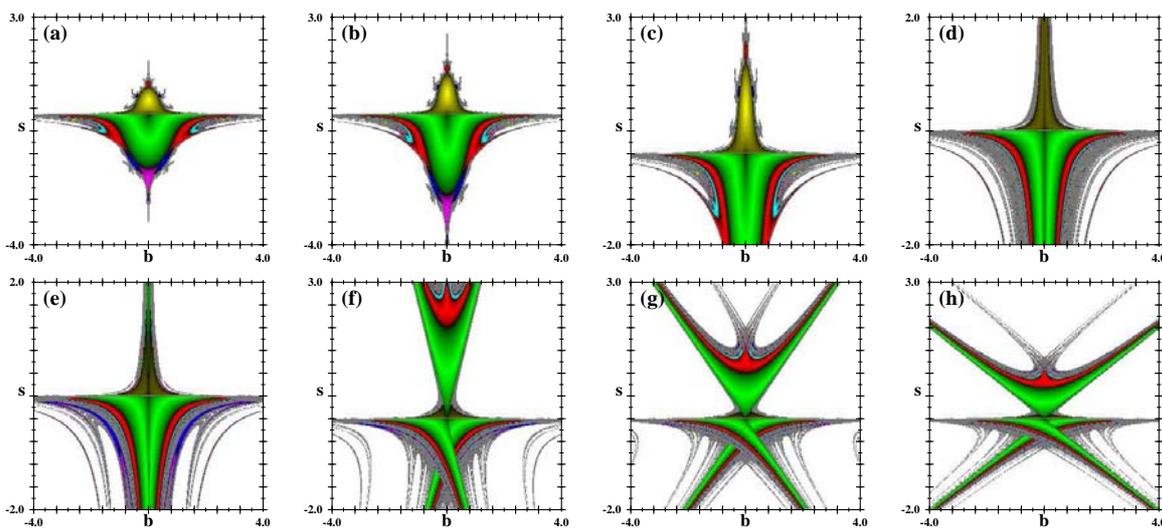


Figura D.3: a) $a = -1.2$, b) $a = -0.8$, c) $a = -0.5$, d) $a = 0.0$, e) $a = 0.2$, f) $a = 1.0$, g) $a = 2.0$, h) $a = 3.0$.

Referências Bibliográficas

- [1] MILNOR, J. Hyperbolic components in spaces of polynomial maps. SUNY Stonybrook Institute of Mathematical Sciences. Preprint, n. 3, 1992.
- [2] MILNOR, J. Remarks on iterated cubic maps. *Experimental Mathematics*, v. 1, n.1, p.5-24, 1992.
- [3] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points. *Comptes Rendus Academie des Sciences, Mathematique*, Paris, v.342, p.681-684, 2006.
- [4] ENDLER, A. *Órbitas quírais, classes de conjugação e dinâmica holomórfica sem pontos críticos*. Tese (Doutorado em Física), Instituto de Física-UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- [5] HUBBARD, J.H. The Hénon mappings in the complex domain. *Chaotic Dynamics and Fractals*, Academic Press, New York. v.101, 1986.
- [6] HUBBARD, J.H.; OBERSTE-VORTH, R.W. Hénon mappings in the complex domain I: the global topology of dynamical space. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, Heidelberg, v. 79, n. 1, p. 5-46, 1994.
- [7] FRIEDLAND, S.; MILNOR, J. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergod Th. & Dynam. Syst.*, v. 9, n. 67, 1989.
- [8] BEDFORD, E.; SMILLIE, J. Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : currents, equilibrium measure, and hyperbolicity. *Invent. Math.*, v. 103, n. 69, 1991.
- [9] FORNAES, J.; SIBONY, N. Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou-Bieberbach domains. *Duke Math. J.* v. 65, p. 345, 1992.
- [10] BRISKORN, E.; KNÖRRER, H. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser, Basel, 1986.
- [11] BONATTO, C.; GARREAU, J.C.; GALLAS, J.A.C. Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 143905, 2005.
- [12] BONATTO, C.; GALLAS J.A.C. Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers. *Phys. Rev. E*, v. 75, p. 055204(R), 2007.
- [13] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Arithmetical signatures of the dynamics of the Henon map. *Phys. Rev. E*, v. 65, p. 036231, 2002.
- [14] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Existence and characterization of stable ghost orbits in the Hénon map. *Physica A*, v. 344, p. 491-497, 2004
- [15] DOUADY, A.; HUBBARD, J.H. On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, v. 18, p. 287, 1985.

- [16] BRANNER, B.; DOUADY, A. Surgery on complex polynomials. *Lecture Notes in Math.*, v. 1345, Springer-Verlag, 1987.
- [17] BRANNER, B.; FAGELLA, N. Homeomorphism between limbs of the Mandelbrot set. *MSRI*, Preprint 043, 1995.
- [18] EPSTEIN, A.; YAMPOLSKY, M. Geography of the cubic connectedness locus: intertwining surgery. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, v. 32, p. 151-185, 1999.
- [19] ROMERA, R.; PASTOR, G.; MONTOYA, F. A scaling constant equal to unity in 1-D quadratic maps. *Comput. & Graphics.*, v. 21, p. 849, 1997.
- [20] FEIGENBAUM, M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, v. 19, p. 25, 1978.
- [21] FEIGENBAUM, M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, v. 21, p. 669, 1979.
- [22] STROGATZ, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, 1994.
- [23] FATOU, P. Memoire sur les equations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France*, v. 47, p. 161-271, 1919; v. 48, p. 33-94, p. 208-314, 1920.
- [24] JULIA, G. Memoires sur l'iteration des fonctions rationnelles. *J. Math. Pures Appl.*, v. 4, p. 47-245, 1918.
- [25] MAY, R.M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 261, n. 459, 1976.
- [26] CVITANOVIĆ, P.; MYRHEIM, J. Complex universality. *Commun. Math. Phys.*, v. 121, p. 225-254, 1989.
- [27] MYRBERG, P.J. Iteration von Quadratwurzeloperationen. *Annals Acad. Sci. Fennicae A I Math.* v. 258, p. 1, 1958.
- [28] CVITANOVIĆ, A.P. *Universality in chaos*, 2nd ed. Adam Hilger, Bristol and New York, 1980.
- [29] METROPOLIS, D.N.; STEIN, M.L.; STEIN, P.R. On finite limit sets for transformations on a unit interval. *J. Combin. Theor.*, v. 15, p. 25, 1973.
- [30] SIMOYI, R.H.; WOLF, A.; SWINNEY, H.L. One-Dimensional Dynamics in a Multicomponent Chemical Reaction. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, p. 245, 1982.
- [31] SIMOYI, R.H.; WOLF, A.; SWINNEY, H.L. One-dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, p. 245, 1982.
- [32] GLEICK, J. *Chaos: Making a New Science*, Viking, New York, 1987.
- [33] FEIGENBAUM, M.J. Universal behaviour in nonlinear systems. *Los Alamos Sci.*, v. 1, p. 4, 1980.
- [34] SCHUSTER, H.G., *Deterministic Chaos*, 2nd. Ed., VHC, Weinheim, Germany, 1989.
- [35] CVITANOVIĆ, P. *Universality in chaos*, In P. Cvitanovic, ed *Universality in Chaos* 2nd ed., Adam Hilger, Bristol and New York, 1980.

- [36] LIBCHABER, A.; LAROCHE, C.; FAUVE, S. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. *Journal de Physique Lettres*, v. 43, L211, 1982.
- [37] LIBCHABER, A.; MAURER, J. A Rayleigh-Bénard experiment: helium in a small box. *Nonlinear phenomena at phase transitions and instabilities*, ed. T. Riste, Plenum, New York, p.259, 1981.
- [38] BERGÉ, P.; POMEAU, Y.; VIDAL, C. *Order within chaos: toward a deterministic approach to turbulence* Wiley, New York, 1984.
- [39] GOLLUB, J.P.; BENSON, S.V. Many routes to turbulent convection. *J. Fluid. Mech.*, v. 100, p. 449, 1980.
- [40] GIGLIO, M. MUSAZZI, S.; PERINI, U. Transition to Chaotic Behavior via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations. *Phys. Rev. Lett.*, v. 47, p. 243, 1981.
- [41] ZBORAY, R.; DE KRUIJF W.J.M.; VAN DER HAGEN RUZWAN-UDDIN, T.H.J.J. Investigating the nonlinear dynamics of natural-circulation, boiling two-phase flows. *Nuclear Technology*, v. 146, p. 244, 2005.
- [42] AA, Y.; CAO, Z.-H.; HU, W.-R., Transition to chaos in the floating half zone convection. *Chinese Physics Letters*, v. 24, p. 475, 2007.
- [43] BORA, D.; RAI, V.N.; KAW, P.K. Observations on period-doubling phenomena in a basic plasma experiment. *Phys. Lett. A*, v. 119, p. 411, 1987.
- [44] BRAUN, T.; LISBOA, J.A.; FRANCKE, R.E.; GALLAS, J.A.C. Observation of deterministic chaos in electrical discharges in gases, *Phys. Rev. Lett.*, v. 59, p. 613, 1987.
- [45] CHEUNG, P.Y.; WONG, A.Y. Chaotic behavior and period doubling in plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, v. 59, p. 551, 1987.
- [46] BRAUN, T.; LISBOA, J.A.; GALLAS, J.A.C. Evidence of homoclinic chaos in the plasma of a glow discharge. *Phys Rev. Lett.*, v. 68, p. 2770, 1992.
- [47] PAPANYAN, V.O.; GRIGORYAN, Y.I. Deterministic onset of chaos in a gas discharge. *Phys. Lett. A*, v. 164, p. 43, 1992.
- [48] LINDSAY, P.S. Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, v. 47, p. 1349, 1981.
- [49] TESTA, J.; PÉREZ, J.; JEFFRIES, C. Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator, *Phys Rev. Lett*, v. 48, p. 714, 1982.
- [50] ARECCHI, F.T.; LISI, F. Hopping Mechanism Generating $1/f$ Noise in Nonlinear Systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, p. 94, 1982.
- [51] YEH, W.J.; KAO, Y.H. Universal Scaling and Chaotic Behavior of a Josephson-Junction Analog. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, p. 1888, 1982.
- [52] CIRILLO, M.; PEDERSEN, N.F. On bifurcations and transition to chaos in a Josephson junction. *Phys. Lett. A*, v. 90, p. 150, 1982.
- [53] WORNLE, F.; HARRISON, D.K.; ZHOU, C.K. Analysis of a ferroresonant circuit using bifurcation theory and continuation techniques. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 20, p. 191, 2005.

- [54] HOPF, F.A.; KAPLAN, D.L.; GIBBS, H.M.; SHOEMAKER, R.L. Bifurcations to chaos in optical bistability. *Phys. Rev. A*, v. 25, p. 2172, 1982.
- [55] ARECCHI, F.T.; MEUCCI, R.; PUCCIONI, G.; TREDICCE, J. Experimental Evidence of Subharmonic Bifurcations, Multistability, and Turbulence in a Q-Switched Gas Laser. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, p. 1217, 1982.
- [56] WEISS, C.O.; GODONE, A.; OLAFSSON, A. Routes to chaotic emission in a cw He-Ne laser. *Phys. Rev. A*, v. 28, p. 892, 1983.
- [57] LAUTERBORN, W.; CRAMER, E. Subharmonic Route to Chaos Observed in Acoustics. *Phys. Rev. A*, v. 28, p. 892, 1983.
- [58] SMITH, Ch.W.; TEJWANI, M.J.; FARRIS, D.A. Bifurcation Universality for First-Sound Subharmonic Generation in Superfluid Helium-4. *Phys. Rev. Lett.*, v. 48, p. 492, 1982.
- [59] MARRIOT, C.; DELISLE, C. Entrainment effects in an acoustooptic bistable device with delayed feedback. *Phys. Rev. A*, v. 38, p. 2394, 1988.
- [60] MARRIOT, C.J.; DESLISLE, C. Amplification of an external signal in an acousto-optic device with delay. *Phys. Rev. A*, v. 39, p. 1948, 1989.
- [61] FRANCESCHINI, V.; TEBALDI, C. Sequences of infinite bifurcations and turbulence in a five-mode truncation of the Navier-Stokes equations. *J. Stat. Phys.*, v. 22, p. 397, 1979.
- [62] KAI, T. Universality of power spectra of a dynamical system with an infinite sequence of period-doubling bifurcations. *Phys. Lett. A*, v. 86, p. 263, 1981.
- [63] CARMICHAEL, H.J.; SNAPP, R.R.; SCHIEVE, W.C. Oscillatory instabilities leading to "optical turbulence" in a bistable ring cavity. *Phys. Rev. A*, v. 26, p. 3408, 1982.
- [64] THOMPSON, J.M.; GHAFFARI, R. Chaotic dynamics of an impact oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 27, p. 1741, 1983.
- [65] ISOMÄKI, H.M.; VON BOEHM, J.; RÄTY, R. Devil's attractors and chaos of a driven impact oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 107, p. 343, 1985.
- [66] SCHULMAN, J.N. Chaos in piecewise-linear systems. *Phys. Rev. A*, v. 28, p. 477, 1983.
- [67] NG, H.D.; HIGGINS, A.J.; KIYANDA, C.B. RADULESCU, M.I.; LEE, J.H.S.; BATES, K.R.; NIKIFORAKIS, N. Nonlinear dynamics and chaos analysis of one-dimensional pulsating detonations, *Combustion Theory and Modelling*, v. 9, p. 159, 2005.
- [68] NG, H.D.; RADULESCU, M.I.; HIGGINS, A.J.; NIKIFORAKIS, N.; LEE, J.H.S. Numerical investigation of the instability for one-dimensional Chapman-Jouguet detonations with chain-branching kinetics, *Combustion Theory and Modelling*, v. 9, p. 385, 2005.
- [69] SKLYAROV, O.P. The mechanism of verbal memory and scenario of the development of speech V-rhythms. *Biofizika*, v. 50, p. 735, 2005.
- [70] HENRICK, A.K.; ASLAM, T.D.; POWERS, J.M. Simulations of pulsating one-dimensional detonations with true fifth order accuracy. *Journal of Computational Physics*, v. 213, p. 311, 2006.
- [71] LORENZ, E.N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, v. 20, p. 130, 1963.

- [72] HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, v. 50, p. 69, 1976.
- [73] BENEDICKS, M.; CARLESON, L. The dynamics of the Hénon Map. *Ann. Math.*, v. 133, p. 73, 1991.
- [74] MORA, L.; VIANA M. Abundance of strange attractors. *Acta Math.*
- [75] HEAGY, J.F. A physical interpretation of the Hénon map *Physica D*, Amsterdam, v. 57, p. 436, 1992.
- [76] PANDO, C.L.; LUNA ACOSTA, G.A.L.; MEUCCI R.; CIOFINI, M. Highly dissipative Hénon map behavior in the four-level model of the CO_2 laser with modulated losses. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 199, p. 191, 1995.
- [77] GRAHAM, R. TÉL, T. Quantization of the Hénon's map with disipation *Z. Phys. B-Condensed Matter*, v. 60, p. 127, 1985.
- [78] EL HAMOULY, H.; MIRA, C. Lien entre les propriétés d'un endomorphisme de dimension un et celle d'un difféomorphisme de dimension deux. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, v. 293, p. 525, 1981.
- [79] EL HAMOULY, H.; MIRA, C. Singularités dues au feuilletage du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bi-dimensionnel. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, v. 294, p. 387, 1982.
- [80] WHITLEY, D.C. Discrete dynamical systems in dimensions one and two. *Bull. London Math. Soc.*, v. 15, p. 177, 1983.
- [81] HOLMES, P.; WHITLEY, D.C. Bifurcations in 1D and 2D maps. *Philos. Trans. Roy. Soc.*, London, v. 311, p. 43, 1984.
- [82] MIRA, C.; CARCASSES, J.P.; BOSCH, M.; SIMÓ, C.; TATJER, J.C. Crossroad-area to spring-area transition, parts I and II. *Internat. J. Bifurc. Chaos*, v. 1, p. 183, 339, 643, 1991.
- [83] GALLAS, J.A.C. Structure of the parameter space of the Hénon map. *Phys. Rev. Lett.*, v. 70, p. 2714, 1993.
- [84] BEDFORD, E.; SMILLIE, J. Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . VII. Hyperbolicity and external rays. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, v. 32, p. 455, 1999.
- [85] SIBONY, N. Dynamiques des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , in: Dynamique et géométrie complexes, Lyon, in: Panor. Synthèses. *Soc. Math. France*, Paris, v. 8, p. 97, 1999.
- [86] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Reductions and simplifications of orbital sums in a Hamiltonian repeller. *Phys. Lett. A*, v. 352, p. 124-128, 2006.
- [87] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Conjugacy classes and orbital reversibility in a Hamiltonian repeller. *Phys. Lett. A*, v. 356, p. 1-7, 2006.
- [88] BEIMS, M.W.; GALLAS, J.A.C., Accumulation points in nonlinear parameter lattices. *Physica A*, v. 238, p. 225, 1997.
- [89] GALLAS, J.A.C., Units: remarkable points in dynamical systems. *Physica A*, v. 222, p. 125, 1995.

- [90] GROSMANN, S.; THOMAE, S. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Z. Naturforsch*, v. 32A, p. 1353, 1977.
- [91] DE MELO, W.; VAN STRIEN, S. *One-Dimensional Dynamics*, Springer, Berlin, 1992.
- [92] MYRBERG, P.J. Sur l'iteration des polynomes réeles quadratiques. *J. Math. Pures Appl.*, v. 41, p. 339, 1962.
- [93] MYRBERG, P.J. Iteration der reellen Polynome zweiten Grades, 3. Mitteilung. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A, v. 336, p. 339, 1963.
- [94] HUNT, B.R.; GALLAS, J.A.C.; GREBOGI, C.; YORKE, J.A.; KOÇAK, H. Bifurcation rigidity. *Physica D*, v. 129, p. 35, 1999.
- [95] YORKE, J.A.; GREBOGI, C.; OTT E.; TEDESCHINI-LALLI, L. Scaling Behavior of Windows in Dissipative Dynamical Systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 54, p. 1095, 1985.
- [96] GALLAS, J.A.C. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical systems. *Physica A*, v. 202, p. 196, 1994.
- [97] GALLAS, J.A.C. Structure of the parameter space of a ring cavity. *Applied Physics B*, v. 60, S-203, 1995, special supplement: Festschrift Herbert Walther.
- [98] DEMIDOV, E. *The Mandelbrot and the Julia sets Anatomy*, <http://www.people.nnov.ru/fractal/Mset/Contents.htm>, 2003.
- [99] BLACK, S.J. *A discussion of the Connectedness Locus of Complex Cubic Polynomials*, 2003.
- [100] PEITGEN, H-O.; SAUPE, D. *The science of fractal images*, Springer-Verlag, 1988.
- [101] BROOKS, R.; MATELSKI, J.P. Proc. of the 1978 Stony Brook Conference: Riemann Surfaces and related Topics. *Ann. Math. Stud.*, v. 97, p. 65, 1980. MANDELROT, B.B. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, v. 357, p. 249, 1980.
- [102] MANDELROT, B.B. *The fractal geometry of nature*, San Francisco: Freeman, 1982.
- [103] MILNOR, J. *Dynamics in one complex variable*, Stony Brook IMS Preprint # 1990/5, revised September 1991.
- [104] DEVANEY, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Redwood, 1989.
- [105] LEI, Tan editor, *The Mandelbrot Set: Themes and Variations. London Math. Soc. Lecture Notes Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [106] DOUADY, A.; HUBBARD, J.H. Iteration des polynomes quadratiques complexes. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, v. 294, p. 123, 1982.
- [107] DOUADY, A. Systemes dynamiques holomorphes. *Seminaire Bourbaki*, No. 599, 1982/83.
- [108] DEVANEY, R.L. *The Mandelbrot Set and the Farey Tree*, Boston University, December, 1997.
- [109] DEVANEY, R.L. The Mandelbrot, the Farey Tree and the Fibonacci Sequence. *Amer. Math. Monthly*, v. 106, p. 289-302, 1999.

- [110] O fato do scaling ser uma consequência da auto-similaridade dos cactus de Mandelbrot primeiro foi sugerido por Mandelbrot[102].
- [111] FAREY, J. On a curious property of vulgar fractions. *Phil. Mag. J.*, London, v. 47, p. 385, 1816.
- [112] SCHROEDER, M. *Fractals, Chaos, Power Laws*, Freeman, New York, 1991.
- [113] ROMERA, R.; PASTOR, G. MMONTOYA, F. Graphic tools to analyse one-dimensional quadratic polynomials *Comput. & Graphics.*, v. 20, p. 333, 1996.
- [114] HURWITZ, H.; FRAME, M.; PEAK, D. Scaling symmetries in nonlinear dynamics: a view from parameter space. *Physica D*, v. 81, p. 23, 1995.
- [115] ROMERA, R.; PASTOR, G. MMONTOYA, F. On the cusp and the tip of a midget in the Mandelbrot set antenna. *Physics Letters A*, v. 221, p. 158, 1996.
- [116] MILNOR, J. *On cubic polynomial Maps with periodic critical point*, Manuscript, 2006.
- [117] BRANNER, B.; HUBBARD, J.H. The iteration of cubic polynomials, Part I: The global topology of parameter space. *Acta Math.*, v. 160, p. 143-206, 1988.
- [118] MILNOR, J. *Dynamics in One Complex Variable*, 3rd. edition, Princeton University Press, 2006.
- [119] BRANNER, B.; HUBBARD, J.H. The iteration of cubic polynomials, Part II: Patterns and parapatterns. *Acta Math.*, v. 169, p. 229-325, 1992.
- [120] CABRAL, F.; LAGO, A.; GALLAS, J.A.C. A picture book of two families of cubic maps. *Int. J. Mod. Phys. C*, v. 4, p. 553-568, 1993.
- [121] BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. Accumulation boundaries: Codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductors lasers, electric circuits, atmospheric, and chemical oscillators. *Phil. Transac. of the Royal Soc. of London*, Series A, v. 366, p. 505, 2008.
- [122] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Period four stability and multistability domains for the Hénon map. *Physica A*, v. 295, p. 285, 2001.
- [123] LAVAURS, P. *Systèmes dynamiques holomorfes: Explosion de points périodiques*, Thèse, Université de Paris-Sud, 1989.
- [124] Fomos comunicados informalmente por A. Endler, que a mesma convergência foi encontrada no cactus de período 6 do mapa de Hénon complexificado, com parâmetros reais.
- [125] GROSSMANN, S.; THOMAE, S. Invariant distributions and stationary correlation functions of 1D discrete processes. *Z. Naturforsch.*, v. 32a, p. 1353, 1977.
- [126] BAZZANI, A. SERVINI, G.; TODESCO, E.; TURCHETTI, G. *Norma form approach to the theory of nonlinear betatronic motion*, CERN Yellow Report 94/02, 1994.
- [127] HILBORN, R.C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An introduction for Scientist and Engineers*, 2nd. ed. Oxford University Press, Oxford (2000).
- [128] GALLAS, J.A.C.; GREBOGI, C.; YORKE, J.A. Vertices in parameter space: Double crises which destroy chaotic attractors. *Phys. Rev. E*, v. 71, p. 1359, 1993.

- [129] STEWART, H.B.; UEDA, Y.; GRBOGI, C.; YORKE, J.A. Double crises in two-dimensional parameter dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 75, p. 2478, 1995.
- [130] MILNOR, J. *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures*, IMS at Stony Brook Preprint 1992/5.
- [131] BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C.; UEDA, Y. Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator. *Phys. Rev. E*, v. 77, p. 026217, 2008.
- [132] CORNER, J.F. How many different rational parametric cubic curves are there? Part 3: The catalog. *IEE Computer Graphics and Applications*, March/Abril, 2000.
- [133] PEITGEN, H-O.; RICHTER, P.H. *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, 1986.
- [134] BELAIR, J.; DUBUC, S. Fractal geometry and analysis. *Proc. of NATO Series C, Math and Phys. Sci.*, v. 346, 1989.
- [135] DOUADY, A.; HUBBARD, J.H., On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. Sci. École Normale Sup.*, p. 287, 1985.
- [136] MANDELROT, B.B. Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z . *Annals NY Acad. Sciences*, v. 357, p. 249, 1980.
- [137] DOUADY, A.; HUBBARD, J.H. Iteration des polynomes quadratiques complexes. *Comptes Rendus Academie des Sciences*, Paris, v. 294, p. 123, 1982.
- [138] GIRALDO, A; SASTRE, M.A. *Sistemas dinámicos discretos y caos. Teoría, ejemplos y algoritmos*, Fund. Gen. Univ. Polit. de Madrid, 2002.
- [139] GALLAS J.A.C.: A method for studying stability domains in physical models. *Physica A*, v. 211, p. 57, 1994; Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models. *Physica A*, v. 202, p. 196, 1994; Degenerate routes to chaos, *Phys. Rev. E* v. 48, R4156, 1993.
- [140] SCHRÖDER, E.: *Math. Ann.*, v. 2, p. 317, 1870; *Math. Ann.*, v. 3, p. 296, 1871, DERRIDA, B.; GERVOIS, A. POMEAU. Y.: *J. Phys. A*, v. 12, p. 269, 1979. COLLET, P.; ECKMANN, J.P.: *Iterated Map on the Interval as Dynamical Systems* Birkhäuser, Basel 1980.
- [141] PHILIP, A.G.; ROBUCCI, A.; FRAME, M. A new scaling along the spike of the Mandelbrot set. *Computers & Graphics*, v. 16, p. 223, 1992.