

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

**Efeito de carga imagem na dinâmica de  
feixes intensos de partículas carregadas<sup>†</sup>**

---

**Karen Fiuza**

Tese realizada sob orientação dos Professores Dr. Renato Pakter  
e Dr. Felipe Rizzato, e apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul em preenchimento parcial  
dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

PORTO ALEGRE  
Agosto 2008

---

<sup>†</sup> Trabalho financiado pela CAPES.

*Todos os caminhos levam à morte.*  
*Perca-se.*  
Jorge Luis Borges

DEDICATÓRIA

A minha mãe adotiva Rosane Pinto Ribeiro.  
Sem ela, nada disso teria sido possível.

---

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar devo agradecer à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ensino gratuito e de qualidade, que possibilitou que eu realizasse todos meus estudos, desde à graduação até o presente nível. E também à agência financiadora de pesquisa CAPES e ao Governo Federal do Brasil, pelo financiamento do trabalho através da bolsa de doutorado nacional e da internacional, e pelo suporte financeiro através da taxa de bancada. E à Coordenação de Pós-Graduação do Instituto de Física, assim como todos os funcionários do Instituto que são indispensáveis para o bom andamento de todos mestrados e doutorados dessa instituição.

Ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho, o agradecimento mais especial se dirige a minha família. Uma família que me acolheu, por escolha, e me deu todo o amor e apoio que eu poderia desejar, assim como todas as ferramentas necessárias para que eu construísse um bom futuro, baseado principalmente na educação. Tudo que eu sou hoje devo especialmente a eles: Rosane P. Ribeiro, Gelda B. P. Ribeiro, Otacílio S. Ribeiro, meus irmãos e suas respectivas famílias. A meu irmão mais novo, Cassio F. Pires, agradeço por seu companheirismo, entusiasmo em relação as minhas conquistas, incentivo e também pelos momentos de descontração.

A todos meus colegas de grupo, em especial, Roger Pizzato Nunes e Wilson Simeoni Jr. pelas frutíferas discussões e contínuo estímulo.

Na primeira fase deste doutorado duas pessoas tiveram papel fundamental: agradeço o apoio e a paciência de Israel J. R. Baumvol, entre outros, me ajudando nas minhas indecisões, e também sou muito grata a Rafael P. Pezzi, entre outros motivos, pelo suporte nas minhas primeiras viagens aos Estados Unidos, onde fiz o contato inicial com o grupo de Maryland.

Ao Prof. Dr. Rami Kishek pela receptividade na Universidade de Maryland, pelo apoio dentro e fora do âmbito acadêmico, e por acreditar no meu trabalho. Também agradeço imensamente a todo grupo do UMER (University of Maryland Electron Ring), particularmente aos Prof. Dr. Santiago Bernal, Prof. Dr. Dave Sutter, Prof. Dr. Martin Reiser, Prof. Dr. Patrick O'Shea, e aos estudantes de doutorado Christos Papadouplos e Michael Holloway, pela receptividade, pela ajuda em diversos momentos e contextos, e pelas discussões científicas.

Entre os mestres da profissão e da vida, uma dedicatória especial ao Prof. Dr. Irving Haber, que além de um exemplo profissional pela sua bem-sucedida carreira, um exemplo de caráter e moral. E um mestre que se tornou um amigo que levarei para a vida toda.

Minha gratidão calorosa está destinada aos meus amigos queridos, de dentro e fora do âmbito acadêmico, pela força e ajuda de sempre, pela compreensão nas minhas ausências, pela animação nas minhas presenças, pela motivação e descontração nos momentos

apropriados. Em especial cito Ana Carolina Ribeiro-Teixeira, Cintia V. Nunes, João Thiago S. de Amaral, Jorge Martins, Marnes Augusto Hoff, Olinda J. de Freitas e Tibério B. Vale, entre outros não menos importantes.

E para finalizar, gostaria de expressar meu amoroso apreço por uma pessoa que recentemente se tornou indispensável na minha vida, e responsável por uma dose extra de motivação para a conclusão deste trabalho: Félix Rubén A. Rodríguez, por todo seu incansável suporte durante a reta final, compreensão pela minha ausência e, em todos os aspectos, por sua enriquecedora companhia que espero ter o prazer de disfrutar por muitos anos.

A realização deste trabalho só foi possível graças à contribuição de todas essas pessoas, e outras tantas não citadas e não menos importantes. Para o futuro, espero que os frutos do meu trabalho possam falar por mim, em forma de contribuições significativas para o desenvolvimento de uma sociedade mais justa e mais humana.

Meu muito obrigada de todo coração,

Karen Fiuza.

*“Que tristes os caminhos, se não fora a mágica presença das estrelas.”*  
Mário Quintana

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul*  
*Agosto 2008*

# Conteúdo

|   |      |
|---|------|
| <b>Resumo</b> . . . . .                                     | viii |
| <b>Abstract</b> . . . . .                                   | ix   |
| <b>1. Introdução</b> . . . . .                              | 2    |
| 1.1 Aceleradores de Partículas . . . . .                    | 3    |
| 1.1.1 Feixe de Partículas . . . . .                         | 6    |
| 1.2 Estado da Arte . . . . .                                | 8    |
| 1.2.1 Estudos de Carga Imagem . . . . .                     | 9    |
| 1.3 Introduzindo a Tese . . . . .                           | 13   |
| <b>2. O Modelo Teórico</b> . . . . .                        | 15   |
| 2.1 O Feixe . . . . .                                       | 15   |
| 2.1.1 Distribuição de Partículas . . . . .                  | 17   |
| 2.1.2 Campo Focalizador Periódico . . . . .                 | 18   |
| 2.1.3 Movimento de Partícula . . . . .                      | 21   |
| 2.1.4 Modelando a Dinâmica do Feixe . . . . .               | 22   |
| <b>3. Simulação Numérica</b> . . . . .                      | 30   |
| 3.1 Simulação Numérica . . . . .                            | 31   |
| 3.1.1 Simulação de Partícula Teste . . . . .                | 31   |
| 3.1.2 Simulação Numérica Autoconsistente . . . . .          | 32   |
| 3.1.3 Parâmetros numéricos . . . . .                        | 34   |
| 3.2 Dinâmica de Partícula . . . . .                         | 34   |
| 3.2.1 Envelopes Descasados . . . . .                        | 35   |
| 3.2.2 Centróides Descasadas com Envelopes Casados . . . . . | 40   |
| 3.2.3 Feixes Completamente Descasados . . . . .             | 42   |
| 3.3 Análise Final . . . . .                                 | 44   |
| <b>4. Conclusão</b> . . . . .                               | 46   |
| <b>A. Definições</b> . . . . .                              | 48   |
| A.1 Bifurcações . . . . .                                   | 48   |
| A.2 Coordenada Longitudinal . . . . .                       | 48   |

---

|  |    |
|--|----|
| <b>B. Carga Imagem</b> . . . . .   | 50 |
| B.1 Força da Carga Imagem . . . . .  | 50 |
| B.1.1 Carga imagem - partícula teste . . . . .                               | 52 |
| B.1.2 Feixe - partícula teste . . . . .                                      | 54 |
| B.1.3 Feixe - feixe imagem . . . . .   | 56 |
| B.1.4 Conclusão . . . . .  | 56 |
| B.2 Lei de Coulomb Bidimensional . . . . .                                   | 57 |
| <b>C. Distorções na forma do feixe devido à carga induzida no condutor</b> . | 59 |
| <b>Referências</b> . . . . .   | 62 |

# Resumo

Esta tese analisa a dinâmica combinada do envelope e da centróide de feixes intensos de partículas carregadas envoltos por paredes condutoras. Similarmente ao caso onde as paredes condutoras estão ausentes, nós mostramos que a dinâmica do envelope e da centróide são independentes. Envelopes descasados decaem ao estado de equilíbrio com simultâneo crescimento de emitância, mas a centróide se mantém oscilando sem perda significativa de energia. São mostradas estimativas analíticas para obtenção de algumas características de formação de halo vista nas simulações completas.

# Abstract

This thesis analyses the combined envelope-centroid dynamics of high intensity charged beams surrounded by conducting walls. Similarly to the case where conducting walls are absent, we show that the envelope and centroid dynamics decouples from each other. Mismatched envelopes still decay into equilibrium with simultaneous emittance growth, but the centroid keeps oscillating with no appreciable energy loss. Some estimates are performed to analytically obtain some characteristics of halo formation seen in the full simulations.

# Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Canhão de elétrons. . . . .                          | 4  |
| 1.2  | Laboratório Nacional de Luz Síncrotron. . . . .      | 6  |
| 2.1  | Esquema simplificado da propagação do feixe. . . . . | 16 |
| 3.1  | Gráfico de Poincaré. . . . .                         | 35 |
| 3.2  | Espaço de fase - Simulações completas. . . . .       | 36 |
| 3.3  | Secção reta inicial. . . . .                         | 37 |
| 3.4  | Secção reta final. . . . .                           | 37 |
| 3.5  | Decaimento do raio RMS. . . . .                      | 38 |
| 3.6  | Fração do halo. . . . .                              | 39 |
| 3.7  | Gráfico de Poincaré. . . . .                         | 40 |
| 3.8  | Envelope e centróide do feixe. . . . .               | 41 |
| 3.9  | Gráfico de Poincaré. . . . .                         | 42 |
| 3.10 | Decaimento do envelope. . . . .                      | 43 |
| 3.11 | Gráfico da emitância. . . . .                        | 43 |
| 3.12 | Oscilação da centróide. . . . .                      | 44 |
| A.1  | Coordenada longitudinal . . . . .                    | 49 |
| B.1  | Partícula imagem - partícula no condutor . . . . .   | 51 |
| B.2  | Lei de Gauss . . . . .                               | 57 |

## Capítulo 1

# Introdução

Feixes de partículas carregadas estão mais presentes em nossa vida cotidiana do que popularmente se imagina. Desde metade do século passado, os feixes têm sido objeto de estudo de muitos trabalhos científicos, de caráter experimental e teórico, tanto por sua aplicação na indústria e tecnologia, quanto na ciência básica. Há muitas aplicações possíveis para partículas aceleradas, e na maior parte dessas aplicações o feixe de partículas deve se propagar dentro de uma parede condutora. E quando as dimensões do feixe são comparáveis com as dimensões da parede, se torna relevante a força exercida no feixe pelas cargas induzidas no condutor, também conhecidas como cargas imagem.

O objetivo desta tese é analisar o efeito de carga imagem na dinâmica combinada do envelope e da centróide em feixes carregados focalizados por campos magnéticos de alta intensidade envoltos por paredes condutoras [1]. Para tanto, foi realizado um estudo computacional de feixes de elétrons propagando-se fora do eixo de simetria do canal condutor, utilizando três diferentes métodos de simulação, que serão apresentados e explicados ao longo desta tese.

Estudos realizados nessa linha de pesquisa são de grande interesse para o entendimento da dinâmica de feixes desalinhados com respeito ao eixo de simetria do sistema focalizador. Este tipo de configuração é o que se observa em um sistema realístico, pois um alinhamento perfeito é muito difícil de alcançar em um acelerador de partículas [2],

devido à complicada natureza do sistema focalizador. E através de um melhor entendimento do sistema real é possível aperfeiçoar os componentes dos aceleradores para que se tornem mais eficientes, melhorando, conseqüentemente, a qualidade dos feixes.

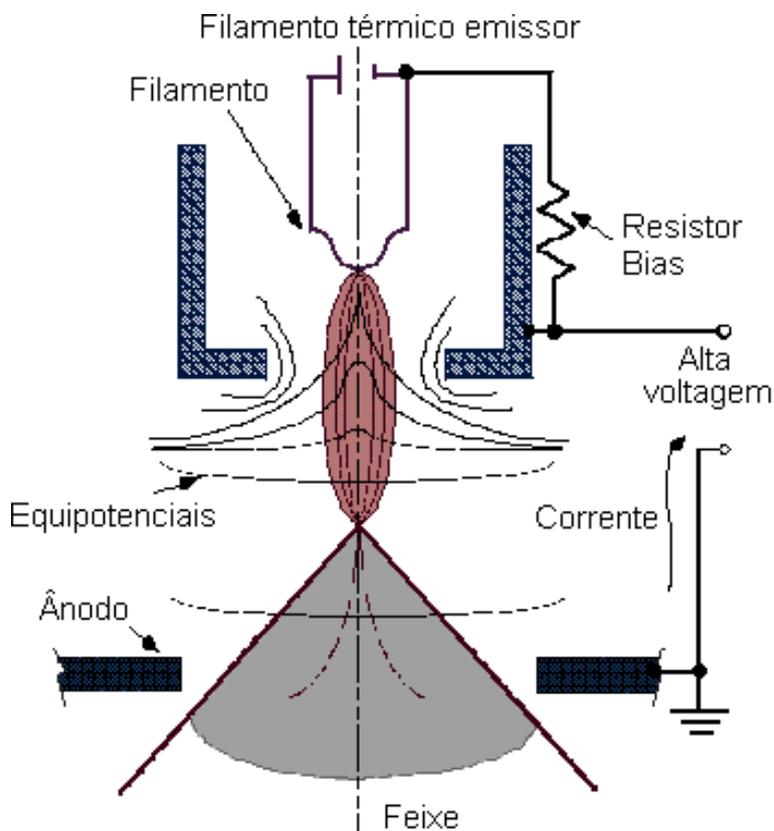
A seguir introduziremos algumas definições básicas e resumidamente abordaremos o que foi feito até recentemente na área.

## 1.1 Aceleradores de Partículas

Aceleradores de partículas são equipamentos que fornecem energia continuamente a um conjunto de partículas eletricamente carregadas, guiando-o ao longo de um caminho, até que alcance a energia final desejada. Todos os aceleradores de partículas possibilitam a concentração de alta energia em pequeno volume e em posições controladas de forma precisa. Exemplos de aceleradores de partículas comuns são as televisões e geradores de raios-X, e exemplos de aplicações são a produção de isótopos radioativos e a radioterapia do câncer [3, 4].

Um acelerador de partículas é essencialmente construído utilizando uma fonte de partículas carregadas onde se aplicam voltagens, cada vez maiores. Após a aceleração inicial, as partículas são submetidas a campos magnéticos que as desviam de suas trajetórias, focalizando-as e controlando as direções conforme o fim específico.

O mais simples modelo conceitual de uma fonte de partículas carregadas consiste em um diodo plano, formado de duas placas de eletrodos onde um dos eletrodos emite partículas carregadas. Se as partículas são elétrons, o eletrodo chama-se cátodo. A aplicação de uma diferença de potencial entre as placas causa uma aceleração das partículas em direção ao eletrodo oposto, que no caso de elétrons chama-se ânodo. O ânodo contém uma abertura que permite o feixe se propagar em um tubo de vácuo, onde o feixe é focalizado e acelerado pela presença de campos eletromagnéticos, de diferentes maneiras que não cabe ao escopo dessa tese explicar em detalhes. Um esquema simplificado está



**Fig. 1.1:** Esquema simples de um canhão de elétrons [5]. O feixe de elétrons é gerado através de um filamento, que pode ser constituído de diferentes materiais, o mais comum sendo tungstênio, que funciona como o cátodo. Aplicando-se uma voltagem em uma espiral de tungstênio, essa se aquece, criando-se uma força atrativa para os elétrons do cátodo em direção ao ânodo, já que este é positivo em relação ao filamento.

mostrado na Figura 1.1.

Existem dois tipos básicos de aceleradores conforme a disposição geométrica dos componentes e trajetórias das partículas: circulares e lineares. Não obstante, mesmo os aceleradores circulares possuem um segmento linear para aceleração das partículas. Simplicadamente, nos aceleradores lineares as partículas seguem trajetórias que são aproximadamente linhas retas, e contam com dispositivos de aceleração ao longo do caminho. Enquanto nos aceleradores circulares e cíclicos, a trajetória das partículas é curva porque sofre a ação de campos magnéticos circulares ou em espiral. Existem diferentes tipos de

aceleradores circulares, entre eles, ciclotron, sincrociclotron e síncrotron [4].

Atualmente existem no mundo muitos aceleradores de partículas, e alguns deles de grande porte, utilizados tanto para fins de pesquisa fundamental como aplicada. Abaixo estão citados apenas alguns dentre os maiores do mundo, assim como o maior acelerador da América do Sul:

- **Large Hadron Collider (LHC):** é um complexo acelerador de partículas com o objetivo de colidir feixes de prótons de 7TeV ( $7 \times 10^{12}$  eV) cada. Assim que entrar em total funcionamento será o maior e mais potente acelerador de partículas do mundo. Foi construído e será operado por um grande complexo europeu conhecido como CERN (atualmente nomeado como “Organisation européenne pour la recherche nucléaire”), localizado na borda entre França e Suíça, próximo de Genebra. O colisionador está contido em um túnel circular de 27km de circunferência [6];
- **Spallation Neutron Source (SNS):** é um acelerador baseado em fonte de nêutrons, construído em Oak Ridge, Estados Unidos. Possui a fonte de nêutrons mais poderosa do mundo, e é capaz de acelerar feixes de íons de hidrogênio até 1GeV, equivalente à 90% da velocidade da luz. Os feixes de nêutrons são produzidos bombardeando um alvo de mercúrio com os prótons acelerados. Estes, por sua vez, excitam os núcleos de mercúrio através de um processo de reação nuclear chamado de “spallation”<sup>1</sup>, e como consequência os nêutrons resultantes formam feixes que são guiados pelos instrumentos. O anel tem circunferência de 248m, enquanto o acelerador linear tem 331m de comprimento [7];
- **Tevatron:** é um acelerador circular localizado no Laboratório Nacional Fermi, conhecido como Fermilab, em Batavia, Estados Unidos. É um acelerador do tipo síncrotron que acelera prótons e anti-prótons de até 1TeV de energia, em um anel

---

<sup>1</sup> Reação nuclear onde partículas leves são ejetadas como resultado de um bombardeamento, como por exemplo, de prótons de alta energia.



**Fig. 1.2:** *Fotografia do anel do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron [10].*

de 6.3km de circunferência [8];

- **Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC):** é um colisionador de íons pesados operado no Laboratório Nacional Brookhaven, em Upton, NY, Estados Unidos. É utilizado para colisão de íons a velocidades relativísticas e possui 3834m de circunferência [9];
- **Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS):** é um acelerador de elétrons de alta energia localizado em Campinas, Brasil (Figura 1.2). Possui energia nominal de operação de 1.37GeV e circunferência de 93.2m. O uso da luz síncrotron produzida no acelerador permite o estudo de átomos e moléculas para diversos fins, desde o desenvolvimento de novos materiais até o aperfeiçoamento de materiais biológicos com promissoras aplicações na área da saúde [10].

Desse modo, para que os aceleradores de partículas sejam cada vez mais eficientes, o estudo do feixe de partículas, sua dinâmica e características se faz muito importante. Mas como se define um feixe de partículas?

### 1.1.1 Feixe de Partículas

Um feixe é caracterizado pelas partículas que o formam, pela sua energia cinética e pelo número de partículas por unidade de tempo ou comprimento. Define-se um feixe

quando um aglomerado de partículas viaja com trajetórias aproximadamente paralelas e muito próximas. Geralmente um feixe possui formato cilíndrico quando é contínuo na direção longitudinal, ou elipsoidal quando na forma de pacotes. A secção reta transversal de um feixe varia ao longo do comprimento, ou de forma equivalente, varia ao longo do tempo, conforme explicado no Apêndice A.2.

As partículas do feixe estão sujeitas, basicamente, a dois tipos de campos magnético e elétrico: autocampos e campos aplicados. Os autocampos são advindos de forças de curto alcance, relacionadas com as colisões entre as partículas individuais, e também relacionadas a forças geradas pela distribuição de cargas e densidade de partículas. Carga espacial é uma outra maneira de chamar as autoforças devido aos autocampos, de forma que os termos autocampo e campo de carga espacial possuem o mesmo conceito considerando que o movimento da distribuição de cargas das partículas é a fonte dos autocampos elétrico e magnético [11]. Os campos aplicados sobre um feixe de partículas geralmente são do tipo quadrupolar, solenoidal ou ambos.

Chamamos de centróide de um feixe, o centro de massa da distribuição de partículas. Também se usa a média quadrática RMS (do inglês: “root mean square”)<sup>2</sup> das posições de todas as partículas constituintes do feixe, e nesse caso pode-se chamar de centróide RMS. O envelope de um feixe, por sua vez, é o raio máximo de um feixe ou, também, o raio médio quando chamado de envelope RMS [11]. Abaixo está a definição matemática da média RMS:

$$x_{RMS} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} \quad (1.1)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  é a média aritmética [11].

A dinâmica de feixes é o estudo do movimento de partículas carregadas sob o efeito de campos elétrico e magnético. No caso de feixes de partículas se propagando na região interior de um tubo condutor, há de ser considerado o efeito adicional causado

---

<sup>2</sup> Medida estatística da magnitude de uma variável.

pelas partículas carregadas induzidas nas paredes desse tubo. A posição e carga dessas partículas, induzidas pelo próprio feixe, são analiticamente encontradas utilizando um método que as toma como cargas de sinal contrário às cargas do feixe, localizadas do lado de fora do tubo, chamadas de cargas imagem [12]. E em seguida é possível estudar o efeito dessas cargas imagens sobre a dinâmica dos feixes.

Aqui encerramos as definições básicas da área de Física dos Feixes de Partículas Carregadas, e partiremos para uma abordagem científico-histórica relacionada com o presente trabalho.

## 1.2 Estado da Arte

Excelentes históricos sobre Física de Feixes, e aplicações, se encontram no livro de Martin Reiser [11] e na introdução da dissertação de mestrado de Wilson Simeoni Jr. [13]. Reiser desenvolve um histórico bastante completo que inicia com o nascimento em 1926 da Física de Feixes, quando H. Busch mostrou que os efeitos de campos magnéticos axialmente simétricos em raios de elétrons eram similares aos efeitos de lentes de vidros em raios de luz. E se estende até a atualidade com o nascimento do Laser de Elétrons Livres (FEL) (do inglês: “Free Electron Laser”), uma fonte de laser altamente eficiente, que gera feixes de laser de alta potência com um comprimento de onda precisamente controlado, através de um acelerador linear [14]. Além disso, no último capítulo da edição mais recente do livro do Reiser [11] há um resumo da pesquisa realizada na área de Física de Feixes desde 1993 até 2007. Já a dissertação de Simeoni contribui para esclarecimento da importância dos feixes de partículas até para os leigos no assunto, assim como insere uma detalhada linha cronológica do desenvolvimento da pesquisa nessa área.

Aqui vamos nos deter a trabalhos realizados que se relacionam com o presente estudo em torno das cargas imagens, dinâmica e aplicações.

### 1.2.1 Estudos de Carga Imagem

Um dos primeiros autores a considerar efeitos de carga imagem em feixes contínuos foi Laslett [15], há mais de 30 anos atrás. Ele considerou os efeitos de carga imagem em diversas circunstâncias, tais como feixe elíptico desalinhado, presença de uma placa de metal de formato hiperbólica (para simular lentes quadrupolares), e paredes resistivas. Fez o cálculo dos autocampos elétricos de um feixe dentro de um condutor cilíndrico, mostrando que a forma dos autocampos independe da distribuição de carga. Entretanto, a maioria dos resultados foram obtidos numericamente.

Uma coletânea de importantes trabalhos considerando carga imagem foi realizada por Christopher K. Allen e Martin Reiser [16–18] durante o doutorado de C.K.Allen, onde eles realizaram um estudo completo dos efeitos de carga imagem para feixes intensos dominados por carga espacial. Eles concluem que as dinâmicas longitudinais e transversais estão desacopladas no limite de pulsos longos, isto é, quando o comprimento do pacote de elétrons é maior que a periodicidade da rede focalizadora, no caso de feixes elípticos com  $\frac{z_m}{a_0} > 5$  e  $\frac{z_m}{b} > 3$ , onde na elipse  $z_m$  é o eixo maior,  $a_0$  é o eixo menor e  $b$  é a distância entre o eixo do feixe e o condutor [17]. Quando os parâmetros do feixe estão fora desse intervalo, as dinâmicas são levemente acopladas, aumentando a dificuldade em analisar analiticamente o potencial dos autocampos devido à distribuição de carga, mesmo quando o feixe é axialmente simétrico. Nesse caso, não existe solução analítica exata, sendo necessário o uso de certas aproximações. Esta conclusão pode ser estendida para o caso de feixes circulares apresentado nesta tese, e dessa forma podemos considerar que a dinâmica longitudinal não influencia no estudo da dinâmica transversal aqui realizado [1]. Outra conclusão importante de Allen e Reiser [16–18] é que o efeito de carga imagem é negligenciável, quando o feixe é dado em pequenos pacotes considerando distribuições elipsoidais uniformes, para os parâmetros  $\frac{z_m}{a_0} < 1$  e  $\frac{b}{a_0} > 5$  [16, 18].

## Efeitos do condutor na dinâmica dos feixes

Geralmente assume-se que o feixe é perfeitamente alinhado com o eixo de simetria do campo focalizador, pois no eixo a dinâmica transversal da centróide possui um ponto de equilíbrio estável, na aproximação de feixe suave [19]. Nestas condições, e para propagação perfeitamente axissimétrica, efeitos de cargas imagem induzidas nas paredes dos condutores cilíndricos que envolvem o feixe se tornam irrelevantes [20]. Uma grande motivação para o presente trabalho [1] está no fato de que, em geral, um perfeito alinhamento entre a centróide de um feixe de partículas e o eixo de simetria dos canais condutores não é obtida experimentalmente.

Recentemente há estudos de dinâmica de feixes contínuos intensos propagando-se fora do eixo de simetria, que mostram que nesse caso pode haver formação de halo, oscilações de envelope, levando ao crescimento de emitância, e conseqüentemente, perda de partículas [11, 21]. Também sabe-se que nesse caso, a influência das cargas induzidas na parede do condutor se tornam relevantes, levando às instabilidades citadas anteriormente [11, 16, 18].

Em diversas situações, feixes de partículas carregadas focalizados por campos magnéticos relaxam a partir de fluxos não-estacionários para fluxos estacionários com concomitante crescimento de emitância [22]. Isso ocorre, por exemplo, em feixes com envelope inicialmente descasado ao longo do eixo de simetria magnético de sistemas focalizadores, onde a oscilação inicial do envelope relaxa até atingir o equilíbrio com simultâneo crescimento de emitância.

Envelopes descasados têm sido objeto de estudo de muitos autores [2, 11, 22–24], pois na prática os feixes possuem comprimento finito e a intensidade das forças não-lineares dos autocampos variam ao longo do feixe, de forma que o raio médio do feixe não se mantém constante ao longo do seu comprimento.

Gluckstern [23] mostra que feixes descasados induzem a formação em larga escala de

ilhas ressonantes<sup>3</sup> além da borda do feixe [24]. Algumas partículas do feixe podem ser capturadas pelas ilhas ressonantes, partindo dos arredores do feixe, levando à formação de halo, que já sabemos causa considerável aumento da emitância, acompanhado pelo decaimento em equilíbrio.

Estes estudos [19, 21–23] são de recente interesse para entender a dinâmica de feixes com algum desalinhamento com respeito ao eixo de simetria do sistema focalizador. Em uma série de dispositivos modernos de vácuo eletrônico de alta intensidade espera-se que as dinâmicas de feixes fora do eixo se desenvolvam como resultado de pequenos desvios entre a direção de injeção do feixe e o eixo magnético [25]. Isto é potencialmente arriscado já que dinâmicas fora do eixo também representam um tipo de feixe descasado e podem conduzir a colisões entre o feixe carregado e as paredes condutoras envoltas no sistema focalizador, e conseqüente perda de partículas [19, 25].

Um resultado surpreendente obtido recentemente é que as dinâmicas do envelope e da centróide se tornam totalmente desacopladas, no sentido que as dinâmicas relativas das partículas com respeito à centróide são independentes da dinâmica da centróide, na ausência de paredes condutoras [21]. Sob essas condições, não existe meio disponível para o qual o excesso de energia do movimento da centróide poderia ser termalizado ou convertido em emitância, associada com o envelope RMS do feixe. O fato é que não existe suficiente não-linearidade que assegure o acoplamento entre envelope e centróide nesse caso.

Aqui também investigamos a relação das dinâmicas do envelope e da centróide, mostrando que similarmente ao caso onde as paredes condutoras estão ausentes [21], mesmo com os efeitos de carga imagem presentes elas desacoplam uma da outra. Se as paredes são introduzidas a fim de representar quadros mais realísticos, a característica essencial adicionada é a interação não-linear entre as partículas do feixe e a centróide.

---

<sup>3</sup> Ilhas ressonantes são geradas por bifurcações. Uma definição mais completa é encontrada no Apêndice A.1.

Uma vez estimada a ação das imagens, investigamos o problema totalmente autoconsistente utilizando técnicas de integração numérica similares a técnicas de dinâmica molecular [26, 27]. Na ausência de alinhamento, algumas partículas da periferia do feixe são literalmente evaporadas do corpo central do feixe, formando o que se chama atualmente de halo [19, 28].

A questão relevante nesse ponto é a possibilidade de conversão de energia associada com a dinâmica da centróide em emitância do feixe. Trabalhos anteriores supõem termalização<sup>4</sup> e obtêm valores bem definidos para crescimento de emitância [22]. Entretanto, não é claro se termalização pode realmente acontecer nesse caso. É verdade que existe uma forte interação não-linear envolvendo centróide e partículas do feixe. Não obstante, estão ausentes grandes ressonâncias não-lineares induzidas ao redor do feixe, que se observa no caso de envelopes descasados.

A análise final deste problema revela o resultado inesperado que as oscilações da centróide são igualmente estáveis e não decaem em aumento de emitância, mesmo quando as paredes são levadas em conta, para os tempos computacionais observados. Estes constituem um tempo experimental razoável, da ordem de muitos períodos de betatron. Insistimos que esse contraste entre descasamento de centróide e envelope parece ser intimamente ligado com a dinâmica não-linear de partículas do feixe sob a ação destes descasamentos. Enquanto para feixes descasados grandes ressonâncias se formam ao seu redor, em contrapartida para descasamento da centróide o comportamento dinâmico é totalmente regular.

Os movimentos da centróide e envelope podem ser inicialmente descritos, de forma

---

<sup>4</sup> Uma distribuição estacionária representa um estado de energia mínima. Desvios desse estado estacionário, tal como acontece em feixe com envelope descasado e perfis de densidade de partículas não-estacionários, estão associados com altos níveis de energia total. A diferença na energia representa energia livre que pode ser convertida em energia térmica. Chamamos de termalização esse processo de conversão de energia livre em energia térmica, que leva a um aumento da temperatura do feixe e consequentemente aumenta a emitância. A temperatura do feixe está associada ao movimento aleatório das partículas no feixe [11].

aproximada, por equações similares às que governam movimento macroscópico, e suas ações sobre as partículas podem ser examinadas como se as partículas fossem observadores passivos. Dessa forma adotamos a aproximação de partícula-teste [28]. Então, se a órbita de uma fração relativamente grande de partículas é substancialmente distorcida em relação à localização e forma do feixe inicialmente assumidas, pode-se esperar que o estado macroscópico decaia vagarosamente.

### 1.3 Introduzindo a Tese

No presente capítulo foi feita uma abordagem dos conceitos básicos, introduzindo a importância de estudos deste tipo, e contextualizando o presente trabalho no âmbito da pesquisa mundial.

O material dos capítulos 2, 3 e 4 é essencialmente uma exposição mais detalhada do trabalho já publicado durante o desenvolvimento desta tese [1,29], não obstante também contém importante trabalho analítico que não está publicado.

No Capítulo 2 introduzimos o modelo teórico para o feixe de partículas, e para os campos magnéticos, isto é, o modelo macroscópico para a dinâmica do feixe. Também introduz o modelo teórico básico para a dinâmica de partícula. Serão considerados feixes com seção reta circular focalizados por campo magnético solenoidal.

O Capítulo 3 dedica-se ao estudo da dinâmica da partícula macroscópica comparando a aproximação de partícula-teste com as simulações completas. Além da descrição da simulação, também adicionamos nova informação ao caso de descasamento de envelope puro e suas correspondentes ilhas ressonantes, de forma a fixar uma referência com a qual comparar resultados futuros. Então, o papel da dinâmica da centróide no problema de crescimento da emitância é investigado.

Portanto, a tese está dedicada ao estudo teórico da dinâmica do feixe incorporando os efeitos de carga imagem. Os resultados analíticos são checados contra as soluções obtidas

---

numericamente, com a ajuda de simulações autoconsistentes. As simulações completas utilizadas para o estudo da dinâmica, fazem uso do método da função de Green com um número variável de partículas  $N$ , acima de  $N = 20.000$ . Todas simulações consideram um feixe inicial redondo, homogêneo e sem emitância (chamados de feixes frios), de forma a representar feixes dominados por carga espacial [30].

Cabe dizer que palavras em inglês só foram utilizadas ao longo da redação desta tese quando não foram encontradas palavras equivalentes em português.

## Capítulo 2

# O Modelo Teórico

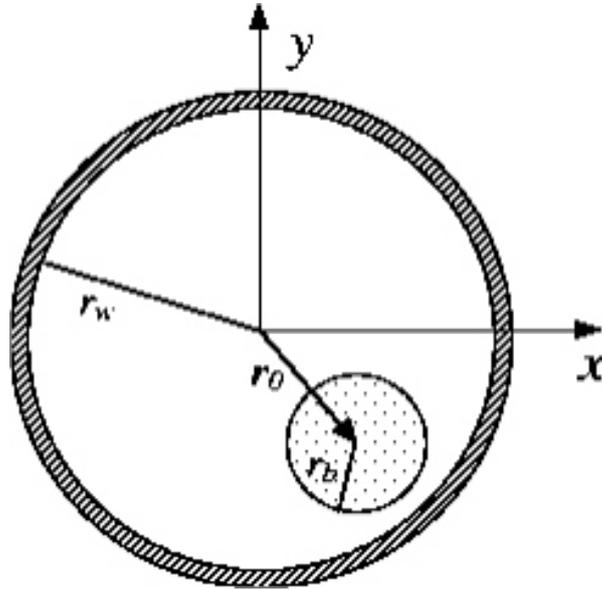
Nosso sistema é constituído de um feixe de partículas carregadas, focalizado por um campo magnético solenoidal constante, movendo-se ao longo do canal interno de um tubo circular condutor de raio  $r_w$ . A centróide do feixe oscila em torno do eixo de simetria do sistema focalizador, induzindo cargas na superfície das paredes. Conforme o feixe oscila, gera uma distribuição assimétrica de cargas superficiais, e conseqüentemente, um complicado acoplamento feixe-envelope. Neste capítulo introduziremos o modelo básico para este sistema bem como o modelo macroscópico para a dinâmica do feixe.

### 2.1 O Feixe

Um esquema simplificado da propagação do feixe é mostrado na Figura 2.1 onde representamos a secção reta de um tubo cilíndrico circular contendo um feixe cilíndrico circular de raio  $r_b$  centrado na coordenada da centróide  $\mathbf{r}_0 \equiv X\hat{x} + Y\hat{y}$ .

Um breve sumário das premissas básicas utilizadas no modelo desse feixe [11, 20] são apresentadas abaixo:

- **Características:** o feixe é intenso, contínuo na direção de propagação, com distribuição uniforme de partículas com carga  $\rho$  e densidade de corrente  $\mathbf{J}_z = \mathbf{J}$  independentes das coordenadas transversais, de contorno suave, constituído de



**Fig. 2.1:** *Secção reta de aspectos geométricos do sistema, onde  $r_w$  é o raio do condutor,  $r_b$  é o raio do feixe (ou envelope), e  $r_0$  é a coordenada da centróide.*

partículas iguais, propagando-se na direção  $z$  com velocidade axial média  $V = \beta c = \text{constante}$ , onde  $\beta$  é o fator relativístico e  $c$  é a velocidade da luz;

- **Modelo de Feixe Fino:** o feixe é fino, com dimensões  $a$  e  $b$  muito menores que  $S$ , sendo  $a$  e  $b$  as dimensões transversais características  $x$  e  $y$  do feixe, e  $S$  a escala axial;
- **Dimensão:** o raio do feixe é dado por  $r_b = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  a partir do eixo do feixe;
- **Existência de parede:** o feixe está envolto por uma parede cilíndrica condutora de raio  $r = r_w$ ;
- **Referencial:** o movimento das partículas no referencial do feixe é não-relativístico;
- **Campos:** os campos focalizadores aplicados,  $\mathbf{B}_{foc}(\mathbf{x}, t)$ , são gerados por fontes de corrente, e os campos elétrico e magnético autogerados,  $\mathbf{E}_s(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{B}_s(\mathbf{x}, t)$ , são gerados autoconsistentemente pela densidade de carga do feixe  $\rho(\mathbf{x}, t) = q \int f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p$

e densidade de corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = q \int \mathbf{v} f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p$ , onde  $f_b(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  é a função distribuição do feixe no espaço de fase hexadimensional  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ ;

- **Aproximação Paraxial:** supõe-se que o feixe tem grande momentum axial  $p_b = \gamma m \beta c$ , e que a perveância  $K$ , conhecida como perveância de autocampo (quantidade adimensional que está relacionada com os efeitos da carga espacial do feixe) é muito menor que a unidade  $\frac{2Nq^2}{\gamma^3 m \beta^2 c^2} \equiv K \ll 1$ , sendo  $N = \int n(\mathbf{x}, t) dx dy$  o número total e constante de partículas por comprimento axial e  $n(\mathbf{x}, t)$  a densidade de partículas do feixe. Desse modo, partindo-se do Hamiltoniano do sistema, é possível demonstrar a aproximação paraxial que diz que o momentum axial  $p_b$  é muito maior que os momenta transversais:  $p_x^2, p_y^2, (p_z - p_b)^2 \lll p_b^2$ .

### 2.1.1 Distribuição de Partículas

Um *ensemble*<sup>1</sup> de partículas pode ser descrito e modelado através do uso de uma função distribuição no espaço de fases. No caso presente, a distribuição é contínua e suave, e o *ensemble* é também uma função do tempo. Portanto, a função distribuição depende das variáveis  $x, p_x, y, p_y$  e  $t$ , sendo  $x$  e  $y$  as coordenadas espaciais transversais,  $p_x$  e  $p_y$  são seus respectivos momenta, e  $t$  é o tempo. A função distribuição é representada por  $f_b(x, y, p_x, p_y, t)$ , sendo  $f_b(x, y, p_x, p_y)$  a densidade de partículas no espaço de fases no tempo  $t$ . Como toda função distribuição,  $n$  deve ser positivo e sua integral sobre todo o espaço de fases deve ser não-nula, e equivalente ao número total de partículas. Assumimos que não há perda de partículas de forma que esta integral é constante.

Para fins físicos, sabemos que a dinâmica do feixe evolui de forma suave, isto é, não existe saltos ou descontinuidades na distribuição ao longo do tempo  $t$  quando trata-se de campos de longo alcance, tal como campos Coulombianos, e um grande número de

<sup>1</sup> A tradução mais próxima em português seria conjunto. Porém não há uma palavra que descreva com exatidão o sentido utilizado aqui: “um grupo produzindo um efeito estocástico único”.

partículas  $N \rightarrow \infty$ . Essa premissa é necessária para que se use equações diferenciais que descrevam a evolução do tempo do *ensemble* de partículas. Supomos que o feixe se propaga com velocidade  $v$  constante ao longo do eixo do condutor, o que é bastante acurado visto que utilizamos a aproximação paraxial somado ao fato que a velocidade rotacional causada pelas lentes solenoidais é muito menor que  $v$ . Dessa forma, pode-se expressar o tempo como função da posição axial, o que será mostrado na Seção 2.1.3.

### 2.1.2 Campo Focalizador Periódico

Nas configurações de campo focalizador periódico, assume-se condições de estado quase-estacionário nas fontes de corrente externas, e determina-se o campo focalizador no vácuo  $\vec{B}_{foc}(\mathbf{x})$  nas partículas do feixe a partir das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B}_{foc} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_{foc} = 0. \quad (2.2)$$

Consideraremos apenas campo magnético solenoidal com magnitude focalizadora constante  $B_0$ . Não obstante, para definirmos a função de rede equivalente a este campo, a análise a seguir considera as equações de campo magnético periódico.

#### Campo solenoidal

Para resolver as equações (2.1) e (2.2) utilizando a expressão geral do campo magnético dada por:

$$\vec{B}(r, z) = B_r(r, z)\hat{e}_r + B_\varphi(r, z)\hat{e}_\varphi + B_z(r, z)\hat{e}_z, \quad (2.3)$$

onde  $\vec{B}(r=0, z) = B_0(z)\hat{e}_z$  é o campo no eixo de simetria do feixe, aplica-se coordenadas cilíndricas, chegando assim às seguintes expressões:

$$\nabla \times \vec{B} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (2.5)$$

No limite de um feixe fino é possível fazer expansão de Taylor em  $\vec{B}(r, z)$  próximo ao eixo do feixe, resultando em:

$$B_r(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)r^k \quad (2.6)$$

$$B_\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z)r^k \quad (2.7)$$

$$B_z(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)r^k. \quad (2.8)$$

Aplicando as expressões acima (2.6), (2.7) e (2.8) às equações (2.4) e (2.5) chega-se à:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = & - \sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(z)r^k \hat{e}_r + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k(z)r^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)kr^{k-1} \right) \hat{e}_\varphi \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)r^{k-1}b_k(z)\hat{e}_z \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)a_k(z)r^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_k(z)r^k. \quad (2.10)$$

O segundo passo para resolver as equações de Maxwell é igualar as equações (2.9) e (2.10) à zero. Faz-se necessário escrever alguns termos destas somas, igualá-los à zero, e usar a condição de que cada termo de  $\nabla \times \vec{B}$  seja nulo, já que se trata de um problema de magnetostática. Não entrarei em detalhes desta álgebra, partindo diretamente para

as conclusões:

$$\dot{a}_l(z) - (l-1)c_{l+1}(z) = 0 \quad (2.11)$$

$$b_l(z) = 0 \quad (2.12)$$

cujos  $l$  representam a ordem na soma. Este resultado nos leva a concluir que  $B_\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z)r^k = 0$ , ou seja, o campo  $\vec{B}$  não possui dependência azimutal. Ainda nos restam os termos (2.6) e (2.8), que escreveremos em termos dos primeiros termos das somas:

$$\vec{B}(r, z) = (a_1(z)r + a_2(z)r^2 + a_3(z)r^3 + \dots) \hat{e}_r + (c_0(z) + c_1(z)r + c_2(z)r^2 + \dots) \hat{e}_z. \quad (2.13)$$

Como estamos interessados apenas nos termos de até primeira ordem em  $r$ , a equação (2.13) resulta em:

$$\vec{B}(r, z) \cong (a_1(z)r) \hat{e}_r + (c_0(z) + c_1(z)r) \hat{e}_z. \quad (2.14)$$

Utilizando a equação (2.11) na equação (2.14):

$$\vec{B}(r, z) \cong -\frac{1}{2}\dot{c}_0(z)r\hat{e}_r + c_0(z)\hat{e}_z, \quad (2.15)$$

Mas sabendo-se que  $c_0 = B_0$  e  $\dot{c}_0 = \dot{B}_0$ , da equação (2.8), chega-se à expressão final:

$$\vec{B}(r, z) \cong -\frac{1}{2}\dot{B}_0(z)r\hat{e}_r + B_0(z)\hat{e}_z, \quad (2.16)$$

sendo  $\hat{e}_r = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$ . Estendendo este resultado para uma região próxima do feixe, chegamos ao campo focalizador magnético solenoidal periódico da forma:

$$\vec{B}_{sol}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\dot{B}_z(z)(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y) + B_z(z)\hat{e}_z, \quad (2.17)$$

onde  $\dot{B}_z(z) \equiv (\frac{\partial B_z}{\partial z})$  e  $B_z(z) = B_z(z + S)$  é a componente axial do campo em  $(x, y) = (0, 0)$ , ou também identificado como o eixo do feixe. Com a correspondente função de rede das equações de movimento transversal definida por:

$$\kappa_z \equiv [\Omega_L(z)]^2 = \left( \frac{qB_z(z)}{2\gamma m\beta c^2} \right)^2, \quad (2.18)$$

onde  $\Omega_L(z)$  é a frequência de Larmor normalizada, e  $\Omega_L(z + S) = \Omega_L(z)$  [20].

### 2.1.3 Movimento de Partícula

O movimento de uma partícula carregada no referencial de Larmor de um campo solenoidal focalizador homogêneo pode ser representado por uma equação dinâmica adimensional para a coordenada transversal normalizada  $\mathbf{r} = \left(\frac{x}{r_w}\right)\hat{x} + \left(\frac{y}{r_w}\right)\hat{y}$ , dessa forma [1]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} - \nabla_{\perp}\psi + \mathbf{F}_{imagem}. \quad (2.19)$$

O raio adimensional do canal satisfaz  $r_w = 1$ .

A partir deste ponto, utilizaremos uma notação comum em Física de Feixes, representando a coordenada longitudinal, ao longo da direção de propagação, como  $s = \sigma_0^{1/2}z = \sigma_0^{1/2}v_{z,0}t$ , onde  $\sigma_0 = qB_z/2\gamma\beta mc^2$  é o avanço de fase no vácuo por unidade axial de comprimento, que mede a magnitude focalizadora  $B_0$  constante do campo solenoidal, e assumir que todas as partículas se movem na direção positiva de  $s$ . Uma explicação mais cuidadosa da notação pode ser encontrada no Apêndice A.2.

Para partículas rápidas, a velocidade longitudinal  $v_{z,0}$  ao longo do eixo  $z$  é aproximadamente constante, e a derivação de  $r$  diz respeito à coordenada longitudinal  $s$ . Aqui,  $\beta = v_{z,0}/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  é o fator relativístico,  $q$  é a carga e  $m$  a massa individual das partículas do feixe.  $\psi = \psi(\mathbf{r}, s)$  é o potencial adimensional do autocampo eletromagnético atuando em cada partícula, que pode ser escrito em termos do potencial

eletrostático  $\phi$  como  $\psi = q\phi / (\gamma m \beta^2 c^2 r_w^2 \sigma_0)$  e  $\mathbf{F}_{imagem} = \mathbf{F}_{imagem}(\mathbf{r}, s)$  é a força adimensional gerada pelas cargas de superfície cuja estrutura ainda não é conhecida. Para determinada densidade de partículas  $n(\mathbf{r}, s)$ , o potencial  $\psi$  é determinado a partir da equação de Poisson [11]:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -\frac{2\pi K}{N} n(\mathbf{r}, s), \quad (2.20)$$

com a perveância  $K = 2Nq^2 / \gamma^3 m \beta^2 c^2 r_w^2 \sigma_0$ ,  $N$  é o número total e constante de partículas por comprimento axial, e  $n(\mathbf{r}, s)r_w^2 \rightarrow n(\mathbf{r}, s)$  é a densidade adimensional do feixe.

Conforme o feixe oscila em torno do eixo,  $\psi$  e  $\mathbf{F}_{imagem}$  experimentam complicadas modificações que não são facilmente expressas em formas analíticas fechadas e exatas. Algo que sabemos apesar disso, é que quando as paredes estão ausentes, centróide e envelope tornam-se desacoplados [21]. Outra informação chave, dada pela Lei de Gauss, é que mesmo na presença de paredes condutoras, cargas superficiais induzidas por feixes circulares perfeitamente centrados ao eixo de simetria não atuam na região interna  $r < r_w$  [12]. Estes dois fatos sugerem que as oscilações da centróide são moderadas, e um feixe inicialmente circular aproximadamente preserva sua forma circular ao menos durante os estágios iniciais da dinâmica. Para maiores detalhes, no Apêndice C mostramos que essa premissa é suficientemente acurada.

### 2.1.4 Modelando a Dinâmica do Feixe

Neste ponto, se torna necessária a introdução do conceito de emitância [11]. A emitância está relacionada com as projeções bidimensionais do volume ocupado pelo conjunto de partículas no espaço de fase hexadimensional, o qual é definido pelas coordenadas de posição e momentum da distribuição de partículas do feixe  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Assim, a emitância de um feixe é aproximadamente igual ao valor da área ocupada pelos pontos que representam todas as partículas no feixe, a uma dada distância  $s$  ao longo da direção de propagação, no espaço de fase bidimensional, por exemplo,  $A_x = \iint dx dp_x$ . Entretanto,

essa definição não diferencia um feixe bem comportado de outro com forma distorcida devido a forças não-lineares, já que a partir do Teorema de Liouville pode ser mostrado que a emitância permanece constante, isto é, a área de um determinado conjunto de pontos no espaço de fases bidimensional é invariante [31–33], se não existem forças não-lineares ou acoplamento das forças entre as direções transversais. Somente analisando a densidade da distribuição em um espaço de fases quadridimensional é possível detectar crescimento de emitância [34].

Existe uma outra definição de emitância que mede, de forma figurativa, a qualidade do feixe que é dada pelo produto da largura e divergência do feixe, onde a divergência relata o espalhamento de velocidade randômica (ou térmica), já que o crescimento de emitância está relacionado com a conversão da energia dos autocampos para energia cinética das partículas [35–38]. Para ser mais preciso, usaremos os momentos da distribuição de partículas no espaço de fases bidimensional, para definir a emitância quadrática média *RMS* [39, 40] nas direções transversais  $x$  e  $y$  por:

$$\epsilon_x^2 = [16 \langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2], \quad (2.21)$$

$$\epsilon_y^2 = [16 \langle y^2 \rangle \langle p_y^2 \rangle - \langle yp_y \rangle^2]. \quad (2.22)$$

onde  $\langle \rangle$  caracteriza a média estatística sobre o espaço de fase do feixe. Uma descrição mais rigorosa do feixe requer também o formato da distribuição, além da área ocupada no espaço de fases. Na prática, dinâmicas não-lineares do feixe, instabilidades, e outros efeitos podem causar crescimento de emitância, de forma que seu valor real é sempre maior que o encontrado teoricamente com a ajuda das equações acima.

Vamos partir agora à análise para encontrar a forma do potencial  $\psi$  e da força imagem  $\mathbf{F}_{imagem}$ . Primeiramente, devemos estudar a dinâmica de feixes de raio  $r_b$  com distribuição homogênea de cargas, movendo-se em um canal de tubo condutor circular

aterrado de raio  $r_w$ , sob a ação de um campo periódico solenoidal.

Considerando que a parede tem influência no formato do feixe, partimos do Hamiltoniano [20]:

$$H = \gamma mc^2 + \beta c(p_z - p_b) + \frac{1}{2\gamma m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2\gamma^3 m}(p_z - p_b)^2 + e\phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.23)$$

onde  $\gamma = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  é constante, e usando as equações de movimento de Hamilton, as equações de Maxwell, e a equação de Poisson (2.20), é possível chegar às equações de órbita para o movimento transverso das partículas do interior do feixe  $0 \leq x^2(s) + y^2(s) < r_b^2(s)$  [11, 20]:

$$\frac{d^2}{ds^2}x(s) - 2\Omega_L(s)\frac{d}{ds}y(s) - \left(\frac{d}{ds}\Omega_L(s)\right)y(s) - \frac{K}{r_b^2(s)}x(s) = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}y(s) + 2\Omega_L(s)\frac{d}{ds}x(s) + \left(\frac{d}{ds}\Omega_L(s)\right)x(s) - \frac{K}{r_b^2(s)}y(s) = 0, \quad (2.25)$$

na qual  $\Omega_L$  é a frequência de Larmor normalizada dada a partir da equação (2.18). Essas equações são consideravelmente simplificadas no referencial de Larmor, e as soluções são dadas por:

$$X(s) = A\omega(s)\cos[\varphi(s) + \phi_0], \quad (2.26)$$

$$Y(s) = A\omega(s)\sin[\varphi(s) + \phi_0], \quad (2.27)$$

onde  $A$  e  $\phi_0$  são constantes,  $\varphi(s)$  é a função de fase de betatron, e  $\omega(s)$  é a função envelope.

Estas soluções são análogas à combinação linear das funções de Floquet<sup>2</sup> [11], que

---

<sup>2</sup> As chamadas funções de Floquet constituem um par de solução de uma equação do tipo Mathieu-Hill derivada a partir da teoria geral de Courant e Snyder [41] para focalização periódica de partículas carregadas de um campo acelerador, utilizada para descrever o movimento das partículas de um feixe nesse sistema.

são dadas por:

$$u = \omega(s)e^{i\psi(s)}, \quad (2.28)$$

$$v = \omega(s)e^{-i\psi(s)}, \quad (2.29)$$

e cuja combinação linear é:

$$x(s) = A\omega(s) \cos[\psi(s) + \phi] \quad (2.30)$$

onde a amplitude  $A$  e a fase  $\phi$  são determinadas pelas condições iniciais. O Wronskiano  $W = u\dot{v} - \dot{u}v$  que é uma constante, é dado por:

$$W = -2i\omega^2\dot{\psi} = W_1 \quad (2.31)$$

e escolhendo o valor da constante igual à  $W_1 = -2i$  se obtém a relação:

$$\frac{d\psi}{ds} = \dot{\psi} = \frac{1}{\omega^2}. \quad (2.32)$$

Agora, a partir da equação (2.30) é possível derivar a equação de uma elipse no espaço de fases de uma partícula cuja trajetória obedece essa equação. Primeiramente derivamos a referida equação, e substituindo a relação (2.32) chega-se à:

$$\dot{x} = A\dot{\omega}(s) \cos[\psi(s) + \phi] - A\frac{1}{\omega(s)} \sin[\psi(s) + \phi]. \quad (2.33)$$

Em seguida, utilizamos uma relação entre  $x$  e  $\dot{x}$ , elevamos ambos os lados ao quadrado, usamos a identidade trigonométrica  $\text{sen}^2(a) + \text{cos}^2(a) = 1$ , e  $\text{cos}^2[\psi(s) + \phi] = \frac{x^2}{A^2\omega^2(s)}$  que

sai da equação (2.30), como está mostrado abaixo nos passos abaixo:

$$x^2 = A^2\omega^2(s) \cos^2[\psi(s) + \phi] \quad (2.34)$$

$$\dot{x} - \frac{\dot{\omega}(s)}{\omega(s)}x = -A\frac{1}{\omega(s)} \sin[\psi(s) + \phi] \quad (2.35)$$

$$\omega^4 \left( \dot{x} - \frac{\dot{\omega}(s)}{\omega(s)}x \right)^2 = A^2\omega^2(s) \sin^2[\psi(s) + \phi] \quad (2.36)$$

$$x^2 + \omega^4(s) \left( \dot{x} - \frac{\dot{\omega}(s)}{\omega(s)}x \right)^2 = A^2\omega^2(s) \quad (2.37)$$

$$\frac{x^2}{\omega^2(s)} + (\omega(s)\dot{x} - \dot{\omega}(s)x)^2 = A^2. \quad (2.38)$$

Usando as seguintes definições:

$$\hat{\alpha} = -\omega(s)\dot{\omega}(s), \quad (2.39)$$

$$\hat{\beta} = \omega^2(s), \quad (2.40)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{\omega^2(s)} + \dot{\omega}^2(s) = \frac{1\hat{\alpha}^2(s)}{\hat{\beta}(s)}, \quad (2.41)$$

e substituindo na equação (2.38), podemos reescrevê-la da forma:

$$\hat{\gamma}x^2 + 2\hat{\alpha}x\dot{x} + \hat{\beta}\dot{x}^2 = A^2. \quad (2.42)$$

Note que essa última equação (2.42) é equação de uma elipse cuja forma e orientação para qualquer  $s$  são determinadas pela amplitude  $A$  e pelos coeficientes  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\gamma}$  definidos por  $\omega(s)$  e  $\dot{\omega}(s)$ . A área de cada elipse é  $\pi A^2 \sqrt{(\hat{\beta}\hat{\gamma} - \hat{\alpha}^2)} = \pi A^2$  já que  $(\hat{\beta}\hat{\gamma} - \hat{\alpha}^2) = 1$  conforme a equação (2.41), isto significa que a área é constante ao longo do movimento do feixe. A área da maior elipse é dada por  $A_x = \epsilon_x \pi$ , onde  $\epsilon_x$  é a emitância do feixe já apresentada anteriormente.

Voltando à análise anterior, substituindo as equações (2.26) e (2.27) nas equações de órbita no referencial de Larmor (2.24) e (2.25), e sabendo que a amplitude máxima é

$A = \sqrt{\epsilon}$  e  $\omega(s) = r_b(s)/\sqrt{\epsilon}$  é a função envelope, chegamos à equação governante para o raio do feixe  $r_b = r_b(s)$  [20]:

$$\ddot{r} = -r_b + \frac{K}{r_b} + \frac{\epsilon^2}{r_b^3}, \quad (2.43)$$

em que a emitância  $\epsilon = \epsilon(s)$  pode não permanecer constante para feixes descasados. Para feixes com carga espacial dominante, de interesse aqui, um equilíbrio aproximado da equação (2.43), quando  $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$  pode ser expresso na forma  $r_{b,eq}^2 \approx K$  na coordenada  $s = 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  - um resultado que será usado nas simulações que serão apresentadas no próximo capítulo.

As equipotenciais externas de um feixe axialmente simétrico são idênticas às equipotenciais de um feixe equivalente com a mesma quantidade de carga, mas com o raio  $r_b \rightarrow 0$ . Esta simples observação adicionada com técnicas de carga imagem (que pode ser visto em maiores detalhes no Apêndice B.1), levam-nos a concluir que a carga imagem do feixe original se comporta como puntual, ou na verdade, como uma linha de carga situada em:

$$\mathbf{r}_{im} = \left(\frac{1}{r_0}\right)^2 \mathbf{r}_0, \quad (2.44)$$

e endossada com a perveância  $-K$ . Agora, uma partícula arbitrária localizada no ponto  $\mathbf{r}$  dentro do tubo é submetida à força total como representada pela equação (2.19) que considerando a homogeneidade e forma do feixe pode ser escrita (Ver Apêndice B.2):

$$-\nabla_{\perp}\psi \equiv \mathbf{F}_{feixe} = K \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{r_b^2}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq r_b, \quad (2.45)$$

$$-\nabla_{\perp}\psi \equiv \mathbf{F}_{feixe} = K \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \geq r_b, \quad (2.46)$$

como a força direta exercida sobre a partícula pelo feixe. A expressão (2.45) é aquela já usada na derivação da equação do envelope (2.43). Nesse ponto, entretanto, iremos procurar pelos seus efeitos nas órbitas individuais das partículas. A expressão da força

imagem que atua nas partículas individuais pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_{imagem}(\mathbf{r}) = K \frac{\mathbf{r}_{im} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{im}|^2}, \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{r}_{im}$  é expressa em termos de  $\mathbf{r}_0$  pela equação (2.44). Como um resultado intermediário, o uso da equação (2.47) permite avaliar a força média exercida sobre o feixe pela carga imagem,  $\mathbf{F}_{imagem \rightarrow feixe}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{r}_0 = \frac{1}{\pi r_b^2} \int_{feixe} \mathbf{F}_{imagem}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \equiv \mathbf{F}_{imagem \rightarrow feixe}. \quad (2.48)$$

Notamos que a autoforça  $\int_{feixe} \mathbf{F}_{feixe} d^2\mathbf{r}$  se anula, como requerido pela conservação de momentum [21]. A integral na equação (2.48) pode ser prontamente avaliada resultando em:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\mathbf{r}_0 + K \frac{\mathbf{r}_{im}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{im}(\mathbf{r}_0)|^2}, \quad (2.49)$$

segundo a qual indica que a força imagem depende somente da posição da centróide e das cargas imagens e é, portanto, independente do tamanho transversal do feixe enquanto ele mantiver a forma circular. Em termos práticos, a interação feixe imagem é totalmente equivalente à interação de duas linhas de carga com perveância total  $K$ . Este resultado interessante já foi sugerido em um artigo onde o autor conclui que o limite de carga espacial é independente do tamanho do feixe [28].

Os pontos de equilíbrio da equação (2.49) são encontrados fazendo-se  $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$ , e escrevendo-se  $\mathbf{r}_0 = r_0 \hat{\mathbf{r}}$ , e estão localizados em:

$$r_{0,eq} = \sqrt{-K + 1} \quad (2.50)$$

$$r_{0,eq} = 0. \quad (2.51)$$

O primeiro caracteriza um ponto instável, e o segundo um ponto estável.

Entretanto, dado o fato de que a equação de envelope (2.43) possui equilíbrio em  $K = r_{b,eq}^2$ , e que deve-se satisfazer a condição  $r_{0,eq} + r_{b,eq} < 1$ <sup>3</sup> o equilíbrio da equação (2.50) não pode ser obtido. Isso impede os efeitos diretos do ponto instável na órbita da centróide no caso de feixes com envelope estacionário. Entretanto, devemos ainda investigar como as partículas individuais são afetadas conforme a centróide move-se de acordo com a equação (2.49), e a dinâmica do envelope é governada pela equação (2.43), o que será feito no Capítulo 3.

---

<sup>3</sup> A posição de equilíbrio da centróide somada à posição de equilíbrio do raio deve ser menor que o raio do condutor, que nesse caso é normalizado igual a 1.

## Capítulo 3

# Simulação Numérica

Discutiremos os pontos relevantes das simulações autoconsistentes utilizadas nesse trabalho, e apresentaremos os gráficos resultantes dessas simulações, discutindo os resultados obtidos.

A quantidade de corrente do feixe que pode ser transportada através de um canal focalizador periódico, com uma dada abertura, é máxima quando o feixe está perfeitamente casado, isto é, quando o raio médio do feixe é constante e o envelope é uma função periódica com o mesmo período do sistema de lentes. Também, para feixes com carga espacial dominante é importante que o perfil de densidade de partículas seja tão uniforme quanto possível. Mas na prática, casamento perfeito é muito difícil de alcançar. Desse modo, corrente ou emitância do feixe podem diferir de um valor desejado. Deve-se ter um entendimento do comportamento do feixe quando as condições de casamento não são perfeitas. Se sabe que o envelope do feixe oscila em torno do raio de equilíbrio (feixe casado) em um canal focalizador contínuo uniforme [11]. Esperamos um comportamento similar em um canal focalizador periódico. Entretanto, devido à natureza periódica da força focalizadora atuando no feixe, temos a possibilidade de excitar parametricamente instabilidades que não ocorrem em canais uniformes.

## 3.1 Simulação Numérica

Antes de apresentar os resultados das análises da dinâmica de feixes feitas utilizando gráficos de Poincaré e simulações autoconsistentes completas, cabe introduzir detalhes de ambas simulações, cujos códigos foram desenvolvidos utilizando a linguagem de programação Fortran [42] para simular autoconsistentemente um feixe de partículas carregadas e suas interações.

### 3.1.1 Simulação de Partícula Teste

Na simulação de partícula teste, as equações da centróide e do envelope, mostradas abaixo respectivamente, são testadas sob o ponto de vista de partículas teste posicionadas aleatoriamente ao redor do feixe.

$$\ddot{r}_0 = -r_0 + K \frac{r_{im}(r_0) - r_0}{|r_0 - r_{im}(r_0)|^2}, \quad (3.1)$$

$$\ddot{r} = -r_b + \frac{K}{r_b} + \frac{\epsilon^2}{r_b^3}, \quad (3.2)$$

A força dos autocampos atuando sobre as partículas teste quando as mesmas passam dentro do caroço do feixe é dada por:

$$\vec{F}_{in} = \frac{K}{r_b^2}(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (3.3)$$

E a autoforça sobre as partículas quando estão fora do caroço do feixe, é:

$$\vec{F}_{out} = \frac{K}{\vec{r} - \vec{r}_0}. \quad (3.4)$$

A força imagem sobre elas é considerada na forma:

$$\vec{F}_{imagem} = \frac{K\vec{x}_0}{r_b^2 - \vec{x}\vec{x}_0}, \quad (3.5)$$

cuja atuação se dá apenas no eixo-x, isto é,  $\vec{F}_{imagem} = 0$  na direção  $y$ .

A partir desta configuração, se constróem os gráficos de Poincaré [24, 43].

### 3.1.2 Simulação Numérica Autoconsistente

Nas simulações autoconsistentes, o feixe de partículas é gerado com densidade adimensional dada por:

$$n(\vec{r}, s) = \begin{cases} N/\pi r_b^2(s), & r_\delta \leq r_b(s), \\ 0, & r_\delta > r_b(s), \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $r_b(s)$  é o envelope casado do feixe e  $r_\delta$  são as coordenadas das partículas no referencial do feixe. As partículas não são pontuais, isto é, elas possuem um tamanho finito, e por isso são chamadas de macropartículas. Possuem formato redondo cujo raio é  $r_p$ .

Todas as simulações iniciam com feixes de secção reta circular, homogêneos e sem emitância, também chamados de feixes frios, a fim de representar feixes dominados por carga espacial. Em outras palavras, usamos o valor inicial da emitância igual a zero  $\epsilon = 0$ . As simulações foram executadas com  $N = 20.000$  partículas cuja distribuição é similar à da função distribuição K-V [44].

A perveância do feixe com envelope casado é dado por:

$$K = r_b^2 - \frac{\epsilon^2}{r_b^2}. \quad (3.7)$$

E quando a emitância é nula  $\epsilon \rightarrow 0$ , a perveância é dada simplesmente por  $K = r_b^2$ .

A emitância é calculada dentro do código usando a seguinte expressão:

$$\epsilon_x = 4 \left[ \langle \chi^2 \rangle \langle \chi'^2 \rangle - \langle \chi \chi' \rangle^2 \right]^{1/2}, \quad (3.8)$$

onde  $\chi = x - x_0, y - y_0$  são as coordenadas das partículas no referencial do feixe.

A evolução do deslocamento da centróide  $r_0 \equiv |\vec{r}_0|$  é calculado a partir das posições das macropartículas  $\vec{r}$  como  $\vec{r}_0 = \langle \vec{r} \rangle$ , onde  $\langle \rangle$  indica média estatística.

Existe uma sub-rotina dentro do código para considerar os efeitos de carga imagem sobre as partículas do feixe. A posição de cada carga imagem é calculada primeiro, considerando que o potencial total na parede do condutor é nulo. Após isso feito, é calculada a nova posição para cada carga do feixe, considerando a força imagem que atua sobre elas. De fato, se utiliza o mesmo procedimento para as autoforças (calculadas somente quando a distância entre duas partículas é maior que 2 vezes o raio das partículas). O raio da parede finita do condutor é normalizado à  $r_w = 1$ .

Como se trata de uma simulação completa autoconsistente, se calculam os potenciais derivados das forças que agem em cada partícula (sendo elas: força focalizadora, força de autocampos e força imagem) de forma autoconsistente. A força focalizadora  $\vec{F}_f$  agindo sobre todas as partículas é:

$$\vec{F}_f = -\sigma_0^2 \vec{r}. \quad (3.9)$$

E partindo dessa configuração, a dinâmica das partículas está livre para evoluir.

### Interação entre as partículas

A interação entre as partículas é considerada no código, isto é, existem colisões. As partículas são tratadas como macropartículas carregadas de raio  $r_p$ . Se uma partícula está suficientemente perto de outra, isto é, se a distância  $d$  entre duas partículas é dada

por  $d \leq 2r_p$  (e  $d \geq r_p$ ), é aplicada uma força repulsiva entre elas, da forma:

$$F_{part} \propto \frac{1}{d^2}. \quad (3.10)$$

Se a distância  $d$  entre elas é menor ou igual que  $r_p$  a força é forçada ao valor igual à zero  $F_{part} = 0$  já que esta força (3.10) diverge quando  $d \leq r_p$ .

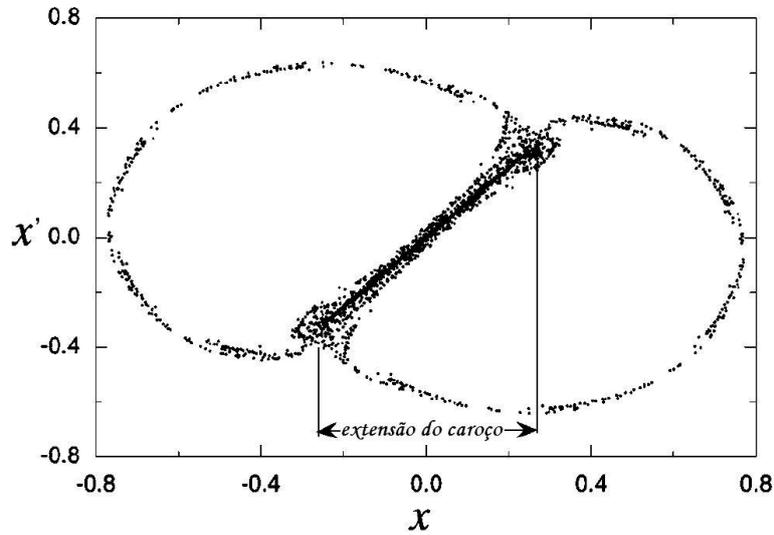
### 3.1.3 Parâmetros numéricos

O método numérico usado para o cálculo das posições das partículas é o Runge Kutta [42]. O código foi executado dentro destes intervalos numéricos:

- Feixes descasados:  $0.25 \leq r_b \leq 0.95$  (com centróide no eixo);
- Deslocamento da centróide:  $x_c \leq 0.7$  (com envelope casado);
- Ambos - descasamento mais deslocamento:  $0.3 \leq r_b \leq 0.9$  e  $0.05 \leq x_c \leq 0.65$ .

## 3.2 Dinâmica de Partícula

Como visto no capítulo anterior, a dinâmica de partícula é descrita com a ajuda das equações adimensionais (2.19) e (2.20) adicionadas à equação de envelope (2.43) e pela equação de centróide (2.49). Em outras palavras, a partícula pode ser vista como uma entidade teste guiada pelo movimento coerente do feixe como um todo. E nosso objetivo aqui, já delineado anteriormente, é simples. Pode-se olhar para as ressonâncias em larga escala no espaço de fases  $x, x'$  ou  $y, y'$  da partícula. A presença de ressonâncias pode ser vista como sugestiva de um mecanismo capaz de extrair partículas do caroço do feixe, o qual poderia aumentar a emitância relaxando o movimento da centróide ou do envelope.



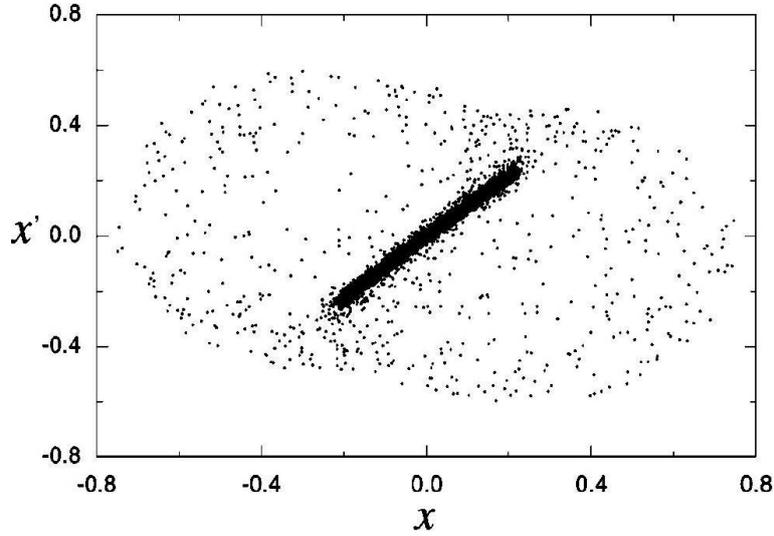
**Fig. 3.1:**  $x, x'$  Gráfico de Poincaré evidenciando as ressonâncias ao redor do caroço do feixe. Usamos aqui  $r_{b,eq} = 0.25$  junto com  $r_b(s=0) = 0.5$  e  $K = r_{b,eq}^2$  gravando as coordenadas sempre que  $r_b(s) = r_{b,eq}$  com  $r_b' > 0$ , e  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 3.2.1 Envelopes Descasados

Primeiramente examinamos o caso mais explorado, de feixes com descasamento de envelope mas sem movimento da centróide. Flutuações do envelope do feixe ao redor do equilíbrio próprio tem sido reconhecido por Gluckstern [23] como a causa para ressonâncias ao redor do feixe. Na presença de ressonâncias, partículas participam de um processo de evaporação ao longo das ressonâncias com simultânea termalização.

Na Figura 3.1 está representado um gráfico de Poincaré que se refere à dinâmica  $x, x'$  de um conjunto de partículas teste inicialmente localizadas ao longo do eixo  $x$ , o qual a extensão suavemente excede o feixe (em 10%); na região interna do feixe a dinâmica é puramente linear e as ressonâncias estão ausentes. A partir da Figura 3.1, notamos que apenas as partículas fora do feixe percebem as largas ressonâncias.

A Figura 3.2 mostra o espaço de fase  $x, x'$  das partículas do feixe gerado através da simulação autoconsistente. A figura revela que o modelo é bastante acurado para os tempos iniciais. Ambos gráficos de Poincaré e as simulações completas rodam acima de  $s \approx 110$  o qual é muito menor do que o tempo de relaxamento. Conforme o tempo passa,



**Fig. 3.2:** Espaço de fase  $x, x'$  das simulações completas. Simulação confere confiabilidade ao modelo. Parâmetros utilizados:  $r_0 = 0$ ,  $r_b(s = 0) = 0.5$ ,  $K = r_b^2$  e  $\epsilon(s = 0) = 0$ .

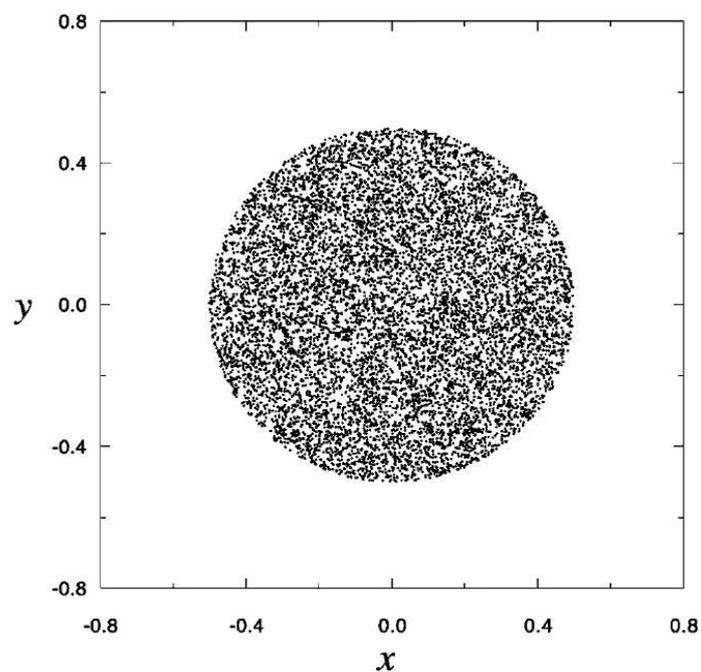
o caroço do feixe mantém-se executando oscilações amortecidas até que se estabiliza a um valor aproximadamente correspondente ao equilíbrio do envelope. Enquanto isso, o excesso de energia é continuamente convertido em halo de baixa densidade até que o processo se esgota.

A Figura 3.3 representa o feixe inicial na simulação autoconsistente, e a Figura 3.4 representa a condição assintótica em  $s \approx 900$ , depois da qual não detectamos nenhuma mudança substancial. A Figura 3.5 mostra o raio RMS, definido como:

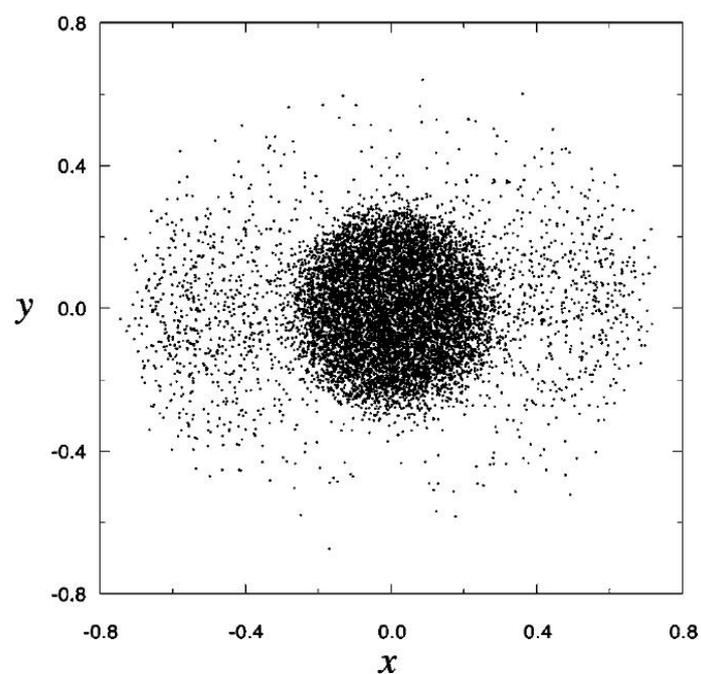
$$r_{RMS} \equiv \frac{\sqrt{2 \sum_j (x_j^2 + y_j^2)}}{N}, \quad (3.11)$$

cujo gráfico é uma função de  $s$  e indica relaxamento assintótico em direção à  $r_{RMS}(s \rightarrow +\infty) \equiv r_{RMS}^* \sim 0.353$ . E também o crescimento da emitância  $\epsilon(s = 0) = 0$ .

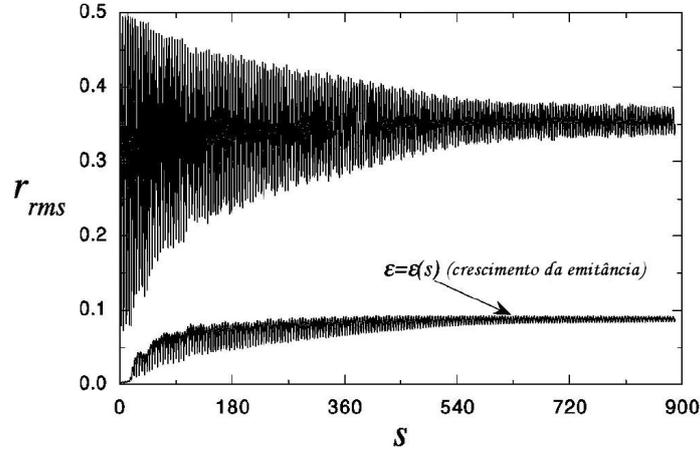
No estado final, o caroço ocupa uma região delimitada por  $r \lesssim r_{b,eq}$  como mencionado acima e nesse ponto o raio do halo é visto como sendo do mesmo tamanho da ressonância,  $r_{halo} \sim 0.75$ . Agora, uma estimativa pode ser feita para determinar  $r_{RMS}^*$ . Supomos que



**Fig. 3.3:** *Secção reta inicial  $x, y$  do feixe na simulação autoconsistente. Parâmetros utilizados:  $r_0 = 0$ ,  $r_b(s = 0) = 0.5$ ,  $K = r_b^2$  e  $\epsilon(s = 0) = 0$ .*



**Fig. 3.4:** *Secção reta final  $x, y$  do feixe na simulação autoconsistente, evidenciando a formação de halo com formato levemente elíptico. Parâmetros utilizados:  $r_0 = 0$ ,  $r_b(s = 0) = 0.5$ ,  $K = r_b^2$  e  $\epsilon(s = 0) = 0$ .*



**Fig. 3.5:** Decaimento do raio  $r_{RMS}$  e crescimento da emitância  $\epsilon(s)$  assintóticos. Ambos estabilizam em um valor bem definido. Parâmetros utilizados:  $r_0 = 0$ ,  $r_b(s = 0) = 0.5$ ,  $K = r_b^2$  e  $\epsilon(s = 0) = 0$ .

o excesso de energia magnética por partícula:

$$E_{mag,0} - E_{mag,f} = \frac{r_b^2(s=0) - r_{RMS}^{*2}}{4}, \quad (3.12)$$

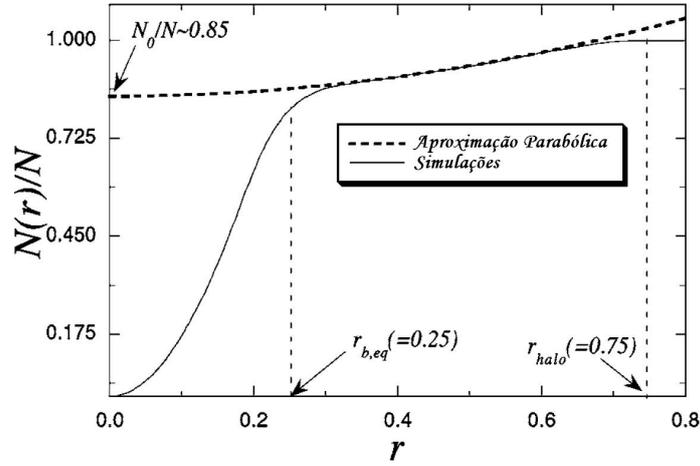
decai em movimento térmico:

$$E_{kin,f} = \langle x'^2 + y'^2 \rangle = r_{RMS}^{*2} \epsilon, \quad (3.13)$$

onde a última desigualdade faz uso da conexão entre a energia cinética média e a emitância para feixes estacionários [28]. É verdade que mudanças sutis na energia eletromagnética resultam em produção de halo, mas nesse contexto a energia eletromagnética dos autocampos é negligenciável, não apresentando influência significativa na distribuição da energia.

O próximo passo é fazer uso da equação de envelope aplicada para o estado assintótico estacionário:

$$r_{RMS}^{*''} = 0 = -r_{RMS}^* + \frac{K}{r_{RMS}^*} + \frac{\epsilon^2}{r_{RMS}^{*3}}, \quad (3.14)$$



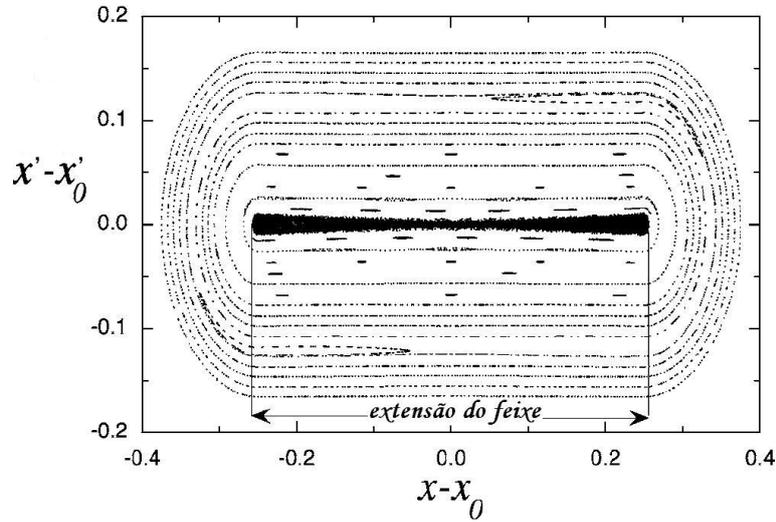
**Fig. 3.6:** Gráfico parabólico para determinar a fração  $f$  do halo.

o qual permite expressar a emitância em termos de  $r_{RMS}^*$ . A partir das equações (3.12) - (3.14) pode-se diretamente obter o valor de  $r_{RMS}^* \approx 0.352$ , o qual concorda muito bem com as simulações.

Quebrando-se a equação (3.11) que define o raio médio em suas contribuições vindas do caroço e do halo,

$$r_{RMS}^2 = (1 - f)r_{b,caroco}^2 + fr_{b,halo}^2, \quad (3.15)$$

pode-se determinar a fração  $f \equiv n_{halo}/N$  de partículas evaporadas para o halo. Para os parâmetros utilizados nas simulações para o presente caso, a fração resulta em  $f \approx 0.15$ . Novamente em confortável concordância com aquela obtida nas simulações,  $f \sim 0.12$ . Para determinar o número de partículas no halo a partir das simulações, fizemos um gráfico de  $N(r)/N$  versus  $r$  a partir dos dados assintóticos da Figura 3.5.  $N(r)$  é o número de partículas com coordenada radial menor que  $r$ . A partir da curva obtida para  $r > r_{b,caroco}$  além do caroço, de forma parabólica, assumindo a densidade de halo aproximadamente constante, encontra-se a intersecção  $N_0/N$  da parábola com  $r = 0$ . A quantidade  $[(N - N_0)/N]$  fornece uma estimativa da população total dentro do halo. O procedimento é graficamente mostrado na Figura 3.6. Voltando à Figura 3.3, percebe-se que a componente do halo do feixe assume uma pequena distorção de forma elíptica con-



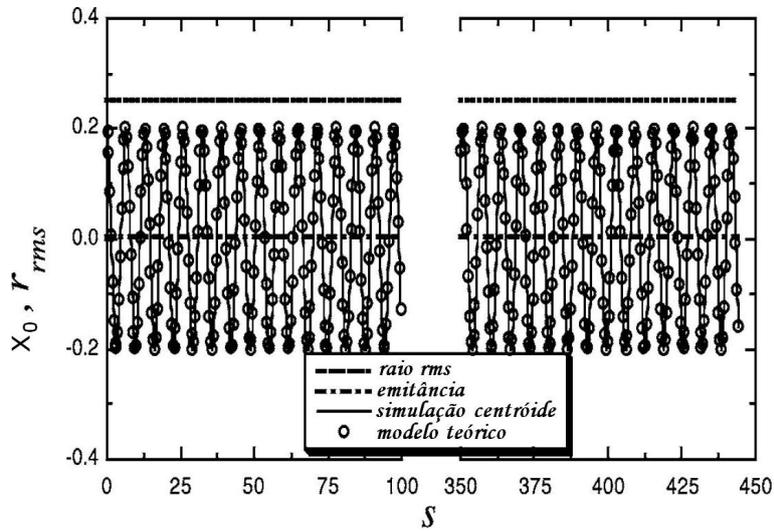
**Fig. 3.7:** Gráfico de Poincaré para  $x-x_0, x'-x'_0$ . Não apresenta ressonâncias, dinâmica estável.

forme o tempo avança. Isso é efeito bem conhecido e esperado, pois provém de instabilidades anisotrópicas não-lineares (contrariamente às mais bem conhecidas instabilidades lineares [2, 45, 46]) que ocorrem em feixes altamente descasados [47]. Não obstante, não parecem afetar a concordância entre as simulações e as estimativas analíticas.

### 3.2.2 Centróides Descasadas com Envelopes Casados

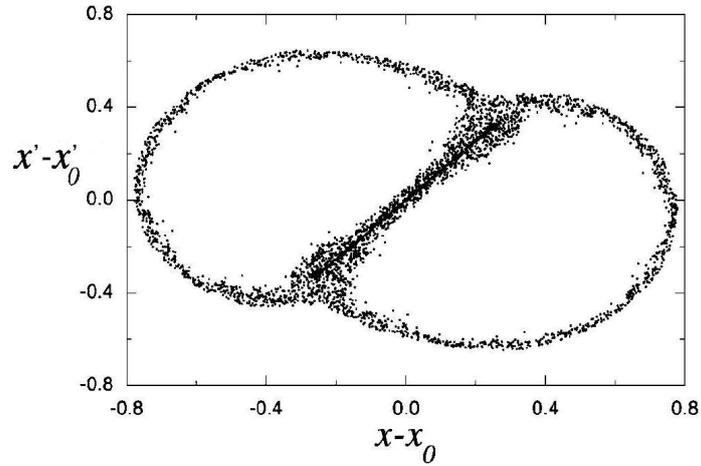
Agora vamos investigar o caso onde o envelope está inicialmente no seu valor de equilíbrio  $r_{b,eq}$  mas a centróide está se movendo. Tomamos as condições iniciais  $\mathbf{r}_0 = 0.2\hat{\mathbf{x}}$  junto com  $\mathbf{r}'_0 = 0$ , que é um valor alto para o descasamento da centróide. Nossa intenção é simplesmente magnificar os efeitos e determinar se há alguma ligação da ação da centróide com o processo de relaxação.

Começamos representando as coordenadas de fase  $x-x_0, x'-x'_0$  no referencial do feixe na Figura 3.7, sendo  $x_0$  e  $x'_0$  a posição e a velocidade da centróide do feixe, respectivamente, como definido anteriormente. Gravamos as variáveis sempre que  $x_0 = 0, x'_0 > 0$ . O problema é simétrico, logo a análise da dinâmica de  $y, y'$  leva a conclusões similares.



**Fig. 3.8:**  $r_{RMS}$  e  $x_0$  como função de  $s$ . A centróide se mantém oscilando indefinidamente enquanto o envelope se mantém casado, e a emitância não apresenta crescimento.

O resultado surpreendente é que a despeito das forças não-lineares no feixe de partículas causadas pelas cargas imagens, não são vistas ressonâncias em larga escala nos gráficos de espaço de fase. A estabilidade vista na dinâmica da centróide sugere, muito fortemente, que as oscilações da centróide simplesmente não encontram qualquer canal ao longo do qual possa decair em equilíbrio, com subsequente termalização e crescimento de emitância, como ocorria no caso anterior de envelopes descasados. Na Figura 3.8 está representado o raio RMS ao longo do tempo, contendo muitas oscilações da centróide. Essas oscilações são obtidas tanto a partir das simulações autoconsistentes, quanto do nosso modelo teórico, e mostramos resultados correspondentes ao início e ao final dos ciclos, ao longo de escalas de tempo relativamente grandes de execução do programa. Como a figura revela, ao invés da variância vista no caso anterior, não há mudanças no  $r_{RMS}$ . Sendo assim, percebemos que para o caso da centróide desalinhada não há perda significativa de energia. Em particular, a concordância entre as simulações completas e o modelo teórico é marcante. A grande conclusão nesse ponto é que quando o envelope do feixe é casado, as dinâmicas do envelope e da centróide estão totalmente



**Fig. 3.9:** Gráfico de Poincaré para  $x-x_0, x'-x'_0$ . A presença das ressonâncias é notada, tal como acontecia para o caso de envelopes descasados.

desacopladas, assim como no caso onde as paredes estão ausentes [21, 48]. Sendo assim, também concluímos que os efeitos de carga imagem não influenciam nesse resultado.

### 3.2.3 Feixes Completamente Descasados

O que poderia acontecer se o envelope e a centróide estivessem inicialmente colocados simultaneamente fora de seus respectivos valores de equilíbrio, ou casamento? Como sugerido no caso de envelopes casados, podemos esperar um efeito negligenciável advindo das forças de carga imagem atuando no feixe de partículas. Novamente, isso segue do fato que a dinâmica da centróide não perturba a dinâmica de partículas que estão longe do caroço do feixe.

Para assegurar-se de que isso acontece, inicialmente representamos na Figura 3.9 uma secção de superfície  $x, x'$  do espaço de fase de um feixe inicialmente descasado, utilizando os parâmetros  $r_b = 0.5$ ,  $r_{b,eq} = 0.25$  e  $\mathbf{r}_0 = 0.2\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{r}'_0 = 0$ . Novamente gravamos em  $r_b = r_{b,eq}$  e  $r'_b > 0$  as coordenadas de fase relativas  $x - x_0$  e  $x' - x'_0$  no referencial do feixe. É visto que o halo é novamente formado de acordo com as ressonâncias não-lineares provindas apenas do envelope, similarmente ao caso analisado na Seção 3.2.1.

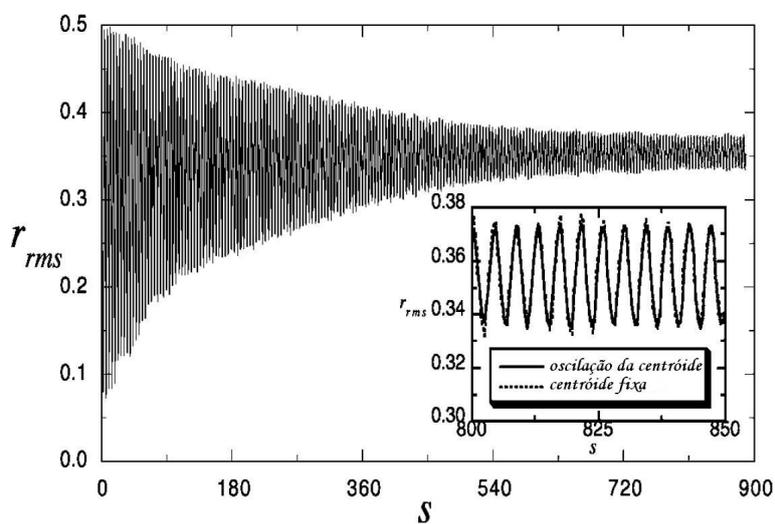


Fig. 3.10: Decaimento do raio  $r_{RMS}$ .

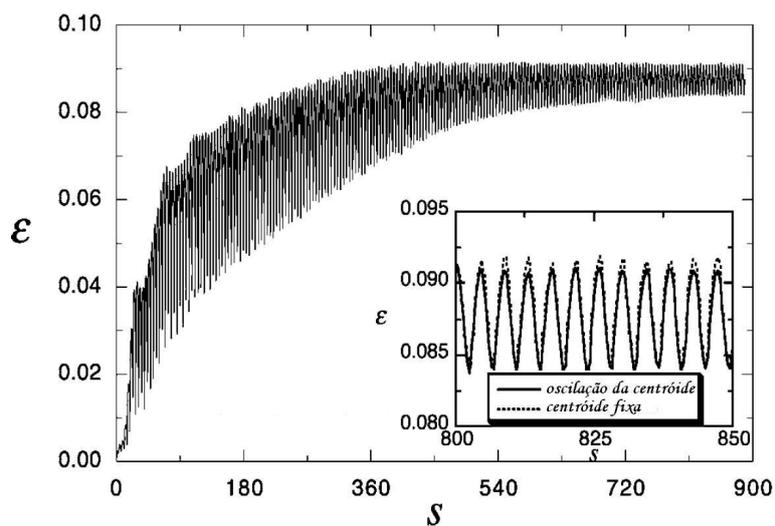
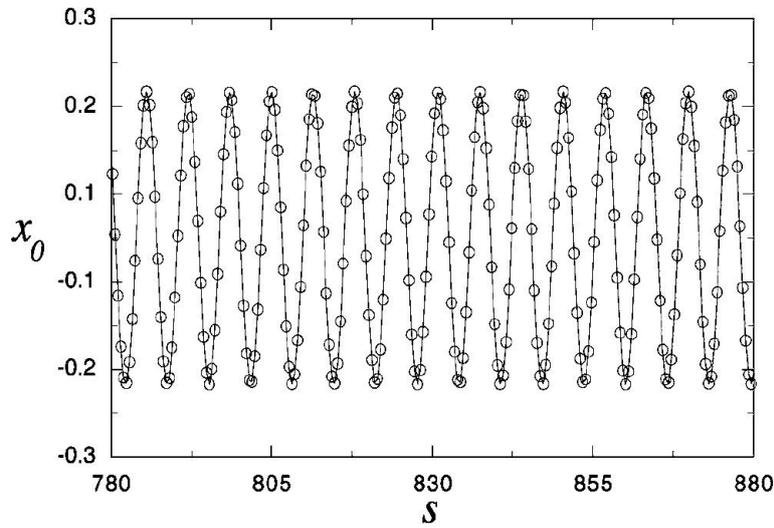


Fig. 3.11: Emitância  $\epsilon$  como função de  $s$ .



**Fig. 3.12:** Oscilação da centróide:  $x_0(s)$ . Os círculos representam o resultado das simulações, e a linha o modelo teórico. Parâmetros utilizados:  $r_b(s=0) = 0.5$  e  $x_0(s=0) = 0.2$ .

Os tamanhos das ressonâncias surgidas a partir da dinâmica de envelope são ainda determinantes para definir o movimento de partículas para fora do feixe. Dado o fato que essas excursões para fora do feixe são o que essencialmente induzem crescimento de emitância, concluímos que mesmo para feixes completamente descasados, o crescimento de emitância é essencialmente governado pelo descasamento do envelope.

### 3.3 Análise Final

O objetivo final neste capítulo é checar a validade desses últimos comentários. Na Figura 3.10 representamos, a partir das simulações completas, o decaimento das oscilações radiais quando as paredes estão presentes, para os mesmos parâmetros e condições iniciais usadas no gráfico de Poincaré da Figura 3.9. Como a figura revela, o decaimento é similar àquele previamente estudado no contexto de feixes centrados com envelopes descasados, como representado na Figura 3.4. Nesse gráfico mostramos a concordância das oscilações radiais RMS para ambos casos, para grandes valores de  $s$ . A Figura 3.12

---

finalmente mostra as oscilações estáveis da centróide. Portanto, pode-se concluir que o acoplamento da dinâmica da centróide e do envelope está ausente no presente caso de feixes envoltos por paredes condutoras, similarmente ao que acontece quando as paredes não estão presentes [21, 48], sendo portanto o efeito das cargas imagens negligenciável no estudo dessas dinâmicas.

## Capítulo 4

# Conclusão

Nesta tese analisamos a dinâmica combinada do envelope e da centróide de feixes intensos carregados envoltos por paredes cilíndricas condutoras. Mesmo para os casos extremos investigados, não houve acoplamento envolvendo essas quantidades macroscópicas.

Em particular, quando o envelope é inicialmente setado no seu valor de equilíbrio casado, ele assim permanece não importa quão grande pode ser o descasamento com as excursões da centróide. Isto significa que a dinâmica da centróide não pode decair despejando seu excesso de energia para a energia interna do feixe, o qual poderia causar termalização e crescimento da emitância. Uma vez que a centróide é setada para oscilar em torno do eixo de simetria, ela permanece em seu movimento oscilatório ao menos dentro das escalas computacionais de tempo em nossos programas. Complementariamente, se o envelope e a centróide estão inicialmente descasados, a dinâmica do envelope decai para seu equilíbrio casado exibindo crescimento da emitância e outras características típicas como produção de halo, mas a centróide simplesmente continua oscilando novamente.

Os resultados presentes estendem investigações prévias sobre o acoplamento da dinâmica do envelope e da centróide na ausência de paredes condutoras [21, 48]. Nesses trabalhos foi demonstrada formalmente a natureza desacopladora das dinâmicas combinadas. Aqui

nós fizemos uso de estimativas analíticas bem como gráficos de Poincaré e simulações completas para chegar à mesma conclusão, na presença de paredes condutoras.

A despeito disso um bocado de pesquisa deve ser necessária seguindo a linha apresentada nesta tese, sendo possível olhar algumas implicações do que foi exposto aqui. Uma vez que pode-se injetar feixes com envelopes casados, a centróide pode ser ajustada para excursões relativamente grandes sem causar perigo de perdas do feixe via crescimento de emitância. O que pode ser útil no projeto de osciladores para geração de radiação, por exemplo.

## Apêndice A

# Definições

### A.1 Bifurcações

O termo bifurcação foi usado originalmente por Poincaré para descrever a separação das soluções de equilíbrio em uma família de equações diferenciais. Sendo:

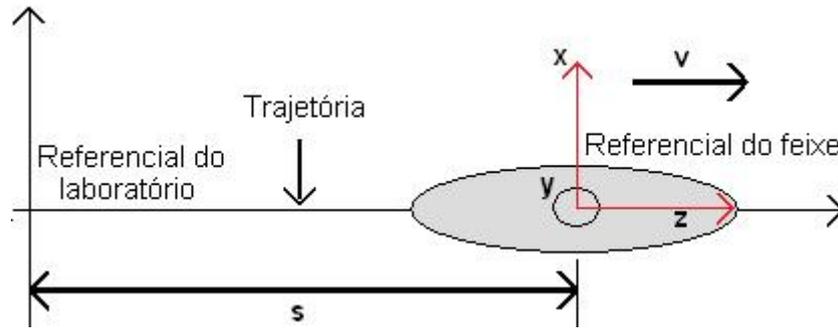
$$\dot{x} = f_\mu(x); x \in \mathfrak{R}^n, \mu \in \mathfrak{R}^k \quad (\text{A.1})$$

um sistema de equações diferenciais dependendo do parâmetro  $k$ -dimensional  $\mu$ , então as soluções de equilíbrio da equação (A.1) são dadas pelas soluções da equação  $f_\mu(x) = 0$ . O ponto de equilíbrio  $(x_0, \mu_0)$ , onde  $D_x f_\mu$  tem um autovalor nulo, pode conter diversas ramificações de equilíbrio, de forma que se diz que o ponto  $(x_0, \mu_0)$  é um ponto de bifurcação.

Outra definição diz que o valor  $\mu_0$  da equação (A.1) para o qual o fluxo dessa equação não é estruturalmente estável, é um valor de bifurcação de  $\mu_0$  [49].

### A.2 Coordenada Longitudinal

A direção de propagação de um feixe de partículas carregadas é tipicamente dada na direção  $z$ , onde o eixo  $z$  é o eixo axial do feixe. Entretanto, a posição  $z$  das partículas



**Fig. A.1:** Esquema de visualização da coordenada longitudinal.

do feixe estão constantemente mudando com o tempo conforme o feixe se propaga no referencial do laboratório. Para evitar cálculos desnecessários decorrentes dessa notação, introduz-se o parâmetro  $s$  como a localização axial do referencial do feixe, no referencial do laboratório.

Não consideramos aceleração ou seus efeitos, e assumimos que o feixe viaja com uma velocidade axial média  $v$ . Sendo assim, a localização axial  $s$  da partícula iniciando na posição  $z_0$  depois de um tempo  $t$  é dada por:

$$s = z_0 + vt. \quad (\text{A.2})$$

Usamos  $z_0 = 0$ . Agora o sistema de coordenadas utilizada está no centro do feixe e se move com velocidade  $v$  junto com ele. Chamamos esse sistema de coordenadas de referencial do feixe. E as derivadas em relação ao tempo, agora em relação à  $s$ , são dadas por:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d}{ds}. \quad (\text{A.3})$$

## Apêndice B

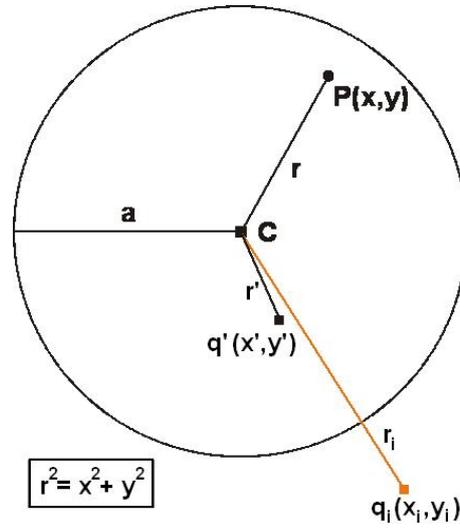
# Carga Imagem

### B.1 Força da Carga Imagem

Descrição da metodologia teórica utilizada para encontrar os efeitos da presença de um tubo condutor. Geralmente esses efeitos são indesejáveis, portanto estudando tais efeitos, esperamos contribuir para o desenvolvimento de técnicas para reduzir sua influência.

O feixe é circular e as equipotenciais de um feixe circular são sempre as mesmas, independentemente do raio do feixe (desde que a carga total do feixe seja sempre a mesma). Por essa razão, a carga imagem de um feixe circular é simplesmente a carga necessária para zerar as equipotenciais no contorno, e pode ser construída tomando o limite do raio do feixe tendendo a zero, o que gera uma carga imagem puntual. Portanto a força imagem para o nosso problema pode ser pensada como advinda de uma carga imagem puntual, simplificando o problema.

A força total gerada por uma carga imagem puntual sobre o feixe é facilmente calculável e é proporcional à  $\frac{1}{d}$ , onde  $d$  é a distância entre a carga imagem puntual e a centróide do feixe. Utilizamos o método da carga imagem para o cálculo dessa força, que é um método onde o campo de polarização produzido por uma carga  $q'$  em uma superfície entre dois meios, é representado por uma carga imagem  $q_i$  colocada na mesma



**Fig. B.1:** Representação utilizada para a visualização do cálculo da força elétrica entre a carga imagem e a carga no condutor sob o ponto de vista da partícula teste localizada no ponto  $P$ , onde  $a$  é o raio do condutor,  $q'$  é a carga no condutor e  $q_i$  é a carga imagem.

distância porém na face oposta.

O início do presente trabalho consistiu em calcular a força da carga imagem, considerando a secção reta de um envelope cilíndrico. A representação pode ser vista na Figura B.1, sendo  $C$  o centro do condutor circular,  $a$  o raio do condutor,  $(x, y)$  são as coordenadas da partícula teste no ponto  $P$ ,  $((x', y'))$  são as coordenadas de posição da carga  $q'$  e  $r'$  sua distância ao centro  $C$ , e finalmente,  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas de posição da carga imagem  $q_i$  distante do centro  $C$  por  $r_i$ , onde  $r^2 = x^2 + y^2$  para qualquer das variáveis.

Para um sistema bidimensional, a força de Coulomb é dada por  $F \sim \frac{1}{d}$  (detalhes são encontrados no final deste Apêndice, na Seção B.2). A componente  $F_x$  da força exercida pela carga imagem vista pela partícula teste é dada por  $F_x = k \frac{(x-x_i)}{d^2}$ , e a componente  $F_y$  é  $k \frac{(y-y_i)}{d^2}$ , onde  $k$  é a constante eletrostática  $k = 1/(4\pi \epsilon_0)$  e  $\epsilon_0$  é a permissividade no vácuo, os termos geométricos  $(x-x_i)$ ,  $(y-y_i)$  e  $d^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$  são as distâncias entre a partícula teste e a carga imagem. A notação será tal que  $F(x, y; x_i, y_i)$  é a força

que a partícula teste sente devido à carga imagem  $q_i$ . Para encontrar a forma exata da força, é necessário primeiramente encontrar a posição da carga imagem em relação à posição da carga dentro do condutor.

Os cálculos foram realizados seguindo à seguinte ordem:

- Carga imagem - partícula teste
- Feixe - partícula teste
- Feixe - feixe imagem

### B.1.1 Carga imagem - partícula teste

O cálculo da força entre uma carga dentro de um condutor de geometria circular e o próprio condutor é feito utilizando o método da carga imagem [12], onde se imagina a existência de uma carga de sinal contrário localizada fora do condutor na posição  $(x_i, y_i)$ , que chamamos de carga imagem. O primeiro passo é calcular sua posição.

As coordenadas da carga imagem, em relação à carga original, são calculadas encontrando o potencial total na perspectiva da partícula teste, isto é, o potencial gerado pela carga  $q'$  somado ao potencial gerado pela carga  $q_i$  no ponto  $P$ , da seguinte maneira:

$$V_{TOTAL} = V_{q'} + V_{q_i} \cong \int F(x, y; x', y') - F(x, y; x_i, y_i) = \ln(d'^2) - \ln(d_i^2) = \ln\left(\frac{d'^2}{d_i^2}\right), \quad (\text{B.1})$$

lembrando que a carga imagem tem sinal contrário à carga dentro do condutor, logo as forças possuem sentidos opostos. E nessa representação  $d'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$  e  $d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ . Substituindo as coordenadas cartesianas da partícula teste por coordenadas cilíndricas, isto é,  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ , e substituindo na equação

(B.1), chegamos à:

$$V_{TOTAL} = \ln \left( \frac{(r \cos \theta - x')^2 + (r \sin \theta - y')^2}{(r \cos \theta - x_i)^2 + (r \sin \theta - y_i)^2} \right). \quad (B.2)$$

Sabendo que a componente tangencial do campo elétrico deve ser nula no condutor, faz-se  $r = a$  e resolvendo:

$$E_{tang} = \frac{\partial V_{TOTAL}}{\partial \theta} = 0 \quad (B.3)$$

chega-se à posição da carga imagem, em relação a sua carga fonte:

$$x_i = \frac{x' a^2}{(x'^2 + y'^2)} = x' \frac{a^2}{r'^2} \quad (B.4)$$

$$y_i = \frac{y' a^2}{(x'^2 + y'^2)} = y' \frac{a^2}{r'^2}. \quad (B.5)$$

Feito isso, o próximo passo é calcular a força imposta no ponto  $P(x, y)$  pela ação da carga imagem  $q_i(x_i, y_i)$ . Utilizando as expressões  $F_x = k \frac{(x-x_i)}{d_i^2}$  e  $F_y = k \frac{(y-y_i)}{d_i^2}$  e substituindo as equações (B.4) e (B.5), chega-se facilmente às expressões para as componentes da força exercida pela carga imagem:

$$F_x(x, y; x_i, y_i) = k \frac{x' a^2 - x r'^2}{a^4 + r^2 r'^2 - 2a^2(x x' + y y')} \quad (B.6)$$

$$F_y(x, y; x_i, y_i) = k \frac{y' a^2 - y r'^2}{a^4 + r^2 r'^2 - 2a^2(x x' + y y')}, \quad (B.7)$$

lembrando que  $x$  e  $y$  são as coordenadas da partícula teste, e  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas da carga  $q'$  pois expressamos a posição da carga imagem em função da posição da carga  $q'$ , e  $a$  é o raio do condutor.

### B.1.2 Feixe - partícula teste

O objetivo nesta Seção é calcular a força imposta na partícula teste pela ação de um feixe imagem, isto é, um feixe composto de cargas imagens  $q_i(x_i, y_i)$  de raio  $i$ . Para tanto, utiliza-se as expressões (B.6) e (B.7). Logo, na prática estamos tratando das cargas  $q'(x', y')$ , e por conseguinte, da ação de um feixe que está dentro do condutor. As coordenadas das partículas desse feixe são dadas por:

$$x' = x_c + r_d \cos \phi \quad (\text{B.8})$$

$$y' = r_d \sin \phi \quad (\text{B.9})$$

considerando um feixe deslocado na direção  $x$  por  $x_c$  em relação ao centro do condutor, de raio  $r_b$ , sendo  $r_d$  as posições das partículas no referencial do feixe.

A distribuição das partículas do feixe é tal que:

$$\eta(x', y') = C(r_d), \quad r_d \leq r_b \quad (\text{B.10})$$

$$\eta(x', y') = 0, \quad r_d > r_b. \quad (\text{B.11})$$

Para calcular a força do feixe exercida sob a partícula teste, basta integrar as forças dadas pelas equações (B.6) e (B.7) juntamente com a distribuição das partículas ao longo de todo o feixe, isto é:

$$F_{fx}(x, y) = \int \int F_x(x, y; x', y') \eta(x', y') dx' dy' \quad (\text{B.12})$$

$$F_{fy}(x, y) = \int \int F_y(x, y; x', y') \eta(x', y') dx' dy'. \quad (\text{B.13})$$

Para resolver as equações acima, primeiramente faz-se uma mudança para coordenadas

cilíndricas:

$$x' = x_c + r_d \cos \phi \quad (\text{B.14})$$

$$y' = r_d \sin \phi. \quad (\text{B.15})$$

Após essa mudança de variáveis, as integrais resultam em:

$$F_{fx}(x, y) = \int \int F_x(x, y; r_d, \phi) r_d dr_d d\phi \quad (\text{B.16})$$

$$F_{fy}(x, y) = \int \int F_y(x, y; r_d, \phi) r_d dr_d d\phi. \quad (\text{B.17})$$

As integrais acima assumem uma complicada forma do tipo:

$$F_f = \int r_d dr_d \int \frac{A + B \cos \phi}{C + D \cos \phi + E \sin \phi} d\phi, \quad (\text{B.18})$$

cujas respectivas soluções para as componentes  $x$  e  $y$  foram bastante complicadas de encontrar, mas resolvidas analiticamente com a ajuda do programa matemático MAPLE:

$$F_{fx}(x, y) = \frac{x_c(a^2 - xx_c)}{(a^2 - xx_c)^2 + (x_c y)^2} \quad (\text{B.19})$$

$$F_{fy}(x, y) = \frac{-x_c^2 y}{(a^2 - xx_c)^2 + (x_c y)^2}. \quad (\text{B.20})$$

Finalmente chegamos às expressões gerais da força exercida pelo feixe imagem na partícula teste. Note que no caso da partícula se encontrar no mesmo eixo do feixe  $y = 0$  as expressões acima se simplificam para resultar em:

$$F_{fx}(x, 0) = \frac{x_c}{a^2 - xx_c} \quad (\text{B.21})$$

$$F_{fy}(x, 0) = 0, \quad (\text{B.22})$$

isto é, a força em  $y$  é nula.

### B.1.3 Feixe - feixe imagem

As componentes  $x$  e  $y$  da força entre o feixe imagem e o feixe dentro do condutor, são encontradas aplicando-se o mesmo método utilizado na Seção anterior, integrando-se as forças (B.19) e (B.20), resultando em integrais da forma:

$$F_{ffx}(x, y) = \frac{x_c}{a^2 - x_c^2} \int r dr \int \frac{1 - A \cos \theta}{1 + A^2 - 2A \cos \theta} d\theta \quad (\text{B.23})$$

$$F_{ffy}(x, y) = \int r dr \int \frac{-A^2 \sin \theta}{1 + A^2 - 2A \cos \theta} d\theta, \quad (\text{B.24})$$

onde  $A = \frac{x_c r}{a^2 - x_c^2}$ . Resolvendo-as, novamente com a ajuda do MAPLE, chega-se à:

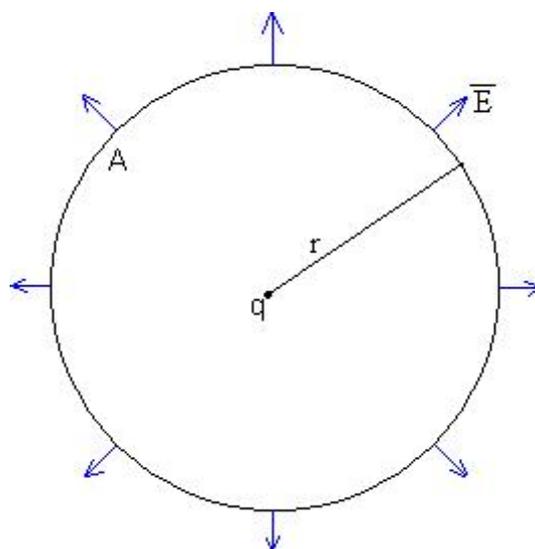
$$F_{ffx} = \frac{x_c}{a^2 - x_c^2} \quad (\text{B.25})$$

$$F_{ffy} = 0, \quad (\text{B.26})$$

calculadas de forma analítica exata.

### B.1.4 Conclusão

Comparando-se as equações (B.6) e (B.7) com as equações (B.25) e (B.26), percebe-se que posicionando a carga imagem na posição  $x_i = a^2/x_c$  e  $y_i = 0$  (o que equivale a dizer que  $x' = x_c$  e  $y' = 0$ ), e a partícula teste na posição da carga  $q'$  (isto é,  $x = x_c$  e  $y = 0$ ) e substituindo estes valores em (B.6) e (B.7), chega-se exatamente ao mesmo resultado de (B.25) e (B.26). O que permite concluir que a força entre o feixe imagem e o feixe no condutor é exatamente igual à força entre a carga imagem e a partícula teste, quando o feixe está deslocado somente em uma direção, no caso na direção horizontal. Em outras palavras, pode-se tratar do problema da interação entre o feixe imagem e o feixe original



**Fig. B.2:** Esquema para cálculo do campo elétrico a partir da Lei de Gauss.

exatamente como um problema de interação carga e carga imagem.

## B.2 Lei de Coulomb Bidimensional

Podemos derivar a Lei de Coulomb a partir da Lei de Gauss. A Figura B.2 mostra uma carga positiva  $q$  envolvida por um círculo concêntrico que representa uma superfície Gaussiana de raio  $r$ . Por definição, o vetor  $d\vec{A}$  em qualquer ponto é perpendicular à superfície e direcionado para fora. Devido à simetria do problema, sabemos que o campo elétrico  $\vec{E}$  em qualquer ponto também é perpendicular à superfície e direcionado para fora. Desse modo, o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{E}$  e  $d\vec{A}$  é zero, permitindo-nos escrever a Lei de Gauss da seguinte maneira:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E dA = q, \quad (\text{B.27})$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade no vácuo.

Visto que o campo elétrico varia apenas radialmente com a distância em relação à  $q$ ,

ele possui o mesmo valor sobre toda a superfície circular. Como a integral da equação (B.27) é tomada ao longo de toda superfície, o campo  $E$  é constante nessa integração e pode ser posto para fora da integral, o que nos leva à:

$$\epsilon_0 E \oint dA = q. \quad (\text{B.28})$$

Nesse ponto, a integral é apenas a soma de todas diferenciais de área  $dA$  do círculo, que possui área  $2\pi r$ . Substituindo esse resultado na equação (B.28), temos:

$$\epsilon_0 E(2\pi r) = q, \quad (\text{B.29})$$

ou ainda

$$E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0 r} q. \quad (\text{B.30})$$

Esse é então o campo elétrico devido a uma carga puntual, o que nos leva à força Coulombiana proporcional à  $\frac{1}{r}$ .

## Apêndice C

# Distorções na forma do feixe devido à carga induzida no condutor

Consideramos um feixe com carga espacial dominante, com um raio quase casado  $r_b \approx r_{b,eq}$  e uma centróide que oscila ao redor do eixo de simetria do sistema ao longo de um dado eixo transversal no referencial de Larmor, digamos o eixo- $x$ , de modo que  $\mathbf{r}_0 = X(s)\hat{\mathbf{x}}$ . Nesse caso o feixe imagem devido às paredes condutoras é também localizado no eixo- $x$  com  $x_{im} = 1/X$  (assumindo um tubo de raio adimensional  $r_w = 1$ ). Porque a carga imagem tem sinal oposto, ela atrai as partículas do feixe, forçando-as verticalmente em direção ao eixo- $x$  e horizontalmente em direção à  $x_{im}$ . Como consequência, o feixe é distorcido ao longo do eixo- $y$  e esticado ao longo do eixo- $x$ , praticamente como um efeito de maré, já que a força é muito forte para partículas próximas da parede.

Para estimar a magnitude das distorções do envelope do feixe, tomamos em consideração a descrição de um fluido frio de um feixe dominado por carga espacial. As equações normalizadas de fluido frio de estado estável para fluxo estacionário são [28, 50]:

$$\frac{\partial n}{\partial s} + \nabla_{\perp} \cdot (n\mathbf{v}_{\perp}) = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}}{\partial s} + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp})\mathbf{v}_{\perp} = -\mathbf{r} - \nabla_{\perp}\psi + \mathbf{F}_{image}, \quad (\text{C.2})$$

## Apêndice C. Distorções na forma do feixe devido à carga induzida no condutor 60

de acordo com a equação (2.19), onde  $\psi$  resolve a equação de Poisson (2.20). Se assumirmos que o feixe de partículas não se estende pra muito longe do eixo de simetria tal que  $Xx \ll 1$  e  $Xy \ll 1$ , a força devido à imagem do feixe na equação (2.47) é aproximada em primeira ordem por:

$$\mathbf{F}_{image} = KX[(1 + Xx)\hat{\mathbf{x}} - Xy\hat{\mathbf{y}}]. \quad (\text{C.3})$$

Levando em consideração a forma como o feixe é distorcido pelos efeitos de imagem, como discutido acima, procuramos uma solução para as equações (C.1) e (C.2) que correspondem ao feixe elíptico centrado em  $(x, y) = (X, 0)$ , i.e., onde  $a(s)$  e  $b(s)$  são os semi-eixos da elipse. Resolvendo a equação de Poisson (2.20) obtém-se:

$$\psi(\mathbf{r}, s) = \frac{K}{a+b} \left[ \frac{(x-X)^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right] \quad (\text{C.4})$$

no interior do feixe. A equação da continuidade (C.1) é automaticamente resolvida para a velocidade de fluxo na forma:

$$\mathbf{v}_{\perp}(\mathbf{r}, s) = \left[ X' + \frac{a'}{a}(x-X) \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{b'}{b}y\hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{C.5})$$

Usando esses resultados na equação da força (C.2), obtemos que a centróide e envelope do feixe derivam de acordo com:

$$X'' = -X + KX(1 + X^2), \quad (\text{C.6})$$

$$a'' = -a + \frac{2K}{a+b} + KX^2a, \quad (\text{C.7})$$

$$b'' = -b + \frac{2K}{a+b} - KX^2b. \quad (\text{C.8})$$

A equação (C.6) é equivalente à equação de centróide (2.49), válida para pequenos  $X$

## Apêndice C. Distorções na forma do feixe devido à carga induzida no condutor 61

acima de termos cúbicos. As equações (C.7) e (C.8) mostram que por causa dos efeitos da imagem um feixe quase casado com  $r_b \approx r_{b,eq} = K^{1/2}$  irá começar a desenvolver pequena elipticidade com os semi-eixos  $a$  e  $b$  oscilando ao redor de valores de equilíbrio ( $a'' = 0 = b''$ ):

$$a_{eq} \approx r_{b,eq}(1 + r_{b,eq}^2 X^2), \quad (C.9)$$

$$b_{eq} \approx r_{b,eq}(1 - r_{b,eq}^2 X^2). \quad (C.10)$$

Desde que  $r_{b,eq}X \sim xX \ll 1$ , vemos que distorções no envelope do feixe, proporcionais à  $(r_{b,eq}X)^2$ , são muito pequenas.

Então, dado o fato que têm-se um feixe de propriedades conhecidas oscilando ao redor do eixo de simetria, podemos adotar a aproximação de partícula teste com o qual poderemos examinar a ocorrência de largas ilhas ressonantes englobando o feixe. A presença de ressonâncias permite ao feixe de partículas vastas excursões para longe do corpo central do feixe, o qual poderia ser altamente sugestivo para crescimento de emitância e relaxamento térmico.

# Referências

- [1] FIUZA, K.; PAKTER, R.; RIZZATO, F.B. Combined centroid-envelope dynamics of intense, magnetically focused charged beams surrounded by conducting walls. *Phys. Plasmas*, Princeton, v. 13, p. 023101:1–8, Feb 2006.
- [2] STRUCKMEIER, C.J.; REISER, M. Theoretical studies of envelope oscillations and instabilities of mismatched intense charge-particle beams in periodic focusing channels. *Part. Accel.*, v. 14, p. 227, 1984.
- [3] WIKIPÉDIA. Acelerador de partículas. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Acelerador\\_de\\_part%C3%ADculas](http://pt.wikipedia.org/wiki/Acelerador_de_part%C3%ADculas)>. Acesso: 14 junho 2008.
- [4] LIVINGGOOD, J. *Principles of cyclic particle accelerators*. Toronto: D.Van Nostrand Company, Inc., 1961.
- [5] KLESEL, J. The electron source. Disponível em: <<http://www.mse.iastate.edu/microscopy/source.html>>. Acesso: 21 junho 2008.
- [6] NOELS, C. LHC - the large hadron collider. Disponível em: <<http://lhc.web.cern.ch/lhc/>>. Acesso: 20 junho 2008.
- [7] OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY. The sns facility - neutron sciences. Disponível em: <[http://neutrons.ornl.gov/facilities/facilities\\_sns.shtml](http://neutrons.ornl.gov/facilities/facilities_sns.shtml)>. Acesso: 20 junho 2008.
- [8] WILSON, R.R. The tevatron. Disponível em: <<http://lss.fnal.gov/archive/test-tm/0000/fermilab-tm-0763.pdf>>. Acesso: 20 junho 2008.
- [9] SCHROEDER, G. RHIC - relativistic heavy ion collider. Disponível em: <<http://www.bnl.gov/rhic/>>. Acesso: 20 junho 2008.
- [10] LNLS. LNLS - laboratório nacional de luz síncrotron. Disponível em: <<http://www.lnls.br>>. Acesso: 20 junho 2008.
- [11] REISER, M. *Theory and design of charged particle beams*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- [12] JACKSON, J. *Classical electrodynamics*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

- [13] SIMEONI JR., W. *Estabilidade não-linear de um feixe de partículas carregadas sujeito a um campo magnético focalizador*. 2005. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.
- [14] WILLIAMS, G. FEL - free electron laser. Disponível em: <<http://www.jlab.org/FEL/>>. Acesso: 28 junho 2008.
- [15] LASLETT, L. Selected works of l. jackson laslett. *PUB-616 Lawrence Berkeley Lab*, Berkeley, v. I-II, 1987.
- [16] ALLEN, C.K.; BROWN, N.; REISER, M. Image effects for bunched beams in axisymmetric systems. *Particle Accel.*, v. 45, p. 149–165, 1994.
- [17] ALLEN, C.K.; REISER, M. Zero-temperature equilibrium for bunched beams in axisymmetric systems. *Particle Accel.*, v. 48, p. 193–211, 1995.
- [18] ALLEN, C.K.; REISER, M. Image effects of cylindrical pipes on continuous beams. *Phys. Rev. E*, 1996.
- [19] HESS, M.; CHEN, C. Beam confinement in periodic permanent magnet focusing klystrons. *Phys. Lett. A*, New York, v. 295, p. 305–310, April 2002.
- [20] DAVIDSON, R.C.; QIN, H. *Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators*. Singapore: World Scientific, 2001.
- [21] MORAES, J.S.; PAKTER, R.; RIZZATO, F.B. Equilibrium and stability of off-axis periodically focused particle beams. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 93, p. 244801, 2004.
- [22] CUCHETTI, A., REISER, M., WANGLER, T. Topics in nonlinear dynamics - a tribute to Sir Edward Bullard. In: *Proc. of the 1991 Part. Accel. Conf.* New York: J. Appl. Phys., 1991. v. 251, p. 1919.
- [23] GLUCKSTERN, R. Analytic model for halo formation in high current ion linacs. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 73, n. 9, p. 1247–1250, Aug 1994.
- [24] LICHTENBERG, A.J.; LIEBERMAN, M. *Regular and stochastic motion*. New York: Springer, 1992.
- [25] HESS, M.; CHEN, C. *Phys. Plasmas*, Princeton, v. 7, p. 5206, 2000.
- [26] PAKTER, R.; RIZZATO, F. Stability of periodically focused intense particle beams. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 87, n. 4, p. 044801:1–4, Jul 2001.
- [27] PAKTER, R.; RIZZATO, F. Nonlinear dynamics of periodically focused intense particle beams. *Phys. Rev. E*, New York, v. 65, p. 056503, May 2002.

- [28] HESS, M.; CHEN, C. Space-charge limit for a finite-size bunched beam in a circular conducting pipe. *Phys. Rev. Special Topics: Accel. Beams*, New York, v. 7, p. 092002, 2004.
- [29] FIUZA, K.; PAKTER, R.; RIZZATO, F.B. Image charge effects in dynamics of intense off-axis beams. In: *Proc. of the 2007 Part. Accel. Conf.* Albuquerque: , 2007. p. 3880.
- [30] HOFMANN, I. Stability of anisotropic beams with space charge. *Phys. Rev. E*, v. 57, n. 4, p. 4713, April 1998.
- [31] HOLM, D.D.; LYSENKO, W.P.; SCOVEL, J.C. Moment invariants for the vlasov equation. *J. Math. Phys.*, v. 31, n. 7, p. 1610–1615, Jul 1990.
- [32] NERI, F.; RANGARAJAN, G. Kinematic moment invariants for linear hamilton systems. *Phys. Rev. Let.*, v. 64, n. 10, p. 1073, March 1990.
- [33] DRAGT, A.; NERI, F.; RANGARAJAN, G. General moment invariants for linear hamiltonian systems. *Phys. Rev. A*, v. 45, n. 4, p. 2572, Feb 1992.
- [34] GUY, F.W.; LAPOSTOLLE, P.M.; WANGLER, T.P. The influence of density distribution on the stability of beams. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. 34, p. 1149, 1987.
- [35] WANGLER, T.P.; CRANDALL, K.P.; MILLS, R.; REISER, M. Relation between field energy and rms emittance in intense particle beams. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. 32, n. 5, p. 2196, 1985.
- [36] REISER, M.; CHANG, C.; KEHNE, D.; LOW, K.; SHEA, T. Emittance growth and image formation in a nonuniform space-charged-dominated electron beam. *Phys. Rev. Let.*, v. 61, n. 26, p. 2933, Dec 1988.
- [37] HABER, I.; REISER, M.; KEHNE, D.; RUDD, H. Experimental, theoretical, and numerical investigations of the homogenization of density nonuniformities in the periodic transport of a space-charge dominated beam. *Phys. Rev. A*, v. 44, n. 8, p. 5194, Oct 1991.
- [38] REISER, M. Free energy and emittance growth in nonstationary charged particle beams. *J. Appl. Phys.*, v. 70, n. 4, p. 1919, Aug 1991.
- [39] LAPOSTOLLE, P. Possible emittance increase through filamentation due to space charge in continuous beams. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. NS-18, p. 1101, 1971.
- [40] SACHERER, F. Rms envelope equations with space charge. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, v. NS-18, p. 1105–1107, 1971.
- [41] COURANT, E.D.; SNYDER, H. *Ann. Phys.*, v. 3, n. 1, 1958.

- 
- [42] PRESS, W.H. et all. NR - numerical recipes. Disponível em: <<http://www.nr.com>>. Acesso: 12 janeiro 2005.
- [43] LICHTENBERG, A.J.; LIEBERMAN, M. *Regular and chaotic dynamics*. New York: Springer, 1992.
- [44] KAPCHINSKIJ, I.M.; VLADIMIRSKIJ, V. Limitations of proton beam current in a strong-focusing linear accelerator associated with the beam space charge. In: *Proc. of the Int. Conf. on High Energy Accelerators*. Genebra: CERN, 1959. p. 274–288.
- [45] HOFMANN, I.; LASLETT, L.J.; SMITH, L.; HABER, I. Stability of the Kapchinskij-Vladimirskij (K-V) distribution in long periodic transport systems. *Part. Accel.*, v. 13, p. 145, 1983.
- [46] LUND, S.M.; BUKH, B. Stability properties of the transverse envelope equations describing intense ion beam transport. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, v. 7, p. 024801, 2004.
- [47] SIMEONI JR., W.; RIZZATO, F.B.; PAKTER, R. Nonlinear stability of breathing beams in magnetic focusing fields.
- [48] MORAES, J.S.; PAKTER, R.; RIZZATO, F.B. Centroid motion in periodically focused beams. *Phys. Plasmas*, Princeton, v. 12, p. 023104, 2005.
- [49] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [50] PAKTER, R.; CHEN, C. Cold-fluid equilibrium for a corkscrewing elliptic beam in a variably focusing channel. *Phys. Rev. E*, New York, v. 62, n. 2, p. 2789–2796, Aug 2000.