

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - UFRGS

**Modelo Esférico Quântico de Vidro de Spin com  
Interações de Longo Alcance. Grupo de Renormalização  
a Ordem 1 Loop<sup>†</sup>**

Pedro Castro Menezes Xavier de Mello e Silva

*Tese realizada sob orientação da Professora Dra.  
Alba G. R. Theumann e apresentada ao Instituto  
de Física da UFRGS, em preenchimento parcial dos  
requisitos para obtenção do título de Doutor em  
Ciências.*

*Porto Alegre, Junho de 2009.*

---

<sup>†</sup>Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
1.1	Fenômenos críticos . . . . .	7
1.1.1	Expoentes críticos . . . . .	7
1.1.2	Hipótese de escala . . . . .	10
1.2	Fenômenos críticos quânticos . . . . .	12
1.2.1	Fenômenos críticos clássicos vs quânticos . . . . .	12
1.2.2	Expoentes críticos . . . . .	13
1.2.3	Escala . . . . .	15
1.2.4	Exemplos de sistemas que apresentam transição de fase quântica . . . . .	15
1.3	Grupo de renormalização . . . . .	16
1.3.1	Considerações gerais . . . . .	16
1.3.1.1	Hamiltoniano e função de partição . . . . .	17
1.3.1.2	O modelo de Ising . . . . .	18
1.3.1.3	O modelo esférico . . . . .	19
1.3.2	Função geratriz . . . . .	21

1.3.3	Dimensionalidade . . . . .	25
1.3.4	Equações do grupo de renormalização, divergência e renormalização por mínima subtração dos pólos dimensionais . . . . .	29
1.3.5	Solução da equação de grupo de renormalização: pontos fixos e expoentes críticos . . . . .	32
1.4	Vidros de spin . . . . .	36
1.4.1	Modelos e resultados conhecidos . . . . .	39
1.4.1.1	O modelo SK de alcance infinito . . . . .	39
1.4.1.2	O modelo esférico de vidros de spin . . . . .	42
1.4.1.3	Propriedades críticas dos vidros de spin . . . . .	43
1.4.1.4	Propriedades críticas dos vidros de spin com interação de longo alcance do tipo potência inversa . . . . .	45
1.4.1.5	Teoria de Landau de vidros de spins de rotores quânticos . . . . .	46
1.4.1.6	Teoria de Landau com interação de longo alcance . . . . .	47
1.4.2	O formalismo de vidros de spin e outros áreas do conhecimento . . . . .	48
1.5	Apresentação do modelo proposto . . . . .	49
1.6	Motivação . . . . .	51
<b>2</b>	<b>O Modelo</b>	<b>53</b>
2.1	Formulação do Problema . . . . .	53
2.2	Solução de Campo Médio e Hamiltoniano Efetivo . . . . .	59
2.3	Expansão Diagramática e Funções de Vértice . . . . .	66

2.3.1	Curto Alcance . . . . .	67
2.3.1.1	Divergência e Renormalização . . . . .	73
2.3.1.2	Equações do Grupo de Renormalização . . . . .	76
2.3.1.3	Funções de Wilson e Pontos Fixos . . . . .	79
2.3.1.4	Estabilidade dos Pontos Fixos e Expoentes Críticos . . . . .	81
2.3.1.5	Discussão . . . . .	82
2.3.2	Longo Alcance . . . . .	85
2.3.2.1	Divergência e Renormalização . . . . .	88
2.3.2.2	Equações do Grupo de Renormalização . . . . .	91
2.3.2.3	Funções de Wilson e Pontos Fixos . . . . .	93
2.3.2.4	Estabilidade dos Pontos Fixos e Expoentes Críticos . . . . .	93
2.3.2.5	Discussão . . . . .	94
<b>3</b>	<b>Conclusão</b>	<b>96</b>
<b>4</b>	<b>Artigos publicados</b>	<b>101</b>
	<b>Referências</b>	<b>102</b>

# Resumo

No presente trabalho, estudamos as propriedades críticas do modelo esférico quântico de vidros de spin com potencial de longo alcance usando grupo de renormalização e expansão diagramática a ordem um loop. São apresentados cálculos detalhados da função de partição, do Hamiltoniano em teoria de campos, das funções de vértice, funções de Wilson e expoentes críticos. Mostramos como a função de partição se divide em uma parte de campo médio e outra perturbativa, permitindo o estudo de ambas as partes separadamente (independentemente). Considerando as perturbações, desenvolvemos a estrutura diagramática para a teoria  $\phi^3$  com a inclusão da dinâmica, característica intrínseca das transições de fase quânticas (1, 2). Renormalizamos as funções de vértice para ambos os casos, de longo e curto alcance, usando o método da mínima subtração dos pólos dimensionais, estabelecendo resultados para os expoentes críticos corrigidos a primeira ordem. Também mostramos a necessidade da introdução de uma nova constante,  $a$ , referente à renormalização da parte dinâmica do sistema, o que leva a uma nova função de Wilson  $\alpha(u)$ , relacionada com a correção do expoente crítico dinâmico  $z$  através das equações de grupo de renormalização para o caso estudado. Novos resultados para os expoentes críticos conhecidos são encontrados, incluindo a presença de um ponto fixo estável não trivial a baixas dimensionalidades ( $d < d_c$ ), diferente do que se encontra na literatura, na qual o ponto fixo estável para dimensões abaixo da dimensão crítica é o gaussiano(3, 4).

# Abstract

We study the critical properties of the quantum spherical model of spin glasses with short and long range interaction using renormalization group technique up to order one loop. We present detailed calculation of the partition function, the field theory Hamiltonian, the vertex functions, the Wilson functions and the critical exponents. We show how the partition function splits in a mean field part and a perturbative part, allowing us to study both separately. Considering perturbations, we develop a diagrammatic structure for  $\phi^3$  theory including dynamics, which is an intrinsic feature of the phase transition in quantum systems (1, 2). We renormalize the vertex functions for both cases (long and short range) using minimal subtraction of dimensional poles, establishing results for the critical exponents corrected to order one loop. We also discuss the necessity of the introduction of a new constant,  $a$ , connected to the renormalization of the dynamical part of the system, which leads to a new Wilson function  $\alpha(u)$  that is closely related to the corrections of the critical exponent  $z$  through the solutions of the renormalization group equations for the case we study. New results for the known critical exponents are presented, including the presence of a stable non-gaussian fixed point at low dimensionality ( $d < d_c$ ), contradicting the expected flow to the Gaussian fixed point presented in the references (3, 4).

# Capítulo 1

## Introdução

Esta introdução está dividida em 4 seções: Fenômenos críticos, Fenômenos críticos quânticos, Grupo de renormalização e Vidros de spin.

A primeira seção tratará sobre fenômenos críticos em sua abordagem clássica: os expoentes críticos e seus significados, hipótese de escala e transições de fase clássicas. A seguir, estenderemos a abordagem às transições de fase quânticas, definindo o que são, quais as diferenças entre fenômenos críticos clássicos e quânticos, os expoentes críticos quânticos. Na seção Grupo de renormalização, dissertamos sobre o conjunto de ferramentas matemáticas utilizadas para calcular as propriedades críticas do sistema, incluindo o cálculo da função de partição, o cálculo das funções de vértice, o reconhecimento das divergências, dimensionalidade crítica, as equações de grupo de renormalização, a relação entre os expoentes críticos e as constantes renormalizadoras, etc. Na última parte da introdução, dissertaremos sobre algumas publicações escolhidas em estudo de vidros de spins, incluindo os resultados de campo médio e alguns estudos em grupo de renormalização.

A primeira e a terceira seções baseiam-se nas obras de Huang (5), Amit (6) e Fisher (7), enquanto a segunda parte está mais focada nas obras de Continentino (1), Sachdev (8) e o artigo de Belitz et. al. (9). A última é baseada nos artigos (3, 10, 11, 12) e no livro de

Fischer e Hertz (13).

## 1.1 Fenômenos críticos

Existe uma grande quantidade de sistemas físicos que apresentam transições de fase de segunda ordem. Esse tipo de transição pode ser definido como um fenômeno que ocorre quando os sistemas se aproximam continuamente de um estado cujas correlações são singulares. A transição, em geral, se refere ao fato de o sistema sofrer uma quebra de simetria espontânea (ou modificações na estrutura cristalina, por exemplo) em uma certa temperatura definida: a temperatura crítica. Por quebra de simetria espontânea, referimo-nos àquelas que ocorrem sem a presença de um campo externo. O ponto onde a mudança de comportamento ocorre é chamado de ponto crítico.

O termo “fenômenos críticos” se refere ao comportamento das propriedades termodinâmicas do sistema próximo à temperatura crítica  $T_c$  de uma transição de fase. Como já mencionado, a transição é caracterizada pela passagem de um estado simétrico a outro sem a simetria em questão. Essa quebra de simetria é evidenciada, matematicamente, por discontinuidades nas funções termodinâmicas.

### 1.1.1 Expoentes críticos

As discontinuidades podem ser observadas, por exemplo, pelo aumento significativo das colisões dos fótons nas partículas de um gás, o que se reflete em um aumento na sua opacidade. Esse aumento é matematicamente evidente nas correlações de larga escala. Outro exemplo é a divergência da susceptibilidade de ferromagnetos na temperatura crítica, o que evidencia a natureza de longo alcance das correlações no ponto de transição.

Para caracterizar tais fenômenos, definimos uma série de expoentes críticos, que de-

screvem a natureza das singularidades em várias quantidades mensuráveis experimentalmente na criticalidade. Partimos da suposição que, no limite de  $T \rightarrow T_c$ , qualquer quantidade termodinâmica pode ser decomposta em uma parte regular, que é finita mas não necessariamente contínua, e uma parte singular, que pode ser divergente ou ter derivadas divergentes.

Um dos expoentes críticos é definido através do comprimento de correlação, que está relacionado com a função de correlação entre dois pontos:

$$\langle \delta s(0) \delta s(x) \rangle \underset{|x| \rightarrow \infty}{\approx} e^{-\frac{x}{\xi}}.$$

O comportamento assintótico do comprimento de correlação  $\xi$  em função da temperatura é definido por

$$\xi = \begin{cases} f_+ (T - T_c)^{-\nu} \\ f_- (T_c - T)^{-\nu'} \end{cases}$$

onde  $f_+$  e  $f_-$  são independentes de  $T$  e se referem, respectivamente, a estados se aproximando da temperatura crítica por valores maiores e menores do que ela, e  $\nu$  é o expoente crítico que caracteriza o comportamento a ser estudado próximo à criticalidade. A variável  $s(x)$  tem sua interpretação dependente do sistema estudado. Em sistemas magnéticos,  $s(x)$  é o momento magnético, enquanto, em líquidos, é a diferença entre a densidade local em  $x$  e a densidade média no ponto crítico.

Para estudar as transições, Landau introduziu o parâmetro de ordem, uma variável termodinâmica extensiva, acessível experimentalmente, que descreve o sistema na sua criticalidade. Esse parâmetro é nulo na fase desordenada (isto é, acima da temperatura crítica) e diferente de zero na fase ordenada. A escolha de tal variável é de ordem fenomenológica e nem sempre óbvia. No caso de vidros de spin, por exemplo, não há certeza quanto a qual variável seja o parâmetro de ordem ou sequer se o conceito de parâmetro de ordem é apropriado.

Landau unificou as teorias de campo médio então existentes, criando uma teoria em que

a energia livre é escrita como uma expansão em série de potências do parâmetro de ordem:

$$\mathcal{L} = b\phi^2 + c\phi^3 + d\phi^4 + \dots$$

onde  $\phi$  é o parâmetro de ordem e  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são coeficientes dependentes de temperatura, que podem ser nulos ou não, dependendo das simetrias que o sistema apresenta.

A susceptibilidade  $\chi$  é a resposta do sistema (isto é, a variação na média do parâmetro de ordem) quando um campo externo infinitesimal se acopla linearmente ao parâmetro de ordem. O comportamento de  $\chi$  próximo ao ponto crítico que define o expoente crítico  $\gamma$  é dado por

$$\chi \sim \begin{cases} |T - T_c|^{-\gamma}; & T > T_c \\ |T - T_c|^{-\gamma'}; & T < T_c \end{cases}$$

cuja interpretação, como todas as variáveis até então definidas, também é dependente do sistema. Em líquidos,  $\chi$  é a compressibilidade.

Dois expoentes críticos são definidos pelo comportamento da magnetização (ou média do parâmetro de ordem, seja qual for o sistema): um deles caracteriza o comportamento assintótico dessa grandeza a baixas temperaturas com campo externo nulo

$$M \sim |T - T_c|^\beta$$

e outro determina o comportamento na temperatura crítica, mas com campo diferente de zero

$$M \sim h^{\frac{1}{\delta}}$$

onde  $h$  é o campo externo.

O calor específico, outra quantidade física descontínua na transição, tem seu comporta-

mento assintótico definido por

$$C \sim \begin{cases} A_+ |T - T_c|^{-\alpha}; & T > T_c \\ A_- |T - T_c|^{-\alpha'}; & T < T_c \end{cases}$$

com  $A_+$  e  $A_-$  independentes da temperatura. Por último, definimos o expoente crítico  $\eta$ , que é referente à correção quanto ao decaimento exponencial da função de correlação entre dois pontos, que assumimos possuir a forma de Ornstein-Zernike

$$\Gamma(r) \xrightarrow{T \rightarrow T_c} r^{-p} e^{-\frac{r}{\xi}}$$

onde

$$p = d - 2 + \eta$$

com  $d$  a dimensionalidade do sistema, indica o decaimento algébrico em  $r$  de  $\Gamma(r)$  em  $T = T_c$ .

Tantos expoentes críticos sugerem uma teoria muito complicada de se tratar; entretanto, basta o conhecimento de 2 deles para que se obtenham os demais. Isso porque os expoentes críticos devem estar de acordo com as leis de escala, dadas por

$$\gamma = \eta(2 - \nu) \quad \text{Fisher}$$

$$\alpha - 2\beta + \gamma = 2 \quad \text{Rushbrooke}$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad \text{Widom}$$

$$\nu d = 2 - \alpha \quad \text{Josephson.}$$

### 1.1.2 Hipótese de escala

Como o nome indica, a hipótese de escala se refere ao comportamento das diversas quantidades físicas de um sistema quando este é submetido a uma variação em sua escala de

comprimento. Os valores das quantidades com dimensionalidade devem ser expressos em termos de um padrão de comprimento. Quando modificamos esse padrão, os observáveis físicos com dimensionalidade irão se modificar. Por dimensionalidade entende-se o expoente ao qual a escala de uma quantidade física é elevada quando o sistema é reescalado. Trataremos mais sobre dimensionalidade em renormalização. Uma quantidade adimensional é invariante frente a troca de escala; outras quantidades variam de acordo com suas dimensões. As leis de escala referentes a funções termodinâmicas podem ser derivadas a partir de uma simples premissa: assumimos que, perto do ponto crítico, o comprimento de correlação  $\xi$  é o único comprimento característico do sistema, em termos do qual todos os outros serão medidos. Essa é a “hipótese de escala”.

A idéia de escala, primeiro proposta por Widom, consiste em escrever a parte assintótica da energia livre ou da equação de estado como uma função homogênea das variáveis. Consideramos, por exemplo, a equação de estado que descreve a relação entre magnetização  $M$ , temperatura  $T$  e campo magnético  $h$ . Em geral

$$h = M^\delta f(M, t) \quad t = |T - T_c|.$$

Em vez disso, Widom propôs que  $f$  deveria depender de uma variável apenas

$$h = M^\delta f\left(\frac{t}{M^{1/\beta}}\right).$$

Verifica-se experimentalmente que esse tipo de relação é obedecida razoavelmente bem. Tal relação também foi verificada em várias aproximações e modelos teóricos, tais como aproximações de campo médio, modelo da gota e o modelo esférico. De modo similar, escrevemos a parte singular da energia livre

$$F(t, h) = t^{2-\alpha} \phi(t/h^{1/\beta\delta}),$$

e também a função de correlação em  $M = h = 0$ :

$$G(r, t) = |r|^{-(d-2+\eta)} g(r/t^\nu).$$

A partir dessas relações, podem ser derivadas as leis de escalas mencionadas anteriormente. Ainda, os expoentes são simétricos ao redor da transição. Conseqüentemente, se a escala realmente é válida, necessitamos saber apenas dois expoentes para saber todos. Essas relações são exatamente obedecidas pelo modelo bidimensional de Ising e pelo modelo esférico. Resultados experimentais e estudos numéricos de vários modelos suportam a ideia de escala de maneira significativa. Essa ideia foi introduzida por Kadanoff e formulada por Patashinskii e Pokrovskii. Fisher a desenvolveu com o grupo de renormalização, e, por fim, Griffiths incrementou-a ainda mais quando introduziu as transições quânticas.

## 1.2 Fenômenos críticos quânticos

### 1.2.1 Fenômenos críticos clássicos vs quânticos

Transições de fase quânticas, diferentemente das clássicas, não são causadas por variação na temperatura, e sim pela competição entre os diferentes parâmetros que descrevem as interações básicas do sistema. Sua característica específica são as flutuações quânticas que ocorrem na criticalidade. Essas transições ocorrem no zero absoluto, portanto não há flutuações térmicas que possam destruir uma eventual fase ordenada. São as flutuações quânticas devido ao princípio da incerteza de Heisenberg no zero absoluto que podem levar à transição. Assim, é necessário um novo parâmetro para controlar tais flutuações.

Quando consideradas as flutuações quânticas, o tempo tem um papel fundamental no comportamento do sistema. Isso porque, a baixas temperaturas (regime no qual o sistema é governado pela mecânica quântica), a dinâmica se acopla à estática, tornando impossível

estudar ambos aspectos separadamente. Matematicamente, isso se deve à natureza não comutativa dos operadores envolvidos no modelo quântico de interações entre as partículas.

Em mecânica estatística clássica, o expoente crítico dinâmico  $z$  é independente do comportamento crítico estático, pois é possível fatorar a função de partição graças à comutatividade dos elementos do sistema. Essa fatoração é impossível em mecânica estatística quântica, devido à não comutatividade dos operadores envolvidos no sistema. Desse modo, a dinâmica deve ser resolvida em conjunto com a termodinâmica.

O tempo de relaxação deve ser considerado com sua escala, e é o comportamento assintótico desse que define o expoente crítico  $z$ . Na ausência de temperatura, as flutuações quânticas serão responsáveis pela transição. Isso demanda a definição de um novo parâmetro, que tem a função de medir a distância à qual o sistema se encontra da criticalidade. Os expoentes críticos quânticos, por sua vez, devem ser redefinidos em função desse novo parâmetro. É ele que informará a intensidade das flutuações quânticas em questão, sendo, pois, equivalente ao que a temperatura representa em fenômenos críticos clássicos.

## 1.2.2 Expoentes críticos

Na vizinhança de uma transição de fase de segunda ordem, definimos o comportamento da parte singular da energia livre  $f$ , do comprimento de correlação  $\xi$ , da magnetização (média do parâmetro de ordem)  $m$ , da magnetização na criticalidade  $m(h, g = g_c)$ , da susceptibilidade

$\chi$  e do tempo de relaxação  $\tau_\xi$  como

$$\begin{aligned} f &\sim |g - g_c|^{2-\alpha} \\ \xi &\sim |g - g_c|^{-\nu} \\ m &\sim |g - g_c|^\beta \\ m(h, g = g_c) &\sim h^{\frac{1}{\delta}} \\ \chi &\sim |g - g_c|^{-\gamma} \\ \tau_\xi &\sim |g - g_c|^{-\nu z}. \end{aligned}$$

Além dos expoentes críticos definidos acima, também é definido  $\eta$ , de modo similar ao caso clássico: É proposto que a função de correlação entre dois pontos possui a forma de Ornstein-Zernike, porém com o expoente

$$G \sim r^{-(d+z-2+\eta)}$$

no ponto crítico. As leis de escala também devem valer. Assim como em fenômenos críticos clássicos, os expoentes críticos quânticos são universais, independentes dos detalhes do hamiltoniano considerado.

Como a temperatura em que ocorrem as transições de fase quânticas é acessível apenas teoricamente, a tarefa principal do estudo em fenômenos críticos quânticos é descrever as consequências dessa singularidade em  $T = 0$  nas características físicas do sistema em  $T > 0$ . Trabalhar a partir do ponto crítico quântico mostrou-se uma forma poderosa de entender e descrever as propriedades termodinâmicas e dinâmicas de vários sistemas. De fato, não é necessário que o sistema de interesse atinja o ponto crítico quântico: é sempre possível argumentar que existe um ponto fisicamente inacessível e, então, desenvolver uma descrição ao redor dele.

### 1.2.3 Escala

Assim como em fenômenos críticos clássicos, elegemos uma escala para o sistema. Primeiramente, foi pensado que a inclusão da dinâmica no sistema estatístico apenas a afetava no sentido de aumentar a dimensionalidade em uma unidade (14), e que as propriedades críticas quânticas seriam equivalentes às clássicas, considerando-se

$$d_{quantico} = d_{classico} + 1.$$

Entretanto, Hertz (2) mostrou que a dinâmica não necessariamente teria a mesma escala da parte estática. Isto é: ao se realizar a transformada de Fourier em espaço e tempo, a escala dos momenta  $k$  pode ser diferente da escala das frequências  $\omega$ . Isso afeta diretamente a dimensionalidade crítica do sistema considerado. Hertz concluiu que a dimensionalidade correta de um sistema quântico que apresente transições de fase é dada por

$$d_q = d_{cl} + z$$

onde  $z$  é o expoente crítico dinâmico. Neste trabalho, entretanto, mostramos que

$$d_q = d_{cl} + z_0$$

onde  $z_0$  é expoente crítico dinâmico sem correções.

### 1.2.4 Exemplos de sistemas que apresentam transição de fase quântica

Citamos, aqui, três exemplos de transições quânticas:

- O isolante  $LiHoF_4$  consiste em flutuações dos íons  $Ho$  entre dois estados de spins que

são alinhados paralela e anti-paralelamente a um particular eixo cristalino. Esses estados podem ser representados por spins de Ising em cada íon  $Ho$ . Em  $T = 0$ , todos os spins devem ter a mesma orientação (ferromagneto). Se, no experimento, acrescentarmos um campo transversal suficientemente grande, é possível destruir a ordem magnética por conta de flutuações quânticas entre os dois estados de  $Ho$ , originando um paramagneto quântico a  $T = 0$ .

- O material de férmions pesados  $CeCu_{6-x}Au_x$  tem um estado fundamental ordenado magnético para altos valores do dopante  $x$ . Se ocorrer uma diminuição no valor de  $x$  ou se o cristal for colocado sob pressão, é possível destruir essa ordem magnética em uma transição de fase quântica de segunda ordem. O estado fundamental torna-se um líquido de Fermi com massa efetiva relativamente grande.
- O composto  $LiHo_xY_{1-x}F_4$ , que possui uma fase vítrea a baixas temperaturas, pode ser modelado como um vidro de spin de Ising em campo transversal. O sistema mostra, experimentalmente, um crossover entre as regiões que são dominadas por flutuações térmicas e quânticas, ainda que a natureza do regime quântico seja obscura.

Para mais exemplos experimentais, ver (3) e referências.

## 1.3 Grupo de renormalização

### 1.3.1 Considerações gerais

Apresentamos, nesta seção, um breve resumo das ferramentas básicas utilizadas para resolver o sistema proposto. Não é o objetivo deste trabalho fazer uma descrição detalhada de todas as bases fundamentais necessárias para resolver o modelo. Para maiores detalhes, ver os textos (15, 5, 16, 17). Também não é objetivo do trabalho mostrar as soluções detalhadas

dos modelos de Ising e esférico, uma vez que sua apresentação nesta seção é meramente ilustrativa.

### 1.3.1.1 Hamiltoniano e função de partição

Para estudar sistemas estatísticos, construímos a função de partição para o sistema. Essa função diz respeito à distribuição dos estados do sistema para uma certa temperatura. Em geral, a função de partição é dada por

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

onde  $\mathcal{Z}$  é a função de partição a ser calculada,  $\mathcal{H}$  é o hamiltoniano do sistema considerado e  $\beta$  é o inverso da temperatura. Note que esse tipo de distribuição privilegia, a baixas temperaturas, estados com menor energia.

O Hamiltoniano depende diretamente das características microscópicas do sistema, isto é, ele contém informações sobre as interações envolvidas no problema a ser estudado. No estudo de sistemas clássicos,  $\mathcal{H}$  é uma função real que depende dos graus de liberdade do sistema. Em sistemas quânticos,  $\hat{\mathcal{H}}$  é um operador constituído de outros operadores que representam os graus de liberdade do sistema, que podem não comutar entre si. O cálculo da função de partição complica de maneira significativa.

Para contornar o inconveniente que seria calcular o traço de um operador exponencial cujo expoente possui termos que não comutam, Feynman desenvolveu a técnica das integrais de caminho. Essa técnica consiste em separar o operador exponencial em partes infinitesimais, considerando

$$\beta = \tau_F - \tau_I = M\epsilon$$

onde  $\tau_F$  e  $\tau_I$  são, respectivamente, os tempos inicial e final,  $M$  é o número de partes em que  $\beta$  foi dividido, e  $\epsilon$  é o intervalo entre um certo tempo  $\tau_j$  e outro imediatamente seguinte  $\tau_{j+1}$ .

Deste modo, o operador exponencial poderá ser escrito como um produto de operadores exponenciais com seus elementos em ordem normal. O erro gerado nessa transformação é de ordem  $\epsilon^2$ , sendo, portanto, desprezado.

Com isso, o expoente da função de partição apresentará uma soma nos tempos  $\tau_i$ , que será convertida numa integral em  $\tau$  quando considerarmos o limite  $M \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ . Um exemplo desse tipo de tratamento é dado no capítulo 2.

### 1.3.1.2 O modelo de Ising

O modelo de Ising é, sem dúvidas, o modelo mais utilizado para descrever sistemas físicos estatísticos em matéria condensada. Isso porque ele se apoia em uma ideia muito simples, embora, muitas vezes, de difícil tratamento.

Nesse modelo, consideramos que o sólido a ser estudado é uma rede  $d$  dimensional com  $N$  sítios espaçados igualmente (rede regular). Os objetos (spins) que ocupam os sítios podem assumir dois valores aleatoriamente: 1 e -1. Para representar graficamente o modelo, utilizamos uma seta que pode apontar para cima ou para baixo, identificando, assim, o estado em que se encontra o spin. Matematicamente, atrelamos dois parâmetros às variáveis de Ising: um relativo ao tempo e outro relativo à sua posição na rede.

Primeiramente, o modelo foi proposto para simular a estrutura física de um ferromagneto. O Hamiltoniano que descreve as interações do sistema é dado por

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

onde  $J$  é a energia envolvida na interação entre os spins  $s_i$  e  $s_j$ , e  $H$  é o campo magnético. A primeira soma é feita apenas entre os primeiros vizinhos da rede. O número de vizinhos de cada sítio depende da dimensão da rede. Note que, como o estado fundamental do sistema é aquele com menor energia, o sinal negativo no primeiro termo favorece as configurações com

$s_i = s_j$ , isto é, o estado de mais baixa energia é aquele com todos os spins alinhados.

A função de partição para o exemplo acima é dada por

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta\mathcal{H}} \quad (1.1)$$

onde a soma deve ser feita sobre todos os estados possíveis de  $s_i$ .

A versão unidimensional do modelo de Ising não possui transição de fase paramagneto-ferromagneto. Entretanto, quando se considera a rede bidimensional, é possível obter transição de fase a baixas temperaturas de forma rigorosa e exata, usando mecânica estatística. Depois algumas soluções aproximadas que indicavam a presença de magnetização espontânea no sistema, Onsager publicou, em 1944, a solução exata do modelo de Ising a campo zero numa rede quadrada, confirmando a presença de transição de fase (18).

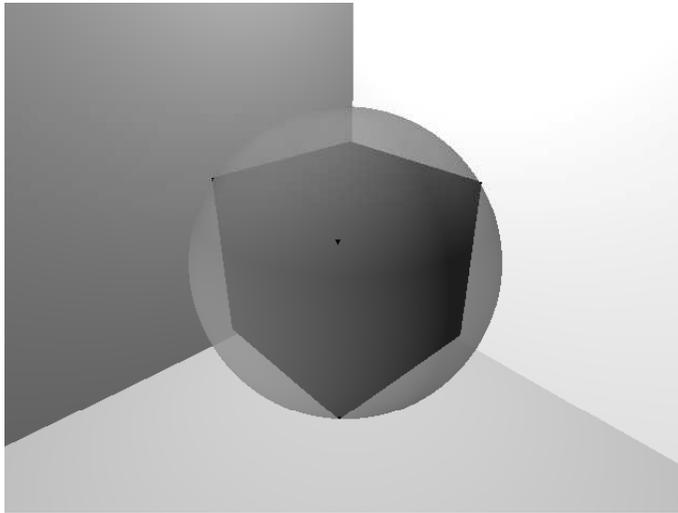
### 1.3.1.3 O modelo esférico

O modelo esférico é considerado uma versão contínua do modelo de Ising no sentido de considerar que as variáveis  $s_i$  podem assumir qualquer valor de  $-\infty$  até  $\infty$ , desde que soma quadrática de todas elas seja igual ao número de spins na rede ( $N$ ), isto é

$$\sum_i s_i^2 = N.$$

O vínculo esférico deve ser de alguma maneira introduzido no cálculo da função de partição, seja por meio de um termo no Hamiltoniano ou por uma função delta de Dirac.

Pictoricamente, podemos pensar que os estados de Ising repousam nas arestas de um hipercubo  $N$  dimensional, enquanto os estados do modelo esférico repousam na hiperesfera que circunscreve o hipercubo de Ising.



*Representação gráfica dos estados nos modelos de Ising e esférico*

O Hamiltoniano considerado originalmente por Kac (19) foi o de um ferromagneto, que é dado pela mesma forma do de Ising

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + H \sum_i s_i.$$

A grande diferença e maior vantagem do modelo esférico é sua integrabilidade. A função de partição é escrita como uma soma contínua sobre todos os estados, isto é, a integral

$$\mathcal{Z} = \int ds_i e^{-\beta \mathcal{H}}. \quad (1.2)$$

Diferentemente do que acontece no modelo de Ising, o modelo esférico de um ferromagneto com interação de curto alcance só apresenta transição de fase para  $d \geq 3$ , onde  $d$  é a dimensionalidade.

No artigo original (19), o autor discute as diferenças entre os resultados obtidos para o comportamento do ferromagneto usando o modelo esférico e o modelo de Ising. Embora os resultados não sejam os mesmos, o autor argumenta que, mesmo sendo um modelo que possui

características não físicas, a facilidade de integração e os resultados aproximados fazem dele um ótimo ponto de partida para entender o comportamento do sistema em questão.

### 1.3.2 Função geratriz

Para trabalhar com o grupo de renormalização é conveniente definir uma função capaz de gerar todas as correlações do sistema. Esta é a função geratriz, definida da seguinte maneira

$$\mathcal{Z} \{ \phi \} = \int d\phi(x) \exp \left\{ - \int dx \mathcal{L} [\phi(x)] \right\} \quad (1.3)$$

onde  $\mathcal{L} [\phi(x)]$  é a densidade lagrangiana do sistema,  $\phi(x)$  são os campos, e a integral no expoente deve ser considerada em  $d$  dimensões.

A densidade lagrangiana deve ser construída considerando-se todas as simetrias do sistema, isto é, devem ser incluídos todos aqueles termos e suas derivadas que sejam invariantes frente à operação de simetria em questão. Algumas considerações devem ser feitas para restringir o número de termos em  $\mathcal{L}$ . A análise usando o grupo de renormalização indica, em geral, a necessidade de incluir apenas os três primeiros termos  $(\nabla\phi)^2$ ,  $\phi^2$  e  $\phi^3$  (ou  $\phi^4$  ou...) com coeficientes arbitrários. Os demais operadores são irrelevantes pois não contribuem com o comportamento crítico do sistema.

É conveniente, também, introduzir no lagrangiano um termo de fonte que se acopla linearmente com o campo  $\phi(x)$ , ou seja

$$\mathcal{T} = \int dx h(x) \phi(x).$$

Este termo é fundamental para o desenvolvimento da teoria perturbativa utilizada para resolver o sistema. É ele que dará a forma dos diagramas de Feynman.

Outra maneira de escrever a função de partição em teoria de campos é tomar por base

a função de partição em mecânica estatística dada por (1.1) ou (1.2). Entretanto, devemos tomar o cuidado de fazer uma transformação gaussiana para obtermos os campos contínuos. Por exemplo, no ferromagneto de Ising, o Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H}\{s_i\} = - \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i$$

e escrevemos a função de partição estatística como em (1.1). Para obtermos os campos contínuos e uma função geratriz na forma de (1.3), consideramos a identidade

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i d\phi_i \exp \left[ -\frac{1}{4} \phi_i V_{ij}^{-1} \phi_j + \phi_i s_i \right] = \mathcal{C} \exp \left( \sum_{ij} s_i V_{ij} s_j \right)$$

onde  $V_{ij}$  é um potencial, que, substituindo em (1.1), resulta

$$\mathcal{Z}\{H_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i d\phi_i \exp \left[ -\frac{1}{4} (\phi_i - H_i) K_{ij} (\phi_j - H_j) \right] \sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i)$$

onde  $K_{ij} = \beta J_{ij}$  e  $H_i = \beta h_i$ . Com essa operação, conseguimos separar as componentes de spin  $s_i$ ; então, a soma sobre todas as configurações de  $s_i$  pode ser feita como segue:

$$\sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i) = \mathcal{C} \exp \left[ \sum_i \ln(\cosh \phi_i) \right]. \quad (1.4)$$

O termo (1.4) dará origem à série de potências que aparece em  $\mathcal{L}$ , enquanto o anterior,  $\phi_i K_{ij} \phi_j$ , dará origem à parte do lagrangiano que depende das derivadas dos campos  $\phi_i$ .

O lagrangiano pode ser separado em uma parte livre (essencialmente  $(\nabla^2 + \mu) \phi^2$ ) e uma parte de interação (todos os termos em  $\phi$  de ordem superior a 2), e é possível mostrar que a função de partição do sistema pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathcal{Z}\{h\} = \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ - \int dx \mathcal{L}_{int} \left( \frac{\delta}{\delta h(x)} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx dy h(x) G_0(x-y) h(y) \right\} \quad (1.5)$$

onde  $\mathcal{N}$  é determinado de modo que

$$\mathcal{Z} \{h = 0\} = 1.$$

$\mathcal{L}_{int} \left\{ \frac{\delta}{\delta h(x)} \right\}$  é o lagrangiano de interação, isto é, a parte do lagrangiano que contém os termos de ordem igual ou superior a  $\phi^3$  (com  $\phi$  substituído por  $\frac{\delta}{\delta h(x)}$ ),  $G_0$  é a função de Green de ordem zero que advém da integração da parte livre da função de partição, e  $h(x)$  são os campos auxiliares que gerarão todas as funções de Green de que precisamos. Desse modo, conseguimos desenvolver uma série perturbativa nas interações do sistema. Considerando  $\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda_3}{3!} \phi^3$ , onde  $\lambda_3$  é a constante de acoplamento, expandimos a parte de interação em (1.5) em série de potências

$$\mathcal{Z} \{h\} = \mathcal{N}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\lambda_3}{3!} \right)^n \int dx_1 \dots dx_n \left[ \frac{\delta}{\delta h(x_1)} \right]^3 \dots \left[ \frac{\delta}{\delta h(x_n)} \right]^3 \mathcal{Z}_0 \{h\} \quad (1.6)$$

onde  $\mathcal{N}$  deverá ser calculado para normalizar  $\mathcal{Z}$  coerentemente com o número de termos desejado.

As funções de Green de  $N$  pontos serão dadas por derivadas externas em relação a  $h$  da função  $\mathcal{Z}$  calculada a ordem  $n$ . Devem ser consideradas todas as possíveis permutações de derivadas internas e externas, mantendo apenas aquelas que não apresentam termos de vácuo, isto é, termos sem pontos externos. Se considerarmos apenas a parte da função de Green sem as conexões externas, temos a função de vértice do diagrama.

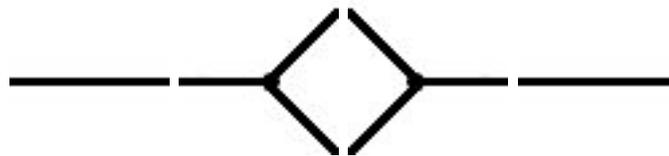
Os diagramas podem ser construídos a partir da equação (1.6) da seguinte maneira: Cada uma das derivações parciais dentro do somatório representa um vértice do diagrama, e cada vértice emana um número de linhas correspondente à ordem de interação, ou seja, no exemplo dado acima, de cada vértice emanarão 3 linhas. As derivações externas (aquelas que são usadas para o cálculo das funções de Green) serão representadas por linhas que se conectarão aos vértices. Devemos conectar todas as linhas internas e externas de modo a não

sobrar nenhuma linha interna “solta”. Todas as linhas externas correspondem às derivadas externas.



*As duas peças para a construção dos diagramas em  $\phi^3$*

Depois de construir o diagrama, devemos contar o número de diagramas iguais que podem ser construídos por permutações de peças, devendo ser contabilizadas primeiramente as derivações externas. Por exemplo, considerando a função de Green com 2 derivadas e 2 vértices, temos, para a primeira linha externa, 6 alternativas (pois são 2 vértices do tipo  $\phi^3$  com 3 linhas cada); para a segunda derivação externa, temos 3 opções, e, finalmente, um fator 2 proveniente das duas linhas internas restantes. Esse número deve ser multiplicado no cálculo da expansão.



*Diagrama de  $G^{(2)}$  de ordem 2 (1 loop)*

Quando estudamos divergências nas funções de correlação, apenas as partes que apresentam integração nos interessam, isto é, apenas os loops dos diagramas. A essas partes damos o nome de funções de vértice.

Para maiores detalhes quanto ao desenvolvimento e propriedades dos diagramas de Feynman, ver (6).

### 1.3.3 Dimensionalidade

Primeiramente, é importante diferenciar a dimensionalidade espacial da dimensionalidade de um operador. No presente trabalho, consideramos que a primeira é sempre  $d$ , isto é, trabalhamos em um espaço  $d$ -dimensional. Para operadores e variáveis, usaremos a mesma escala  $\kappa$ , porém em diferentes potências, que definem a dimensionalidade do operador em questão. A partir desse ponto, sempre que a palavra dimensionalidade for empregada, fará referência à dimensionalidade do operador, a menos que esteja especificado.

A contagem dimensional do problema é fundamental para entendermos quais quantidades do sistema divergem na temperatura crítica e, portanto, precisam ser renormalizadas. Somente as divergências primitivas devem ser consideradas na renormalização. Devemos, primeiro, determinar a dimensionalidade de cada operador envolvido no sistema, sendo um bom ponto de partida a densidade lagrangiana. Sabemos que

$$\left[ \int dk \mathcal{L} \right] \sim \kappa^0,$$

isto é, a integral da densidade lagrangiana em todas as dimensões deve ser adimensional. Daí temos que

$$[\mathcal{L}] \sim \kappa^{-d}$$

onde  $\kappa$  é o inverso de comprimento. Tomando a parte livre do lagrangiano no espaço de Fourier

$$\mathcal{L}_0 = (\mu^2 + k^2) \phi^2$$

e considerando que

$$[k] \sim \kappa$$

temos

$$\begin{aligned} [\mu] &\sim \kappa \\ [\phi] &\sim \kappa^{-\frac{(d+2)}{2}} \\ [\lambda_3] &\sim \kappa^{\frac{6-d}{2}}. \end{aligned}$$

É importante também saber a dimensionalidade das partes irredutíveis das funções de Green (funções de vértices). Sabendo a dimensionalidade de tais funções, conseguimos inferir quais delas divergem no limite de cutoff infinito e, portanto, precisam ser renormalizadas para que possamos extrair as propriedades físicas do sistema. Usando como exemplo o sistema em  $\phi^3$ , o loop para a função de Green de 2 pontos será escrito da seguinte maneira

$$L_2 = \int^\Lambda \frac{dq}{[q^2 + \mu^2] \left[ (\vec{k} - \vec{q})^2 + \mu^2 \right]} \quad (1.7)$$

onde  $\Lambda$  é um cutoff. Se contarmos a dimensionalidade dessa integral, notamos que, no limite ( $q \rightarrow \infty$ ), ela se comporta como

$$[L_2] \sim \Lambda^{d-4}$$

isto é, diverge no ultravioleta para  $d \geq 4$ . A outra função de vértice divergente a ser considerada em  $\phi^3$  é o loop na função de Green de 3 pontos

$$L_3 = \int^\Lambda \frac{dq}{[q^2 + \mu^2] \left[ (\vec{k}_1 - \vec{q})^2 + \mu^2 \right] \left[ (\vec{k}_2 - \vec{q})^2 + \mu^2 \right]}$$

que no mesmo limite, se comporta como

$$[L_3] \sim \Lambda^{d-6}$$

divergindo, então, no ultravioleta, em  $d \geq 6$ . Tudo isso nos dá uma pista quanto a dimensi-

onalidade crítica do sistema.

### Dimensionalidade crítica

Consideremos a teoria com uma interação pura  $\phi^r$  em  $d$  dimensões. Um diagrama de vértice de  $n$ -ésima ordem com  $E$  pontos externos, sem divergências quando tomamos o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  devido a sub integrações, irá se comportar assintoticamente como  $\Lambda^{\delta(r,d,E,n)}$  com

$$\delta(r, d, E, n) = Ld - 2I \quad (1.8)$$

onde  $L$  é o número de loops, e  $I$  é o número de linhas internas.

O número de integrações internas (loops)  $L$  é igual ao número de linhas internas  $I$  menos o número de condições de conservação de momentum no espaço de Fourier. Então

$$L = I - (n - 1). \quad (1.9)$$

O número de linhas internas é dado pelo total de linhas emanadas pelos vértices,  $nr$ , menos o número de linhas conectadas a pontos externos  $E$ . Cada par de linhas forma um propagador, portanto

$$I = \frac{1}{2}(nr - E). \quad (1.10)$$

Substituindo (1.9) e (1.10) em (1.8) obtemos

$$\delta = n \left( \frac{1}{2}rd - d - r \right) + \left( d + E - \frac{1}{2}Ed \right) = -n\delta_r + \left( d + E - \frac{1}{2}Ed \right) \quad (1.11)$$

onde  $\delta_r$  é a dimensionalidade do acoplamento  $\lambda_r$ . O segundo termo da equação (1.11) é a dimensionalidade da função de vértice de  $E$  pontos externos. Concluimos, então, que a divergência primitiva de um diagrama é composta por um termo determinado pela dimensionalidade canônica do correspondente vértice (portanto independente da ordem em teoria de

perturbação), e uma parte linear na ordem perturbativa e também na dimensão do acoplamento. A conclusão é que uma constante de acoplamento adimensional é uma condição necessária e suficiente para que as divergências primitivas de todas as funções de vértice sejam independentes da ordem em teoria de perturbação.

Definimos a dimensionalidade crítica do sistema como aquela que reduz  $\delta_r$  a zero. Essa dimensionalidade é muito importante, pois, se  $\delta_r > 0$ , o grau de divergência da integral considerada aumenta a cada ordem em que é aplicada a teoria de perturbações, tornando a teoria impossível de ser renormalizada com um número finito de parâmetros (a teoria é dita, então, não-renormalizável). Se  $\delta_r = 0$ , a teoria é dita renormalizável. Se  $\delta_r < 0$ , é super-renormalizável.

### Operadores relevantes e irrelevantes

Ainda quanto à dimensionalidade, é possível saber quais operadores devem ser considerados na teoria. Quando construímos a função de Lagrange, devemos truncar a série infinita considerando apenas um certo número de termos. Os termos que escolhemos manter na função não são escolhidos por acaso, e sim de acordo com sua relevância no que tange ao problema a ser estudado.

Considere um diagrama com interação  $\phi^r$ . Esse terá

$$L = I - \sum_r n_r + 1$$

loops e

$$I = \frac{1}{2} \left( \sum_r n_r r - E \right)$$

linhas internas. Aqui,  $E$  é o número de linhas externas. Substituindo em (1.11), temos

$$\delta = L(d - 2) - 2 \sum_r n_r + 2.$$

Então, para um dado número de loops,  $\delta$  será maior se todos os vértices forem do tipo com maior  $r$  disponível. Isso faz  $\sum n_r$  menor. Por outro lado,  $\delta$  será menor se todos os vértices pertencerem à interação com menor  $r$ . Então, para um dado número de loops, a interação com o menor número de linhas irá liderar as divergências infravermelhas.

Na dimensão crítica do operador mais relevante, a dimensionalidade do acoplamento correspondente é zero. Qualquer interação presente no sistema com  $r$  maior do que aquele mais relevante terá  $d_c$  menor, de modo que próximo ao número crítico de dimensões espaciais para o mais relevante operador, interações com maior  $r$  não possuem singularidades infravermelhas e são, por isso, ditos irrelevantes.

### 1.3.4 Equações do grupo de renormalização, divergência e renormalização por mínima subtração dos pólos dimensionais

O grupo de renormalização tem por objetivo tornar as funções de Green (vértice) finitas para que seja possível extrair as propriedades críticas do sistema que estamos estudando. No presente trabalho, abordaremos a teoria crítica, isto é, consideraremos o sistema na sua temperatura crítica. Isso significa tornar  $\mu = 0$ . Teremos, então, divergências infravermelhas.

O processo de renormalização das funções de vértice consiste em usar e definir propriamente as constantes de renormalização. Além de redefinirmos a interação  $\lambda$ , devemos, muitas vezes, multiplicar as funções de vértices por constantes renormalizadoras.

Considerando a função de vértice de  $N$  pontos, temos que

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; u_0(\kappa), \kappa) = Z_\phi^{\frac{N}{2}} \Gamma^{(N)}(k_i; \lambda, \Lambda) \quad (1.12)$$

onde  $\Gamma_R^{(N)}$  é a função de vértice de  $N$  pontos renormalizada,  $u_0(\kappa)$  é a versão adimensional do acoplamento  $\lambda$  ( $u_0 = \kappa^{-\epsilon} \lambda$ , onde  $\epsilon$  é o parâmetro perturbativo  $\epsilon = d_c - d$ ),  $\kappa$  é uma escala arbitrária e  $Z_\phi$  é a constante de renormalização. Essa constante é função do novo

acoplamento  $u_0$ , de  $\kappa$  e de  $\Lambda$ . Neste trabalho, consideramos, diretamente, o limite de cutoff infinito; portanto, a partir desse ponto, as funções serão escritas como independentes de  $\Lambda$ .

Para se obter as equações diferenciais de grupo, consideramos uma mudança infinitesimal em  $\kappa$ . Derivando diretamente a equação (1.12), podemos escrever

$$\left( \kappa \frac{d}{d\kappa} \right)_\lambda \left[ Z_\phi^{-\frac{N}{2}} \Gamma_R^{(N)}(k_i; u_0, \kappa) \right] = 0$$

pois a função de vértice nua (ou seja, não renormalizada) não depende da escala  $\kappa$ . Expandindo a derivação total, obtemos

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi(u) \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; u, \kappa) = 0 \quad (1.13)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \lambda &= \kappa^\epsilon u_0 = \kappa^\epsilon [u + a_1 u^2 + \dots] \\ \beta(u) &= \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa} \right)_\lambda \\ \gamma_\phi(u) &= \kappa \left( \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \kappa} \right)_\lambda. \end{aligned}$$

As funções adimensionais  $\beta(u)$  e  $\gamma_\phi(u)$  são chamadas de Funções de Wilson.

Como mencionado anteriormente, as funções de correlação serão divergentes na dimensionalidade crítica do sistema. Podemos estudar essas divergências através das funções de vértice, que são, a menos de uma constante, as funções de Green sem as derivadas externas.

A técnica que usaremos neste trabalho para calcular as integrais divergentes é a de regularização dimensional, que consiste em calcular a integral em questão no limite de cutoff infinito em uma dimensionalidade  $d$  para qual ela é convergente. O resultado apresentará a

divergência na dimensionalidade crítica. Tomando como exemplo a integral (1.7)

$$L_2 = \int^{\infty} \frac{dq}{q^2 (\vec{k} - \vec{q})^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}d\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{2}d\right) (\mu^2 - \vec{k}^2)^{\frac{d}{2}-2}$$

consideramos o sistema no ponto crítico, isto é, com  $\mu = 0$ . O que nos resta é uma função dependente de  $d$  e  $\vec{k}$ . Note que a função

$$[L_2]^{div} = \Gamma\left(2 - \frac{1}{2}d\right)$$

é divergente para  $d = 6$ . A função de vértice de dois pontos a ordem 1 loop na temperatura crítica será escrita como

$$\Gamma^{(2)} = k^2 + \frac{\lambda^2}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}d\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{2}d\right) k^{d-4}$$

ou, substituindo  $d = 6 - \epsilon$ ,

$$\Gamma^{(2)} = k^2 + \frac{\lambda^2}{4} \Gamma\left(\frac{6 - \epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) k^2. \quad (1.14)$$

O método que aplicamos no presente trabalho para eliminar as divergências das funções de vértice é o método da mínima subtração dos pólos dimensionais. Esse método consiste em determinar os coeficientes que constituem as constantes de renormalização de modo a subtrair os pólos dimensionais das funções divergentes. Tomando como exemplo a função (1.14), a parte divergente é

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{2} - 1}\right) \left(\frac{2}{\epsilon}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right) \sim -\frac{2}{\epsilon}.$$

Definimos, então, as constante de renormalização

$$\begin{aligned} Z_\phi &= 1 + a_1 u^2 \\ \lambda^2 &= \kappa^\epsilon u_0^2 \sim \kappa^\epsilon u^2. \end{aligned}$$

Multiplicando  $Z_\phi$  pela função de vértice nua  $\Gamma^{(2)}$ , e substituindo  $\lambda$  em (1.14) obtemos

$$\Gamma_R^{(2)} = k^2 \left\{ 1 + u^2 \left[ a_1 + \frac{1}{4} \Gamma \left( \frac{6 - \epsilon}{2} \right) \Gamma \left( \frac{\epsilon}{2} - 1 \right) \right] \right\}$$

de onde determinamos que

$$a_1 = \frac{1}{\epsilon}.$$

No caso da função de vértice de três pontos, devemos multiplicar a função nua por  $Z_\phi^{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2} a_1 u^2$  e substituir  $\lambda$  por sua expansão

$$\kappa^{-\frac{\epsilon}{2}} \lambda = u + b_1 u^2 + \dots$$

na expressão

$$\Gamma^{(3)} = \lambda - \lambda^3 \int^\infty \frac{dq}{q^2 (\vec{k}_1 - \vec{q})^2 (\vec{k}_2 - \vec{q})^2}$$

determinando, então, o coeficiente  $b_1$  através do mesmo método usado para determinar  $a_1$ .

### 1.3.5 Solução da equação de grupo de renormalização: pontos fixos e expoentes críticos

Vamos voltar à equação (1.13) e analisar sua solução

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; u, \kappa) = \exp \left\{ -\frac{N}{2} \int_1^\rho \gamma_\phi(u(\rho)) \frac{dx}{x} \right\} \Gamma_R^{(N)}(k_i; u(\rho), \kappa\rho) \quad (1.15)$$

onde a equação característica é

$$\rho \frac{du(\rho)}{d\rho} = \beta(u(\rho)) \quad (1.16)$$

com a condição inicial

$$u(\rho = 1) = u.$$

Usando análise dimensional, pode-se extrair a dependência da solução em  $\kappa\rho$ . Reescrevendo a solução 1.15

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; u, \kappa) = (\kappa\rho)^{(N+d-\frac{1}{2}Nd)} \exp\left[-\frac{N}{2} \int \gamma_\phi(u(x)) \frac{dx}{x}\right] \Gamma_R^{(N)}\left(\frac{k_i}{\kappa\rho}; u(\rho), 1\right). \quad (1.17)$$

Podemos ler a equação (1.17) trocando  $k_i$  por  $\rho k_i$ . Tem-se, então, que

$$\Gamma_R^{(N)}(\rho k_i; u; \kappa) = \rho^{N+d-\frac{1}{2}Nd} \exp\left[-\frac{N}{2} \int_1^\rho \gamma_\phi(u(x)) \frac{dx}{x}\right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; u(\rho), \kappa).$$

Concluimos que a troca na escala dos momenta é equivalente:

- à multiplicação da função por aquela escala, elevada à potência da dimensão canônica da própria função;
- a uma constante de acoplamento modificada, que flui com a equação (1.16), sendo  $\beta$  uma função velocidade;
- à inserção de um fator adicional complicado.

### Ponto fixo, expoentes críticos e estabilidade

O tratamento em grupo de renormalização, até agora, deixa um grau de arbitrariedade que pode invalidar a teoria por completo. As características físicas de um sistema não podem depender de um parâmetro cujo valor pode ser qualquer um que desejamos. Se queremos descrever uma classe de sistemas, devemos chegar a um consenso quanto a essa arbitrariedade

na teoria. O que deve ser feito é descobrir um valor do acoplamento independente da escala introduzida na teoria, isto é, o ponto para qual o sistema não varia com a escala. Esse ponto especial existe e é chamado de ponto fixo. Nesse ponto, a constante de acoplamento atinge um valor tal que qualquer troca na escala dos momenta não afeta o sistema. Podemos identificar esse ponto olhando pra equação (1.16), que mostra o comportamento de  $\beta$  com a troca de escala. O ponto fixo é aquele para o qual

$$\beta(u^*) = 0.$$

Se considerarmos a equação de grupo de renormalização (1.13) no ponto fixo, temos

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi(u^*) \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; u^*, \kappa) = 0$$

cuja solução é

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; u^*, \kappa) = \kappa^{\frac{1}{2} N \gamma_\phi(u^*)} \phi(k_i).$$

Reescalando os momenta

$$\Gamma_R^{(N)}(\rho k_i; u^*, \kappa) = \rho^{(N+d-\frac{1}{2}Nd)-\frac{1}{2}N\gamma_\phi(u^*)} \Gamma_R^{(N)}(k_i; u^*, \kappa)$$

obtemos o comportamento de escala. Se tomarmos, em particular, a função  $\Gamma_R^{(2)}$

$$\Gamma_R^{(2)}(\rho k_i) = \rho^{2-\gamma_\phi(u^*)} \Gamma(k_i)$$

identificamos o expoente  $\eta$  como

$$\eta = \gamma_\phi(u^*).$$

Os demais expoentes críticos são extraídos da solução da equação de grupo de renormalização. Os detalhes quanto à extração estão explicados na solução do modelo apresentado no trabalho.

Voltemos ao comportamento da função  $\beta(u)$ , que mostra como a constante de acoplamento renormalizada ( $u$ ) se comporta frente a variações na escala  $\kappa$ . Se considerarmos que a função  $\beta$  tem uma raiz  $u^*$  e se expandirmos a função ao redor dessa raiz, temos que, na vizinhança do ponto fixo

$$\beta(u) = a(u^* - u).$$

Da equação (1.16), temos que

$$\frac{\partial u(s)}{\partial s} = a(u^* - u)$$

cuja solução é

$$u^* - u(s) = (u^* - u) e^{-as}$$

onde  $s = \ln \rho$ .

Devemos verificar o comportamento da constante de acoplamento renormalizada nos seguintes limites:  $s \rightarrow -\infty$  ( $\rho \rightarrow 0$ ) e  $s \rightarrow \infty$  ( $\rho \rightarrow \infty$ ). O primeiro limite se refere ao comportamento de baixo momentum, ou infravermelho que é de interesse no estudo de fenômenos críticos. O segundo diz respeito ao comportamento da constante de acoplamento no limite de momentum grande, e é de interesse da física de altas partículas.

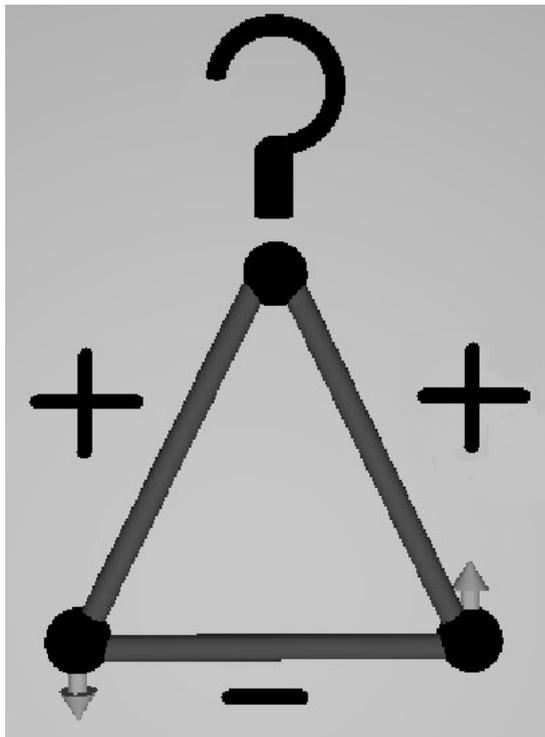
É fácil de ver que, quando  $a > 0$ , o limite estável (isto é,  $u(s) \rightarrow u^*$ ) é o ultravioleta e que, quando  $a < 0$ , o comportamento infravermelho é estável.

Esse estudo mostra como o acoplamento do sistema se comporta com a escala. Se a constante de renormalização inicial estiver próxima a um ponto fixo ultravioleta e, se  $\rho \rightarrow 0$ ,  $u$  irá se afastar desse ponto e ir em direção ao próximo cuja estabilidade seja infravermelha. De fato, todas as constantes de acoplamento entre dois pontos fixos ultravioleta serão atraídas para o ponto infravermelho, que deve estar situado entre eles. Esta distância é chamada de domínio de atração do ponto fixo infravermelho. É possível definir, da mesma maneira, um domínio de atração dos pontos ultravioleta.

## 1.4 Vidros de spin

Os vidros de spin despertaram grande interesse na comunidade científica desde sua descoberta nos anos 70, quando medidas experimentais da susceptibilidade em uma liga metálica com impurezas magnéticas apresentaram um joelho a baixas temperaturas. Desde então, os físicos teóricos vêm buscando modelos que descrevam esse comportamento.

Medidas experimentais da magnetização global sugerem um comportamento antiferromagnético; entretanto, a magnetização local é diferente de zero. Essas ilhas de magnetização são formadas graças às interações entre os spins e as impurezas, que são aleatórias em sinal. A aleatoriedade das interações entre os spins leva, naturalmente, a competição entre, por exemplo, três spins vizinhos, o que dá origem a um fenômeno conhecido como frustração.



*Figura 1: Frustração é uma das características fundamentais de sistemas desordenados*

A frustração ocorre quando um spin recebe sinais antagônicas de outros dois ou mais spins. Olhando para a *Figura 1*, observamos que o spin localizado no topo do triângulo não

conseguirá satisfazer as ordens vindas dos dois outros spins, o que caracteriza uma situação de frustração.

Classificamos um vidro de spin como um sistema desordenado, pelo fato de possuir os dois ingredientes essenciais para tais sistemas: aleatoriedade e frustração. O grande desafio de estudar esses sistemas está em encontrar seu estado fundamental, pois seu alto grau de frustração dificulta a identificação de um estado estável único.

Para estudar vidros de spin teoricamente, usamos uma distribuição de probabilidades para os valores de interação, tornando possível fazer a média entre as configurações dessas variáveis aleatórias. Como se trata de impurezas fixas, devemos, primeiro, obter a energia livre para um dado conjunto de variáveis aleatórias, e, depois tomar a média das energias livres para cada configuração. Esse tipo de média é chamada de temperada (ou, em inglês, quenched). Tal método de cálculo da média deve ser empregado pois considera cada configuração independente, isto é, no formalismo, as “impurezas” não flutuam com a temperatura, como é o caso das variáveis de spin. Esse é um problema muito difícil de se tratar matematicamente, pois as aleatoriedades do sistema estão contidas em uma função não linear (logaritmo), mas não é, tampouco, uma empreitada impossível, graças ao método das réplicas, introduzido por S. F. Edwards e P. W. Anderson (20), o qual consiste em se utilizar a identidade matemática

$$\ln(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{x^n - 1}{n} \right)$$

substituindo  $x^n$  por  $\mathcal{Z}^n$ , o que é interpretado como a construção de  $n$  réplicas do sistema cuja função de partição é dada por  $\mathcal{Z}$ . A energia livre do sistema é obtida tomando o limite de 0 réplica.

## Uma pequena observação quanto a sistemas temperados e recozidos (quenched e annealed)

A palavra “quenched”, ou, em português, temperado, refere-se ao tratamento físico que consiste em aquecer certo material a altas temperaturas e, subitamente, esfriá-lo, de modo que o sistema não passe por diversas etapas de equilíbrio.

Os sistemas que passam por um processo de recozimento (ou “annealing process”) são aquecidos a uma certa temperatura para, depois, serem resfriados lentamente, de modo que a amostra submetida a esse tratamento passe por sucessivos estados de equilíbrio.

Descrevemos, agora, a maneira teórica de estudar esses métodos experimentais. Primeiramente, a média temperada deve ser feita sobre a energia livre, pois, como em vidros de spin, devemos considerar as impurezas congeladas, ou seja, devemos considerar independentemente cada configuração

$$-\beta f = \ln \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

onde  $\mathcal{H}$  é a energia referente a uma dada configuração aleatória das interações entre os spins. Depois, é feita a média sobre as impurezas

$$\beta \mathcal{F}_T = \langle \beta f \rangle_{ca} = - \langle \ln [\text{Tr} (e^{-\beta \mathcal{H}})] \rangle_{ca},$$

significando que as impurezas não estão flutuando com a temperatura.

A média recozida é feita diretamente sobre a função de partição  $\mathcal{Z} = \text{Tr} (e^{-\beta \mathcal{H}})$

$$\beta \mathcal{F}_A = - \ln \langle \text{Tr} (e^{-\beta \mathcal{H}}) \rangle_{ca},$$

permitindo que as aleatoriedades do sistema flutuem com a temperatura e entrem em equilíbrio para cada temperatura  $T$ .

Em geral, os vidros de spin devem ser tratados como sistemas temperados. Entretanto, Alba Theumann mostrou que a versão esférica quântica dos vidros de spin tem uma característica muito peculiar: o desacoplamento de réplicas (21). Isso faz com que seja possível optar por qualquer um dos dois tratamentos (quenched ou annealed), sem que haja diferença nos resultados. Mais tarde, Pedro Castro Menezes e Alba Theumann mostraram que esse desacoplamento acontece devido a uma supersimetria existente no modelo esférico quântico de vidros de spin (22), mostrando que os resultados obtidos usando a média recozida são os mesmos obtidos quando o cálculo é realizado utilizando-se o tratamento temperado.

### 1.4.1 Modelos e resultados conhecidos

Apresentamos, agora, alguns dos modelos conhecidos de vidros de spins clássicos e quânticos.

#### 1.4.1.1 O modelo SK de alcance infinito

David Sherrington e Scott Kirkpatrick (SK) desenvolveram um modelo de alcance infinito para vidros de spin, usando spins de Ising (11). SK resolvem o modelo usando o método das réplicas

$$\ln \mathcal{Z} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{Z}^n - 1)}{n},$$

onde  $\mathcal{Z}$  é a função de partição do sistema e a média configuracional da energia livre é dada por

$$\langle \beta F \rangle_{ca} = - \langle \ln \mathcal{Z} \rangle_{ca} = - \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{\langle \mathcal{Z}^n \rangle_{ca} - 1}{n} \right). \quad (1.18)$$

O modelo considera o Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)} \mathcal{J}_{ij} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

onde  $\mathcal{J}_{ij}$  é a energia de interação aleatória entre os spins e  $H$  é um campo auxiliar. Considera-se que  $\mathcal{J}_{ij}$  tem uma distribuição normal de média  $J_0$  e desvio quadrático médio  $J$ . São consideradas interações de alcance infinito (campo médio). Não é objetivo do presente trabalho mostrar os cálculos detalhados do modelo SK, porém, alguns resultados merecem ser destacados.

A média configuracional de  $n$  réplicas da função de partição é dada por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}^n \rangle_{ca} &= e^{\frac{\beta^2 \tilde{J}^2}{4N} [nN^2 - n^2 N]} \sum_{\{s_\alpha\}} e^{\beta H \sum_\alpha \sum_i s_i^\alpha} \int \prod_\alpha \frac{e^{-\frac{1}{2} x_\alpha^2 + \left(\frac{\beta \tilde{J}_0}{N}\right)^{\frac{1}{2}} x_\alpha \sum_i s_i^\alpha} dx_\alpha}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \times \\ &\times \int \prod_{(\alpha\gamma)} e^{-\frac{1}{2} y_{\alpha\gamma}^2 + \frac{\beta \tilde{J}}{\sqrt{N}} y_{\alpha\gamma} \sum_i s_i^\alpha s_i^\gamma} \end{aligned}$$

onde  $\tilde{J}$  e  $\tilde{J}_0$  são, respectivamente,  $\sqrt{N}J$  e  $NJ_0$ ,  $x$  e  $y$  são campos auxiliares provenientes de duas transformações de Hubbard-Stratonovich<sup>1</sup>,  $\alpha$  e  $\gamma$  são índices de réplica. Introduzindo  $\langle \mathcal{Z}^n \rangle_{ca}$  em (1.18), obtém-se a energia livre do sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{nN} \left\{ e^{\frac{(\beta \tilde{J})^2}{4} nN} \int \int \left[ \prod_\alpha \sqrt{\frac{N}{2\pi}} dx_\alpha \right] \left[ \prod_{\alpha\gamma} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} dy_{\alpha\gamma} \right] \times \right. \\ &\times e^{-N \left\{ \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{2} + \sum_{\alpha\gamma} \frac{y_{\alpha\gamma}^2}{2} - \ln \left[ \sum_{\{s_\alpha\}} e^{\beta H \sum_\alpha s_\alpha + \sqrt{\beta \tilde{J}_0} \sum_\alpha x_\alpha s_\alpha + \beta \tilde{J} \sum_{\alpha\gamma} y_{\alpha\gamma} s_\alpha s_\gamma \right]} \right\} - 1 \left. \right\}. \end{aligned}$$

Usando o “*ansatz*” de simetria de réplicas  $x_\alpha \equiv \sqrt{N}x$  para qualquer  $\alpha$  e  $y_{\alpha\gamma} \equiv \sqrt{N}y$  para todo  $\alpha$  e  $\gamma$ , a energia livre resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{nN} \left\{ e^{\frac{(\beta \tilde{J})^2}{4} nN} \int \int \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} d^n x \left[ \int \int \prod_{\alpha\gamma} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} dy_{\alpha\gamma} \right] e^{-N \left\{ \frac{n}{2} x^2 + \frac{1}{4} n(n-1) y^2 + \frac{n\beta \tilde{J}}{2} y \right\}} \times \right. \\ &\times e^{-N \left\{ -\ln \left[ \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} \left( 2 \cosh(\beta H + \sqrt{\beta \tilde{J}_0} x + \sqrt{\beta \tilde{J}} y z) \right)^n \right] \right\} - 1 \left. \right\} \end{aligned}$$

onde  $z$  vem de uma nova transformação de Hubbard-Stratonovich. Calcula-se a integral

---

<sup>1</sup>  $e^{\lambda a^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2} w^2 + \sqrt{2\lambda} a w} dw$

utilizando o método do ponto de sela. Definem-se

$$m = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\beta\tilde{J}_0}}, \text{ e } q = \frac{\bar{y}}{\beta\tilde{J}}$$

onde  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as soluções para as equações de ponto de sela. A energia livre, a magnetização e o parâmetro de ordem de Edward-Anderson são dados por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\tilde{J}_0\beta m^2}{2} - \frac{(\beta\tilde{J})^2}{4} (1-q)^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dz e^{-\frac{1}{2}z^2} \ln [2 \cosh \Xi] \right\}$$

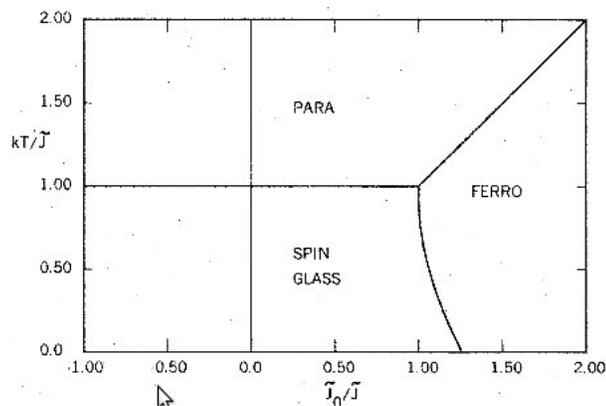
$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dz e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh \Xi$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dz e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh^2 \Xi$$

com

$$\Xi = \beta \left( \tilde{J}_0 m + \tilde{J} \sqrt{q} z + H \right).$$

As soluções para as equações acima devem ser interpretadas da seguinte maneira: se  $m \neq 0$ , a fase é ferromagnética; se  $m = 0$  e  $q \neq 0$ , a fase é de vidro de spin; se  $m = q = 0$ , a fase é paramagnética.



*O diagrama de fases para o modelo SK apresenta 3 fases distintas: paramagnética, ferromagnética e vidros de spin.*

Embora o modelo tenha sido resolvido exatamente supondo a solução de simetria de réplicas, os resultados para a fase de vidro de spin apresentam características não físicas, como, por exemplo, entropia negativa a temperatura zero.

### 1.4.1.2 O modelo esférico de vidros de spin

J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless e Raymund C. Jones introduziram o modelo esférico de vidros de spins (12). Nesse modelo, os autores investigaram as propriedades do sistema cujo Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} J_{ij} s_i s_j,$$

onde  $s_i$  são spins contínuos, tal que

$$\sum_i s_i^2 = N,$$

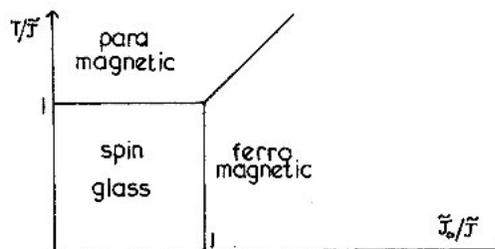
e onde as interações  $J_{ij}$  são consideradas de alcance infinito e com distribuição de probabilidades dada por

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[ -\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2\sigma^2} \right],$$

onde  $J_0$  adiciona um componente ferromagnético ao sistema. Kosterlitz *et al.* resolveram o sistema usando a densidade de auto-valores das matrizes aleatórias, que obedece a lei semi-circular

$$\rho(J_\lambda) = \frac{\left(4\tilde{J}^2 - J_\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\pi\tilde{J}^2}$$

e o método das réplicas, para mostrar que, no caso do modelo esférico, ambos os tratamentos levam ao mesmo resultado, diferentemente do que é verificado no modelo de Ising.



*Diagrama de fases para o modelo esférico de vidros de spin*

Os autores investigaram as propriedades do modelo considerando  $J_0$  igual e diferente de zero. Empregando método de ponto de sela, encontraram as seguintes soluções para a energia livre do sistema com  $J_0 = 0$ :

$$\langle f(t) \rangle_{av} = \begin{cases} -\tilde{J}^2/4T - \frac{1}{2}T(1 + \ln 2); & T > T_c \\ \frac{1}{2}T \ln(T/2\tilde{J}) - \tilde{J} + \frac{1}{4}T; & T < T_c \end{cases}.$$

Ressalta-se que o comportamento divergente da entropia a baixas temperaturas é esperado, pois essa é uma patologia inerente ao modelo esférico (19). Para  $J_0 \neq 0$ ,

$$-\frac{\langle f(t) \rangle_{av}}{T} = \frac{\tilde{J}^2}{4T^2} + z - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln \left( z + \frac{\tilde{J}y}{2T} \right) + \frac{\tilde{J}y}{4T(z + \tilde{J}y/2T)} + \frac{\tilde{J}_0 x}{4T(z + \tilde{J}y/2T)}$$

onde

$$\begin{aligned} x &= \langle \tilde{m}_i \rangle_{av} \left( \tilde{J}_0/T \right)^{\frac{1}{2}} \\ y &= \tilde{J}q/T \\ \langle \tilde{m}_i \rangle_{av} &= \left( 1 - \tilde{J}^2/\tilde{J}_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - T/\tilde{J}_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

sendo  $\langle \rangle_{av}$  a média referente à desordem e sendo  $z$  a variável introduzida pelo vínculo esférico.

**1.4.1.3 Propriedades críticas dos vidros de spin**

A. B. Harris *et al.* estudaram as características críticas de vidro de spin, na forma proposta por Edwards e Anderson, usando o grupo de renormalização (10).

Os autores estudaram a criticalidade do sistema cujo Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = - \sum_{r,r'} J(\vec{r}, \vec{r}') \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(\vec{r}'),$$

onde  $\vec{S}(\vec{r})$  representa um spin de  $m$ -componentes clássico de magnitude unitária no ponto  $\vec{r}$  da rede e  $J(\vec{r}, \vec{r}')$  é uma variável aleatória de interação entre primeiros vizinhos com distribuição gaussiana, conforme usual. O tratamento inicial é levado a cabo através de réplicas.

Desenvolvendo a teoria, Harris *et al.* encontraram uma ação com duas interações,  $\phi^3$  e  $\phi^4$

$$\mathcal{H} = \int d^d \vec{x} \left\{ \frac{1}{4} r \text{Tr} \mathcal{Q}^2 + \frac{1}{4} \text{Tr} (\nabla \mathcal{Q})^2 - \omega \text{Tr} \mathcal{Q}^3 + u (\text{Tr} \mathcal{Q}^2)^2 + \sum_i v_i F_i(\mathcal{Q}) \right\}$$

onde

$$\text{Tr} \mathcal{Q}^2 = \sum_{\alpha, \beta, i, j} Q_{ij}^{\alpha\beta} Q_{ji}^{\beta\alpha} ; \quad Q_{ij}^{\alpha\beta} = S_i^\alpha(\vec{r}) S_j^\beta(\vec{r}) (1 - \delta_{\alpha\beta})$$

e  $r \sim T - T_c$ ,  $\omega$  e  $u$  são constantes de acoplamento nuas e  $F_i(\mathcal{Q})$  são os invariantes de quarta ordem além de  $(\text{Tr} \mathcal{Q}^2)^2$ , que são gerados por iterações do grupo de renormalização.

Com isso, os autores obtiveram resultados diferentes, que dependem da constante de acoplamento  $\omega$  de  $\phi^3$ , argumentando que há uma certa ambiguidade quanto ao limite de  $n \rightarrow 0$  por conta da interação em  $\phi^3$ , que, dependendo do sinal do coeficiente, poderia indicar uma transição de primeira ou de segunda ordem. Além disso, o ponto  $\omega = 0$  corresponde a um ponto tri-crítico, com a curvatura da distribuição agindo como um campo desordenante. Para encontrar os expoentes no ponto tri-crítico, Harris *et al.* apresentam a expansão das constantes de acoplamento em  $4 - \epsilon$  com  $\omega = 0$ .

Os resultados no limite de zero réplica para o ponto crítico (cuja expansão é feita ao

redor de  $6 - \epsilon$  dimensões) e para o ponto tri-crítico são

Expoente Crítico	Ponto Crítico em $d = 6 - \epsilon$	Ponto trí-crítico em $d = 4 - \epsilon$
$\nu$	$\frac{1}{2} + 5m\epsilon/12(2m - 1)$	$\frac{1}{2} - \epsilon/16$
$\eta$	$-m\epsilon/3(2m - 1)$	0
$\varphi_w$		$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\epsilon$

#### 1.4.1.4 Propriedades críticas dos vidros de spin com interação de longo alcance do tipo potência inversa

Um exemplo do cálculo das propriedades críticas do modelo de Ising de vidros de spin com potencial do tipo potência inversa é o artigo de Mau-chung Chang e J. Sak (23), na qual os autores consideram que a desordem é modulada por um potencial de longo alcance

$$V \sim \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{d+\sigma}{2}}}.$$

A partir dessa premissa, investigam a estabilidade do ponto fixo de longo alcance para valores de  $\sigma$  menores que 2. O Hamiltoniano considerado é

$$\beta H = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{r} \neq \vec{r}'} \frac{J(\vec{r}, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{\frac{d+\sigma}{2}}} s(\vec{r}) s(\vec{r}')$$

sendo  $J(\vec{r}, \vec{r}')$  uma variável aleatória cuja distribuição é Gaussiana de média zero e  $\beta = \frac{1}{k_b T}$ .

Usando o método das réplicas, o Hamiltoniano de Landau-Ginsburg-Wilson no espaço de momentum, conforme obtido pelos autores, é

$$\begin{aligned} \frac{H}{k_b T} &= -\frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \beta}^n \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (sq^2 + lq^\sigma + r) Q^{\alpha\beta}(\vec{q}) Q^{\beta\alpha}(-\vec{q}) + \\ &= \omega \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma}^n \int \frac{d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} Q^{\alpha\beta}(\vec{q}_1) Q^{\beta\gamma}(\vec{q}_2) Q^{\gamma\alpha}(-\vec{q}_1 - \vec{q}_2). \end{aligned}$$

Os autores mencionam a ausência de correções para a função de vértice de dois pontos, o que leva ao expoente crítico  $\eta_{LR} = 2 - \sigma$ . Checando a estabilidade do ponto fixo de longo alcance, Chang *et al.* mostram que o ponto fixo não trivial é sempre estável para  $\sigma < 2$ .

#### 1.4.1.5 Teoria de Landau de vidros de spins de rotores quânticos

N. Read e Subir Sachdev apresentaram a teoria de Landau considerando rotores quânticos com interação do tipo vidros de spin (3). Os autores consideraram que o sistema é composto por rotores quânticos numa rede  $d$ -dimensional. A dinâmica é associada a um momento de inércia finito de rotores.

A ação de Landau-Ginzburg-Wilson é construída a partir de considerações a respeito das simetrias apresentadas pelo sistema. Usando argumentos qualitativos sobre o comportamento esperado, a ação, em teoria de campos, possui a massa acoplada linearmente ao campo do parâmetro de ordem, diferentemente do que acontece em geral no estudo de propriedades críticas. Também são consideradas diferentes interações com seus respectivos acoplamentos. Os campos dependem da posição e de dois tempos distintos. Consideramos que não é essencial re-escrever a ação investigada em (3) por ser muito distante do problema aqui proposto, mesmo que a proximidade quanto a fenomenologia entre os sistemas abordados sugira uma semelhança nesse sentido. Também é possível obter a mesma ação partindo do Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_R = \frac{g}{2} \sum_i \hat{L}_i^2 - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \hat{n}_i \cdot \hat{n}_j$$

onde a soma  $\langle \rangle$  é feita apenas entre primeiros vizinhos,  $\hat{n}_i$  são vetores de  $m$ -componentes com módulo unitário que representam a orientação do rotor,  $\hat{L}_i$  são os operadores momento angular do rotor, e  $\frac{1}{g}$  é o momento de inércia do rotor. Entretanto, seguindo-se esse método, fica faltando na expressão da ação um termo que deve ser colocado *ad hoc*.

Depois de discutir o diagrama de fases, os autores utilizam grupo de renormalização

para realizar uma análise quantitativa do comportamento crítico do modelo, cuja dimensionalidade crítica é 8. Ao fazer a análise de estabilidade nos pontos fixos não gaussianos, os autores descobriram que o sistema não é estável e que os expoentes críticos quânticos são dados pelo problema não-interagente, o que, segundo eles, é esperado porque os fenômenos críticos quânticos ocorrem a uma dimensionalidade maior do que a clássica, e, portanto, o comportamento de campo médio é o esperado.

#### 1.4.1.6 Teoria de Landau com interação de longo alcance

Amit Dutta generalizou a expansão em  $\epsilon = d_c - d$  usada em (3) para incluir o potencial de longo alcance (4). O modelo considerado é o modelo de Ising em campo transversal com a adição do potencial

$$V_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^{\frac{d+\sigma}{2}}}$$

acoplado à desordem. Usando a teoria da gota, Dutta encontrou uma ação em teoria de campos muito semelhante àquela apresentada no trabalho de Read e Sachdev, porém com a adição de um termo referente à interação de longo alcance.

O Hamiltoniano do modelo estudado é dado por

$$H_l = - \sum_{ij} \frac{J_{ij}}{r_{ij}^{\frac{d+\sigma}{2}}} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z - \Gamma \sum_i \hat{S}_i^x$$

onde  $d$  é a dimensão espacial,  $\hat{S}_i$  são as matrizes não comutantes de Pauli, e  $\sigma$  é o alcance ajustável da interação. As variáveis  $J_{ij}$  possuem uma distribuição gaussiana de média zero, e  $r_{ij}$  é a distância entre os sítios  $i$  e  $j$ .

O método apresentado falhou em encontrar um ponto fixo estável para baixas dimensionalidades para um dado  $\sigma$ ; todavia, cabe ressaltar que, no caso de curto alcance, acontece o mesmo. Os cálculos usando expansão em  $\epsilon (= d_c - d)$  forneceram a descrição de campo médio mesmo na presença da interação de longo alcance.

### 1.4.2 O formalismo de vidros de spin e outras áreas do conhecimento

O formalismo e os conceitos desenvolvidos por modelos magnéticos podem ser generalizados a outras áreas do conhecimento, abrangendo uma classe de problemas diferentes com a forma

$$H = H(\{J_{ij\dots k}\}, \{S_{ij\dots l}\}, \{X\}).$$

Nessa expressão,  $i, j$  são índices de identificação microscópica; os  $\{J_{ij\dots k}\}$  simbolizam um conjunto de parâmetros congelados dependendo de um ou mais índices de identificação e, em geral, são diferentes para os diferentes índices;  $\{S_{ij\dots l}\}$  simbolizam as variáveis microscópicas; e  $\{X\}$  são variáveis intensivas de controle macroscópicas. A identificação para cada conjunto dessas variáveis pode ser diferente, bem como a maneira de operação das funções de controle.

Alguns exemplos quanto à variedade de problemas que podem ser atacados usando conceitos de vidros de spin são:

- Redes neurais de Hopfield: Nesse caso, o índice  $i$  indica cada um dos neurônios,  $\{S_i\}$  indicam o estado de cada neurônio (ativo ou inativo),  $\{J_{ij}\}$  identificam a eficácia sináptica dada em termos de padrões (congelados) aleatoriamente escolhidos  $\{\xi_i^\mu\}$ ;  $\mu = 1, \dots, p (= \alpha N)$ ;  $J_{ij} = N^{-1} \sum_\mu \xi_i^\mu \xi_j^\mu$ ;  $X \equiv T \equiv \beta^{-1}$  é a medida da curvatura da resposta senoidal de um neurônio relativa à soma dos sinais de entrada. Além disso,  $H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j$  e  $P(\{S_i\}) \sim \exp(-\beta H)$  caracterizam o macro estado estacionário dos neurônios ativos. Os resultados de interesse nesse tipo de sistemas são aqueles que apontam recuperação individual de macro-estados com overlaps macroscópicos  $m^\mu = N^{-1} \sum_i \xi_i^\mu \langle S_i \rangle$ , com os padrões codificados em  $\{J\}$ . Estados de vidros de spin ocorrem devido a padrões de interferência, mas não são estados desejados na operação neural, e seu domínio indica a quebra de memória recuperável.
- Otimização: Nesse caso, o objetivo é minimizar a função custo  $H$  como função das variáveis  $\{S\}$  com vínculos  $\{J\}$ . Um exemplo é o problema de particionar os vértices  $i$

de um gráfico aleatório em dois grupos de tamanhos iguais, mas com o mínimo número de cantos do gráfico entre os dois grupos. Esse problema é análogo ao de encontrar o estado fundamental de um vidro de spin de Viana-Bray (24). Consequentemente, o problema pode ser estudado por um procedimento análogo àquele empregado no estudo da termodinâmica de um vidro de spin de VB.

- Códigos de correção de erros: Um procedimento para codificar e recuperar dados é codificar a informação a ser transmitida na forma de interações de troca cuja inserção em um Hamiltoniano magnético efetivo leve a um estado fundamental que identifica a mensagem desejada. Na prática, entretanto, as linhas de transmissão adicionam ruído, e a recuperação é necessária para melhor eliminar os efeitos do ruído.

## 1.5 Apresentação do modelo proposto

O presente trabalho pretende mostrar uma nova abordagem no estudo dos fenômenos críticos quânticos, construindo uma ação em teoria de campos a partir do Hamiltoniano de rotores esféricos quânticos. Estudamos o caso de vidros de spin com interação de longo alcance próximo ao ponto crítico quântico, isto é, a temperatura zero.

Estabelecemos as características críticas do modelo esférico quântico de vidros de spins partindo do Hamiltoniano introduzido por Shukla (25) e adicionando a ele uma interação de longo alcance. São estudados os expoentes críticos, considerando-se teoria renormalizada de perturbações de ordem 1 loop. O sistema consiste em uma rede  $d$ -dimensional com  $N$  sítios, onde estão localizados spins esféricos (segundo a idéia original de Kac (19)), que, matematicamente, são representados pelo operador  $\hat{s}$ . Os spins interagem entre si aleatoriamente com potencial de longo alcance, o qual, entre dois spins, decai com a distância seguindo a prescrição

$$V_{ij} = \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\frac{d+\sigma}{2}}}, \quad (1.19)$$

onde  $\vec{r}_i$  é a posição do  $i$ -ésimo spin na rede  $d$ -dimensional, e  $\sigma$  é um parâmetro controlável. Em sistemas clássicos, estudados com potencial de longo alcance mostraram que, para  $\sigma \geq 2$ , podemos considerar apenas a parte do Hamiltoniano correspondente ao potencial de curto alcance, pois a contribuição de longo alcance será irrelevante ao comportamento crítico do sistema (26). Mostramos, no desenvolvimento, que esse também é o caso para a versão quântica do problema.

Os spins são representados por variáveis que podem assumir qualquer valor real entre  $-\infty$  e  $+\infty$ , desde que o vínculo esférico

$$\sum_i s_i^2 = N \quad (1.20)$$

seja mantido (19). Esse vínculo é introduzido no sistema através do método dos multiplicadores de Lagrange, que adiciona um termo extra ao hamiltoniano. As variáveis de spin são função de sua posição na rede e do tempo.

O propósito do presente trabalho é analisar o sistema descrito acima, considerando correções de ordem 1 loop em teoria de perturbações, isto é, dar um passo adiante a solução de campo médio (22). Para tanto, faremos uso da expansão diagramática de Feynman e do grupo de renormalização introduzido por Wilson e Fisher (7). Usaremos regularização dimensional e o método de mínima subtração dos pólos dimensionais, primeiramente aplicada por 't Hooft e Veltman, método esse que consiste em renormalizar as funções divergentes usando constantes multiplicativas, cujos coeficientes são determinados de modo a eliminar a parte divergente das integrais singulares (6).

Embora muito semelhante, a expansão diagramática é levemente modificada para acomodar novos parâmetros inerentes à teoria. O propagador obtido dependerá de duas frequências independentes. Obtemos resultados para os expoentes críticos  $\nu$ ,  $\eta$  e  $z$  com correções de ordem  $\epsilon$ .

## 1.6 Motivação

Como já dissemos, o trabalho em transições de fase quânticas vem sendo bastante explorado depois de evidências experimentais quanto à transição de fase a baixíssimas temperaturas. A pergunta que surgiu foi se haveria mudanças no comportamento crítico no zero absoluto. Embora seja possível atingir essa temperatura apenas teoricamente, os experimentos já estão avançados o suficiente para que sejam alcançadas temperaturas na ordem de poucos  $mK$  (27, 28). Tomando por motivação tais experimentos, podemos estudar o sistema perto da temperatura zero e fazer expansões a baixas temperaturas para estudar o comportamento crítico nessa região. Para mais detalhes sobre outros sistemas que apresentam transições quânticas ver, por exemplo, o livro de Subir Sachdev (8).

As evidências experimentais quanto a transições de fase a baixíssimas temperaturas, como as citadas em (3), e mais especificamente, (27, 28), mostram a importância do estudo teórico mais aprofundado desses sistemas. Isso porque as análises experimentais indicam que as características físicas, as propriedades de transição e os expoentes críticos a baixíssimas temperaturas são diferentes daqueles encontrados em sistemas clássicos ordinários, criando a necessidade de um arcabouço teórico mais específico e elaborado para essas situações. Embora o ponto crítico quântico seja puramente teórico (pois ele se situa no zero absoluto), é possível estudar o comportamento da amostra na vizinhança do zero absoluto e, então, comparar com as expansões teóricas nessa vizinhança.

N. Read, S. Sachdev e J. Ye (3) estudaram as propriedades críticas de vidros de spins quânticos usando o modelo  $M$ -vetorial e construindo a funcional de Landau a partir de considerações sobre simetria e comportamento esperado do sistema. A ação proposta é formada por uma combinação de campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$  dependentes de momentum e de dois tempos acoplados a constantes que devem ser renormalizadas. O termo de massa entra de forma linear nessa teoria, diferente da proposta no presente trabalho. No artigo citado, a dimensionalidade crítica encontrada é 8, e o sistema se apresenta instável para pontos fixos não-gaussianos

a baixas dimensionalidades. Existe a expectativa de que, para “ $M$ ” grande (infinito), o modelo  $M$ -vetorial recaia no modelo esférico considerado neste trabalho; porém, embora essa característica seja presente na abordagem de campo médio, não é estendida quando consideramos flutuações.

Além dos experimentos, trabalhos computacionais mostram evidências de que o comportamento global do sistema não corresponde ao comportamento calculado classicamente. Nesses trabalhos, os expoentes críticos são calculados usando métodos de renormalização numérica e simulação via algoritmo de Monte Carlo (29) a temperatura zero. Dentro do tema estudado nesta tese, podem ser citados, por exemplo, (30, 31), onde são estudados, respectivamente, modelo de Ising de vidro de spin em campo transversal a duas e três dimensões.

Baseado no artigo publicado por Read (3), Amit Dutta propôs um modelo equivalente, adicionando um termo de longo alcance. Primeiramente, o autor mostrou suas propriedades de campo médio usando o modelo da gota e, depois, estabeleceu uma extensão do modelo, considerando perturbações e utilizando o grupo de renormalização. A ação proposta por Dutta é a mesma considerada no trabalho de Read *et al.*, com a adição do termo de longo alcance. Os resultados e conclusões são muito semelhantes no que tange ao ponto fixo não trivial encontrado no tratamento perturbativo: não há estabilidade para acoplamentos não gaussianos.

# Capítulo 2

## O Modelo

### 2.1 Formulação do Problema

O estudo será feito partindo de primeiros princípios, ou seja, partimos do Hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2I} - \sum_{i < j} \frac{\mathcal{J}_{ij}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\frac{d+\sigma}{2}}} \hat{s}_i \hat{s}_j + \mu \sum_i \hat{s}_i^2 \quad (2.1)$$

onde  $\hat{s}_i$  são variáveis de spins esféricos,  $\mathcal{J}_{ij}$  é a energia de troca aleatória com distribuição gaussiana de média zero,  $\mu$  é o multiplicador de Lagrange que assegura o vínculo esférico,  $\hat{p}$  é o operador momentum e, por fim, consideramos o sistema de medidas tal que  $\hbar = k_b = 1$ . A álgebra entre os operadores  $\hat{s}$  e  $\hat{p}$  é dada por

$$[\hat{s}_j, \hat{p}_i] = i\delta_{i,j}, \quad (2.2)$$

ou seja, consideramos aqui o sistema de rotores esféricos quânticos (8, 25, 32, 33).

Consideramos o caso de desordem congelada, isto é, cada conjunto de valores que compõem a matriz  $\mathcal{J}_{ij}$  é fixo, e não entra em equilíbrio térmico com o resto do sistema. Isso

significa que devemos fazer a média configuracional das energias livres do sistema para cada conjunto de variáveis  $\mathcal{J}_{ij}$ , e não a média configuracional da função de partição (annealed (22)).

Em um trabalho anterior, foi mostrado que, para o modelo esférico de vidro de spin, o tratamento utilizado, no que diz respeito à média configuracional (quenched ou annealed), não faz diferença nos resultados finais (22). Entretanto, essa conclusão parece ser válida somente quando não consideramos flutuações, isto é, somente no tratamento de campo médio.

Devemos considerar a equação

$$\beta\mathcal{F} = -\langle \ln \mathcal{Z} \rangle_{ca}. \quad (2.3)$$

sendo  $\beta = 1/T$ , o inverso da temperatura, e sendo  $\mathcal{Z}$  é a função de partição. Para tornar esse cálculo possível, usamos o método das réplicas (20, 34, 35) introduzido por Edwards e Anderson (20), que consiste em utilizar o limite matemático

$$\langle \ln \mathcal{Z} \rangle_{ca} = \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{\langle \mathcal{Z}^n \rangle_{ca} - 1}{n} \right) \quad (2.4)$$

onde  $\mathcal{Z}^n = \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n$  deve ser interpretado como  $n$  réplicas do mesmo sistema. Deste modo, em vez de calcular  $\langle \ln \mathcal{Z} \rangle_{ca}$ , calculamos a média configuracional de  $n$  réplicas da função de partição e consideramos o limite  $n \rightarrow 0$ . A função de partição replicada será dada por

$$\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n = \int \prod_{i,\alpha} ds_i^\alpha \langle s_i^\alpha | e^{-\beta \sum_\alpha \hat{\mathcal{H}}^\alpha} | s_i^\alpha \rangle, \quad (2.5)$$

onde  $\alpha = 1 \dots n$  é o índice de réplicas e

$$\hat{\mathcal{H}}^\alpha = \sum_i \frac{\hat{p}_i^{\alpha 2}}{2I} - \sum_{i < j} \frac{\mathcal{J}_{ij}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\frac{d+\sigma}{2}}} \hat{s}_i^\alpha \hat{s}_j^\alpha + \mu \sum_i \hat{s}_i^{\alpha 2}.$$

O operador exponencial na equação (2.5) deve ser considerado como uma soma infinita de produtos bastante complexos de operadores, tornando o cálculo praticamente ineficaz. Para contornar esse problema, usamos o método das integrais de caminho de Feynman (15, 17), que consiste em substituir  $\beta$  na equação (2.5) por

$$\beta = \tau_f - \tau_i = M\epsilon,$$

subdividindo a equação (2.5) em tempos infinitesimais, uma vez que  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $M \rightarrow \infty$ , tornando possível que um pedaço da função de partição seja calculado usando o operador exponencial em sua forma normal (17)

$$e^{-\epsilon \hat{\mathcal{H}}^\alpha} \sim e^{-\epsilon \sum_i \frac{p_i^{\alpha 2}}{2I}} e^{\epsilon \sum_{i < j} \frac{J_{ij}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\frac{d+\sigma}{2}}} \hat{s}_i^\alpha \hat{s}_j^\alpha} e^{-\epsilon \mu \sum_i \hat{s}_i^{\alpha 2}} \quad (2.6)$$

evitando-se, assim, a expansão infinita do operador original. Podemos aplicar cada um desses operadores em seus respectivos auto-vetores, resultando, para a fatia infinitesimal,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{inf} &= \prod_i \langle s_{i,\tau_n}^\alpha | e^{-\epsilon \hat{\mathcal{H}}^\alpha} | s_{i,\tau_{n-1}}^\alpha \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}N}} \int \prod_{i=1}^N d^d p_i^\alpha e^{i \sum_i [(\vec{s}_{i,\tau_n}^\alpha - \vec{s}_{i,\tau_{n-1}}^\alpha) \cdot \vec{p}_{i,\tau_n}^\alpha] - \epsilon \sum_i \frac{p_{i,\tau_n}^{\alpha 2}}{2I}} \times \\ &\quad \times e^{\epsilon \sum_{i < j} V_{ij} J_{ij} s_{i,\tau_{n-1}}^\alpha s_{j,\tau_{n-1}}^\alpha - \epsilon \mu \sum_i s_{i,\tau_{n-1}}^{\alpha 2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde foi adicionada a relação de clausura para os auto-vetores de momentum à esquerda do operador exponencial:

$$V_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-\frac{d+\sigma}{2}}. \quad (2.8)$$

Note-se que não há mais operadores na fatia infinitesimal da função de partição (2.7) e sim variáveis clássicas. Note-se também que a equação (2.7) pode ser facilmente integrada em momentum, pois se trata de uma integral gaussiana. Integrando-se em  $p$ , obtemos, para a parte infinitesimal da função de partição,

$$\mathcal{Z}_{inf} = C e^{-\epsilon \left[ -\sum_{i<j} V_{ij} \mathcal{J}_{ij} s_{i,\tau_{n-1}}^\alpha s_{j,\tau_{n-1}}^\alpha + \frac{I}{2\epsilon^2} \sum_i \left( \bar{s}_{i,\tau_n}^\alpha - \bar{s}_{i,\tau_{n-1}}^\alpha \right)^2 + \epsilon \mu \sum_i s_{i,\tau_{n-1}}^{\alpha 2} \right]} \quad (2.9)$$

e, finalmente, multiplicando todas as  $M$  partes infinitesimais (2.9) e tomando os limites  $M \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos a expressão completa para a função de partição de  $n$  réplicas

$$\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n = \times C \int_{s_i^\alpha(0)=s_i^\alpha(\beta)} \mathcal{D}[s_i^\alpha(\tau)] e^\Omega, \quad (2.10)$$

com

$$\Omega = \sum_\alpha \int_0^\beta \sum_{i<j} V_{ij} \mathcal{J}_{ij} s_i^\alpha(\tau) s_j^\alpha(\tau) d\tau - \frac{I}{2} \sum_\alpha \int_0^\beta \sum_i \left( \frac{ds_i^\alpha(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau - \sum_\alpha \mu \int_0^\beta \sum_i (s_i^\alpha(\tau))^2 d\tau.$$

O cálculo da média configuracional das  $n$  réplicas é feito usando a função de distribuição para as variáveis  $\mathcal{J}_{ij}$ . Consideramos que as variáveis  $\mathcal{J}_{ij}$  são distribuídas de forma gaussiana de média zero. Essa distribuição afeta o comportamento do sistema da seguinte maneira: se a média fosse diferente de zero, estaríamos adicionando um comportamento privilegiado para o alinhamento dos spins, a saber, a média positiva adicionaria uma parte ferromagnética ao sistema, e a média negativa, anti-ferromagnética. Não é objetivo desse trabalho analisar os dois últimos casos.

A função distribuição é dada por

$$P(\mathcal{J}_{ij}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi J^2}} e^{-\frac{1}{2J^2} \mathcal{J}_{ij}^2}. \quad (2.11)$$

Repare que, em (2.10), apenas uma pequena parte da função de partição é dependente das variáveis de interação aleatória  $\mathcal{J}_{ij}$ . Para facilitar a visualização do cálculo, separamos

essa parte da equação (2.10). A integral a ser considerada é dada por

$$I = \int \prod_{(i,j)} d\mathcal{J}_{ij} \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{-\frac{1}{2J^2} \mathcal{J}_{ij}^2} e^{\sum_{\alpha} \int_0^{\beta} \sum_{i<j} V_{ij} \mathcal{J}_{ij} s_i^{\alpha}(\tau) s_j^{\alpha}(\tau) d\tau}. \quad (2.12)$$

Após o cálculo da média (2.12), obtemos, para a média configuracional da função de partição replicada,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n \rangle_{ca} &= C \int_{s_i^{\alpha}(0)=s_i^{\alpha}(\beta)} \mathcal{D}[s_i^{\alpha}(\tau)] e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\beta} \sum_{\alpha,i} \left( \frac{ds_i^{\alpha}(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau} \times \\ &\times e^{\frac{J^2}{2} \sum_{i<j} V_{ij}^2 \left( \int_0^{\beta} \sum_{\alpha} s_i^{\alpha}(\tau) s_j^{\alpha}(\tau) d\tau \right)^2 - \mu \int_0^{\beta} \sum_{\alpha,i} (s_i^{\alpha}(\tau))^2 d\tau}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para prosseguir, fazemos a transformada de Fourier em espaço e tempo para as variáveis de spin. Procuramos, com isso, uma forma mais fácil de realiza a integração. A transformada de Fourier, para as variáveis de spin, é definida por

$$s_i^{\alpha}(\tau) \equiv s^{\alpha}(\vec{r}_i, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta N}} \sum_{\vec{k}, \omega_n} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} e^{-i\omega_n \tau} s^{\alpha}(\vec{k}, \omega_n) \quad (2.14)$$

onde  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$  são as frequências de Matsubara e, para o potencial, que não depende do tempo, a transformada é definida por

$$V^2(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \sum_{\vec{q}} W(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}. \quad (2.15)$$

Aplicando a transformada de Fourier em (2.13), obtemos para a média configuracional da função de partição replicada

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n \rangle_{ca} &= C \int_{s_i^{\alpha}(0)=s_i^{\alpha}(\beta)} \mathcal{D} \left[ s^{\alpha}(\vec{k}, \omega_n) \right] e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left( \mu + \frac{1}{2} \omega_n^2 \right) s^{\alpha}(\vec{k}, \omega_n) s^{\alpha}(-\vec{k}, -\omega_n)} \times \\ &\times e^{\frac{J^2}{2} \sum_{\alpha, \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} W(\vec{q}) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega_n, -\omega'_n)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde foi definido

$$S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \equiv \sum_{\vec{k}} s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\beta(\vec{q} - \vec{k}, \omega'_n). \quad (2.17)$$

Para se obter a ação em teoria de campos (ou hamiltoniano efetivo), devemos escrever a função de partição em função das flutuações do parâmetro de ordem do sistema e, para isso, usamos a transformação gaussiana, que é definida por

$$\begin{aligned} e^{\frac{J^2}{2} \sum_{\vec{q}, \omega_n, \omega'_n} W(\vec{q}) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(-\vec{q}, -\omega_n, -\omega'_n)} &= \int \prod_{\vec{q}, \omega_n, \omega'_n} d\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \times \\ &\times e^{-\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \frac{W^{-1}(\vec{q})}{J^2} \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n)} \times \\ &\times e^{\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Note que a transformação convenientemente reduz para segunda ordem os termos de quarta ordem nas variáveis  $s$ . Deste modo, obteremos uma forma quadrática em  $s$ . Integrando essas variáveis, teremos o hamiltoniano em função dos campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega_n, \omega'_n)$ . Note-se que nenhuma consideração foi feita quanto às frequências  $\omega_n$  e  $\omega'_n$ , ou seja, elas são consideradas independentes. Assim, os campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$  são dependentes do momentum  $\vec{k}$  e de duas frequências,  $\omega_n$  e  $\omega'_n$ .

Temos, para a média configuracional da função de partição replicada em função de  $s$  e dos campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ , a seguinte expressão final:

$$\langle \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n \rangle_{ca} = C \int_{s_i^\alpha(0)=s_i^\alpha(\beta)} \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] \mathcal{D} \left[ \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega_n) \right] e^{-\Theta}, \quad (2.19)$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta = & \sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left( \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 \right) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \left( \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \frac{W^{-1}(\vec{q})}{J^2} \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n) - \right. \\ & \left. - 2\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \right) \end{aligned}$$

## 2.2 Solução de Campo Médio e Hamiltoniano Efetivo

A equação (2.19) só pode ser resolvida aproximadamente. A resolução é levada a cabo através da expansão em cumulantes da seguinte maneira: separamos a parte dependente de  $s$  da parte dependente somente de  $Q$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n \rangle_{ca} = & C \int \mathcal{D} \left[ \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega_n) \right] e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \frac{W^{-1}(\vec{q})}{J^2} \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n)} \times \\ & \times \int_{s_i^\alpha(0)=s_i^\alpha(\beta)} \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left( \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 \right) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)} \times \\ & \times e^{\sum_{\alpha, \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)}. \end{aligned}$$

e calculamos a integral em  $s$  usando a expansão em cumulantes

$$\left\langle e^{g(\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n), S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n))} \right\rangle_0 = e^{\langle g \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle [g]^2 \rangle_{0c} + \frac{1}{3!} \langle [g]^3 \rangle_{0c}} \quad (2.20)$$

onde

$$g(\mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n), S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)) = \sum_{\alpha, \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)$$

e a média  $\langle f \rangle_0$  é calculada usando a função de distribuição

$$\mathcal{Z}_0 = \int_{s_i^\alpha(0)=s_i^\alpha(\beta)} \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left( \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 \right) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)}.$$

Ao calcular o primeiro cumulante, notamos que ele só difere de zero para  $\vec{q} = 0$ , com as réplicas  $\alpha = \beta$  e com  $\omega' = -\omega$ . A solução  $Q_{\alpha\alpha}(0, \omega_n)$  nada mais é do que a solução de campo médio do sistema. Deste modo, podemos separar a função de partição da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n \rangle_{ca} &= C \int_{s_i^\alpha(0)=s_i^\alpha(\beta)} \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] \mathcal{D} \left[ \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega_n) \right] \times \\ &\quad \times e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left( \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 \right) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)} \times \\ &\quad e^{-\mathcal{F}_0} e^{-\mathcal{F}_I} \end{aligned} \quad (2.21)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \omega_n, \omega'_n} \left( \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n) \frac{W^{-1}(0)}{J^2} \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, -\omega_n) - 2 \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n) S^{\alpha\alpha}(0, \omega_n, -\omega_n) \right) \\ \mathcal{F}_I &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \left( \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \frac{W^{-1}(\vec{q})}{J^2} \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \right). \end{aligned}$$

Então, lembrando que  $W(\vec{q})$  é a transformada de Fourier do potencial  $V_{ij}$  dada por

$$W(\vec{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{r}_i - \vec{r}_j} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \approx 1 - q^\sigma, \quad (2.22)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n \rangle_{ca} &= C \int_{s_i^\alpha(0)=s_i^\alpha(\beta)} \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] \mathcal{D} \left[ \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\vec{k}, \omega_n) \right] \times \\ &\quad \times e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left[ \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n) \right] s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{N}{2J^2} \sum_{\alpha, \omega_n} \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n) \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, -\omega_n)} \\ &\quad \times \int \mathcal{D} \left[ \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega_n) \right]_{\alpha \neq \beta} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) (1+q^\sigma) \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n)} \times \\ &\quad \times \left\langle e^{\sum_{\alpha \neq \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)} \right\rangle_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

ou, depois de integrar  $s$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \dots \mathcal{Z}_n \rangle_{ca} &= C \int \mathcal{D} \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\omega) e^{-N \sum_{\alpha\omega_n} \left\{ \frac{1}{2J^2} \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\omega_n) \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(-\omega_n) + \ln \left[ \frac{I}{2} \omega_n + \mu - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\omega_n) \right] \right\}} \times \\
&\times \int \mathcal{D} \left[ \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega_n) \right]_{\alpha \neq \beta} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) (1 - q^\sigma) \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n)} \times \\
&\times \left\langle e^{\sum_{\alpha \neq \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)} \right\rangle_0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde

$$\frac{\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\omega_n)}{J^2} = \frac{1}{\frac{I}{2} \omega_n^2 + \mu - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\omega_n)} \tag{2.25}$$

é a equação para a solução de campo médio da primeira parte da equação (2.24), e

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{\sum_{\alpha \neq \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)} \right\rangle_0 &= \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] \times \\
&\times e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left( \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n) \right) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)} \times \\
&\times e^{\sum_{\alpha \neq \beta, \vec{q}, \omega_n, \omega'_n} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n)}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

com

$$Z_0 = \int \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} \left( \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n) \right) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)} \tag{2.27}$$

é a parte em que as correções de mais alta ordem serão calculadas.

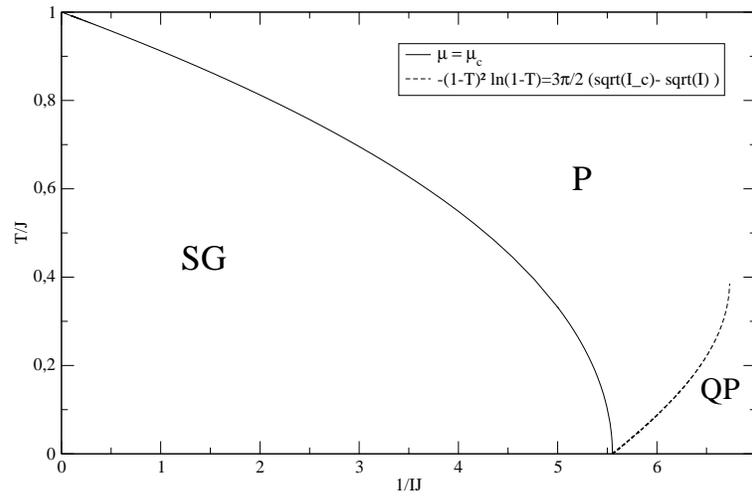


Diagrama de fase para o modelo esférico quântico de vidros de spin. A linha cheia indica o limite entre as fases paramagnética (P) e vidros de spin (SG). Note que, mesmo a temperatura zero, há transição. A linha pontilhada indica um crossover que separa a região onde as flutuações quânticas são relevantes (abaixo) e irrelevantes (acima)

O diagrama de fase em teoria de campo médio é obtido introduzindo a solução da equação (2.25) (22) no vínculo esférico, que é dado por

$$\frac{\partial \langle \beta \mathcal{F} \rangle}{\partial \beta \mu} = \left\langle \sum_i s_i^2 \right\rangle = N.$$

Após um pouco de álgebra, se obtém

$$\frac{1}{4\pi J^2} \int_{\frac{L_-}{\sqrt{I}}}^{\frac{L_+}{\sqrt{I}}} \coth\left(\frac{\beta x}{2}\right) \sqrt{8J^2 - (2\mu - Ix^2)^2} dx = 1$$

com  $L_{\pm} = \sqrt{2\mu \pm 2\sqrt{2}J}$ .

No diagrama, “SG” é a região de vidros de spin, “P” é a região correspondente ao paramagneto e “QP” é a região correspondente ao paramagneto quântico. A linha cheia corresponde

à linha de transição de fase entre vidros de spin e paramagneto. A linha tracejada mostra onde as flutuações quânticas são mais importantes do que as térmicas. Nessa região, o comportamento do sistema não é clássico. Na região abaixo da linha tracejada temos o chamado paramagneto quântico. É importante apontar também que o paramagneto quântico só existe sobre o eixo  $1/IJ$ , após o valor crítico de  $1/I$ . Também é possível observar o ponto crítico quântico próximo de  $1/IJ \sim 5,5$ .

Estenderemos o resultado de campo médio em teoria de perturbações de ordem 1 loop nas flutuações do campo do parâmetro de ordem. Para o cálculo mais detalhado do desenvolvimento da teoria de campo médio, ver (22, 32).

Para calcular a ação efetiva em teoria de campos em função das flutuações do parâmetro de ordem, consideramos a segunda parte da equação (2.23) e, para efetuar o cálculo, recorreremos, novamente, ao método da expansão em cumulantes. Tomando a equação (2.26), realizamos sua expansão em cumulantes, como feito em (2.20), com a distribuição dada por  $Z_0$  (equação (2.27)). Como

$$\langle S^{\alpha \neq \beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \rangle_0 = 0 \quad (2.28)$$

o cumulante de ordem  $n$  se confunde com o  $n$ -ésimo momento da distribuição. Devemos calcular apenas as contribuições de mais baixa ordem que sejam relevantes ao sistema a ser considerado. Definindo

$$\Phi(\vec{k}, \omega_n) = \mu + \frac{I}{2} \omega_n^2 - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n), \quad (2.29)$$

a primeira contribuição ao termo quadrático será dada por

$$\begin{aligned}
 \left\langle S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha'\beta'}(\vec{q}', \omega''_n, \omega'''_n) \right\rangle_0 &= \frac{1}{\mathcal{C}} \int \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] \times \\
 &\times e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} (\mu + \frac{1}{2}\omega_n^2 - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n, \omega_n)) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)} \times \\
 &\times \sum_{\vec{k}} s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\beta(\vec{q} - \vec{k}, \omega'_n) \sum_{\vec{k}'} s^{\alpha'}(\vec{k}', \omega''_n) s^{\beta'}(\vec{q}' - \vec{k}', \omega'''_n) = \\
 &= \delta_{\alpha, \beta'} \delta_{\beta, \alpha'} \delta_{\vec{q}, -\vec{q}'} \delta_{\omega_n, -\omega'''_n} \delta_{\omega'_n, -\omega''_n} \frac{1}{\Phi(\omega_n) \Phi(\omega'_n)}. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

O resultado acima pode ser expresso em termos da solução de campo médio, que é dada por

$$\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\omega_n) = \frac{I}{4}\omega_n^2 + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{(I\omega_n + 2\mu)^2 - 8\beta^2}. \tag{2.31}$$

Deste modo, temos que

$$\frac{1}{\Phi(\omega_n)\Phi(\omega'_n)} = \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}\mathcal{Q}_{\alpha\alpha} \approx \mu - \mu_c + a(\omega_n^2 + \omega'_n{}^2). \tag{2.32}$$

Essa expressão é obtida através da expansão das funções  $\Phi(\omega)$  próximo à criticalidade ( $\mu \approx \mu_c$ ).

Calculamos, agora, o termo de terceira ordem, que é dado por

$$\begin{aligned}
\left\langle S^{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) S^{\alpha'\beta'}(\vec{q}', \omega''_n, \omega'''_n) \right. \\
\left. S^{\alpha''\beta''}(\vec{q}'', \omega_n''', \omega_n''''') \right\rangle &= \frac{1}{\mathcal{C}} \int \mathcal{D} \left[ s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) \right] \times \\
&\times e^{-\sum_{\alpha, \vec{k}, \omega_n} (\mu + \frac{1}{2}\omega_n^2 - \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(0, \omega_n)) s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\alpha(-\vec{k}, -\omega_n)} \times \\
&\times \sum_{\vec{k}} s^\alpha(\vec{k}, \omega_n) s^\beta(\vec{q} - \vec{k}, \omega'_n) \sum_{\vec{k}'} s^\alpha(\vec{k}', \omega''_n) s^\beta(\vec{q}' - \vec{k}', \omega'''_n) \times \\
&\times \sum_{\vec{k}''} s^\alpha(\vec{k}'', \omega_n''') s^\beta(\vec{q}'' - \vec{k}'', \omega_n''''') = \\
&= \delta_{\alpha, \beta''} \delta_{\beta, \alpha'} \delta_{\beta' \alpha''} \delta_{\vec{q}'', -\vec{q} - \vec{q}'} \delta_{\omega_n, -\omega_n'''''} \delta_{\omega'_n, -\omega_n''} \delta_{\omega_n''', -\omega_n'''''} \times \\
&\times \frac{1}{\Phi(\omega_n) \Phi(\omega_n''') \Phi(\omega_n''''')}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Levando em conta somente a parte relevante para o problema a ser estudado, o termo dependente dos campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}$  contribui apenas com uma constante que vamos chamar de  $\lambda/3!$ . A escolha da constante é arbitrária e é feita deste modo para que os fatores de contagem de diagramas sejam cancelados ao final.

Temos que o termo cúbico no campo é diferente de zero. Isso significa, em termos de teoria de campos, que os operadores de maior ordem são irrelevantes para o estudo das propriedades críticas do sistema, porque os termos de maior ordem são menos divergentes e, portanto, não contribuirão de forma significativa no comportamento crítico, levando a expoentes críticos com correções de ordem muito pequena ou mesmo de ordem zero.

A ação em teoria de campos para o problema a ser estudado é de ordem “ $\phi^3$ ” (10, 23), mas com algumas modificações: o aparecimento de duas frequências de Matsubara irá modificar a dimensionalidade crítica do sistema, além de tornar necessária a introdução de um novo expoente ( $z$ ) que é o *expoente dinâmico* do sistema, inerente ao estudo de propriedades críticas de sistemas quânticos (2, 8).

Estudamos as propriedades críticas da ação em teoria de campos dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & \sum_{\alpha \neq \beta; \omega_n, \omega'_n} \int \left[ aq^\sigma + a' (\omega_n^2 + \omega_n'^2) + (\mu - \mu_c) \right] \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n) d^d \vec{q} \times \\
& \times \frac{\lambda}{3!} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma; \{\omega_n\}} \int \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \mathcal{Q}_{\beta\gamma}(\vec{q}', -\omega'_n, -\omega_n'') \mathcal{Q}_{\gamma\alpha}(-\vec{q} - \vec{q}', \omega_n'', -\omega_n) d^d \vec{q} d^d \vec{q}' \quad (2.34)
\end{aligned}$$

onde  $\{\omega_n\}$  é o conjunto  $\omega_n$ ,  $\omega'_n$  e  $\omega_n''$ , usando a expansão diagramática de Feynman (6) levemente modificada.

## 2.3 Expansão Diagramática e Funções de Vértice

Antes de realizar a expansão diagramática, fazemos a seguinte consideração: a ação é tomada na temperatura crítica quântica (isto é, em  $T = 0$ ). Isso faz com que as frequências de Matsubara ( $\omega_n = 2\pi n/\beta$ ) deixem de ser discretas, formando um domínio contínuo. A ação no ponto crítico será escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & \sum_{\alpha \neq \beta} \int \int \left[ a' q^\sigma + a'' (\omega_n^2 + \omega_n'^2) + (\mu - \mu_c) \right] \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega'_n, -\omega_n) d^d \vec{q} d\omega_n d\omega'_n \times \\
& \times \frac{\lambda}{3!} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} \int \int \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega'_n) \mathcal{Q}_{\beta\gamma}(\vec{q}', -\omega'_n, -\omega_n'') \times \quad (2.35)
\end{aligned}$$

$$\times \mathcal{Q}_{\gamma\alpha}(-\vec{q} - \vec{q}', \omega_n'', -\omega_n) d^d \vec{q} d^d \vec{q}' d\omega_n d\omega'_n d\omega_n''. \quad (2.36)$$

### 2.3.1 Curto Alcance

Consideramos o caso de curto alcance, isto é, para  $\sigma \geq 2$ , no qual podemos substituir  $\sigma$  por 2 diretamente (26). Ficamos, então, com o Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{\alpha \neq \beta} \int \int \left[ q^2 + a \left( \omega_n^2 + \omega_n'^2 \right) + \mu - \mu_c \right] \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega_n') \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega_n', -\omega_n) d^d \vec{q} d\omega_n d\omega_n' \times \\ & \times \frac{\lambda}{3!} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} \int \int \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega_n') \mathcal{Q}_{\beta\gamma}(\vec{q}', -\omega_n', -\omega_n'') \times \\ & \times \mathcal{Q}_{\gamma\alpha}(-\vec{q} - \vec{q}', \omega_n'', -\omega_n) d^d \vec{q} d^d \vec{q}' d\omega_n d\omega_n' d\omega_n'' \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como estamos interessados nas propriedades críticas do sistema, faremos a expansão diagramática usando  $\mu - \mu_c = 0$ , considerando que o sistema está na temperatura crítica.

Para desenvolver a estrutura diagramática, faz-se necessária a adição de um campo auxiliar  $h_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega_n')$  acoplado ao campo  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ . Desse modo, é possível desenvolver a diagramação para o caso estudado, seguindo os passos originais de Feynman, que são apresentados em (6). Aqui, os diagramas a serem considerados são um pouco diferentes daqueles apresentados em (6) e mais parecidos com os de (3). Construimos os diagramas e sua interpretação da seguinte maneira:

- Uma linha representa uma frequência/réplica.
- Duas linhas carregam momentum.
- Os loops representam uma integração em momentum, uma em frequência e uma soma na réplica mais interior.
- A frequência interna substitui a frequência de entrada/saída correspondente. Diferentemente dos momenta, as frequências não se misturam.

Para tornar a ideia mais clara, estão desenhadas, na figura 1, as peças fundamentais da nova

estrutura diagramática. Na figura 2, estão desenhados os diagramas para a correção de ordem 1 loop para  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(3)}$ .

Nas figuras, foram omitidas as frequências para tornar os diagramas mais claros, uma vez que podemos perceber quais são as frequências envolvidas em cada termo inspecionando as réplicas envolvidas.

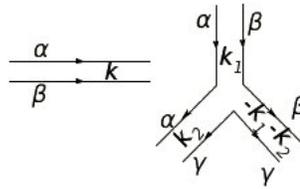


Figura 1: Peças fundamentais para a construção dos Diagramas

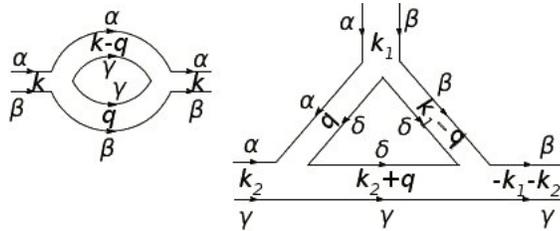


Figura 2: Diagramas de Primeira ordem dos vértices de  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(3)}$

É importante mencionar que a inserção em  $Q_{\alpha\beta}^2$  não afeta as frequências, somente o momentum. O fator de contagem deve ser calculado seguindo as mesmas instruções dos diagramas de Feynman originais, exceto que, para cada soma de réplicas, deve-se adicionar um fator correspondente a essa soma. Por exemplo: em  $\Gamma^{(2)}$ , temos a soma de uma das 3 réplicas envolvidas no diagrama (na figura 2, a réplica somada é a  $\gamma$ ), e como essa réplica deve ser diferente das outras duas, a soma resultará em um fator  $(n - 2)$ .

Para identificar as correções através dos diagramas, basta observar os componentes que formam cada segmento. São três esses elementos: uma informação sobre o momentum que

está sendo transferido e duas réplicas. Cada réplica, como já vimos, representa uma frequência, e a réplica interna (que é somada) representa a frequência a ser integrada. Temos, então, para os diagramas da figura 2, as seguintes expressões

$$\Gamma_1^{(2)} = \beta \frac{\lambda^2}{2} (n-2) \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left[ (\vec{k}_1 - \vec{q})^2 + a(W_1^2 + \omega^2) \right] [q^2 + a(\omega^2 + W_2^2)]} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(3)} &= \beta \lambda^3 (n-3) \int \int \frac{1}{\left[ (\vec{k}_1 - \vec{q})^2 + a(W_1^2 + \omega^2) \right] [q^2 + a(\omega^2 + W_2^2)]} \times \\ &\times \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left[ (\vec{k}_2 + \vec{q})^2 + a(W_3^2 + \omega^2) \right]}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A presença do fator  $\beta$  deve-se a uma  $\delta(\omega_n = 0)$  no cálculo dos diagramas que interpretamos como o volume temporal.

Acreditamos que seja possível estender a representação diagramática a ordens maiores do que 1 loop; entretanto, no presente trabalho, analisaremos apenas as correções de primeira ordem das funções de vértice.

O cálculo das integrais em (2.38) e (2.39) deve ser feito usando o método de Feynman para comprimir vários denominadores em um só (6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}} &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \times \\ &\times \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1} (1 - x_1 - \dots - x_{n-1})^{\alpha_n-1}}{[x_1 a_1 + \dots + x_{n-1} a_{n-1} + (1 - x_1 - \dots - x_{n-1}) a_n]^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde a integração sobre os parâmetros de Feynman,  $x_i$ , deve ser feita sobre o domínio

$$0 \leq x_i \leq 1; \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 1. \quad (2.41)$$

Pelo fato de que será utilizada regularização dimensional, calculamos a integral para uma certa dimensão  $d$  na qual ela seja convergente. Depois, expandimos o resultado para obter a

parte divergente. Aplicando o método, temos que

$$\begin{aligned}
& \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left[ (\vec{k}_1 - \vec{q})^2 + a(W_1^2 + \omega^2) \right] [q^2 + a(\omega^2 + W_2^2)]} = \\
&= \int dx \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left\{ x \left[ (\vec{k}_1 - \vec{q})^2 + a(W_1^2 + \omega^2) \right] + (1-x) [q^2 + a(\omega^2 + W_2^2)] \right\}^2} = \\
&= \int dx \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left\{ (\vec{q} - x\vec{k}_1)^2 + a\omega^2 + x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2 \right\}^2} . \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Para resolver essa integral, primeiro redefinimos  $\omega$  como

$$\sqrt{a}\omega \equiv y \quad (2.43)$$

$$d\omega = \frac{dy}{\sqrt{a}}. \quad (2.44)$$

Substituindo em (2.42), temos:

$$\begin{aligned}
& \int dx \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left\{ (\vec{q} - x\vec{k}_1)^2 + a\omega^2 + x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2 \right\}^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int dx \int \int \frac{d^d \vec{q} dy}{\left\{ (\vec{q} - x\vec{k}_1)^2 + y^2 + x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2 \right\}^2} . \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Agora, redefinimos o momentum  $\vec{q}$  como segue:

$$(\vec{q} - x\vec{k}_1) \equiv \vec{Q} \quad (2.46)$$

$$d^d \vec{q} = d^d \vec{Q}. \quad (2.47)$$

Ficamos, assim, com a integral

$$\begin{aligned} & \int dx \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left\{ (\vec{q} - x \vec{k}_1)^2 + a\omega^2 + x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2 \right\}^2} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{a}} \int dx \int \int \frac{d^d \vec{Q} dy}{\{Q^2 + y^2 + x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2\}^2} . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para resolver essa integral, é possível invocar o seguinte artifício matemático: a integração em  $\vec{Q}$  é feita em todas as componentes de  $-\infty$  até  $\infty$ , e em  $y$  também. Desse modo, podemos definir um novo vetor  $\vec{S}$  de componentes  $Q_1, Q_2, \dots, Q_d$  e  $y$ . O módulo quadrático desse novo vetor será dado por

$$|\vec{S}|^2 = Q^2 + y^2 \quad (2.49)$$

que, substituído na equação (2.48), fornece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a}} \int dx \int \int \frac{d^d \vec{Q} dy}{\{Q^2 + y^2 + x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2\}^2} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{a}} \int dx \int \int \frac{d^{d+1} \vec{S}}{\{S^2 + x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2\}^2} = \\ & = \frac{\Omega}{2\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int [x(1-x)k_1^2 + a(1-x)W_1^2 + axW_2^2]^{\frac{D}{2}-2} dx \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde  $\Omega$  é a integral angular referente ao novo vetor  $\vec{S}$ , e  $D = d + 1$ .

Para calcular a integral em  $x$ , relembremos a dimensionalidade crítica do sistema. Para o caso clássico de vidros de spin, temos que a dimensionalidade crítica é 6, pois se trata de uma teoria  $\phi^3$ . A presença das frequências acrescenta uma dimensão nos loops calculados, fazendo com que a dimensão crítica seja dada por  $D_c = d_c + 1 = 6$ , isto é,  $d_c = 5$ . Então, fazendo  $\epsilon = 6 - D$ , consideramos apenas o termo mais divergente da integral resultante em

$x$ :

$$\begin{aligned} \int [\mathcal{G}(x; k_1, W_1, W_2; a)]^{\frac{D}{2}-2} dx &\approx \int [\mathcal{G}(x; k_1, W_1, W_2; a)] dx \\ &= \left[ \frac{1}{6}k_1^2 + \frac{1}{2}a(W_1^2 + W_2^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde

$$\mathcal{G} = x(1-x)k_1^2 + axW_2^2 + a(1-x)W_1^2$$

Sem se preocupar com as divergências com  $D = 6$ , temos para a função de vértice  $\Gamma^{(2)}$  que

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &= k^2 + a(W_1^2 + W_2^2) - \\ &\quad - \beta \frac{\lambda^2}{2} (n-2) \frac{\Omega}{2\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left[ \frac{1}{6}k_1^2 + \frac{1}{2}a(W_1^2 + W_2^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Realizando um cálculo análogo para  $\Gamma^{(3)}$ , obtemos:

$$\Gamma^{(3)} = \lambda + \beta\lambda^3(n-3) \frac{\Omega}{4\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \kappa^{D-6} \quad (2.53)$$

onde a integral foi calculada no ponto de simetria  $k_1^2 = k_2^2 = W_1 = W_2 = W_3 = \kappa^2$  e  $\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = -\frac{1}{2}\kappa^2$ .

Retirando o termo referente a frequência, se considerarmos  $D \equiv d$ , obtemos diretamente os resultados para o vidro de spin clássico (10), com uma diferença em  $\Gamma^{(3)}$ , que é devida à contagem dos diagramas. Entretanto, o sistema difere do correspondente clássico, uma vez que a renormalização da parte dependente da frequência será diferente da parte dependente de momentum. Note-se que, em  $\Gamma^{(2)}$ , o fator que precede  $W_1$  e  $W_2$  é diferente daquele que precede  $k_1$ . Devemos, além de utilizar a função de renormalização usual  $Z_\phi$ , redefinir a constante  $a$  para retirarmos a parte divergente por completo. A redefinição de  $a$  dará origem

a correções no expoente dinâmico  $z$ , como veremos a seguir. O comportamento crítico em vidros de spin quânticos, portanto, não é igual ao comportamento de seu correspondente clássico com a dimensionalidade acrescida de uma unidade, uma vez que a dinâmica deve ser estudada juntamente com a estática, o que implica levar em conta correções no expoente crítico dinâmico  $z$ .

Para concluir, devemos calcular funções de correlação a temperaturas diferentes da temperatura crítica. Para isso, fazemos uma inserção em  $\phi^2$  para introduzir perturbações na temperatura. A figura 3 mostra o diagrama correspondente a essa nova função de vértice, cuja expressão é dada por

$$\Gamma^{(2,1)} = 1 + \beta \frac{\lambda^2}{2} (n-2) \frac{\Omega}{4\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \kappa^{D-6}, \quad (2.54)$$

que deve ser renormalizada com a função  $Z_{\phi^2}$ .

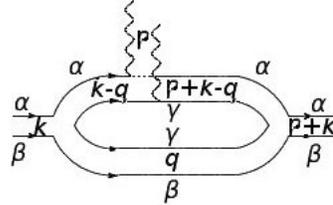


Figura 3: Diagrama de  $\Gamma^{(2,1)}$

### 2.3.1.1 Divergência e Renormalização

O próximo passo em nossa busca pelos expoentes críticos do sistema consiste em identificar as partes divergentes das integrais e subtraí-las. Para tanto, primeiramente, veremos quais termos são divergentes nas funções (2.52), (2.53) e (2.54). Considerando primeiro as funções de vértice  $\Gamma^{(3)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ , temos que a parte divergente quando  $D = 6$  será dada pela função gama

$$\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} \Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \approx \frac{2}{\epsilon} \quad (2.55)$$

e, para a função  $\Gamma^{(2)}$ , a parte divergente será

$$\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = \frac{2}{\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)\epsilon} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right) \approx -\frac{2}{\epsilon}. \quad (2.56)$$

A dimensionalidade dos elementos do sistema será dada por

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}] &\sim \Lambda^0 \\ [q] &\sim \Lambda^1 \\ [\omega] &\sim \Lambda^1 \\ [\beta] &\sim \Lambda^{-1} \\ [\lambda] &\sim \Lambda^{\frac{6-d}{2}} \\ [a] &\sim \Lambda^0 \\ [\mathcal{Q}_{\alpha\beta}] &\sim \Lambda^{-\frac{1}{2}(d+4)}. \end{aligned}$$

Com isso, definimos a interação adimensional  $u_0$

$$u_0 = \sqrt{\beta\kappa} \frac{d-5}{2} \lambda$$

onde  $\kappa$  é um parâmetro de escala arbitrário. Temos, assim, todas as informações necessárias para iniciar o processo de renormalização das funções. Antes, porém, definimos as funções de renormalização:

$$\lambda = \sqrt{T\kappa} \frac{5-d}{2} u (1 + a_1 u^2) = \sqrt{T\kappa} \frac{5-d}{2} u_0 \quad (2.57)$$

$$Z_\phi = 1 + b_1 u^2 \quad (2.58)$$

$$Z_{\phi^2} = 1 + c_1 u^2 \quad (2.59)$$

$$a = 1 + d_1 u^2. \quad (2.60)$$

A renormalização é feita de modo que

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(2)}(k, u, \kappa) &= Z_\phi \Gamma^{(2)}(k, \lambda) \\ \Gamma_R^{(3)}(k_i, u, \kappa) &= Z_\phi^{\frac{3}{2}} \Gamma^{(3)}(k, \lambda)\end{aligned}$$

e

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k, p, u, \kappa) = Z_\phi Z_{\phi^2} \Gamma^{(2,1)}(k, p, \lambda)$$

sejam funções finitas. Para tanto, usaremos o método de mínima subtração dos polos dimensionais.

Começamos com a renormalização de  $\Gamma^{(2)}$ . Temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(2)} &= (1 + b_1 u^2) \left\{ k_1^2 \left[ 1 - \frac{u^2}{2} (n-2) \frac{\Omega}{12\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + a (W_1^2 + W_2^2) \left[ 1 - \frac{u^2}{2} (n-2) \frac{\Omega}{4\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] \right\}. \quad (2.61)\end{aligned}$$

Daí, determinamos  $b_1$  e  $d_1$ :

$$b_1 = \frac{\Omega}{3\sqrt{a\epsilon}} \quad (2.62)$$

$$d_1 = \frac{2\Omega}{3\sqrt{a\epsilon}}. \quad (2.63)$$

Observando a função de vértice calculada, notamos a presença de um fator  $1/\sqrt{a}$ , que pode ser substituído por 1, pois

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + d_1 u^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} d_1 u^2 + \dots, \quad (2.64)$$

ou seja, teríamos termos de ordem  $u^4$  e superiores, mas, como estamos estudando apenas as correções de primeira ordem, tais termos podem ser desprezados.

Agora, vejamos a renormalização de  $\Gamma^{(3)}$ . Essa função deve ser multiplicada por  $Z_\phi^{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}b_1u^2$ . Substituindo  $\lambda$  em  $\Gamma^{(3)}$  temos

$$\Gamma_R^{(3)} = \sqrt{T}\kappa^{\frac{5-d}{2}}Z_\phi^{\frac{3}{2}}u \left[ 1 + u^2 \left( a_1 + (n-3) \frac{\Omega}{4\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \right) \right], \quad (2.65)$$

que, para  $n \rightarrow 0$ , nos dá

$$a_1 = \frac{5\Omega}{2\epsilon}. \quad (2.66)$$

Finalmente, temos que

$$Z_\phi Z_{\phi^2} \Gamma^{(2,1)} = \left( 1 + \frac{\Omega}{3\epsilon} u^2 \right) (1 + c_1 u^2) \left[ 1 - u^2 \frac{\Omega}{2} \Gamma\left(3 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right] \quad (2.67)$$

$$c_1 = \frac{5\Omega}{3\epsilon}. \quad (2.68)$$

Logo, as funções de renormalização serão dadas por

$$\lambda = \sqrt{T}\kappa^{\frac{5-d}{2}}u \left( 1 + \frac{5}{2\epsilon} u^2 \right) \quad (2.69)$$

$$Z_\phi = 1 + \frac{1}{3\epsilon} u^2 \quad (2.70)$$

$$Z_{\phi^2} = 1 + \frac{5}{3\epsilon} u^2 \quad (2.71)$$

$$a = 1 + \frac{2}{3\epsilon} u^2 \quad (2.72)$$

onde  $\Omega$  foi introduzido em  $u^2$ .

### 2.3.1.2 Equações do Grupo de Renormalização

Antes de dar continuidade à renormalização, mostraremos o que difere no grupo renormalização aqui apresentado.

Primeiramente, as funções de vértice possuem uma variável extra em relação ao caso

clássico: a frequência. A dedução é simples e semelhante àquela apresentada em (6).

Como visto anteriormente (capítulo 1.3), a função nua não depende da escala  $\kappa$ . Derivando a equação (1.12) em relação a escala, obtemos

$$\frac{d}{d\kappa} \left[ Z_\phi^{-\frac{N}{2}} \Gamma_R^{(N)}(k_i, \sqrt{a}W_i; u, \kappa) \right] = 0,$$

obtemos a nova equação de grupo de renormalização, que será dada por

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{N}{2} \gamma_\phi + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha}{2} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, y_i; u, \kappa) = 0$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_\phi(u, \kappa) &= \kappa \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \kappa} \\ \beta(u, \kappa) &= \kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa} \end{aligned}$$

e  $y_i \equiv \sqrt{a}W_i$ . A solução dessa equação diferencial não terá uma forma que escale simplesmente com uma mudança na escala dos momenta; essa específica forma para a solução será obtida apenas para  $\beta(u^*) = 0$ , ou seja, no ponto fixo da equação de grupo. Então, procuramos pela solução da equação

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{N}{2} \gamma_\phi + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha}{2} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, y_i; u^*, \kappa) = 0$$

que será dada por

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, y_i; \kappa) = \kappa^{\frac{N}{2} \gamma_\phi(u^*)} F^{(N)}\left(k_i, \kappa y_i^{-\frac{2}{\alpha}}\right).$$

Quando analisamos o que ocorre com a frequência quando reescalamos o momentum, temos

o seguinte resultado:

$$\Gamma_R^{(N)}(\rho k_i, y_i; \kappa) = \rho^{d+N-\frac{1}{2}Nd} \Gamma_R^{(N)}\left(k_i, \frac{y_i}{\rho}; \frac{\kappa}{\rho}\right) = \rho^{d+N-\frac{1}{2}Nd-\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)} \kappa^{\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)} F^{(N)}\left[k_i, \kappa \left(\frac{y_i}{\rho^{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)^{-\frac{2}{\alpha}}\right],$$

ou seja, o reescalamento faz com que a frequência ( $y_i = \sqrt{a}W_i$ ) reescale com  $\rho^z = \rho^{1-\frac{\alpha}{2}}$ , de onde tiramos o expoente dinâmico

$$z = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Também é possível reconhecer o expoente

$$\eta = \gamma_\phi(u^*).$$

Considerando-se, no formalismo, efeitos de temperatura, a equação diferencial a ser resolvida será

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{N}{2} \gamma_\phi + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha}{2} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \theta t \frac{\partial}{\partial t} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, y_i; t, \kappa) = 0$$

onde  $\theta$  será determinado a seguir e  $t = \mu$ , cuja solução é dada por

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, y_i; t, \kappa) = \kappa^{\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)} F^{(N)}\left(k_i, \kappa y_i^{-\frac{2}{\alpha}}; \kappa t^{\frac{1}{\theta}}\right).$$

Fazendo a escala usual, temos que

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, y_i; t, \kappa) = \rho^{N+d-\frac{1}{2}Nd-\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)} \kappa^{\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)} F^{(N)}\left[\frac{k_i}{\rho}, \kappa \left(\frac{y_i}{\rho^z}\right)^{-\frac{2}{\alpha}}, \frac{\kappa}{\rho} \left(\frac{t}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right].$$

Como  $\rho$  é arbitrário, desejamos tornar a função  $F^{(N)}$  apenas dependente dos momenta e das frequências. Para tanto, escolhemos

$$\rho = \kappa (\kappa^{-2}t)^{\frac{1}{2+\theta}}.$$

Substituindo a expressão anterior na função, temos, finalmente, que

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, y; t, \kappa) = \rho^{N+d-\frac{1}{2}Nd-\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)} \kappa^{\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)} F^{(N)} \left[ k_i \kappa^{-1} (\kappa^{-2}t)^{-\frac{1}{2+\theta}}, \kappa \left( \frac{y_i}{\kappa^z (\kappa^{-2}t)^{\frac{z}{2+\theta}}} \right)^{-\frac{\alpha}{2}} \right].$$

O sistema próximo à criticalidade deve comportar-se como uma função  $f$  que escala de acordo com (1, 8)

$$f_{crit} = f(ck_i \xi^{-\nu}, by_i \tau_\xi^{-\nu z}).$$

Comparando, podemos reconhecer o coeficiente  $\nu$ , que está relacionado com a divergência do comprimento de correlação

$$\nu^{-1} = 2 + \theta$$

onde

$$\theta = -\gamma_{\phi^2} = -\kappa \frac{\partial \ln Z_{\phi^2}}{\partial \kappa}.$$

Podemos reconhecer, também, o coeficiente

$$\phi = \nu z,$$

que está relacionado com a divergência do tempo de correlação  $\tau_\xi$ .

### 2.3.1.3 Funções de Wilson e Pontos Fixos

As funções de Wilson são identificadas na equação diferencial que define o grupo de renormalização. A identificação com os expoentes críticos do sistema é uma das características mais marcantes desse formalismo.

Em grupo de renormalização, existem uma arbitrariedade, a escala  $\kappa$ , que deve ser eliminada para que obtenhamos resultados fisicamente coerentes. O objetivo do estudo do comportamento das funções de Wilson e de seus pontos fixos é fazer com que todas as diferentes

teorias para diferentes  $\kappa$  considerando um sistema colapsem em uma só, produzindo, assim, o mesmo resultado para uma classe inteira de sistemas.

As funções de Wilson são definidas da seguinte forma

$$\beta(u) = \kappa \left. \frac{\partial}{\partial \kappa} u \right|_{\lambda} \quad (2.73)$$

$$\gamma_{\phi}(u) = \kappa \left. \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln Z_{\phi} \right|_{\lambda} \quad (2.74)$$

$$\gamma_{\phi^2}(u) = -\kappa \left. \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln Z_{\phi^2} \right|_{\lambda} \quad (2.75)$$

$$\alpha(u) = \kappa \left. \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln a \right|_{\lambda}. \quad (2.76)$$

A função  $\beta(u)$ , equação (2.73), é essencialmente a taxa de variação da constante de acoplamento com relação à escala. Deste modo, definimos o ponto fixo  $u^*$  o ponto para qual o acoplamento não varia com mudanças na escala, isto é

$$\beta(u^*) = 0. \quad (2.77)$$

Se substituirmos  $\beta(u^*)$  diretamente nas equações (2.74), (2.75) e (2.76), perdemos a informação que podemos obter das funções citadas. Deve-se, então, expandir as funções a serem calculadas, mantendo apenas a ordem coerente com a expansão perturbativa, para depois substituir  $u$  pelo ponto fixo.

No sistema estudado, as funções (2.73), (2.74), (2.75) e (2.76) serão dadas por

$$\beta(u) = -\frac{\epsilon}{2} u \left[ 1 - \frac{5}{\epsilon} u^2 \right] \quad (2.78)$$

$$\gamma_{\phi}(u) = -\frac{1}{3} u^2 \quad (2.79)$$

$$\gamma_{\phi^2}(u) = \frac{5}{3} u^2 \quad (2.80)$$

$$\alpha(u) = -\frac{2}{3} u^2. \quad (2.81)$$

Os pontos fixos para o sistema serão as soluções para a equação

$$1 - \frac{5}{\epsilon} \beta \kappa u^{*3} = 0,$$

a saber

$$\begin{aligned} u^* &= 0 \\ u^{*2} &= \frac{\epsilon}{5}. \end{aligned}$$

### 2.3.1.4 Estabilidade dos Pontos Fixos e Expoentes Críticos

Para calcular os expoentes críticos, precisamos verificar a estabilidade dos pontos fixos calculados. Desse modo, podemos saber com precisão se a nova fase do sistema, com novos expoentes críticos, é estável ou instável.

Como citado anteriormente, no sistema estudado,  $u$ , a princípio, é uma variável arbitrária; portanto, não é garantido que a escolha de seu valor será ser justamente aquele valor que corresponde ao ponto fixo. A estabilidade nos garante que, se escolhermos uma constante de acoplamento próxima ao ponto fixo,  $u$  vai tender ao seu valor  $u^*$  no limite de interesse da escala. Os pontos fixos podem ser estáveis no infravermelho (que é o interesse para o problema em questão), ou no ultravioleta (que é de interesse da física de altas energias). Para analisar o tipo de estabilidade, estudamos a equação

$$\rho \frac{du(\rho)}{d\rho} = \frac{du(s)}{ds} = \beta(u(\rho))$$

onde  $s = \ln \rho$ , e expandimos a função  $\beta(u)$  em série de Taylor ao redor do ponto a ser analisado.

Observando primeiro o ponto fixo gaussiano,  $u^* = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} -\epsilon(u - u^*) &= \frac{du(s)}{ds} \\ u(s) - u^* &\approx e^{-\epsilon s}. \end{aligned}$$

Claramente, quando  $s \rightarrow -\infty$  (isto é, a escala  $\rho \rightarrow 0$ ),  $u(s) \rightarrow u^*$  somente se  $\epsilon < 0$ , isto é, somente para  $d > d_c$ . Temos, portanto, que esse ponto fixo é estável no infravermelho para dimensões maiores do que a dimensão crítica, e seus expoentes  $\eta$ ,  $\nu$ , etc., serão os expoentes de campo médio.

Partindo para o ponto fixo positivo, temos que

$$\begin{aligned} 2\epsilon(u - u^*) &= \frac{du(s)}{ds} \\ u(s) - u^* &\approx e^{2\epsilon s}. \end{aligned}$$

Ao contrário do ponto fixo gaussiano, esse é estável no infra vermelho para  $\epsilon > 0$ , isto é, para dimensões menores do que a dimensão crítica. Os expoentes críticos serão, nesse caso, dados por

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{15}\epsilon \\ \nu^{-1} &= 2 - \frac{1}{3}\epsilon \\ z &= 1 + \frac{2}{15}\epsilon. \end{aligned}$$

### 2.3.1.5 Discussão

O desenvolvimento a partir de primeiros princípios do modelo esférico quântico de vidros de spin com interação de longo alcance nos levou a uma teoria de campos do tipo  $\phi^3$ . As propriedades, entretanto, são modificadas pela presença inevitável da dinâmica no estudo

das propriedades estatísticas do sistema. Isso porque, em sistemas quânticos, não há como separar a parte dinâmica da parte estática do sistema, devido à natureza não comutativa dos operadores quânticos (1, 2, 8, 9).

O cálculo nos levou a função de partição composta de duas partes separáveis: a parte de campo médio (com os campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}(\omega)$ ) e a parte perturbativa (com os campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\neq\beta}$ ). À primeira vista, pode-se pensar que estejam presentes na ação termos com mistura dos campos de réplicas iguais com os campos de réplicas diferentes; entretanto, cálculos mais detalhados mostram que as contribuições geradas por esse tipo de termo seriam não divergentes, ou seja, irrelevantes para o estudo de fenômenos críticos em grupo de renormalização. Isso porque os campos com réplicas iguais ( $\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}$ ) devem entrar na equação com momentum diferente de zero ( $q \neq 0$ ). Com acoplamentos mistos (do tipo  $\mathcal{A} \sim \mathcal{Q}_{\alpha\alpha}\mathcal{Q}_{\beta\neq\gamma}$ ), os gráficos contendo propagadores dessa natureza não seriam divergentes.

A função de partição correspondente ao comportamento de campo médio reproduziu os resultados conhecidos e bem estabelecidos na literatura corrente (3, 32, 25). Entretanto, a linha que separa a importância das flutuações térmicas e quânticas é diferente daquela apresentada em (3). Acreditamos que isso seja decorrente da diferença dos modelos usados.

Na parte perturbativa, a teoria nos levou a uma ação do tipo  $\phi^3$ . Diferentemente do caso clássico apresentado em (10), a dimensionalidade crítica é reduzida para  $d_c = 5$ , graças à presença da dinâmica no sistema. Foi encontrado um ponto crítico não trivial estável para o sistema com expoentes críticos corrigidos a ordem 1 loop. Os resultados clássicos são reobtidos se a dinâmica for excluída.

Quando calculamos a função de vértice  $\Gamma^{(2)}$ , percebemos a necessidade de redefinir o acoplamento dinâmico  $a$ , além de introduzir-se a constante  $Z_\phi$  para renormalizar a parte de momentum na função  $\Gamma^{(2)}$ . Isso ocorre porque o coeficiente presente na parte de momentum é diferente do coeficiente da parte dinâmica. Desse modo, seria impossível renormalizar corretamente a função de vértice com apenas uma constante multiplicativa. A introdução

dessa nova constante de renormalização levou a novos resultados quanto às equações de grupo de renormalização: uma nova função de Wilson teve de ser introduzida ( $\alpha(u)$ ), sendo esta relacionada com a variação de  $a$  com respeito à escala  $\kappa$  (mais precisamente  $\alpha(u) = \kappa \partial / \partial \kappa \ln a(u)$ ). Fazendo uma análise mais cuidadosa das soluções das equações de grupo de renormalização, chegamos à conclusão de que  $\alpha(u)$ , quando calculada no ponto fixo  $u^*$ , é a correção para o coeficiente dinâmico  $z$ . É importante ressaltar que, ao considerar a renormalização de  $a$ ,  $\alpha(u)$  é uma consequência natural da teoria.

Um trabalho considerando o modelo geral em teoria de Landau de vidros de spins quânticos de  $M$  componentes foi desenvolvido por Sachdev e Read (3), e é importante ser mencionado, ainda, que uma comparação mais direta com esse trabalho é praticamente impossível, devido à grande divergência de resultados. Apesar da semelhança com os campos bilocais em tempo, as diferenças são muito mais pronunciadas. No presente estudo, construímos nossa ação partindo diretamente do Hamiltoniano de vidros de spin no modelo esférico, enquanto, no trabalho citado, o autor constrói a ação usando argumentos de simetria. Nosso campo  $\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}$  não é o parâmetro de ordem de vidros de spin, que, devido a supersimetria de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (22), tem valor zero, enquanto, em (3), os campos considerados estão relacionados com o parâmetro de ordem de EA. Isso faz com que o termo de massa apareça de forma linear na ação, modificando completamente, por exemplo, a dimensionalidade crítica do sistema, que, no trabalho citado, é 8, diferente daquela encontrada no presente estudo. O modelo considerado por Read e Sachdev também é diferente: em lugar do modelo esférico, utilizam o modelo de  $M$ -componentes. Embora seja esperado que os resultados obtidos no modelo de  $M$ -componentes no limite de  $M \rightarrow \infty$  sejam os mesmos resultados do modelo esférico (22, 33), não é possível obter tal limite, pois os expoentes críticos e as equações de grupo de renormalização são independentes de  $M$ . Acreditamos que o sistema proposto em (3) esteja em outra classe de universalidade comparada ao sistema aqui estudado, uma vez que seus resultados não são equivalentes àqueles mostrados no desenvolvimento do presente trabalho. O encontro de um ponto fixo não trivial com expoentes críticos diferentes aos de

campo médio é uma diferença marcante entre as duas abordagens, uma vez que, no trabalho citado, não é encontrado um ponto fixo estável não trivial.

Comparando-se com resultados obtidos numericamente por simulação de Monte Carlo no modelo de Ising em campo transversal (30, 31), notamos semelhanças com os resultados encontrados aqui. A escala para a susceptibilidade inversa de vidros de spin está de acordo, que leva o expoente  $\gamma = \nu(2 - \eta)$ . Também obtivemos  $1 < z < 2$ . As comparações não podem ir mais além pois no presente trabalho lidamos com um sistema com valores altos de  $M$  e dimensionalidades grandes.

### 2.3.2 Longo Alcance

Voltemos à equação (2.35):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & \sum_{\alpha \neq \beta} \int \int \left[ a' q^\sigma + a'' (\omega_n^2 + \omega_n'^2) + (\mu - \mu_c) \right] \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega_n') \mathcal{Q}_{\beta\alpha}(-\vec{q}, -\omega_n', -\omega_n) d^d \vec{q} d\omega_n d\omega_n' \times \\ & \times \frac{\lambda}{3!} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} \int \int \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(\vec{q}, \omega_n, \omega_n') \mathcal{Q}_{\beta\gamma}(\vec{q}', -\omega_n', -\omega_n'') \times \\ & \times \mathcal{Q}_{\gamma\alpha}(-\vec{q} - \vec{q}', \omega_n'', -\omega_n) d^d \vec{q} d^d \vec{q}' d\omega_n d\omega_n' d\omega_n''. \end{aligned}$$

A estrutura diagramática não se modifica, ou seja, cada linha representa uma réplica (frequência), e cada par de linhas carrega momentum. Entretanto, o propagador a ser considerado agora é

$$\Gamma_0^{(2)} = k^\sigma + a (\omega_1^2 + \omega_2^2),$$

ou seja, os loops de correção das funções de vértice de dois e três pontos serão dados por

$$\Gamma_1^{(2)} = \beta \frac{\lambda^2}{2} (n-2) \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left[ \left( \vec{k}_1 - \vec{q} \right)^\sigma + a (W_1^2 + \omega^2) \right] [q^\sigma + a (\omega^2 + W_2^2)]} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(3)} &= \beta \lambda^3 (n-3) \int \int \frac{1}{\left[ \left( \vec{k}_1 - \vec{q} \right)^\sigma + a (W_1^2 + \omega^2) \right] [q^\sigma + a (\omega^2 + W_2^2)]} \times \\ &\times \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left[ \left( \vec{k}_2 + \vec{q} \right)^\sigma + a (W_3^2 + \omega^2) \right]}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Para realizar o cálculo, consideramos o ponto de simetria para as frequências  $W_1 = W_2 = W_3 = \kappa$  e para o momentum externo  $\vec{k}, \vec{k} = 0$ . A princípio, pode parecer absurdo considerarmos  $\vec{k} = 0$  como ponto de simetria, pois é nesse ponto que ocorre o comportamento crítico do sistema, expressado pela divergência da função de vértice. No entanto, estudos em sistemas clássicos com interação de longo alcance em teoria  $\phi^3$  (23, 26, 36, 37) mostram que a função  $\Gamma^{(2)}$  não tem divergências numa expansão em  $k^2$  e não tem correções ao termo  $k^\sigma$ . Para ter certeza de que isso é verdade no caso quântico, expandimos o loop até a ordem  $k^2$  e calculamos as contribuições

$$\begin{aligned} &\int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{\left[ \left( \vec{k}_1 - \vec{q} \right)^\sigma + a (W_1^2 + \omega^2) \right] [q^\sigma + a (\omega^2 + W_2^2)]} \sim \\ &\sim \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a (W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a (W_2^2 + \omega^2)]} \\ &+ 2\sigma^2 \int \int \frac{q^{2\sigma-4} \left( \vec{q} \cdot \vec{k}_1 \right)^2 d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a (W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a (W_2^2 + \omega^2)]^3} - \\ &- \sigma(\sigma-2) \int \int \frac{q^{\sigma-4} \left( \vec{q} \cdot \vec{k}_1 \right)^2 d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a (W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a (W_2^2 + \omega^2)]^2} \\ &- \sigma k^2 \int \int \frac{q^{\sigma-2} d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a (W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a (W_2^2 + \omega^2)]^2}. \end{aligned}$$

A primeira integral é a contribuição que levaremos em conta no trabalho (a única crítica).

As demais podem ser calculadas como

$$\begin{aligned} \int \int \frac{q^{2\sigma-4} (\vec{q} \cdot \vec{k}_1)^2 d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a(W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a(W_2^2 + \omega^2)]^3} &= C_1 k^2 \Gamma\left(\frac{d+2\sigma-2}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2} + \frac{2-d-2\sigma}{\sigma}\right) \\ \int \int \frac{q^{\sigma-4} (\vec{q} \cdot \vec{k}_1)^2 d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a(W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a(W_2^2 + \omega^2)]^2} &= C_2 k^2 \Gamma\left(\frac{\sigma+d-2}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} + \frac{2-\sigma-d}{\sigma}\right) \\ \int \int \frac{q^{\sigma-2} d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a(W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a(W_2^2 + \omega^2)]^2} &= C_3 k^2 \Gamma\left(\frac{\sigma+d-2}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} + \frac{2-\sigma-d}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int dx x^2 [ax\omega_1^2 + a(1-x)\omega_2^2]^{\frac{d+2\sigma-2}{\sigma}-\frac{7}{2}} \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin^{d-2}(\theta) d\theta \\ C_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int dx x [ax\omega_1^2 + a(1-x)\omega_2^2]^{\frac{\sigma+d-2}{\sigma}-\frac{5}{2}} \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin^{d-2}(\theta) d\theta \\ C_3 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int dx x [ax\omega_1^2 + a(1-x)\omega_2^2]^{\frac{\sigma+d-2}{\sigma}-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes numéricas reais não divergentes na dimensionalidade crítica  $d_c = \frac{5}{2}\sigma$ . Note-se que nenhuma das integrais é divergente nessa dimensionalidade, indicando que não há necessidade de renormalizar  $\Gamma^{(2)}$  através da função  $Z_\phi$ . Desse modo, definimos a constante de renormalização  $Z_\phi = 1$ .

As integrais que necessitam ser calculadas são

$$\Gamma_1^{(2)} = \beta \frac{\lambda^2}{2} (n-2) \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a(W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a(\omega^2 + W_2^2)]} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(3)} &= \beta \lambda^3 (n-3) \int \int \frac{1}{[q^\sigma + a(W_1^2 + \omega^2)] [q^\sigma + a(\omega^2 + W_2^2)]} \times \\ &\quad \times \frac{d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a(W_3^2 + \omega^2)]}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Dessa vez, não podemos juntar a frequência com o momentum em um mesmo vetor, pois tais variáveis estão elevadas a potências diferentes. Devemos realizar as integrações separadamente da seguinte maneira: primeiro, usamos o método de Feynman (6) para juntar os

denominadores em um só; depois, integramos o momentum e a frequência separadamente. O cálculo do loop da função de vértice  $\Gamma^{(2)}$  será o seguinte

$$\begin{aligned}
& \int \int \frac{d^d \vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a(W_1^2 + \omega^2)][q^\sigma + a(\omega^2 + W_2^2)]} = \\
& = \int dx \int \frac{d\vec{q} d\omega}{[q^\sigma + a\omega^2 + axW_1^2 + a(1-x)W_2^2]^2} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \int dx \int \frac{d\vec{q}}{[q^\sigma + axW_1 + a(1-x)W_2^2]^{\frac{3}{2}}} = \\
& = \Omega \frac{1}{\sigma\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{3\sigma-2d}{2\sigma}\right) a^{\frac{2d-3\sigma}{2\sigma}} \int dx [xW_1^2 + (1-x)W_2^2]^{\frac{2d-3\sigma}{2\sigma}}.
\end{aligned}$$

O procedimento para  $\Gamma^{(3)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$  é similar ao aplicado acima. Perfazendo os cálculos, temos que as funções de vértice a serem renormalizadas serão dadas por:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)} &= k^\sigma + a(W_1^2 + W_2^2) - (n-2)\lambda^2\beta\Omega \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) \times \\
&\quad \times \frac{1}{2d-\sigma} \frac{a^{\frac{2d-3\sigma}{2\sigma}}}{\sqrt{a}} \frac{W_1^{\frac{2d-\sigma}{\sigma}} - W_2^{\frac{2d-\sigma}{\sigma}}}{W_1^2 - W_2^2} \\
\Gamma^{(3)} &= \lambda + (n-3)\lambda^3\beta\Omega \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) \frac{1}{2\sigma} \kappa^{d-\frac{5}{2}\sigma} \\
\Gamma^{(2,1)} &= 1 + (n-2)\lambda^2\beta\Omega \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) \frac{1}{2\sigma} \kappa^{d-\frac{5}{2}\sigma}.
\end{aligned}$$

### 2.3.2.1 Divergência e Renormalização

Devemos, agora, analisar a dimensionalidade crítica desse sistema. A anisotropia entre momentum e frequência nos leva a escalar essas variáveis de formas diferentes. Os componentes do sistema terão a seguinte dimensionalidade com relação à escala fundamental de momen-

tum:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{H}] &\sim \Lambda^0 \\
 [q] &\sim \Lambda^1 \\
 [\omega] &\sim \Lambda^{\frac{\sigma}{2}} \\
 [\beta] &\sim \Lambda^{-\frac{\sigma}{2}} \\
 [\lambda] &\sim \Lambda^{\frac{3\sigma-d}{2}} \\
 [a] &\sim \Lambda^0 \\
 [\mathcal{Q}_{\alpha\beta}] &\sim \Lambda^{-\frac{1}{2}(d+2\sigma)},
 \end{aligned}$$

de onde tiramos a dimensionalidade crítica

$$[\beta\lambda^2] \sim \Lambda^{\frac{5\sigma-2d}{2}} \sim \Lambda^\epsilon$$

com

$$\epsilon = d_c - d = \frac{5}{2}\sigma - d.$$

Como na parte de curto alcance, considerando primeiro as funções de vértice  $\Gamma^{(3)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ , temos que a parte divergente será dada pela função gama

$$\Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \sim \frac{\sigma}{\epsilon}$$

e, para a função  $\Gamma^{(2)}$ , será dada por

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{\sigma} - 1\right) \sim -\frac{\sigma}{\epsilon}.$$

Como de praxe, definimos as funções de renormalização da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Omega \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{\sigma}\right)} \sqrt{\beta} \lambda &\equiv \kappa^{\frac{5\sigma-2d}{4}} u_0 = \kappa^{\frac{5\sigma-2d}{4}} u [1 + a_1 u^2] \\ Z_\phi &= 1 \\ Z_{\phi^2} &= 1 + b_1 u^2 \\ a &= 1 + c_1 u^2. \end{aligned}$$

No caso de longo alcance, a renormalização de  $\Gamma^{(2)}$  será simplificada, pois é necessário redefinir apenas a constante  $a$ . Temos, então, que

$$\Gamma_R^{(2)} = k^\sigma + (W_1^2 + W_2^2) + u^2 (W_1^2 + W_2^2) \left[ c_1 + \frac{1}{2\sigma} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) \right]$$

de onde vem que

$$c_1 = \frac{1}{2\epsilon}.$$

O acoplamento será dado por

$$\Gamma_R^{(3)} = \frac{u}{\sqrt{\beta}} \left\{ 1 + u^2 \left[ a_1 - \frac{3}{2\sigma} \Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) \right] \right\}.$$

Consequentemente

$$a_1 = \frac{3}{2\epsilon}.$$

E, por último,

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2,1)} &= 1 + u^2 \left[ b_1 - \frac{1}{\sigma} \Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{d}{\sigma}\right) \right] \\ b_1 &= \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

O conjunto de funções de renormalização será, então, dado por

$$\begin{aligned} u_0 &= u \left[ 1 + \frac{3}{2\epsilon} u^2 \right] \\ Z_\phi &= 1 \\ Z_{\phi^2} &= 1 + \frac{1}{\epsilon} u^2 \\ a &= 1 + \frac{1}{2\epsilon} u^2. \end{aligned}$$

### 2.3.2.2 Equações do Grupo de Renormalização

Embora muito semelhante ao caso de curto alcance, surgem, no presente caso, modificações nos expoentes críticos que são extraídos através das equações do grupo de renormalização. Isso porque o momentum e a frequência possuem diferentes escalas. Devemos considerar a equação

$$\left[ -\frac{N}{2} \gamma_\phi(u) + y_i \frac{\alpha(u)}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial \kappa} + \gamma_{\phi^2}(u) \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, y_i; \mu, u, \kappa) = 0, \quad (2.86)$$

onde  $\beta(u)$ ,  $\gamma_\phi(u)$ ,  $\gamma_{\phi^2}(u)$  e  $\alpha(u)$  estão definidos, respectivamente, em (2.73), (2.74), (2.75) e (2.76). É importante lembrar que  $\mu$ , o parâmetro que mede a distância entre o atual estado do sistema e a transição, escala da seguinte maneira:

$$[\mu] \sim \Lambda^\sigma.$$

No ponto fixo, temos que a solução da equação (2.86) é

$$\Gamma_R^N(k_i, y_i; \mu, \kappa) = \kappa^{\frac{1}{2}N\gamma_\phi(u^*)} \mathcal{F}^{(N)} \left( k_i, \kappa y_i^{-\frac{2}{\alpha(u^*)}}, \kappa \mu^{-\frac{1}{\gamma_{\phi^2}(u^*)}} \right).$$

Fazendo um reescalonamento, obtemos:

$$\Gamma_R^N(\rho^{-1}k_i, \rho^{-\frac{\sigma}{2}}y_i; \rho^{-\sigma}\mu, \rho^{-1}\kappa) = \kappa^{\frac{1}{2}N\gamma_\phi} \rho^{-\frac{1}{2}N\gamma_\phi} \mathcal{F}^{(N)}\left(\rho^{-1}k_i, \rho^{-1}\kappa \rho^{\frac{\sigma-2}{\alpha}} y_i^{-\frac{2}{\alpha(u^*)}}, \rho^{-1}\kappa \rho^{\frac{\sigma}{\gamma_\phi^2}} \mu^{-\frac{1}{\gamma_\phi^2(u^*)}}\right).$$

Substituindo

$$\rho = \kappa^{-\frac{\gamma_\phi^2}{\sigma-\gamma_\phi^2}} \mu^{\frac{1}{\sigma-\gamma_\phi^2}}$$

temos que

$$\Gamma_R^N(k_i, y_i; \mu, \kappa) = \rho^{N+d-\frac{1}{2}N(d+\gamma_\phi)} \kappa^{\frac{1}{2}N\gamma_\phi} \mathcal{F}^{(N)}\left(\kappa^{\frac{\gamma_\phi^2}{\sigma-\gamma_\phi^2}} \mu^{-\frac{1}{\sigma-\gamma_\phi^2}} k_i, \kappa^{\frac{\gamma_\phi^2}{\sigma-\gamma_\phi^2}} \kappa^{-\frac{\sigma\gamma_\phi^2}{\alpha(\sigma-\gamma_\phi^2)}} \left[\mu^{\frac{\alpha-\sigma}{2(\sigma-\gamma_\phi^2)}} y_i\right]^{-\frac{2}{\alpha}}\right),$$

onde identificamos

$$\begin{aligned} \xi &\sim \mu^{-\nu} = \mu^{-\frac{1}{\sigma-\gamma_\phi^2}} \\ \xi_\tau &\sim \mu^{-z\nu} = \mu^{-\frac{\sigma-\alpha}{2(\sigma-\gamma_\phi^2)}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \nu^{-1} &= \sigma - \gamma_\phi(u^*) \\ z &= \frac{1}{2}[\sigma - \alpha(u^*)]. \end{aligned}$$

### 2.3.2.3 Funções de Wilson e Pontos Fixos

Seguindo a mesma prescrição aplicada no caso de curto alcance, calculamos as funções de Wilson do sistema:

$$\begin{aligned}\beta(u) &= -\frac{\epsilon}{2}u \left[1 - 3\frac{u^2}{\epsilon}\right] \\ \gamma_\phi(u) &= 0 \\ \gamma_{\phi^2}(u) &= u^2 \\ \alpha(u) &= -\frac{1}{2}u^2.\end{aligned}$$

Os pontos fixos do sistema serão dados pela solução da equação

$$1 - 3\frac{u^{*2}}{\epsilon} = 0.$$

Portanto, os pontos fixos são

$$\begin{aligned}u^* &= 0 \\ u^{*2} &= \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

### 2.3.2.4 Estabilidade dos Pontos Fixos e Expoentes Críticos

Vamos agora estudar a estabilidade dos pontos fixos encontrados para o sistema de longo alcance. Analizamos, primeiramente, o ponto fixo gaussiano. A equação diferencial a ser analisada é

$$\begin{aligned}-\frac{\epsilon}{2}(u - u^*) &= \frac{du(s)}{ds} \\ u(s) - u^* &\approx e^{-\frac{\epsilon}{2}s}.\end{aligned}$$

Quando  $s \rightarrow -\infty$ ,  $\epsilon$  deve ser menor que 0 para garantir a estabilidade do sistema e fazer com que o acoplamento  $u(s) \rightarrow u^*$ . Então, o ponto fixo gaussiano é estável para dimensões maiores do que a dimensão crítica do sistema, e os expoentes críticos serão dados por campo médio.

No caso do ponto fixo não-trivial, temos que

$$\begin{aligned}\epsilon(u - u^*) &= \frac{du(s)}{ds} \\ u(s) - u^* &\approx e^{\epsilon s}\end{aligned}$$

isto é, para  $s \rightarrow -\infty$ , precisamos ter  $\epsilon > 0$  para que o sistema seja estável, o que significa que o regime de estabilidade se encontra nos valores de dimensão menores do que o valor crítico  $d_c = \frac{5}{2}\sigma$ . Nesse caso, os expoentes críticos serão

$$\begin{aligned}\eta &= 2 - \sigma \\ \nu^{-1} &= \sigma - \frac{\epsilon}{3} \\ z &= \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{12}\epsilon.\end{aligned}$$

### 2.3.2.5 Discussão

Considerando o modelo esférico quântico de vidros de spin com interação de longo alcance, observamos uma semelhança com o seu correspondente clássico (23): em ambos não há correção relevante para a função de dois pontos  $\Gamma^{(2)}$  por parte de momentum. Porém, no caso quântico, é necessário introduzir uma correção na parte dinâmica do sistema, que é implementada renormalizando a constante  $a$ . Como não há singularidade por parte de momentum, podemos escolher o seguinte ponto de simetria:  $\vec{k} = 0$  e  $W_1 = W_2 = \kappa$ . Fazendo essa escolha, o cálculo da função de vértice de dois pontos pode ser levado a cabo sem grandes dificuldades.

A ausência da correção por parte de momentum nos leva à função de renormalização

$Z_\phi = 1$ , o que, em grupo de renormalização, implicaria  $\eta = 0$ . Entretanto, inspecionando a função  $\Gamma_0^{(2)} = G_0^{(2)-1}$ , notamos que o decaimento dessa função de correlação não está de acordo com a escala esperada por contagem dimensional ( $G^{(2)} \sim \kappa^{-2+\eta}$ ). Desse modo, concluímos que  $\eta = 2 - \sigma$ .

Renormalizando a constante acoplada à dinâmica do sistema ( $a$ ), encontramos correções para o expoente dinâmico  $z$  através da nova função de Wilson  $\alpha(u)$  introduzida neste trabalho.

O modelo aqui considerado foi estudado diretamente a partir do Hamiltoniano quântico de vidro de spin proposto por Schukla (25), usando o formalismo de integrais de caminho de Feynman e o modelo esférico proposto por Kac (19). A abordagem feita anteriormente por Amit Dutta (4) segue o caminho do trabalho de Sachdev (3). Dutta monta uma ação para o modelo, tomando, como ponto de partida, a ação de Sachdev e adicionando termos de correção para o novo potencial de longo alcance.

As conclusões de Dutta são similares às de Sachdev, as quais, por sua vez, são diferentes das conclusões que obtivemos neste trabalho. Novamente, encontramos um ponto fixo não trivial estável para dimensões inferiores a  $d_c = \frac{5\sigma}{2}$ , dimensionalidade crítica encontrada no desenvolvimento da teoria. Dutta não encontra ponto fixo não trivial estável, e sua dimensionalidade crítica é diferente.

# Capítulo 3

## Conclusão

Estudamos as propriedades críticas do modelo esférico quântico de vidros de spins com potencial de longo alcance, usando grupo de renormalização e expansão diagramática a ordem 1 loop.

Partimos do Hamiltoniano de vidros de spin para rotores quânticos, utilizando o modelo esférico. Derivando as propriedades de tal sistema, deparamo-nos com a separação da função de partição em duas partes: uma parte correspondente ao campo médio e outra parte contendo as flutuações.

Os resultados de campo médio estão de acordo com a literatura corrente (22, 32). Dando um passo além, estabelecemos a linha de transição quântica do sistema estudado. O paramagneto quântico repousa sobre o eixo  $1/I$  para valores de  $1/I > 1/I_c$ , como usual.

A teoria não permitiu que a simetria translacional temporal fosse considerada, e se fez necessário o uso de campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$  dependentes de dois tempos (frequências) independentes. Essa peculiaridade levou ao desenvolvimento de uma estrutura diagramática levemente modificada em comparação com a estrutura clássica (ver, por exemplo, (6)), porém análoga no tratamento.

Os diagramas introduzidos neste trabalho são semelhantes àqueles introduzidos por Read *et al.* (3); entretanto, a estrutura diagramática aqui apresentada é um tanto mais simples, devido à ausência dos campos considerados em (3). Esses campos são provenientes de misturas entre a parte diagonal do parâmetro de ordem  $\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}$  e a parte não-diagonal  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ , o que não ocorre no presente estudo. Nosso desenvolvimento nos levou à separação da função de partição em uma parte de campo médio, com campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}$ , e uma parte perturbativa, com campos  $\mathcal{Q}_{\alpha\neq\beta}$ . A mistura de ambos levaria a resultados infrutíferos, uma vez que  $\mathcal{Q}_{\alpha\alpha}$  não poderia ter momentum igual a zero, resultando em diagramas não divergentes, irrelevantes ao estudo das propriedades críticas do sistema. Essa diferença se deve à presença da supersimetria de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin no modelo esférico (22), que tem por consequências um parâmetro de ordem de vidros de spin nulo e o desacoplamento entre os elementos diagonais do campo  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$  e os elementos não-diagonais,  $\mathcal{Q}_{\alpha\neq\beta}$ , tornando possível a separação da função de partição. Por outro lado, o modelo de  $M$ -componentes não apresenta essa supersimetria. Devido a essas diferenças, acreditamos que os problemas estejam em classes de universalidade distintas.

- Curto Alcance

Calculamos as funções de vértice relevantes ao problema em teoria de perturbações até ordem 1 loop. Encontramos um fator de contagem diferente daquele apresentado em (10) para a função  $\Gamma^{(3)}$ . Isso leva à alteração de todas as funções de renormalização, e, conseqüentemente, de todos os expoentes críticos. Acreditamos que a contagem dos diagramas aqui apresentados também seja válida para o caso clássico dos vidros de spin.

O cálculo das propriedades do sistema foi feito partindo de primeiros princípios, e não tomando por base considerações fenomenológicas sobre o comportamento esperado do sistema (3). No tratamento proposto, foi necessária a introdução de uma nova constante renormalizável, que levou a correções no expoente dinâmico  $z$ , diferentemente do que foi apresentado em trabalhos anteriores (2, 3, 4, 8, 9). A presença inevitável da dinâmica do sistema implica

a definição de “dimensão efetiva” (1), que, aqui, é simplesmente  $D = d + 1$  para o caso de curto alcance, e não  $D = d + z$ , como proposto em (1).

Na renormalização das funções de vértice, notamos haver diferença entre o coeficiente do momentum e o coeficiente da frequência, característica que acaba por forçar a renormalização da constante  $a$ . Foi necessário deduzir de novas equações de grupo de renormalização, equações essas que nos levaram a correções do expoente dinâmico  $z$  através da renormalização da constante  $a$ , ao contrário do que foi proposto em trabalhos anteriores, nos quais  $z$  é fixo e igual a 1 (3, 4) e não há nenhuma constante diretamente ligada às correções de  $z$ .

Foi encontrado um ponto fixo estável não-Gaussiano para o sistema, cujos expoentes críticos são dados por

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{1}{15}\epsilon \\ \nu &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\epsilon \\ z &= 1 + \frac{1}{15}\epsilon\end{aligned}$$

valores que estão próximos daqueles calculados por método de Monte Carlo para vidros de spin de Ising em campo transversal (30, 31). A escala para a susceptibilidade estática apresentada pelo modelo é  $\gamma = \nu(2 - \eta)$ , o que também concorda com os modelos numéricos.

Conforme já mencionado, é difícil comparar os resultados obtidos nesse estudo com aqueles apresentados em (3), uma vez que são problemas distintos. No trabalho citado, o modelo abordado é outro, a dimensionalidade crítica é 8, não há ponto fixo não-Gaussiano estável, e os expoentes críticos são diferentes. Por isso, acreditamos que os problemas pertençam a classes de universalidade distintas.

- Longo Alcance

No estudo do modelo esférico de vidros de spins quântico com interação de longo alcance

( $\sigma < 2$ ), mostramos que o termo de curto alcance é irrelevante, podendo ser considerado apenas o termo proporcional a  $q^\sigma$ . Os diagramas são análogos àqueles obtidos no caso de curto alcance, mas com propagador diferente.

O ponto de simetria escolhido para o cálculo das funções de vértice é o ponto  $\vec{k} = 0$ , com  $W_1 = W_2 = \kappa$ . Essa escolha é justificada pela não-divergência das funções no ponto  $\vec{k} = 0$ , graças à presença da frequência. A dimensionalidade crítica encontrada para o sistema é  $d_c = \frac{5}{2}\sigma$ .

Ao calcular a função de vértice de dois pontos, mostramos que não há necessidade de renormalizar a função a fim de corrigir a contribuição em momentum, ou seja,  $Z_\phi = 1$ . Entretanto, foi necessária a redefinição da constante  $a$  para que a função se mantivesse finita. Essa redefinição está diretamente relacionada a correções no expoente crítico  $z$ .

Na ausência de correções por parte de momentum em  $\Gamma^{(2)}$ , a única correção para o expoente  $\eta$  vem diretamente da dimensionalidade esperada para a função de vértice em questão. A escala a ser correspondida deve estar de acordo com  $G^{(2)} \sim \kappa^{-2+\eta}$ , ou seja,  $\eta = 2 - \sigma$ .

Calculamos as funções de Wilson do sistema e encontramos um ponto fixo não-gaussiano estável com expoentes críticos

$$\begin{aligned}\eta &= 2 - \sigma \\ \nu^{-1} &= \sigma - \frac{\epsilon}{3} \\ z &= \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{12}\epsilon.\end{aligned}$$

o que difere do que foi publicado anteriormente (4). As diferenças entre esses trabalhos mais antigos e o presente trabalho possuem a mesma natureza apontada pelo estudo do modelo de curto alcance. O modelo considerado no presente trabalho é diferente daquele estudado em (4), inclusive na abordagem proposta. Não há muita comparação a ser feita, uma vez

que as semelhanças entre a presente análise e (4) ficam apenas no fato de ambos trabalhos focalizarem o regime quântico. Dutta também conclui que o sistema deve fluir em direção ao ponto fixo gaussiano, pois não há pontos fixos não-triviais estáveis em seu modelo, ao contrário do que é reportado aqui. A dimensionalidade crítica encontrada por Dutta também é diferente, o que é esperado uma vez que os modelos considerados são diferentes.

# Capítulo 4

## Artigos publicados

Apresentamos, nesse capítulo, os links para os dois artigos produzidos durante a produção do presente trabalho (38, 39).

- *Quantum Spherical Spin Glass with Short Range Random Interaction*
- *Quantum Spherical Spin Glass with Inverse Power Law Disorder*

# Referências

- 1 CONTINENTINO, M. A. *Quantum Scaling in Many-Body Systems*. [S.l.]: World Scientific, 2001.
- 2 HERTZ, J. A. Quantum critical phenomena. *Physical Review B*, New York, v. 14, n. 3, p. 1165–1184, Aug. 1976.
- 3 READ, N.; SACHDEV, S. Landau theory of quantum spin glasses of rotors and ising spins. *Physical Review B*, Woodbury, v. 52, n. 1, p. 384–410, July 1995.
- 4 DUTTA, A. Quantum spin glass with long range interactions. *Physical Review B*, Melville, v. 65, n. 22, p. 224427 9, June 2002.
- 5 HUANG, K. *Statistical Mechanics*. 2. ed.. ed. New York: John Wiley, 1987.
- 6 AMIT, D. J.; MARTÍN-MAYOR, V. *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*. 3. ed. Singapore: World Scientific, 2005.
- 7 FISHER, M. E. The renormalization group in the theory of critical behavior. *Reviews of Modern Physics*, New York, v. 46, n. 4, p. 597–616, Oct. 1974.
- 8 SACHDEV, S. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- 9 BELITZ, D.; KIRKPATRICK, T. R.; VOJTA, T. How generic scale invariance influences quantum and classical phase transitions. *Reviews of Modern Physics*, Melville, v. 77, n. 2, p. 579–632, Apr. 2005.

- 10 HARRIS, A. B.; LUBENSKY, T. C.; CHEN, J.-H. Critical properties of spin-glass. *Physical Review Letters*, New York, v. 36, n. 8, p. 415–418, Feb. 1976.
- 11 KIRKPATRICK, S.; SHERRINGTON, D. Infinite-ranged models of spin-glasses. *Physical Review B*, New York, v. 17, n. 11, p. 4384–4403, June 1978.
- 12 KOSTERLITZ, J. M.; THOULESS, D. J.; JONES, R. C. Spherical model of a spin-glass. *Physical Review Letters*, New York, v. 36, n. 20, p. 1217–1220, May 1976.
- 13 FISCHER, K. H.; HERTZ, J. A. *Spin Glasses*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- 14 BÉAL-MONOD, M. T. Paramagnons in wilson theory. *Solid State Communications*, New York, v. 14, n. 8, p. 677–679, Apr. 1974.
- 15 FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- 16 SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 1999.
- 17 NEGELE, J. W.; ORLAND, H. *Quantum Many-Particle Systems*. Reading: Addison-Wesley, 1988.
- 18 ONSAGER, L. Crystal statistics i: A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, New York, v. 65, n. 3/4, p. 117–149, Feb. 1944.
- 19 BERLIN, T. H.; KAC, M. The spherical model of a ferromagnet. *The Physical Review*, New York, v. 86, n. 6, p. 821–835, June 1952.
- 20 EDWARDS, S. F.; ANDERSON, P. W. Theory of spin glasses. *Journal of Physics F*, London, v. 5, n. 5, p. 965–974, May 1975.
- 21 THEUMANN, A. Superalgebra and the spherical model of a spin glass. *Journal of Physics A*, Bristol, v. 20, n. 1, p. 25–34, Jan 1987.

- 22 MENEZES, P. C.; THEUMANN, A. Quantum spherical spin glass: Supersymmetry and annealing. *Physical Review B*, Melville, v. 75, n. 2, p. 024433 7, Jan. 2007.
- 23 CHANG, M. C.; SAK, J. Spin-glass with long-range random exchange interaction. *Physical Review B*, Melville, v. 29, n. 5, p. 2652–2654, Mar. 1984.
- 24 VIANA, L.; BRAY, A. J. Phase diagrams for dilute spin glasses. *Journal of Physics C*, Bristol, v. 18, n. 15, p. 3037–3051, May 1985.
- 25 SHUKLA, P.; SINGH, S. A quantum spherical model of spin glass. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 81, n. 8, p. 477–479, Feb. 1981.
- 26 GUSMÃO, M. A.; THEUMANN, W. K. Validity of the long-range expansion in the m-vector model. *Physical Review B*, New York, v. 28, n. 11, p. 6545–6547, Nov. 1983.
- 27 WU, W.; BITKO, D.; ROSENBAUM, T. F. Quenching of the nonlinear susceptibility at a  $t=0$  spin glass transition. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 71, n. 12, p. 1919–1922, Sept. 1993.
- 28 KAO, Y.-J. et al. History-dependent phenomena in the transverse ising ferroglass: The free-energy landscape. *Physical Review B*, Melville, v. 64, n. 6, p. 060402 4, Aug. 2001.
- 29 PANG, T. *An Introduction to Computational Physics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- 30 RIEGER, H.; YOUNG, A. P. Zero-temperature quantum phase transition of a two-dimensional ising spin glass. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 72, n. 26, p. 4141–4144, June 1994.
- 31 GUO, M.; BHATT, R. N.; HUSE, D. A. Quantum critical behavior of a three-dimensional ising spin glass in a transverse magnetic field. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 72, n. 26, p. 4137–4140, June 1994.

- 32 YE, J.; SACHDEV, S.; READ, N. Solvable spin glass of quantum rotors. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 70, n. 25, p. 4011–4014, June 1993.
- 33 STANLEY, H. E. Spherical model as the limit of infinite spin dimensionality. *Physical Review*, New York, v. 176, n. 2, p. 718–722, Dec. 1968.
- 34 MEZARD, M.; PARISI, G.; VIRASORO, M. A. *Spin Glass Theory and Beyond*. Singapore: World Scientific, 1993.
- 35 ALMEIDA, J. R. L. de. et al. The infinite-ranged spin glass with m-component spins. *Journal of Physics C*, Bristol, v. 11, n. 21, p. L871–L875, Nov. 1978.
- 36 KOTLIAR, G.; ANDERSON, P. W.; STEIN, D. L. One-dimensional spin-glass model with long-range random interactions. *Physical Review B*, New York, v. 27, n. 1, p. 602–605, Jan. 1983.
- 37 JOYCE, G. S. Spherical model with long-range ferromagnetic interaction. *Physical Review*, v. 146, n. 1, p. 349–358, June 1966.
- 38 MENEZES, P. C.; THEUMANN, A. Quantum spherical spin glass with random short-range interactions. *Physical Review B*, v. 78, n. 5, p. 054444 8, Aug. 2008.
- 39 MENEZES, P. C.; THEUMANN, A. Quantum spherical spin glass with inverse power-law disorder. *Physical Review B*, Melville, v. 79, n. 9, p. 094412 6, Mar. 2009.