

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS

**MODELO HIDRODINÂMICO E DE TRANSPORTE BIDIMENSIONAL DE GRADE  
NÃO ESTRUTURADA PARA LAGOS RASOS**

**FÁBIO FARIAS PEREIRA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental.

**Orientador: Walter Collischonn**  
**Co-orientador: David da Motta Marques**

**Banca Examinadora**

Prof. Dr<sup>a</sup>. Marie-Paule Bonnet

IRD, França

Prof. Dr. Daniel G. Allasia

Depto. de Eng. Sanitária e Ambiental - UFSM

Prof. Dr<sup>a</sup>. Edith B. C. Schettini

IPH/UFRGS

Porto Alegre, janeiro de 2010

# Agradecimentos

À Deus e Nossa Senhora, que são os maiores responsáveis pela realização deste trabalho.

Aos meus pais e a toda a minha família que, mesmo sem muito entender o que é seguir uma carreira acadêmica e suas dificuldades, me deram o apoio incondicional nas minhas escolhas.

Ao Prof. Walter Collishonn pela amizade, orientação, ensinamentos passados e, principalmente, pelo exemplo de dedicação à ciência. Sempre prestativo, agradeço toda a bagagem científica que me foi passada.

Ao Prof. David M. L. da Motta Marques pelos ensinamentos, incentivos e orientação na área de Limnologia, fundamentais no decorrer desta pesquisa. Agradeço sinceramente toda confiança e apoio integral.

Ao Prof. Carlos Ruberto Fragoso Jr por toda sua paciência, orientação, companheirismo e amizade. Tive a honra e o prazer trabalhar com esta extraordinária pessoa durante meu mestrado.

Aos amigos Leandro, Thiago, Tiago Finkler, Eliete, Lúcia, Vanessa, Luciana Crosseti, Christopher, Diogo, Nilson, Regina, Angélica, Claudinéia, Francisco, Martin, Rodrigo, Adriano, Sidnei e Karina pelo companheirismo nos bons e maus momentos compartilhados durante este mestrado e pelas valiosas discussões que enriqueceram essa dissertação.

Aos outros amigos cultivados no Instituto de Pesquisas Hidráulicas e aqueles que conquistei ao longo de minha vida onde encontrei o refúgio, carinho e o apoio necessário.

Aos professores do CTEC/UFAL pelo exemplo de dedicação, profissionalismo e amizade, em especial ao professor Roberaldo Carvalho de Souza pelo incentivo ao trabalho na área de Recursos Hídricos e à formação científica e profissional que me foi passada durante o curso de Engenharia Civil.

# Resumo

Devido à proximidade de grandes cidades, ecossistemas aquáticos são alvos de despejos industriais, esgotos domésticos e resíduos sólidos. Modelos matemáticos são largamente utilizados para entender os padrões de fluxo e o transporte de substâncias nestes ecossistemas. Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo hidrodinâmico e de transporte de poluentes bidimensional para corpos d'água rasos que utiliza grades não estruturadas. O modelo foi desenvolvido em dois módulos: hidrodinâmico e de transporte de massa. O módulo hidrodinâmico utiliza as equações completas de Saint Venant para quantificação da circulação em corpos d'águas. No módulo hidrodinâmico aqui desenvolvido é feito um aperfeiçoamento de um esquema semi-implícito de diferenças finitas utilizado no modelo IPH-ECO para um esquema semi-implícito de volumes finitos. O módulo de transporte de massa, por sua vez, representa o transporte de um escalar conservativo sob influência dos processos físicos do meio. Dois esquemas foram empregados e comparados para a solução numérica da equação de transporte: um esquema de diferenças centrais e um esquema com limitador de fluxo.

O modelo foi aplicado em um estudo de caso simplificado formado por uma lagoa circular e no rio Guaíba. O módulo hidrodinâmico foi avaliado através de testes de conservação de volume feitos comparando com os resultados encontrados no modelo IPH-ECO na aplicação realizada na lagoa circular e na solução analítica no rio Guaíba. O módulo hidrodinâmico do modelo de grades não estruturadas (IPH-UnTRIM2D) mostrou-se mais conservativo que o modelo IPH-ECO em todos os cenários simulados na lagoa circular. A solução hidrodinâmica e de transporte do modelo de grades não estruturadas no estudo de caso idealizado no rio Guaíba representou meandros, sulcos, estreitamentos e alargamentos de canais com comprometimento com uma situação real.

Quanto à simulação de transporte de escalares e poluentes, foi comprovada a eficiência do esquema com limitador de fluxo sobre os esquemas de diferenças centrais. Os testes de conservação de massa para diferentes cenários no rio Guaíba indicaram erros pouco significativos em ambos os esquemas quando comparados com a ordem de grandeza do ecossistema.

Palavras-chave: modelo hidrodinâmico; rio Guaíba; UNTRIM; transporte de massa.

# Abstract

Aquatics ecosystems around large towns are always exposed waste domestic and industrial and solid residues. Mathematical models are widely used to understand flow patterns and transport of mass in these ecosystems. In this work a model was developed on unstructured two-dimensional complex dynamic model for shallow lakes. The model was divided in two modules: (a) hydrodynamic module, describing quantitative flows and water level; (b) a mass transport module. The hydrodynamic module solves Saint Venant equations to quantify water circulation in a water body. Furthermore, the hydrodynamic module was improved to semi-implicit finite volume scheme. The mass transport module represents transport of a conservative scalar under the physical processes influence. Two schemes were used and compared to the transport equation numerical solution : a central difference scheme and a flux limiter scheme. The model was applied in the circular lake and river Guaíba.

The hydrodynamic module was validated by evaluating tests of volume conservation made comparing with results of the model IPH-ECO and analytical solution. It proved to be more conservative than the model IPH-ECO in all scenarios simulated in the circular lake.

The hydrodynamic and transport solution in river Guaíba study case represented bends, grooves, and channels widening and narrowing. In the transport simulation, the flux limiter scheme was more efficient than central differences scheme. Furthermore, mass conservation tests for different scenarios in Guaíba indicated minor errors in both schemes when compared with ecosystem magnitude.

Keywords: hydrodynamic model; river Guaíba; UNTRIM; mass transport.

# Lista de Figuras

Figura 1 - Esquema do nível da água em um lago ou estuário e a seiche (flutuação do nível). .....	17
Figura 2 - Características das ondas. ....	18
Figura 3 - Circulação helicoidal de Langmuir em um lago raso (adaptado de Horne e Goldman, 1994). ....	20
Figura 4 – Esquema da variação do nível da superfície livre (extraído de Fragoso Jr, 2005)..	22
Figura 5 – Fluxograma com os processos de cálculos do modelo. ....	30
Figura 6 – Conectividade característica entre dois polígonos de uma grade mista e ortogonal (Fonte: BAW, 2004). ....	31
Figura 7 - Grade não-estruturada ortogonal formada por regiões com diferentes resoluções (extraído de BAW, 2004). ....	32
Figura 8 -. Grade não-estruturada ortogonal e notação utilizada (extraído de Casulli, 2002)..	33
Figura 9 - Grades estruturadas ortogonais (extraído de BAW, 2004). ....	33
Figura 10 – Esquema ilustrativo do método Eurliano-Lagrangiano para grades não estruturadas. ....	34
Figura 11 – Esquema de um polígono e as áreas de influências de seus lados. ....	36
Figura 12 – Esquema de um polígono e as distâncias de influência entre suas faces e a partícula fluída. ....	37
Figura 13 – Domínio e discretização espacial numa malha retangular da lagoa circular. ....	47
Figura 14 – Localização da condição de contorno de velocidade na lagoa circular. ....	48
Figura 15 – Variação temporal da condição de entrada de velocidade na lagoa circular.....	49
Figura 16 – Evolução dos campos de velocidade para o cenário 1 na lagoa circular usando o IPH-ECO (a, d) e o IPH-UnTRIM2D (b, c, e, f). ....	50
Figura 17 – Lançamento e acompanhamento da posição de 5 derivadores (bóias) na lagoa circular para as condições de contorno do cenário 01. ....	53
Figura 18 – Erro na conservação de volume com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D para o cenário 01 (vermelho). ....	55

Figura 19 – Variação do nível médio com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) no cenário 01.....	55
Figura 20 – Variação temporal da condição de entrada de velocidade na lagoa circular.....	56
Figura 21 – Campos de velocidade para o cenário 2 na lagoa circular usando o IPH-ECO (a, d) e o IPH-UnTRIM2D (b, c, e, f).....	58
Figura 22 – Trajetória de 5 derivadores na lagoa circular para o cenário 02. ....	60
Figura 23 – Erro na conservação de volume com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) para as condições de contorno do cenário 02.....	61
Figura 24 – Variação do nível médio com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) no cenário 02.....	62
Figura 25 – Variação da intensidade do vento na superfície da lagoa circular para o cenário 03. ....	63
Figura 26 – Resultados de gradiente de nível e campo de velocidades na lagoa circular submetida as condições de contorno do cenário 03 calculados com o modelo IPH-ECO (a, d) e IPH-UNTRIM2D (b, c, e, f). ....	64
Figura 27 – Deslocamento dos derivadores sob ação do vento em 1 dia de simulação. ....	65
Figura 28 – Erro na conservação de volume com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) para o cenário 03. ....	66
Figura 29 – Variação do nível médio com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) com apenas o vento atuando no sistema. ....	66
Figura 30 – Discretização espacial do rio Guaíba usando uma malha triangular (a) e sua batimetria (b). ....	69
Figura 31 – Resumo das condições de contorno para a simulação de um cenário idealizado no rio Guaíba. ....	72
Figura 32 – Gradiente de velocidade na região do delta do Jacuí. À esquerda indica informações gerais sobre a simulação, como: intervalo de tempo, nível, a direção do vento e a oscilação da seixe na superfície da água entre o extremo norte e o extremo sul do rio Guaíba. ....	73
Figura 33 – Vetores indicando o padrão de circulação da água no delta do Jacuí após 5 horas de vento predominante de Sudoeste. ....	74
Figura 34 – Erro de conservação de volume para a simulação hidrodinâmica no rio Guaíba. ....	75

Figura 35 – Distribuição de partículas (traçadores virtuais) no início e no final da simulação (230 horas considerando o vento observado em março de 2009).....	77
Figura 36 – Mancha de concentração de material suspenso oriundo do rio Jacuí ao final de 312 horas de simulação no rio Guaíba considerando vento observado em março de 2009 usando o esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo. Células onde os valores de concentração são maiores ou iguais a $5 \text{ g/m}^3$ são apresentadas em vermelho, iguais ou menores a $1 \text{ g/m}^3$ são indicados pela cor azul e o valor intermediário ( $3 \text{ g/m}^3$ ) é plotado em amarelo. ....	79
Figura 37 – Comparação entre a conservação de massa com esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo para o primeiro cenário de simulação do transporte. ....	80
Figura 38 – Evolução do pulso de 10 horas de um material suspenso proveniente do rio Jacuí ao final de 72 horas de simulação no rio Guaíba considerando vento observado em março de 2009 usando o esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo.....	82
Figura 39 – (a) localização da célula onde foram monitorados os índices de concentração do pulso de efluente lançado no Jacuí; (b) variação da concentração no meio da seção transversal do canal no delta para ambos os esquemas de transporte de efluente. ....	83
Figura 40 – Comparação entre a conservação de massa com esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo para o primeiro cenário de simulação do transporte. ....	84

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Principais parâmetros utilizados no módulo hidrodinâmico (extraído de Fragoso Jr, 2005).....	47
Tabela 2 –Descrição dos cenários de simulação na lagoa circular.....	48
Tabela 3 – Vazão média afluyente de cada formador do rio Guaíba .....	71

# Lista de Símbolos

- $A_h$  – coeficiente de viscosidade turbulenta horizontal;
- $c$  – celeridade da onda;
- $C_D$  – coeficiente de arraste do vento;
- $C_{i,j}$  – concentração no polígono  $i$  do lado  $j$ ;
- $C_z$  – coeficiente de atrito de Chezy;
- $f$  – parâmetro de Coriolis;
- $g$  – aceleração da gravidade;
- $g_n$  – coeficiente de ficção na face média  $n$ ;
- $h$  – profundidade medida a partir de um nível de referência;
- $H = h + \eta$  – profundidade total;
- $H_n$  – profundidade total em uma das faces médias  $n$ ;
- $i$  – índice do  $i$ -ésimo polígono de uma grade;
- $i_{(j,1)}$  – índice do polígono de menor índice  $i$  do lado  $j$ ;
- $i_{(j,2)}$  – índice do polígono de maior índice  $i$  do lado  $j$ ;
- $j$  – índice do  $j$ -ésimo lado de uma grade;
- $K_h$  – difusividade escalar horizontal;
- $n$  – índice atribuído ao  $n$ -ésimo passo de tempo;
- $N_p$  – número de polígonos;
- $N_s$  – número de lados;
- $P_i$  – área do  $i$ -ésimo polígono;
- $S_i$  – número de lados do  $i$ -ésimo polígono;
- $s_{i,l}$  – função sinal  $\pm 1$  no  $i$ -ésimo polígono e  $l$ -ésimo lado;
- $t$  – tempo;
- $u$  e  $v$  – componentes da velocidade nas direções  $x$  e  $y$  no plano horizontal, respectivamente;
- $u_j$  – componente normal da velocidade no  $j$ -ésimo lado;
- $v_j$  – componente tangencial da velocidade no  $j$ -ésimo lado;
- $W$  – norma do vetor velocidade do vento;
- $W_x$  e  $W_y$  – componentes do vetor velocidade do vento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;
- $x, y, z$  – coordenadas cartesianas;

$\delta$  – distância entre os centros de polígonos adjacentes;

$\delta_j$  –  $\delta$  no  $j$ -ésimo lado.

$\Delta t$  – intervalo de tempo;

$\Delta x$  e  $\Delta y$  – comprimento da célula nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$\theta$  – ponderador temporal;

$\Phi$  – latitude geográfica;

$\gamma$  – coeficiente de atrito junto ao fundo;

$\eta$  – elevação da superfície da água medida a partir de um nível de referência;

$\tau_x$  e  $\tau_y$  – tensão de cisalhamento devida ao vento na direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

# Sumário

<b>1. Introdução .....</b>	<b>12</b>
1.1. <i>Justificativa</i> .....	12
1.2. <i>Objetivos</i> .....	14
<b>2. Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>15</b>
2.1 <i>Hidrodinâmica em lagos e estuários</i> .....	15
2.2 <i>Modelos hidrodinâmicos</i> .....	20
2.3 <i>Modelos de transporte de massa</i> .....	23
2.3.1 <i>Processos químicos e biológicos</i> .....	25
2.4 <i>Conservação de volume e massa</i> .....	26
<b>3. Descrição do modelo.....</b>	<b>28</b>
3.1 <i>Módulo Hidrodinâmico</i> .....	30
3.1.1 <i>Grade não-estruturada</i> .....	30
3.1.2 <i>Solução numérica</i> .....	33
3.2 <i>Estabilidade do esquema</i> .....	40
3.3 <i>Suposições e validações do algoritmo</i> .....	40
3.4 <i>Condições de contorno hidrodinâmicas</i> .....	41
3.5 <i>Módulo de transporte</i> .....	42
3.5.1 <i>Esquema de diferenças centrais</i> .....	42
3.5.2 <i>Esquemas com limitador de fluxo</i> .....	44
<b>4. Aplicação do modelo .....</b>	<b>46</b>
4.1 <i>Estudo de caso simplificado (lagoa circular)</i> .....	46
4.1.1 <i>Dados de entrada</i> .....	46

4.1.2	Circulação sob efeito de uma entrada de água gradualmente variada.....	48
4.1.3	Circulação sob efeito de uma entrada de água bruscamente variada .....	56
4.1.4	Circulação sob efeito exclusivo do vento.....	62
4.2	<i>Aplicação idealizada no rio Guaíba.....</i>	<i>67</i>
4.2.1	Caracterização do sistema .....	67
4.2.2	Dados de entrada .....	68
4.2.2.1	Discretização espacial e batimetria.....	68
4.2.2.2	Condição de contorno de nível na interface com a Lagoa dos Patos .....	69
4.2.2.3	Dados de vento .....	70
4.2.2.4	Condições de contorno de vazões.....	70
4.2.2.5	Parâmetros de simulação e condição inicial .....	71
4.2.3	Simulação do módulo hidrodinâmico.....	72
4.2.4	Simulação do módulo de transporte .....	77
4.2.4.1	Lançamento permanente de um efluente .....	78
4.2.4.2	Lançamento de um pulso de 10 horas de efluente.....	80
<b>5.</b>	<b>Conclusões e Recomendações.....</b>	<b>85</b>
<b>6.</b>	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>88</b>

## ***Capítulo 1***

# **1. Introdução**

## **1.1. Justificativa**

Ecosistemas aquáticos continentais são geralmente localizados na vizinhança imediata de grandes centros urbanos por oferecerem uma vasta gama de atividades socioeconômicas tais como abastecimento, diluição de efluentes, irrigação, navegação e recreação (Souza e Kjerve, 1997). Ecosistemas tais como rios, lagos e estuários, abrigam grande diversidade de seres, incluindo algas, bactérias, macrófitas, artrópodes (crustáceos e insetos) e vertebrados (Nelson, 1994). Entretanto, atividades antrópicas podem promover indesejáveis impactos no meio, como, por exemplo, o assoreamento, a indisponibilidade hídrica para outros usos da água e a eutrofização (Scheffer et al, 1993; PNRH, 2003). Nesse sentido, é necessário um esforço de otimização entre as aptidões do meio ambiente e a exploração humana através de uma gestão racional (Coutinho, 1986), onde toda a interferência externa, assim como o comportamento hidrodinâmico, químico e biológicos dentro do sistema sejam cuidadosamente estudados, simulados, observados e monitorados com continuidade para evitar o desequilíbrio ambiental nesses corpos d'água.

A circulação da água influencia diretamente a distribuição espacial dos nutrientes e poluentes, bem como a dinâmica dos parâmetros de qualidade da água, como OD, DBO, pH, coliformes fecais e do fitoplâncton (Reynolds, 1994). A ecologia das mais variadas espécies em lagos e estuários está intimamente ligada aos fatores físicos e especialmente às variáveis hidrodinâmicas, como a velocidade, a turbulência e a difusão e convecção de material suspenso (Reynolds, 1984). Entender os processos bioquímicos e biológicos relacionados ao crescimento algal e a sua interação com os nutrientes requer, fundamentalmente, o conhecimento prévio da hidrodinâmica do sistema (Fragoso Jr, 2005).

Ao lado da oscilação natural do nível da água, conhecido como hidroperíodo (Martin e McCutcheon, 1999), a circulação da água desempenha um papel de fundamental importância na estrutura e no funcionamento de ecossistemas aquáticos, sendo responsável pelo transporte de nutrientes, biomassa de organismos, sedimentos e outros constituintes (Paz,

2003; Imboden, 2004). A hidrodinâmica de um corpo d'água é complexa e depende de vários parâmetros que variam no tempo e no espaço tais como densidade, temperatura, vento e pressão. Devido a essa variabilidade, ecossistemas aquáticos são providos dos mais variados organismos em ambientes físicos distintos (Imboden, 2004). Com o intuito de melhor gerenciar esses ecossistemas avaliando seus usos, disponibilidade e preservação, faz-se necessário o uso de metodologias que melhor descrevam esses processos (Tucci, 2005). Uma das metodologias, amplamente difundida na quantificação, permitindo um melhor entendimento da dinâmica do escoamento no ecossistema, é a modelagem hidrodinâmica e de transporte de massa.

Modelos que representam a dinâmica do escoamento em águas rasas vêm sendo sistematicamente desenvolvidos (Cheng et al, 1993; Casulli e Cheng, 1992; Frago Jr, 2005). A maioria destes modelos representa o campo de escoamento em um plano formado por uma grade estruturada regular (i.e. uniforme). No entanto, grades ortogonais estruturadas não são suficientemente flexíveis para ajustar contornos complexos e arbitrários. Métodos numéricos usando coordenadas curvilíneas são propostos no intuito de eliminar limitações encontradas em grades ortogonais estruturadas. Estes métodos são relativamente simples, promovem alta flexibilidade, mas agregam novos termos que frequentemente resultam em erros e/ou instabilidade na discretização do método (van der Molen e Stelling, 1997; Oran e Boris, 1987; Blumberg e Mellor, 1987). Modelos que utilizam grades não estruturadas mostram ser uma boa alternativa frente aos problemas constatados anteriormente (Zhang e Baptista, 2003).

O uso de malhas não-estruturadas para discretização de domínios está cada vez mais presente nos métodos numéricos (Maliska e Vasconcellos, 2000). A facilidade de adaptação destas malhas em geometrias complexas permite a elaboração de refinamentos locais em regiões específicas. Com isso, os esforços computacionais podem ser concentrados em áreas de interesse reduzindo a densidade da malha nas demais áreas. A adaptação de malhas oferece vantagens como o aumento da precisão na solução computacional e a redução do número de elementos na representação de um mesmo contorno (Borouchaki e Frey, 1998; Cheng e Casulli, 2001).

O propósito deste estudo foi estender o modelo de grades estruturadas de esquema semi-implícito Euleriano-Lagrangiano de diferenças finitas (IPH-ECO) desenvolvido por Frago Jr. (2005) e baseado no modelo TRIM (Casulli, 1990) para uma aproximação semi-implícita Euleriana-Lagrangiana de volumes finitos utilizando grades não-estruturadas. Erros

numéricos e de conservação de volume foram avaliados para a solução hidrodinâmica. Por fim, o modelo baseado em grades não estruturadas foi aplicado em um ecossistema real para verificar sua eficiência. Os resultados do modelo de grades não estruturadas foram comparados aos resultados do modelo de grades estruturadas já existente.

## **1.2. Objetivos**

Com base em formulações matemáticas conhecidas (Cheng e Casulli, 2001; Zhang e Baptista, 2003) esta dissertação tem como objetivo geral foi desenvolver um modelo hidrodinâmico e de transporte de massa para corpos d'água rasos, baseado no método dos volumes finitos para discretização e solução utilizando grades não estruturadas.

Os objetivos específicos deste estudo são:

- Comparar e analisar a solução numérica entre o modelo de grades não estruturadas e o modelo de grades estruturadas, ambos desenvolvidos no IPH;
- Aprimorar a solução numérica do módulo de transporte de escalares inserindo um limitador de fluxo (Casulli e Zanolli, 2005) no intuito de minimizar os erros numéricos e, conseqüentemente, conservar a massa;
- Avaliar os erros numéricos produzidos pelo modelo proposto (conservação de volume e de massa) mediante dois métodos de interpolação utilizadas na solução do módulo hidrodinâmico.

## Capítulo 2

# 2. Revisão Bibliográfica

## 2.1 Hidrodinâmica em lagos e estuários

A circulação geral da água de lagos e estuários é causada pelas entradas e saídas de água em locais como entradas de afluentes, canais entre lagoas e ligações com o mar e pelo vento. Em lagos e estuários rasos esta circulação é predominantemente bidimensional na horizontal, isto é, pode ser representada adequadamente em coordenadas horizontais (Fragoso Jr, 2005).

Em geral os rios trazem a maior parte dos nutrientes e sedimentos para o interior dos lagos, por isso, a circulação originada pelas entradas destes afluentes é particularmente importante (Collischonn e Motta Marques, 2003). As velocidades de escoamento também tendem a ser maiores onde existem entradas ou saídas. Estuários em contato com o oceano, por outro lado, podem receber entradas de água salgada, com características distintas de densidade, turbidez e concentração de nutrientes (Motta Marques, 2003; Collischonn, 2005).

A forma em planta e as diferenças na profundidade dos lagos e estuários condicionam fortemente a circulação da água. Canais mais profundos no interior de um estuário ou lago podem concentrar bastante o escoamento e locais que restringem o escoamento de alguma forma, como ilhas ou pontais, podem gerar zonas de velocidade mais elevada (Rosauero, 1979; Siveira, 1986).

A força de Coriolis, embora não possa causar o movimento da água, é importante porque pode modificar, significativamente, a direção do movimento da água, especialmente em lagos e estuários grandes (Csanady, 1975; Collischonn, 2005). A força de Coriolis é uma força aparente que surge porque analisamos o escoamento fixando o referencial à Terra, que está em movimento de rotação. A Terra completa uma rotação por dia, o que corresponde a uma velocidade de aproximadamente  $1660 \text{ km.h}^{-1}$  na latitude zero (Equador). Mas, à medida que a latitude cresce, a velocidade de rotação da Terra corresponde a uma velocidade menor sobre a superfície. Assim, um objeto em repouso na linha do Equador tem, na realidade, uma velocidade de  $1660 \text{ km.h}^{-1}$  na direção de rotação da terra e um objeto em repouso na latitude

30° S tem, na realidade, uma velocidade de 1437 km.h<sup>-1</sup>. Se o primeiro objeto deixar a linha do Equador e for transferido imediatamente para a latitude 30° S, ele terá uma velocidade 223 km.h<sup>-1</sup> superior na direção de rotação da Terra do que objeto em repouso aparente (Halliday et al, 1993). Assim, o resultado é que, no hemisfério Sul, os fluidos escoando para o Sul são desviados para Leste e os fluidos escoando para o Norte são desviados para Oeste, ou seja, os escoamentos são sempre desviados para o sentido anti-horário no hemisfério Sul.

Os efeitos da força de Coriolis tornam-se significativos em lagos maiores do que 5. $r_c$ ; onde  $r_c$  é um raio característico da circulação inercial que depende da velocidade média da água e da latitude (Collischonn, 2005)

$$r_c = \frac{u}{f} = \frac{u}{2\omega \sin \theta_l}, \quad (1)$$

sendo  $r_c$  é o raio característico de circulação inercial (m);  $u$  é velocidade média da água (m.s<sup>-1</sup>);  $\omega$  é a velocidade angular da terra (7,29.10<sup>-5</sup> rad.s<sup>-1</sup>); e  $\theta_l$  é a latitude. Considerando um lago na latitude de 30° (latitude aproximada dos lagos do RS), onde a velocidade da água é de 0,1 m.s<sup>-1</sup>, o valor de  $r_c$  é de 1370 m. Se o raio característico de circulação inercial exceder 7 km, a força de Coriolis será significativa.

Um dos principais agentes atuantes na circulação de sistemas estuarinos é o cisalhamento do vento na superfície livre do espelho d'água (Campos, 1999). A energia gerada através do atrito entre o vento e o corpo d'água é convertida em correntes interferindo diretamente na hidrodinâmica do sistema. A energia cinética da água na superfície é transferida verticalmente para baixo pelo atrito com a coluna da água provocando a resuspensão de sedimentos em lagos rasos (Jin e Wang, 1998).

A difusão e advecção de massas de águas e de suas propriedades (e.g. densidade, viscosidade) são geralmente observadas em grandes escalas espaciais e decorrentes de processos que envolvem o movimento oscilatório de marés, gradientes de densidade, cisalhamento lateral entre massas de diferentes velocidades de corrente ou difusão turbulenta (Csanady, 1975; Rizzi, 2002). Tais processos são importantes na dinâmica do escoamento em corpos d'água submetidos a fenômenos como, por exemplo, a intrusão salina (Gross et al, 1999b).

As seiches são flutuações no nível da água de grandes corpos de água que ocorrem como resultado de uma perturbação inicial, como a mudança de intensidade do vento, ou a

mudança de intensidade de uma diferença de pressão atmosférica sobre a superfície em diferentes regiões do corpo d'água (Csanady, 1975; Collischonn, 2005).

A atuação do vento em direção e sentido razoavelmente constantes ao longo de um período de tempo suficientemente longo pode modificar o perfil do nível da água em um lago que, a partir de uma situação A de repouso (Figura 1a), em que a linha da água é horizontal, passa a uma situação B, em que a linha da água fica inclinada sob o efeito do vento (Figura 1b). Quando o vento cessa, a linha da água tende a voltar a posição de repouso, porém esta situação somente é atingida após algumas flutuações, semelhantes ao movimento pendular, denominadas seiches (Figura 1c a Figura 1e).

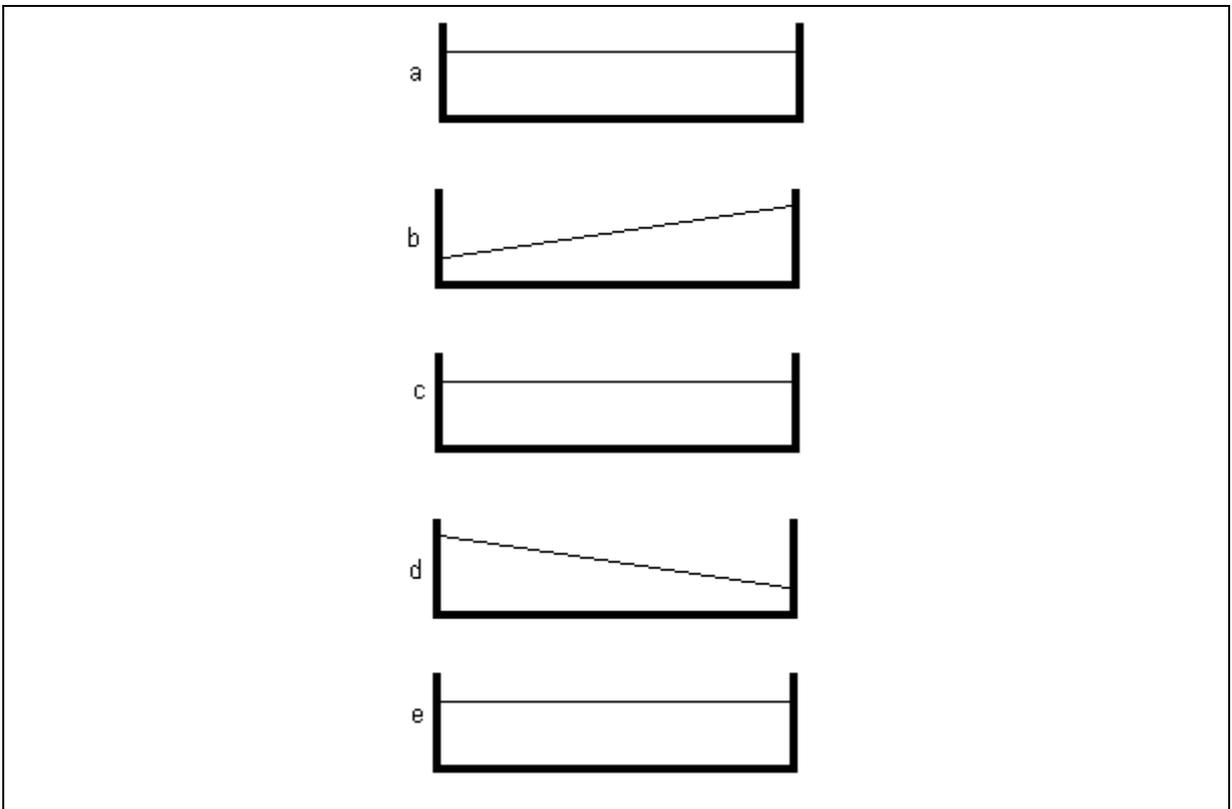


Figura 1 - Esquema do nível da água em um lago ou estuário e a seiche (flutuação do nível).

Estas flutuações de nível são, essencialmente, ondas gravitacionais, cuja celeridade é dada pela equação abaixo.

$$c = \sqrt{gh}, \quad (2)$$

onde  $c$  é a celeridade (velocidade da onda gravitacional);  $g$  é a aceleração da gravidade e  $h$  é a profundidade.

Considerando um lago retangular, de comprimento  $L$  e de profundidade constante, o período ( $T$ ) da seiche de frequência mais baixa pode ser estimado por:

$$T = \frac{2L}{\sqrt{gh}}, \quad (3)$$

então um lago de 50 km de comprimento, com uma profundidade média de 2 m apresenta uma seiche principal de período um pouco superior a 6 horas, como é o caso, por exemplo, da lagoa Mangueira.

O período da seiche é uma característica intrínseca ao corpo d'água. A frequência de oscilação (inverso do período) é a frequência natural do sistema. De modo semelhante a outros sistemas oscilantes ou vibratórios, a resposta do sistema é dependente tanto da frequência natural como da frequência da força externa que atua sobre o sistema. Assim, as flutuações de nível de um lago devido à seiche poderão ser muito altas se a força atuante apresentar uma frequência próxima à frequência natural do sistema (Rosauero, 1982).

Em geral as forças atuantes relacionadas ao vento tem uma forte componente de período próximo a 24 horas, pelo processo de aquecimento durante o dia e resfriamento da terra durante a noite. Por isso, oscilações relativamente fortes podem ser esperadas de lagos com seiche de período próximo a 24 horas ou de algum múltiplo deste valor que estão alinhados no sentido de um vento predominante, como é o caso de algumas das lagoas da planície litorânea do RS (e.g. lagoa Itapeva e Mangueira) (Collischonn, 2005; Fragoso Jr, 2005).

As ondas observadas normalmente na superfície de lagos, causadas pelo vento, são ondas gravitacionais, semelhantes às ondas do mar, embora sejam, em geral, menores. As ondas são caracterizadas pela sua altura, pelo seu comprimento e pelo seu período (Figura 2). O período é o tempo necessário para que duas cristas sucessivas passem pelo mesmo ponto.

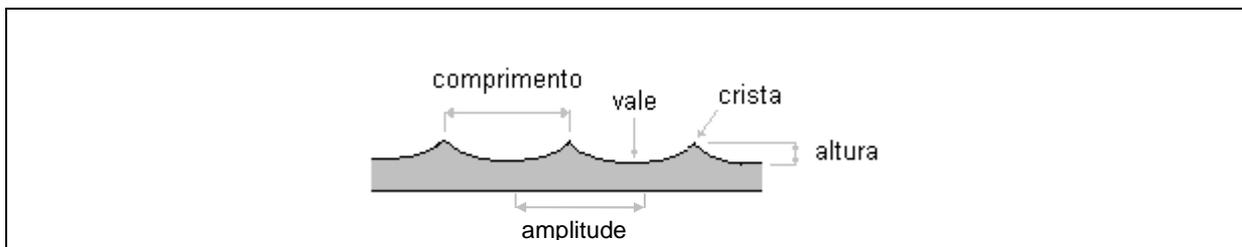


Figura 2 - Características das ondas.

A altura e o período das ondas dependem da velocidade e da duração do vento, e do comprimento da pista (*fetch*) em que o vento pode atuar sobre a superfície. A medida que aumenta o *fetch*, a altura da onda e o seu comprimento aumentam.

A observação visual de uma onda dá a impressão de que a velocidade da água é igual à velocidade da onda, porém isto é um engano, como pode-se concluir observando um objeto semi-flutuante, que se desloca apenas para cima e para baixo, sem avançar significativamente na direção da onda. Esta impressão é devida ao movimento orbital que existe na formação da onda, isto é, a água da superfície não está apenas se movimentando para cima e para baixo, mas está se movimentando em trajetórias circulares. Este movimento circular é um eficiente processo de mistura da água das camadas mais profundas, embora pouco movimento atinja a região próxima ao fundo, exceto quando as ondas quebram (Campos, 1999). O movimento orbital da água devido às ondas que progridem normalmente, sem quebrar, é insignificante a uma profundidade maior do que a metade do comprimento da onda (Martin e McCutcheon, 1999).

A combinação das correntes e das ondas superficiais, causadas pelo vento, gera uma circulação helicoidal ou espiral, denominada “Espirais de Langmuir”. Este tipo de movimento pode gerar, na superfície de lagos, linhas paralelas de material flutuante, como espuma, e restos vegetais, que são visíveis. Estas linhas estão orientadas quase paralelamente ao vento, e a sua posição marca uma zona de fluxo descendente, enquanto as zonas de fluxo ascendente são marcadas por pouco ou nenhum material flutuante (Horne e Goldman, 1994).

A estrutura geral da circulação de Langmuir pode ser vista na Figura 3. Considerando um corte perpendicular à direção do vento, a circulação helicoidal de Langmuir gera zonas alternadas de fluxo ascendente e descendente. Na superfície há regiões de fluxo convergente e divergente. A região de fluxo ascendente coincide com a região de fluxo divergente. A região de fluxo convergente coincide com a região de fluxo descendente, e é nessa região que se concentra o material flutuante.

As velocidades que ocorrem na circulação de Langmuir são da ordem de 1 a 8 cm.s<sup>-1</sup>, o que é consideravelmente mais do que a velocidade em que podem se deslocar a maior parte das espécies de zooplâncton e de algas (Reynolds, 1994; Reynolds, 1984). Assim, esta forma de movimento da água em lagos é importante do ponto de vista da suspensão e do processo de mistura do plâncton.

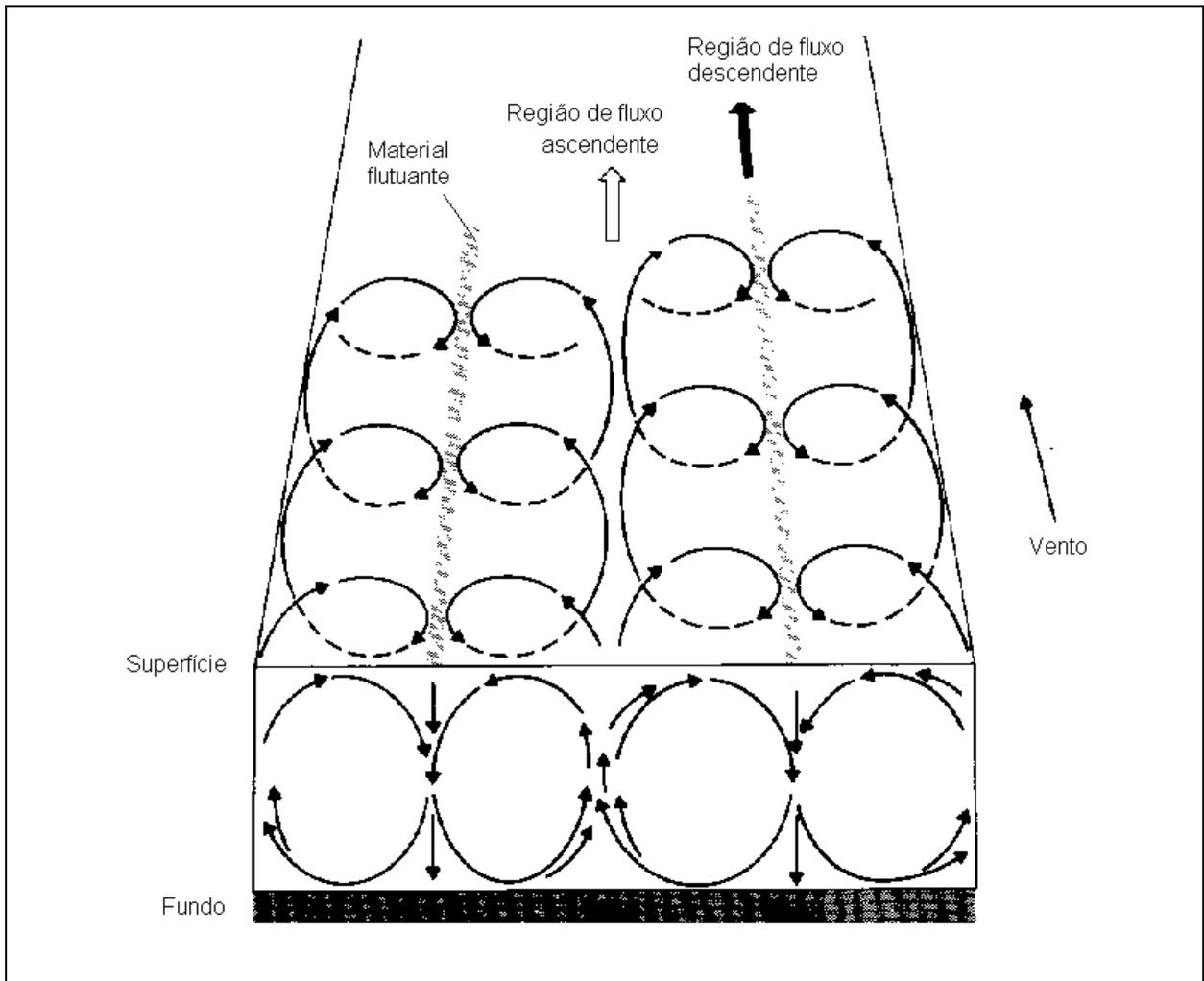


Figura 3 - Circulação helicoidal de Langmuir em um lago raso (adaptado de Horne e Goldman, 1994).

## 2.2 Modelos hidrodinâmicos

Os modelos hidrodinâmicos são bastante empregados no estudo de escoamentos de cursos d'águas naturais, principalmente quando há regimes turbulentos e não-permanentes (Silveira, 1986); em análises do efeito da variação da batimetria (e.g. aprofundamento de canais de navegação) no regime hidrodinâmico de corpos d'água (Rosauero, 1982); dentre outras aplicações. São conhecidos por modelos hidrodinâmicos aqueles modelos matemáticos que utilizam as equações da continuidade e dinâmicas conhecidas como equações de Saint Venant. As equações de Saint Venant tratam-se de um conjunto de equações que descrevem o movimento geral das substâncias fluídas, tais como líquidos e gases (Fox e McDonald, 1998).

Alguns modelos numéricos simplificados tem sido derivados das equações de Saint Venant para estudar diferentes problemas (e.g. calculo de forças e momentos em aeronaves, correntes oceânicas, modelos temporais, etc) (Klausmeyer, 2004; Marshall et al, 1997; White e Bromley, 1995) nas mais diversas escalas (e.g. temporal, unidimensional, bidimensional e tridimensional) (Paz, 2003; Casulli, 1990; Casulli e Walters, 2000), esquemas numéricos de discretização (e.g. diferenças finitas, elementos finitos, etc.) (Rosauo 1979; Schettini, 1991) e aos tipos de grades utilizadas (e.g. regular, curvilinear e não estruturada) (Fragoso Jr, 2005; Cheng e Casulli, 2001; Zhang e Baptista, 2003).

Dentre as aproximações desenvolvidas, destacam-se os modelos hidrodinâmicos bidimensionais os quais são baseados nas equações de Saint Venant. Eles representam a dinâmica do escoamento bidimensional, sendo largamente utilizados na gestão, no entendimento ou na previsão de cenários críticos de lagos e estuários (Rosman, 1989).

As equações completas de Saint Venant são deduzidas a partir da equações de Navier-Stokes, sendo compostas pelas equações da quantidade de movimento e pela equação da continuidade, as quais juntas formam um sistema de equações diferenciais parciais ((4 a (6) capaz de representar o comportamento hidrodinâmico bidimensional em ecossistemas aquáticos rasos (Casulli, 1990):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -g \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \gamma \cdot u + \tau_x + f \cdot v + A_h \cdot \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -g \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \gamma \cdot v + \tau_y - f \cdot u + A_h \cdot \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \quad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial[(h+z) \cdot u]}{\partial x} + \frac{\partial[(h+z) \cdot v]}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

onde  $u(x,y,t)$  e  $v(x,y,t)$  são as componentes da velocidade na horizontal e na vertical,  $t$  é o tempo,  $z(x,y,t)$  é a elevação do nível de água medida a partir do nível de referência (Figura 4),  $h(x,y)$  é a altura medida a partir do solo ao nível de referência,  $g$  é a constante de aceleração gravitacional,  $\tau_x$  e  $\tau_y$  são a tensão de cisalhamento do vento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\gamma$  é o coeficiente de fricção do fundo e  $f$  é o parâmetro de Coriolis assumido constante. As acelerações devido à força de Coriolis usadas nas equações do momento são

dadas por  $fv$  and  $-fu$ , respectivamente, com  $f = 2\Omega \sin \Phi$  onde  $\Omega$  é a velocidade angular da Terra sobre seu proprio eixo e  $\Phi$  é a latitude.

O coeficiente de fricção do fundo pode ser calculado por:

$$\gamma = \frac{g\sqrt{u^2 + v^2}}{C_v^2 H}, \quad (7)$$

onde  $H(x, y, t) = h(x, y) + \eta(x, y, t)$  é a profundidade total da lâmina d'água e  $C_v$  é o coeficiente de rugosidade de Chezy.

Na maioria dos modelos hidrodinâmicos, a tensão de cisalhamento na superfície livre é diretamente proporcional a velocidade do vento (Fragoso Jr., 2005). No modelo proposto neste trabalho, a tensão de cisalhamento nas direções x e y são calculadas por:

$$\tau_x = C_D W_x \|W\|, \quad (8)$$

$$\tau_y = C_D W_y \|W\|, \quad (9)$$

sendo  $C_D$  o coeficiente de arraste,  $W_x$  e  $W_y$  as componentes horizontais e verticais da velocidade do vento e  $\|W\|$  a norma do vetor velocidade do vento ( $\|W\| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ ).

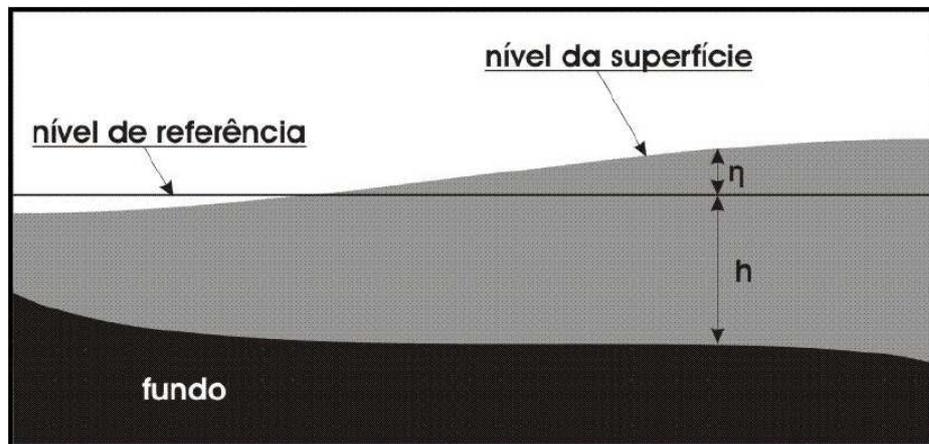


Figura 4 – Esquema da variação do nível da superfície livre (extraído de Fragoso Jr, 2005).

As equações de águas rasas podem ser resolvidas por métodos espectrais (Lynch e Gray, 1979; Walters, 1987; Burau e Cheng, 1988) ou por métodos baseados no passo de tempo. Os métodos baseados no passo de tempo são os mais disseminados e frequentemente usados em aplicações práticas (Cheng et al, 1993). O esquema de discretização destes métodos pode ser explícito, implícito ou semi-implícito.

Um método de diferenças finitas explícito é de simples implementação e facilmente vetorizável. Entretanto, existe a limitação devido à propagação das ondas de superfície (Roache, 1982). Esta restrição, conhecida como a restrição de estabilidade de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), usualmente requer um intervalo de tempo na integração numérica menor que o permitido pelas considerações de precisão (Casulli e Cheng, 1992).

Alguns esquemas numéricos de simulações de escoamento em águas rasas são implícitos, dentre eles, destaca-se o método ADI (Alternating-Direction-Implicit) (Leendertsee, 1967; Borche, 1985). O método ADI resulta uma eficiência computacional superior quando comparado com os métodos explícitos pelo fato de agregar estabilidade numérica em intervalos de tempo de simulação maiores. Por outro lado, a fonte de imprecisão, conhecida como efeito ADI (Weare, 1979; Benque et al, 1982; Stelling, 1984), surge quando este método é usado com grandes passos de tempo em domínios com geometrias complexas ou com altos gradientes batimétricos (Cheng et al, 1993).

Métodos mais robustos que o método ADI tem sido desenvolvidos e aplicados na simulação do escoamento bidimensional em águas rasas, tratam-se dos métodos semi-implícitos (Casulli e Cattani, 1994). Nos métodos semi-implícitos nos termos do gradiente de pressão barotrópico nas equações do momento e da divergência da velocidade na equação da continuidade é incorporado um ponderador temporal ( $\theta$ ). Ou seja, os termos que afetam a estabilidade numérica são tratados de forma semi-implícita enquanto os remanescentes são tratados explicitamente ou implicitamente. Este método inclui, ainda, a aceleração de Coriolis e um algoritmo de fácil implementação para o tratamento de células computacionais submetidas à secagem e inundação (Cheng et al, 1993; BAW, 1990).

## 2.3 Modelos de transporte de massa

Os modelos numéricos de transporte de escalares são instrumentos tecnológicos capazes de avaliar os impactos gerados pelo lançamento de carga poluidora em um determinado corpo de água (Rosman, 2000). Além disso, estes modelos são importantes ferramentas usadas para avaliar as respostas de sistemas naturais submetidos a alterações em seu regime, interferência antrópica e/ou mudanças climáticas (Borche e Cybis, 1985; Cheng *et al*, 1993; Fragoso Jr, 2005). Os primeiros modelos de qualidade da água surgiram através dos

problemas de alocação da carga de esgoto gerada nos centros urbanos. Os impactos desses efeitos requerem um conhecimento da circulação e mistura nos estuários, causados pelo efeito conjunto de maré, condições meteorológicas, descargas fluviais e da morfologia do local (Schettini, 1991). Um dos trabalhos pioneiros neste tipo de abordagem foi o modelo desenvolvido por Streeter e Phelps (1925) aplicado no rio Ohio/EUA.

Um modelo computacional de qualidade de água para regiões complexas permite a simulação de vários cenários de transporte de escalares, como areia, sal, óleo, etc (Cheng e Casulli, 2001). Modelos de transporte de substâncias são amplamente indicados para o planejamento de atividades portuárias, dragagem de canais entre outras obras de engenharia (Rizi, 2002). Além disso, a modelagem de transporte de substâncias pode ser empregada na solução dos seguintes casos (Campos, 1999):

- monitoramento de uma carga poluidora provocada por derramamento de produtos químicos quando de acidentes com navios, oleodutos, atividades portuárias, etc;
- simulação de uma mancha de poluente ao longo do tempo para identificar as regiões potencialmente atingidas;
- simulação dos efeitos de lançamento de emissários para a definição de locais estratégicos e com alto potencial de auto-depuração de cargas de esgoto dos possíveis efluentes;
- simulação de problemas decorrentes do transporte de sedimentos e áreas de erosão em canais de navegação e pontos de lançamentos de lodo e/ou resíduos sólidos;
- estudo das alterações nas correntes fluviais e/ou marítimas provenientes de obras portuárias ou costeiras, tais como molhes, cais e rampas.

A modelagem matemática do transporte de poluentes, nutrientes ou sedimentos é resultado da combinação da difusão turbulenta, em pequena escala, e do efeito do gradiente de velocidade (advecção) em maior escala (Cunge *et al.*, 1980). Dentre os modelos disponíveis de qualidade da água, a série de modelos HEC (HEC, 1978) e o QUAL2E (Brown e Barnwell, 1987) são bastantes conhecidos na estimativa do transporte de escalares em um corpo d'água.

A adoção de um determinado modelo matemático para simular as condições de qualidade da água de um sistema hídrico depende do grau de complexidade do modelo, dos

dados disponíveis sobre o sistema, das características hidráulicas e do conhecimento das condições químicas e biológicas do sistema e das cargas poluidoras (Rosman, 2000). Tais fenômenos físicos naturais são descritos matematicamente por um conjunto de equações complexas (Schettini, 1991). As equações matemáticas que representam o movimento e a dispersão em um fluido são: (a) conservação da quantidade de movimento ((4 a (6) e (b) a lei da conservação da massa (Martin e McCutcheon, 1999). A equação de transporte de uma substância escalar dissolvida na água de forma homogênea (Chapra, 1997; Gross *et al*, 1999b) pode ser deduzida a partir da lei da conservação da massa e expressada conforme a equação abaixo:

$$\frac{\partial (HC)}{\partial t} + \frac{\partial (uHC)}{\partial x} + \frac{\partial (vHC)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h \frac{\partial (HC)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_h \frac{\partial (HC)}{\partial y} \right) + f \quad , \quad (10)$$

onde C é a concentração escalar média na vertical em mg/l; H é a profundidade em metros; u e v são as velocidades médias horizontais nas direções x e y, respectivamente, em m/s; e  $K_h$  é a difusividade escalar horizontal em  $m^2/s$ .

Um dos componentes centrais nos modelos de qualidade de água é o esquema numérico usado para representar a advecção (os dois últimos termos do lado esquerdo da equação) (Gross *et al*, 1999a) e a difusão (os dois primeiros termos do lado direito da equação) (Chapra, 1997; Schettini, 1991) na equação de transporte. Uma gama de esquemas numéricos tem sido aplicados para estudar o transporte de escalares em estuários (Blumberg and Mellor, 1987; Casulli, 1990). Alguns destes esquemas podem apresentar instabilidade em sua solução para intervalos de tempo maiores ou erros numéricos na conservação de massa. Dentre os esquemas numéricos usados para a discretização da equação de transporte de escalares, destacam-se os esquemas que agregam um limitador de fluxo (Casulli e Zanolli, 2005; Le Veque, 1996; Sweby, 1984) em sua formulação reduzindo a difusão numérica e os erros de conservação de massa (Le Veque, 1990).

### 2.3.1 Processos químicos e biológicos

Num sistema hídrico, o transporte de uma substância ao longo do tempo e do espaço está sujeito a processos físicos, químicos e biológicos (Tucci, 1998). A modelagem de qualidade da água é uma importante ferramenta utilizada na simulação desses processos limnológicos (Fragoso Jr. et al, 2009). Com suas devidas adaptações no termo de perdas e

ganhos, a equação do transporte de escalares ((10) é responsável por descrever a dinâmica da biomassa (transporte/crescimento/consumo) dos organismos aquáticos, desde os produtores primários ao topo da estrutura trófica (Fragoso Jr., 2005; Fragoso Jr., 2009). Além disso, a equação de transporte de escalares pode ainda considerar os ciclos do nitrogênio e do fósforo e o balanço do oxigênio em um ecossistema aquático.

## 2.4 Conservação de volume e massa

Um dos princípios físicos fundamentais da Física é o da conservação das propriedades de um sistema. Este princípio assegura que a massa, a quantidade de movimento e a energia podem ser transformadas no sistema, porém não podem aparecer ou desaparecer em sistemas que não apresentem fontes ou sumidouros (Fox e MacDonald, 1998). A (11) trata-se da equação da continuidade descrita em sua forma conservativa e válida para um volume finito fixo no espaço, na qual os termos relativos aos fluxos convectivos aparecem na integral ao longo de toda área  $A$  do domínio:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_V \rho dV \right] + \oint_A \rho (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = 0, \quad (11)$$

sendo  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade, de componentes  $(u, v)$  para escoamentos bidimensionais,  $V$  é o volume finito no qual a conservação de massa está sendo aplicada,  $A$  é a superfície deste volume,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal externo à superfície  $A$  e o ponto entre o vetor velocidade e o vetor normal à superfície indica o produto escalar. Qualquer outra forma é dita não-conservativa. De fato, esta equação diz, simplesmente, que a variação da massa contida no volume é causada pela taxa líquida de massa que é transferida através da superfície do corpo.

A maioria dos modelos matemáticos utilizados em problemas de Engenharia são baseados nos princípios de conservação (Schettini, 1991; Rosauero, 1982; Fragoso Jr, 2005), que representam a preservação da integridade de uma dada grandeza, ao longo de um processo. A solução numérica das equações que descrevem o escoamento nesses modelos sempre envolve algum erro com relação a sua solução analítica verdadeira, seja por truncamento, arredondamento ou pela própria discretização temporal e espacial assumida no sistema. Para que estes erros sejam minimizados sempre se faz necessário verificar a

consistência, convergência, estabilidade e precisão numérica do esquema utilizado (Casulli e Cattani, 1994). Além disso, é importante realizar testes de aplicação do modelo em situações conhecidas, visando avaliar características importantes, como a conservação de massa. Os erros de conservação ocorrem quando há perda ou ganho de volume e de massa em sistemas que deveriam ser conservativos. Frequentemente os modelos são aplicados sem estes testes preliminares simples, levando o modelador a falsos resultados das variáveis de interesse (Chapra, 1997).

### 3. Descrição do modelo

Neste capítulo é apresentada uma descrição do modelo desenvolvido em grades não estruturadas juntamente com seus módulos hidrodinâmico e de transporte. O modelo hidrodinâmico apresentado neste estudo é o IPH-UnTRIM2D baseado no modelo UnTRIM2D desenvolvido por Casulli e Walters (2000). Este modelo é semelhante ao modelo IPH-A, desenvolvido no IPH-UFRGS pelo prof. Alejandro Borche (Borche, 1996), e ao modelo IPH-ECO desenvolvido por Fragoso Jr (2009).

O modelo IPH-A utiliza um esquema numérico semi-implícito de direções alternadas, denominado ADI (Alternative Direction Implicit) de grades estruturadas, diferentemente do modelo IPH-UnTRIM2D que utiliza uma abordagem mista Euleriana – Lagrangiana para os termos convectivos e malha não-estruturada (Casulli, 1990). O esquema ADI pode conduzir a soluções incorretas do campo de velocidades em alguns tipos de problemas (Benqué et al., 1982) e necessita um intervalo de tempo de cálculo muito pequeno. O modelo IPH-ECO também utiliza uma abordagem mista Euleriana-Lagrangiana para os termos convectivos e um esquema de diferenças finitas, mas sua aplicação é limitada à grades regulares (i.e. uniforme), enquanto que o modelo IPH-UnTRIM2D utiliza um esquema numérico semi-implícito de volumes finitos e pode ser aplicado tanto para grades regulares como para grades não regulares e mistas (compostas por triângulos e quadriláteros).

O sistema de discretização espacial do modelo IPH-UnTRIM2D é ideal para corpos d'água naturais por permitir a representação de geometrias complexas. A discretização espacial é preferencialmente feita utilizando a triangulação de Delaunay, onde um dado domínio é formado apenas por triângulos. No entanto, o modelo está adaptado para uma simulação usando domínios formados tanto por triângulos como por quadriláteros (malhas mistas).

Em qualquer modelo usado para analisar a circulação hidrodinâmica e a qualidade de água em corpos d'águas naturais, a base fundamental é o módulo hidrodinâmico. No módulo hidrodinâmico é possível simular a circulação em ecossistemas aquáticos sob efeito dos mais distintos cenários meteorológicos, fluviais e oceanográficos. O módulo hidrodinâmico do modelo de grades não estruturadas desenvolvido neste trabalho utiliza uma eficiente técnica numérica composta de duas etapas. Solucionando, primeiramente, um sistema de equações

lineares com  $N_p$  equações pelo método dos gradientes conjugados (Poole e Ortega, 1987) e, em seguida, o campo de velocidades pelas equações da quantidade de movimento. Aplicações mostram que o esquema numérico do modelo UnTRIM2D promove conservação de volume, sendo sujeito a uma simples condição de estabilidade (e.g. Cheng et al, 1993; Zhang e Baptista, 2003). A família de modelos UnTRIM é considerada uma inovação em termos de modelos bidimensionais para estuários (Zhang e Baptista, 2003) e tem sido utilizado por agências de recursos hídricos em todo o mundo (e.g. BAW, 2004; Laval et al, 2003; Celebioglu e Piasecki, 2005). Recentes alterações do modelo aqui desenvolvido, que não serão incorporadas neste trabalho, incluem a representação do escoamento em três dimensões (Casulli e Walters, 2000; Cheng e Casulli, 2001).

O módulo de transporte de massa utiliza como base a solução do problema hidrodinâmico. Sendo assim, para ter uma boa solução de transporte é fundamental ter uma solução adequada provinda do módulo hidrodinâmico. A equação que modela o transporte de constituintes dispersos em corpos d'água bem misturados e tratada neste trabalho é considerada em sua forma conservativa. A Figura 5 apresenta um fluxograma com os processos de cálculo do modelo. Quanto ao módulo de transporte são abordados dois esquemas numéricos baseados no método dos volumes finitos. Ambos os esquemas são eficientes e, por isso, adotados para aplicação e comparação no modelo de grades não estruturadas. Trata-se de um módulo mais básico e usado em muitas análises de problemas ambientais (esquema de diferenças finitas) (Chapra, 1997; Fragoso Jr, 2005) e outro mais complexo que incorpora um parâmetro limitador de fluxo (Casulli e Zanoli, 2005).

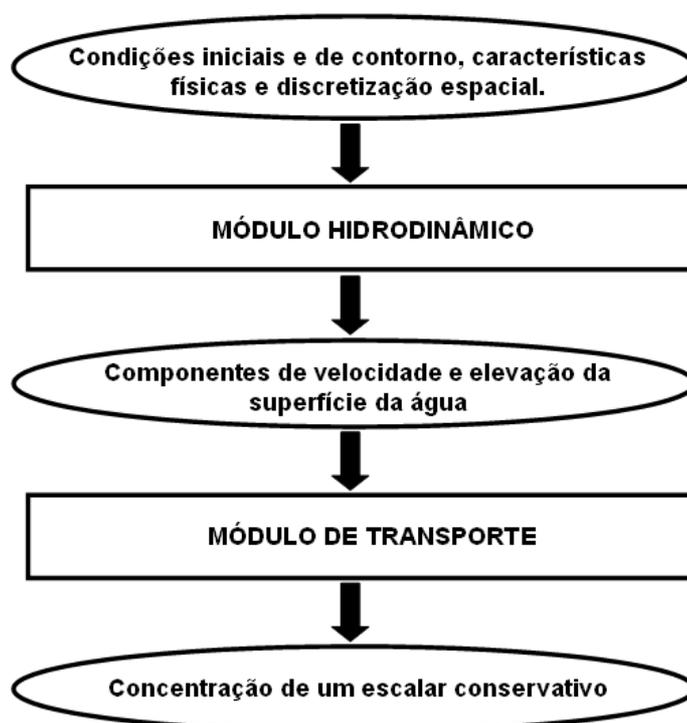


Figura 5 – Fluxograma com os processos de cálculos do modelo.

## 3.1 Módulo Hidrodinâmico

O módulo hidrodinâmico foi desenvolvido tomando por base a formulação do modelo UnTRIM (Casulli e Walters, 2000; Cheng e Casulli, 2001). Esta aproximação utiliza um método semi-implícito Euleliano-Lagrangiano de volumes finitos para resolver as equações de Saint Venant, utilizando uma malha não estruturada ortogonal.

### 3.1.1 Grade não-estruturada

Uma grade não estruturada ortogonal consiste em um conjunto de polígonos convexos não sobrepostos em um determinado domínio. Cada lado de um polígono pode ser uma linha de borda ou um lado de um polígono adjacente (Casulli e Walters, 2000). Além disso, numa grade não estruturada ortogonal é assumido que a intersecção entre a reta que liga o centro da circunferência circunscrita de polígonos adjacentes e a reta formada pelo lado que

ambos compartilham devem ser ortogonais (Figura 6). Esta malha é então conhecida como uma grade não estruturada ortogonal (Casulli e Walters, 2000; Cheng e Casulli, 2001).

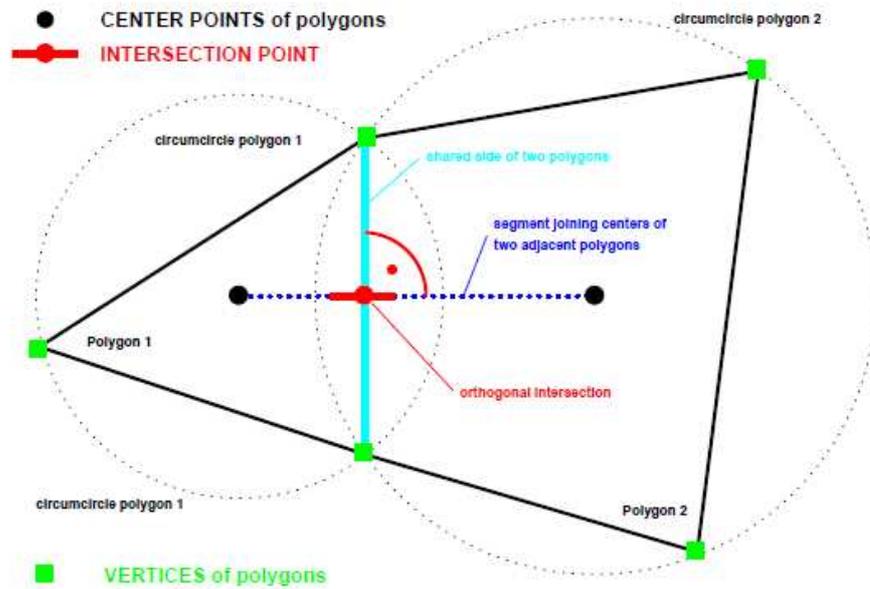
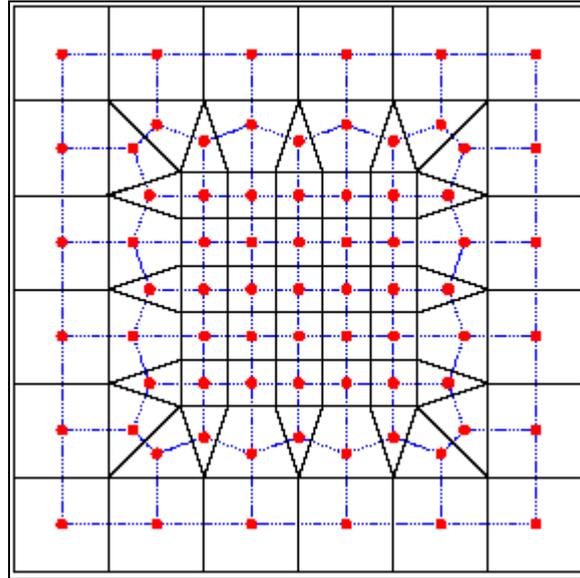


Figura 6 – Conectividade característica entre dois polígonos de uma grade mista e ortogonal (Fonte: BAW, 2004).

Um exemplo de grade não-estruturada ortogonal é a triangulação de Delaunay de uma série de  $N$  pontos, onde a triangulação inclui apenas triângulos agudos. Neste caso, os centros dos triângulos podem ser identificados como os vértices dos polígonos formados pela tesselação de Dirichlet. Existem ainda, grades não estruturadas ortogonais compostas por mais de uma forma geométrica. Estes tipos de malhas permitem representar um determinado domínio com diferentes resoluções, podendo aumentar o refinamento em regiões de interesse (Figura 7).



**Figura 7 - Grade não-estruturada ortogonal formada por regiões com diferentes resoluções (extraído de BAW, 2004).**

A discretização de uma malha não-estruturada com  $N_p$  polígonos e  $N_s$  faces é apresentada na Figura 8. Cada polígono  $i$  contém um número arbitrário de faces  $S_i \geq 3$ , onde  $i$  varia de 1 ao número total de polígonos  $N_p$ . Sabendo que  $N_s$  é o número total de lados na grade,  $\lambda_j$  equivale ao comprimento de cada face  $j$  onde  $j = 1, 2, 3 \dots, N_s$ . As faces correspondentes ao  $i$ th polígono são identificadas pelos índices  $i$  e o índice que contabiliza o número de faces do polígono  $l$ , tal que  $l = 1, 2, 3 \dots S_i$ . Sendo assim, a seguinte inequação deve ser satisfeita  $1 \leq j(i,l) \leq N_s$ . De maneira análoga, o índice do polígono  $i$  pode ser associado ao índice de uma de suas faces  $j$ . De forma que, dois polígonos que compartilhem a mesma face  $j$  são identificados pelos índices  $i(j,1)$  e  $i(j,2)$ , onde  $i(j,1)$  é o primeiro vizinho da face  $j$  e  $i(j,2)$  é o segundo vizinho da face  $j$ . Logo, os índices  $i(j,1)$  e  $i(j,2)$  pertencem aos seguintes intervalos  $1 \leq i(j,1) \leq N_p$  e  $1 \leq i(j,2) \leq N_p$ . A área do polígono  $i$  é dada por  $P_i$  e a distância não nula entre os centros de dois polígonos adjacentes, para uma face  $j$  de comprimento  $\lambda_j$ , é dada por  $\delta_j$ .

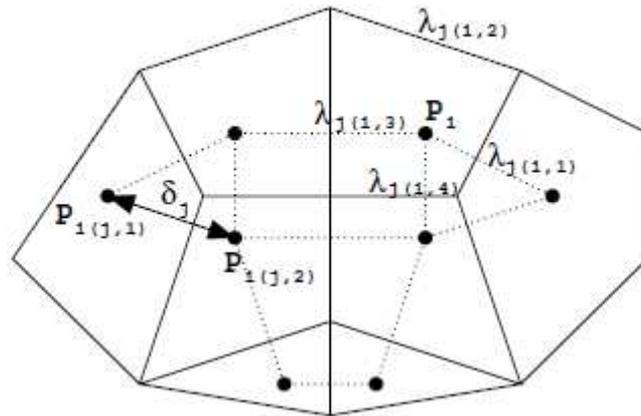


Figura 8 - Grade não-estruturada ortogonal e notação utilizada (extraído de Casulli, 2002).

Grades ortogonais estruturadas são formadas por polígonos regulares, geralmente simétricos e, em alguns casos particulares, o centro de cada polígono é identificado como o seu centro geométrico (BAW, 2004). Exemplo de grades estruturadas ortogonais são as grades de diferenças finitas retangulares e grades uniformes de triângulos equiláteros, ambas as grades são apresentadas na Figura 9.

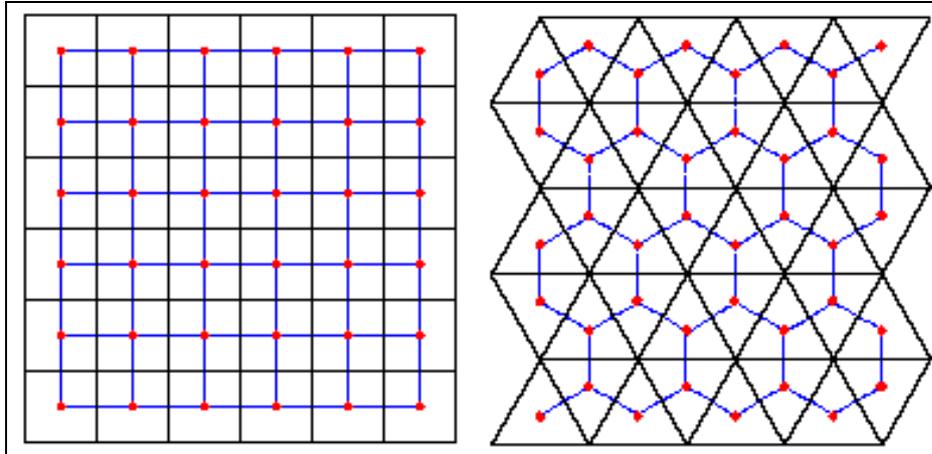


Figura 9 - Grades estruturadas ortogonais (extraído de BAW, 2004).

### 3.1.2 Solução numérica

O esquema proposto por Casulli e Walters (2000) considera que as velocidades são definidas nas faces dos polígonos, sendo  $u$  e  $v$  suas componentes na direção normal e tangencial à face, e elevação do nível da água,  $\eta$ , definida no centro de cada célula. O sentido

positivo da velocidade tangencial é adotado como o anti-horário e o da velocidade normal sendo de dentro para fora do polígono. Considerando esta notação, o gradiente de elevação da superfície nas equações do momento e o divergente da velocidade na equação da continuidade são discretizados implicitamente. Os termos advectivos nas equações do momento, entretanto, serão discretizados explicitamente usando uma simples, porém precisa, aproximação Euleriana-Lagrangiana. Essa aproximação permite o uso de grandes passos de tempo com correspondentes melhorias na eficiência e precisão do método (Casulli, 1990).

Os termos advectivos nas equações da conservação da quantidade de movimento podem ser expressos como uma derivada substancial calculada ao longo da linha de corrente (Figura 10).

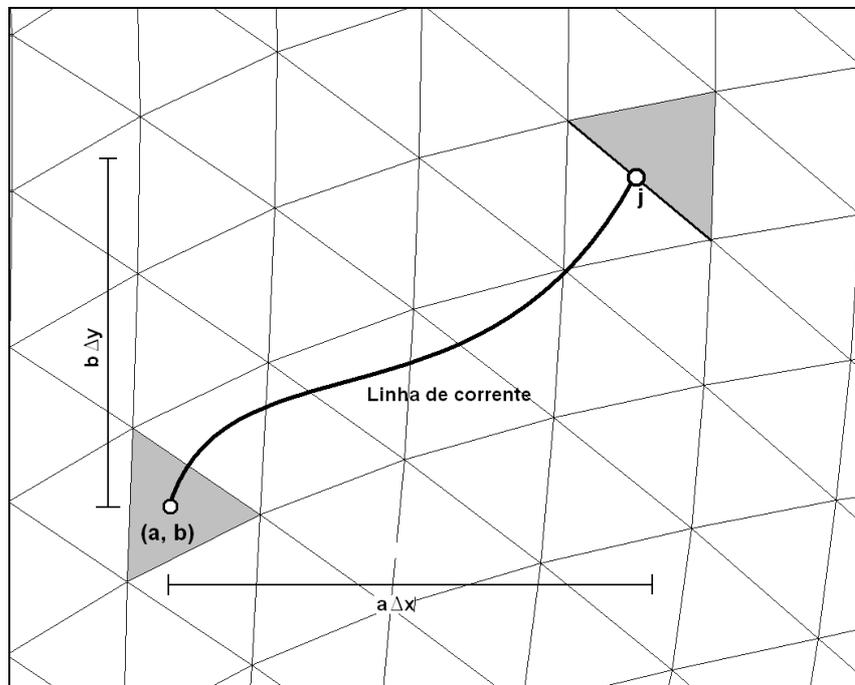


Figura 10 – Esquema ilustrativo do método Euleriano-Lagrangiano para grades não estruturadas.

Aproximando a derivada substancial segundo um esquema Euleriano-Lagrangiano, é dado por:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_j^{k+1} - Fu_j^{k+1}}{\Delta t}, \quad (12)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{v_j^{k+1} - Fv_j^{k+1}}{\Delta t}, \quad (13)$$

onde  $u_j^{k+1}$  e  $v_j^{k+1}$  são as componentes normal e tangencial da velocidade na  $j$ -ésima face da grade no passo de tempo  $k+1$ , respectivamente;  $Fu_j^{k+1}$  e  $Fv_j^{k+1}$  são os valores de  $u$  e  $v$ , respectivamente, no intervalo de tempo  $k$  que desloca uma partícula localizada em um ponto qualquer  $(a, b)$  ao centro da face  $j$  no intervalo de tempo  $k+1$  através de uma linha de corrente (Figura 10). Isso é feito dividindo o intervalo de tempo em  $N$  sub-intervalos iguais ( $\xi = \Delta / N$ ) e calculando  $Fu_j^{k+1}$  e  $Fv_j^{k+1}$  de forma iterativa e retroativa, atualizando a posição da partícula fluída nos eixos coordenados através das seguintes equações:

$$x^{k-1} = x^k - \xi V_x^k(x^k, y^k) \quad (14),$$

$$y^{k-1} = y^k - \xi V_y^k(x^k, y^k) \quad (15),$$

onde  $V_x^k$  e  $V_y^k$  são as componentes da velocidade nas direções dos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente, determinadas em cada sub-intervalo de tempo. As velocidades  $V_x^k$  e  $V_y^k$  são calculadas a partir da decomposição das velocidades normal e tangencial às faces da grade,  $u$  e  $v$ , dada por:

$$V_x^k = u^k \cos \theta - v^k \sin \theta, \quad (16)$$

$$V_y^k = u^k \sin \theta + v^k \cos \theta, \quad (17)$$

sendo que  $\theta$  é o ângulo que a face forma com a horizontal (eixo das abcissas). Com isso, o valor de  $a$  e  $b$  são calculados no último passo do processo iterativo.

Em geral, os valores de  $a$  e  $b$  não coincidem com o centro das faces da grade, posição em que são calculadas as velocidades no módulo hidrodinâmico. Por esta razão, uma interpolação é utilizada ao aproximar as velocidades  $u$  e  $v$  na posição  $(a, b)$ . O método de interpolação é um fator determinante no campo de velocidades resultante do escoamento. Neste trabalho serão abordados 2 métodos de interpolação, o primeiro, baseado na área de influência, e o segundo, na distância entre os lados do polígono e a posição  $(a, b)$ .

Huebner (1975) propõe uma interpolação com base no inverso da área de influência de polígonos formados com vértices na posição  $(a, b)$  e os vértices do polígono da grade (Figura 11).

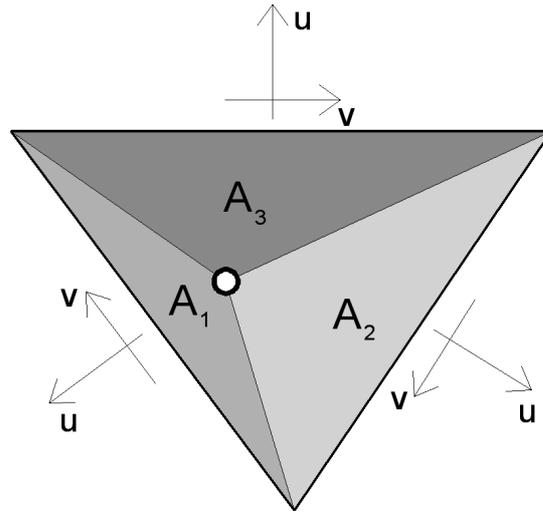


Figura 11 – Esquema de um polígono e as áreas de influências de seus lados.

A velocidade da partícula nas direções x e y em um ponto qualquer da grade é calculada como a média das velocidades nas faces do polígono que contém a partícula, ponderada inversamente pela área de influência de cada face. A velocidade da partícula fluída nas direções dos eixos coordenados é dada por:

$$\bar{V}_x = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{V_{x,i}}{A_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i}} \text{ e } \bar{V}_y = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{V_{y,i}}{A_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i}}, \quad (18)$$

onde n é o número de faces do polígono.

O segundo método de interpolação considera o inverso da distância da posição (a, b) e os pontos centrais faces do polígono da grade (Figura 12). Desta forma, a velocidade da partícula fluída na direção dos eixos coordenados é calculada como a média das velocidades nas faces ponderada inversamente pela distância entre a partícula fluída e cada face i do polígono. A velocidade da partícula fluída nas direções dos eixos coordenados é dada por:

$$\bar{V}_x = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{V_{x,i}}{d_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}} \text{ e } \bar{V}_y = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{V_{y,i}}{d_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}}, \quad (19)$$

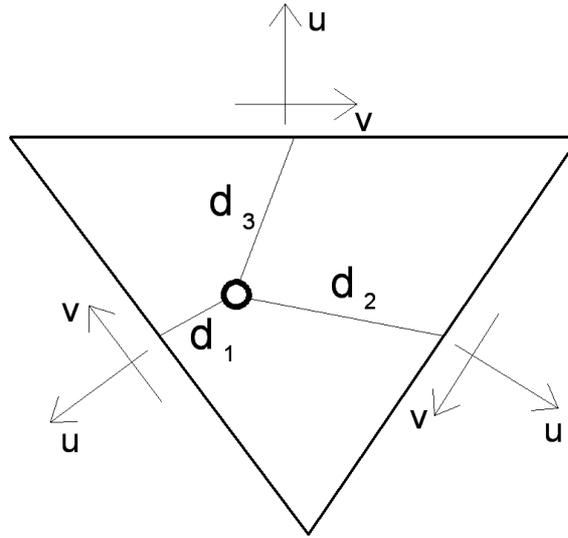


Figura 12 – Esquema de um polígono e as distâncias de influência entre suas faces e a partícula fluida.

O gradiente de pressão nas equações de conservação da quantidade de movimento e as componentes da velocidade na equação da continuidade serão discretizadas com método  $\theta$  proposto por (Casulli e Cattani, 1992), onde  $\theta$  é um ponderador temporal responsável pelo grau de implicidade do método e pode variar entre 0 e 1. Para valores de  $\theta = 1$ , tem-se um esquema totalmente implícito, enquanto que para  $\theta = 0$  o esquema fica explícito:

$$\frac{\partial \eta}{\partial N} = \theta \frac{\eta_{i(j,2)}^{k+1} - \eta_{i(j,1)}^{k+1}}{\delta_j} + (1 - \theta) \frac{\eta_{i(j,2)}^k - \eta_{i(j,1)}^k}{\delta_j}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} = \theta \frac{\eta_{v(j,2)}^{k+1} - \eta_{v(j,1)}^{k+1}}{\lambda_j} + (1 - \theta) \frac{\eta_{v(j,2)}^k - \eta_{v(j,1)}^k}{\lambda_j}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \theta \frac{u_{i(j,2)}^{k+1} - u_{i(j,1)}^{k+1}}{\delta_j} + (1 - \theta) \frac{u_{i(j,2)}^k - u_{i(j,1)}^k}{\delta_j}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \theta \frac{v_{v(j,2)}^{k+1} - v_{v(j,1)}^{k+1}}{\lambda_j} + (1 - \theta) \frac{v_{v(j,2)}^k - v_{v(j,1)}^k}{\lambda_j}. \quad (23)$$

As componentes da velocidade normal e tangencial em cada face são estimadas discretizando a equação de quantidade de movimento, dada por:

$$u_j^{n+1} = Fu_j^n - \frac{\Delta t}{\delta_j} (1 - \theta)(\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,1)}^n) - \frac{\Delta t}{\delta_j} \theta(\eta_{i(j,2)}^{n+1} - \eta_{i(j,1)}^{n+1}) + \Delta t WN_j^n, \quad (24)$$

$$v_j^{n+1} = Fv_j^n - \frac{\Delta t}{\lambda_j} (1 - \theta)(\eta_{v(j,2)}^n - \eta_{v(j,1)}^n) - \frac{\Delta t}{\lambda_j} \theta(\eta_{v(j,2)}^{n+1} - \eta_{v(j,1)}^{n+1}) + \Delta t WT_j^n, \quad (25)$$

$WN_j^n$  e  $WT_j^n$  é um termo explícito que agrega os termos de Coriolis, tensão de cisalhamento na superfície e no fundo, dado pelas seguintes equações:

$$WN_j^n = \tau_n + A_h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + fv \quad (26)$$

e

$$WT_j^n = \tau_t + A_h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + fu. \quad (27).$$

A equação da continuidade é discretizada em cada polígono:

$$P_i \eta_i^{n+1} = P_i \eta_i^n - \theta \Delta t \sum_{l=1}^{S_i} \{ s_{i,l} \lambda_{j(i,l)} H_{j(i,l)} u_{j(i,l)}^{n+1} \} - (1 - \theta) \Delta t \sum_{l=1}^{S_i} [ s_{i,l} \lambda_{j(i,l)} H_{j(i,l)} u_{j(i,l)}^n ], \quad (28)$$

onde  $P_i$  denota a área do  $i$ th polígono e  $s_{i,l}$  é uma função associada com a orientação da velocidade normal definida no  $l$ th lado do polígono  $i$ . Especificamente,  $s_{i,l} = 1$  indica uma velocidade positiva no  $l$ th lado correspondendo a uma vazão de saída e  $s_{i,l} = -1$  indica uma velocidade positiva no  $l$ th lado correspondendo a uma vazão de entrada. A função  $s_{i,l}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$s_{i,l} = \frac{i[(i,l),2] - 2i + i[(i,l),1]}{i[(i,l),2] - i[(i,l),1]}. \quad (29)$$

Substituindo o valor de  $u_j^{n+1}$  ((24) na equação da continuidade, obtêm-se:

$$\begin{aligned} P_i \eta_i^{n+1} &= P_i \eta_i^n \\ &- \theta \Delta t \sum_{l=1}^{S_i} \left\{ s_{i,l} \lambda_{j(i,l)} H_{j(i,l)} \left[ Fu_j^n - g \frac{\Delta t}{\delta_{j(i,l)}} (1 - \theta)(\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,1)}^n) + \Delta t WN_j^n \right] \right\}. \quad (30) \\ &- (1 - \theta) \Delta t \sum_{l=1}^{S_i} [ s_{i,l} \lambda_{j(i,l)} H_{j(i,l)} u_{j(i,l)}^n ] \end{aligned}$$

Após algum algebrismo, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$A\eta_i^{n+1} + \sum_{j=1}^{S_i} C_{j(i,l)}\eta_{i(j,l)}^{n+1} = F_i^n, \quad (31)$$

onde os coeficientes  $A$ ,  $C$  e  $F$  são calculados no intervalo de tempo  $n$ , dados por:

$$A = P_i^n - \sum_{l=1}^{S_i} C_{j(i,l)}, \quad (32)$$

$$C_{j(i,l)} = \frac{-g\theta^2\Delta t^2\lambda_{j(i,l)}H_{j(i,l)}}{\delta_{j(i,l)}(1+\gamma)_{j(i,l)}}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} F_i^n = & P_i\eta_i^n \\ & - \theta\Delta t \sum_{l=1}^{S_i} \left\{ s_{i,l}\lambda_{j(i,l)}H_{j(i,l)} \left[ \frac{Fu_j^n}{(1+\gamma)_{j(i,l)}} - g\frac{\Delta t}{\delta_{j(i,l)}} \frac{(1-\theta)(\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,l)}^n)}{(1+\gamma)_{j(i,l)}} + \frac{\Delta t\tau_{j(i,l)}^n}{(1+\gamma)_{j(i,l)}} \right] \right\} \\ & - (1-\theta)\Delta t \sum_{l=1}^{S_i} [s_{i,l}\lambda_{j(i,l)}H_{j(i,l)}u_{j(i,l)}^n] \end{aligned} \quad (34)$$

O sistema de equações é reduzido para apenas uma equação na qual a única incógnita é  $\eta_j^{n+1}$ . Para cada passo de tempo de simulação é formado um sistema  $N_p$  de equações lineares. Estimada os valores de  $\eta_j^{n+1}$ , utiliza-se as equações da quantidade de movimento para determinar os valores de  $u_j^{k+1}$  e  $v_j^{k+1}$ . O sistema de equações gerado é simétrico sendo a diagonal principal composta predominantemente por elementos positivos, enquanto os demais, negativos (matriz positiva definida). Logo, o sistema apresenta solução única quando  $\eta_i + h_i > 0$ . Na prática, este sistema é solucionado com eficiência utilizando o método dos gradientes conjugados (Press et al, 1992).

O modelo UnTRIM2D foi desenvolvido utilizando a linguagem FORTRAN, podendo ser aplicado em microcomputadores tipo PC. Em relação à versão bidimensional do modelo IPH-ECO (Fragoso Jr, 2009), a versão descrita neste trabalho foi aperfeiçoada para interpretar domínios com malhas não estruturadas (Cheng e Casulli, 2001) e incorpora um esquema de volumes finitos para o módulo hidrodinâmico (Casulli e Walters, 2000); além da abordagem de diferentes esquemas numéricos aplicados aos termos advectivos da equação de transporte (Gross et al, 1999a) (Casulli, 2005).

### 3.2 Estabilidade do esquema

A análise de estabilidade do esquema semi-implícito de diferenças finitas é feita pelo método de Von Neumann. Ao utilizar o método de Von Neumann para avaliar a estabilidade do esquema, algumas suposições devem ser consideradas: as equações diferenciais governantes são lineares com coeficientes constantes e definidas num domínio horizontal infinito ou finito e com contornos definidos, em casos de escoamentos barotrópicos e hidrostáticos em uma grade uniforme retangular (Casulli e Cattani, 1994). Nestes casos, a estabilidade de Von Neumann é atendida se o passo de tempo  $\Delta t$  satisfaz a seguinte inequação:

$$\Delta t \leq \left[ 2A_n \frac{1}{P^2} \right]^{-1}. \quad (35)$$

Casulli e Cattani (1994) garantem a estabilidade para o esquema semi-implícito de volumes finitos para  $1/2 \leq \theta \leq 1$ . Resultados computacionais de algumas aplicações indicam que nenhuma restrição adicional de estabilidade é requerida ao se usar uma malha não-estruturada (BAW, 2004). Com isso, a estabilidade do algoritmo proposto é independente da celeridade, tensão de cisalhamento do vento e fricção do fundo (Zhang e Baptista, 2003).

### 3.3 Suposições e validações do algoritmo

Esta seção serve para justificar as escolhas feitas na implementação do algoritmo e explicitar as implicações destas escolhas na precisão e/ou aplicabilidade do modelo. O algoritmo adaptado neste trabalho é relativamente simples, genérico e robusto. A seguir são apresentadas suas propriedades quanto à conservação de volume e precisão numérica.

Quando os polígonos que compõem a malha horizontal são retângulos uniformes, o algoritmo se reduz a um modelo semi-implícito de diferenças finitas apresentado em (Casulli, 1990). Como já discutido anteriormente, o algoritmo utiliza uma extensão da formulação tratada no algoritmo de diferenças finitas com grades uniformes para grades não-estruturadas, agregando uma considerável flexibilidade no modelo.

BAW (2004) comenta que uma maior precisão numérica é obtida quando uma grade uniforme, composta por triângulos equiláteros e/ou retângulos, é usada. Nestes casos, a

velocidade normal em cada face do polígono é localizada no ponto central de cada face e o centro de dois polígonos adjacentes são igualmente espaçados da face em comum. Conseqüentemente, o erro na discretização dos termos de gravidade nas (26 e (27 e os termos de pressão hidrostática nas (24 e (25 são de segunda ordem. Em uma grade não-estruturada, estes erros também podem ser reduzidos quando o formato e o tamanho dos polígonos variam gradualmente com o domínio (Gravel e Staniforth, 1992).

### 3.4 Condições de contorno hidrodinâmicas

As condições de contorno impostas ao escoamento são definidas pelas margens, pela entrada ou saída de água em um rio, ou tomada de água, ou pela maré. Na interface terra-água (ao longo da costa), a velocidade na direção normal é definida como nula. Em entradas de afluentes a velocidade deve ser definida como um valor diferente de zero. Além disso, o valor do coeficiente  $C$  é dado nulo nas faces com condições de contorno aberta (afluentes, vertedores, etc) ou em condições de contorno fechada (margens, ilhas, etc).

Por outro lado, o coeficiente  $F$  atribuído a cada face da grade sofre uma distinção entre condições de contorno fechada e aberta. Nas faces submetidas à condições de contorno fechada, o coeficiente  $F$  assume o valor de zero. Enquanto que, nas faces com condições de contorno aberta, a variação do nível entre os polígonos vizinhos à face ( $\eta_{i(j,2)}^n - \eta_{i(j,1)}^n$ ) e a tensão de cisalhamento do vento ( $\tau_{j(i,l)}^n$ ) são considerados nulos. Sendo assim, nas faces com contorno aberto,  $F$  é dado pela seguinte equação:

$$F_i^n = P_i \eta_i^n - \theta \Delta t \sum_{l=1}^{S_i} \left[ s_{i,l} \lambda_{j(i,l)} H_{j(i,l)} \frac{F u_j^n}{(1 + \gamma_{j(i,l)})} \right] - (1 - \theta) \Delta t \sum_{l=1}^{S_i} \left[ s_{i,l} \lambda_{j(i,l)} H_{j(i,l)} u_{j(i,l)}^n \right]. \quad (36)$$

Se o sistema está sujeito a uma variação de nível como a maré (como no contato entre um estuário e o oceano), o valor de  $C$  é nulo em todas as faces do polígono e a variação de nível deve ser definida ao longo de uma linha ou região. Conseqüentemente, a equação 3.20 no polígono submetido a condição de nível se reduz a:

$$A \eta_i^{n+1} = F_i^n, \quad (37)$$

onde  $A = 1$  e  $F$  é igual ao valor do nível de maré no intervalo  $n+1$ .

### 3.5 Módulo de transporte

Quanto a discretização da equação de transporte (Eq. 11) foram empregados e comparados dois esquemas com aproximações numéricas distintas: (a) um esquema de diferenças centrais (Chapra,1997) e (b) um esquema com limitador de fluxo (Sweby, 1984). Ambos os esquemas consideram o transporte de escalar conservativo, ou seja, sem termos de perdas ou ganhos de massa como, por exemplo, um termo de decaimento ou sedimentação. Tais esquemas são considerados robustos e amplamente difundidos na literatura (Casulli e Zanolli, 2005; Sweby, 1984; Lomax et al, 2000).

Nos testes de conservação de massa do módulo de transporte foram comparados os erro de massa acumulado ao longo do tempo, sendo o rio Guaíba o objeto de aplicação.

#### 3.5.1 Esquema de diferenças centrais

O esquema mais usado na modelagem da costa oceânica e estuarina é o de diferenças centrais (Casulli, 1990) por ser eficiente e de fácil implementação. Utilizando a equação da continuidade ((6) e assumindo que as funções envolvidas na equação do transporte são diferenciáveis, a discretização numérica da equação do transporte, em uma grade não estruturada pode ser dada pela (38). Em que  $S_i^+$  trata-se da série de lados pertencentes ao  $i$ -ésimo polígono que fazem o  $i$ -ésimo polígono perder massa, enquanto que  $S_i^-$  é a série de lados que agregam massa ao  $i$ -ésimo polígono:

$$P_i H_i^{n+1} C_i^{n+1} = P_i H_i^{n+1} C_i^{n+1} - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^n| C_i^n - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^n| C_{m(i,j)}^n \right] + \Delta t \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} D_j^n [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] \quad (38)$$

onde  $Q_j^n = \lambda_j H_i^n u_i^n$  e  $D_j^n = \lambda_j H_j^n \frac{K_j^n}{\delta_j}$  são os coeficientes dos fluxos advectivos e difusivos, respectivamente.

Uma importante propriedade que deve ser verificada em esquemas numéricos que simulam a dinâmica de poluentes em corpos d'água é o princípio dos valores extremos. Este

princípio garante que as concentrações máxima e mínima não excedam aos limites estipulados nas condições iniciais do sistema, considerando o transporte de um escalar passivo livre de taxas de crescimento e/ou decaimento.

Em geral, nos esquemas totalmente explícitos de diferenças centradas apenas o princípio da conservação de massa é satisfeito. O resultado da solução numérica de  $C_i^{n+1}$  pode gerar novos valores mínimos e máximos de concentração de um escalar, o que pode levar a valores sem significado físico (max-min property). Este problema pode ser resolvido quando se agrega o ponderador  $\theta$  (Casulli e Cattani, 1994) na discretização do coeficiente de fluxo advectivo, deixando-o semi-implícito ((39):

$$P_i H_i^{n+1} C_i^{n+1} = P_i H_i^n C_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| C_i^n - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^{n+\theta}| C_{m(i,j)}^n \right] + \Delta t \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} D_j^n [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] \quad (39)$$

onde o coeficiente advectivo é definido como  $Q_j^{n+\theta} = \lambda_j H_j^n u_i^{n+\theta}$ .

Introduzindo a equação da continuidade para manter o esquema conservativo, a solução numérica da equação de transporte segundo um esquema de diferenças centrais semi-implícito é apresentada conforme a equação abaixo:

$$C_i^{n+1} = \frac{P_i H_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| - \sum_{j \in S_i^- \cup S_i^+} D_j^n \right]}{P_i H_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| C_i^n - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^{n+\theta}| C_{m(i,j)}^n \right]} C_i^n + \Delta t \frac{P_i H_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| C_{m(i,j)}^n - \sum_{j \in S_i^- \cup S_i^+} D_j^n C_{m(i,j)}^n \right]}{P_i H_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^{n+\theta}| \right]} C_i^n \quad (40)$$

Apesar deste esquema ser conservativo e respeitar a propriedade dos valores máximo e mínimos, ele não é livre de difusão numérica. Esquemas com limitador de fluxo são propostos para resolver este problema.

### 3.5.2 Esquemas com limitador de fluxo

Esquemas numéricos constituídos por diferenças finitas de alta ordem podem fornecer soluções fisicamente incorretas em escoamentos complexos não satisfazendo a condição de entropia (Lomax et al, 2000). Uma das formas utilizadas para produzir soluções únicas e com alta resolução é desenvolver esquemas numéricos não lineares que empreguem o conceito de diminuição (ou limitação) das variações totais (Rizzi, 2002).

Neste trabalho, um esquema com limitador de fluxo foi desenvolvido seguindo a formulação proposta por Sweby (1984). Tal formulação propõe agregar um limitador de fluxo ( $\Phi$ ) na discretização da equação do transporte (Eq. 11), levando a seguinte aproximação numérica:

$$P_i H_i^{n+1} C_i^{n+1} = P_i H_i^n C_i^n - \Delta t \left[ \sum_{j \in S_i^+} |Q_j^{n+\theta}| C_i^n - \sum_{j \in S_i^-} |Q_j^{n+\theta}| C_{m(i,j)}^n \right], \quad (41)$$

$$- \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} \Phi_j^n |Q_j^{n+\theta}| [C_{m(i,j)}^n - C_i^n] + \Delta t \sum_{j \in S_i^+ \cup S_i^-} D_j^n [C_{m(i,j)}^n - C_i^n]$$

onde o termo  $\Phi_j^n$  é uma função limitadora de fluxo. Desta forma, se  $\Phi = 0$ , o esquema é reduzido aos esquemas de diferenças centrais. Um esquema de diferença central de segunda ordem é admitido nas faces em que  $\Phi = 1$ . E um esquema de primeira ordem, porém menos difusivo, é aplicado quando  $\Phi = 2$  (Sweby, 1984).

A estabilidade de um esquema linear de volumes finitos descrito pela equação 36 somente será assegurada com a utilização de malhas refinadas, de modo que as distâncias entre os centros dos polígonos  $\delta_j$  devem ser suficientemente pequenas para satisfazer a inequação abaixo (Casulli e Zanolli, 2005):

$$\Phi_j^n |Q_j^{n+\theta}| \leq 2D_j^n, \quad (42)$$

Algumas vezes é necessário um refinamento na grades para satisfazer a inequação (42), o que pode ser uma tarefa dispendiosa e ineficiente do ponto de vista computacional. Desta forma, procura-se limitar o valor de  $\Phi$  utilizando a seguinte restrição:

$$\phi_j^n = \min \left( \frac{2D_j^n}{|Q_j^{n+\theta}|} \right). \quad (43)$$

Existem algumas formas para determinar o valor de  $\Phi$  (van Leer, 1979; Sweby, 1984; Roe, 1985). As formulações mais difundidas, freqüentemente aplicadas, são (van Leer, 1979; Roe, 1985):

$$\text{Minmod: } \Phi(r) = \max[\varphi, \min(1, r)], \quad (44)$$

$$\text{Van Leer: } \Phi(r) = \max\left[\varphi, \frac{r + |r|}{1 + |r|}\right], \quad (45)$$

$$\text{Superbee: } \Phi(r) = \max[\varphi, \min(1, 2r), \min(2, r)], \quad (46)$$

onde  $r$  é a razão dos gradientes consecutivos, definido conforme a equação abaixo para  $j \in \mathcal{S}_i^+$ :

$$r_j^n = \frac{1}{C_{m(i,j)}^n - C_i^n} \frac{\sum_{j \in \mathcal{S}_i^-} [|\varrho_j^{n+\theta}| (C_i^n - C_{m(i,j)}^n)]}{\sum_{j \in \mathcal{S}_i^-} |\varrho_j^{n+\theta}|}. \quad (47)$$

Assim, são atribuídos diferentes pesos conforme varia a distribuição de fluxo em uma face de uma célula. A função limitante pode ser arbitrária e sua escolha não tem uma firme base matemática (Rizzi, 2002). Neste trabalho foi adotado a função limitante desenvolvida por Superbee ((46)).

## 4. Aplicação do modelo

### 4.1 Estudo de caso simplificado (lagoa circular)

É conveniente que a solução numérica do modelo aqui proposto seja testada e checada para assegurar uma solução precisa, suficientemente capaz de garantir aplicações do modelo nos mais diversos problemas em recursos hídricos. A precisão de um modelo hidrodinâmico geralmente é testada comparando dados levantados em campo (i.e. nível ou velocidade) com a solução do modelo (Falconer, 1980). No entanto, os custos para monitoramento destas variáveis podem ser muito elevados (Nece et al, 1972; Nece et al, 1976). A avaliação dos erros de conservação de volume pode ser uma alternativa razoável quando não se tem informações de campo disponível.

A solução e os erros numéricos do modelo IPH-UnTRIM2D usando o método de interpolação por inverso da distância e por inverso da área foram comparados com a solução numérica do modelo de grades estruturadas (IPH-ECO), o qual foi previamente testado e aplicado. Testes comparando a eficiência computacional entre os modelos não foram realizados, porém são altamente recomendados.

#### 4.1.1 Dados de entrada

As performances dos modelos foram avaliadas em um simples estudo de caso: uma lagoa circular hipotética. A caracterização deste sistema foi baseada em estudos experimentais feitos por Falconer (1980), onde foram identificados padrões de circulação de pequena escala, vãos também em grande escala. A lagoa circular foi discretizada em uma malha de cálculo retangular com 293 elementos com dimensões de 100 x 100 m (Figura 13). A mesma discretização foi utilizada para os dois modelos para eliminar o efeito da geometria do sistema na saída dos modelos.

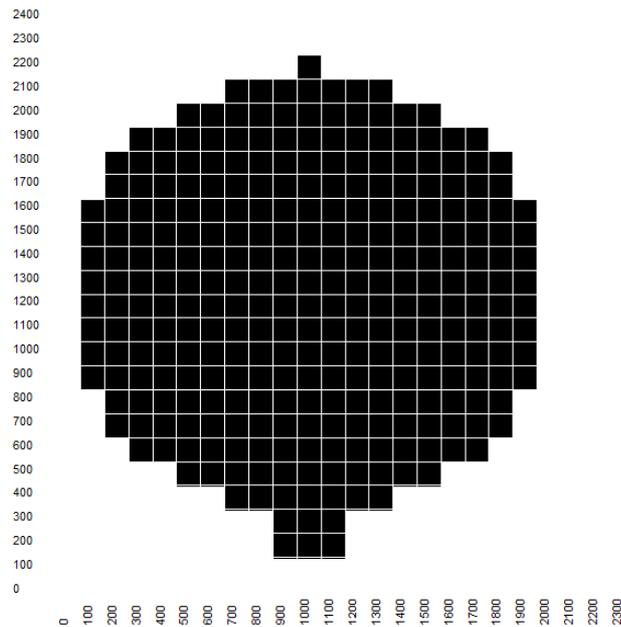


Figura 13 – Domínio e discretização espacial numa malha retangular da lagoa circular.

O coeficiente de rugosidade de Chezy, coeficiente de redução da tensão de cisalhamento do vento na superfície da água e a profundidade foram considerados constantes em toda a lagoa e iguais a 44,7, 1,0 e 8,5 m, respectivamente.

No módulo hidrodinâmico são utilizados uma série de parâmetros de entrada. A faixa de valores para esses parâmetros foi encontrada em Fragoso Jr (2005) (Tabela 1). Na simulação dos cenários para o estudo de caso da lagoa circular foram adotados os valores médios das faixas.

Tabela 1 – Principais parâmetros utilizados no módulo hidrodinâmico (extraído de Fragoso Jr, 2005).

Parâmetro	Descrição do parâmetro	Unidade	Faixa de valores	
1	$A_h$	Coeficiente de viscosidade turbulenta horizontal	$m^2/s$	5 – 15
2	$C_D$	Coeficiente de arraste do vento	-	$2e^{-6} - 4e^{-6}$
3	$C_Z$	Coeficiente de atrito de Chezy	-	50 – 70
4	$\theta$	Ponderador temporal	-	0,50 – 0,60

A validação do módulo hidrodinâmico do modelo de grades não estruturadas conta com a simulação de 3 diferentes cenários com condições de contorno distintas em um período de 48 horas, são eles: (a) circulação sob efeito de uma entrada de água gradualmente variada;

(b) circulação sob efeito de uma entrada de água bruscamente variada; (c) circulação sob efeito exclusivo do vento.

Tabela 2 – Descrição dos cenários de simulação na lagoa circular.

Cenário	Descrição do cenário
1	Cenário com entrada de água gradualmente variada.
2	Cenário com entrada de água bruscamente variada.
3	Cenário submetido apenas sob a ação de um vento senoidal.

Em todas as simulações foram monitorados as variáveis hidrodinâmicas (e.g. nível, campo de velocidades) e os erros numéricos de conservação de volume ao longo do tempo. As condições de contorno para cada cenário simulado foram adaptações baseadas em Benqué et al (1982), de forma a explorar a diversidade dos efeitos externos (e.g. vento, posição geográfica) e visualizar a importância da aceleração advectiva e o efeito da difusão turbulenta nas simulações.

#### 4.1.2 Circulação sob efeito de uma entrada de água gradualmente variada.

Neste cenário a lagoa circular foi submetida a uma condição de contorno de velocidade na face posicionada em sua extremidade ao norte, desprezando os efeitos do cisalhamento na superfície devido ao vento (Figura 14)

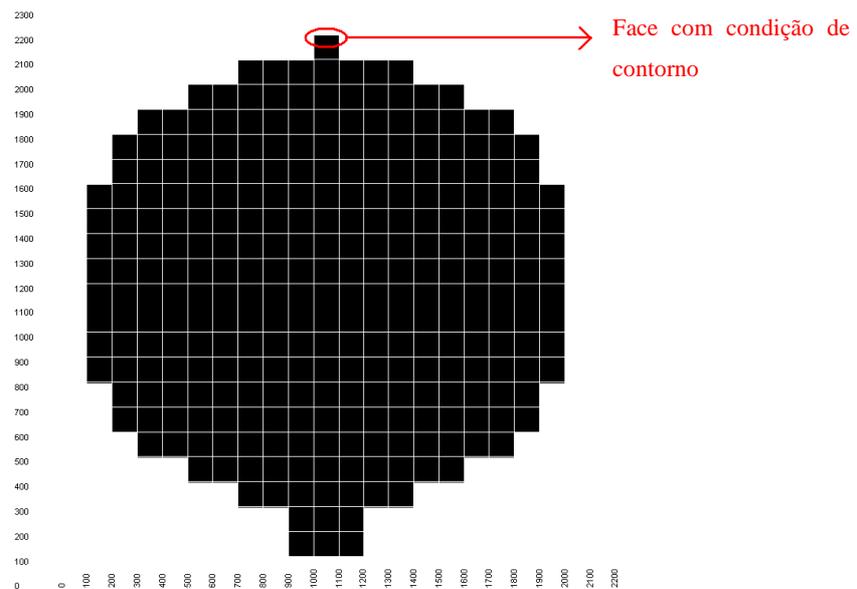


Figura 14 – Localização da condição de contorno de velocidade na lagoa circular.

A condição de contorno de velocidade atribuída para este cenário considera a velocidade variando de 0 a 0,3 m/s nas 3 primeiras horas e, em seguida, permanecendo constante e igual a 0,3 m/s até o final da simulação (Figura 15). Satisfazendo o critério de estabilidade definido por Casulli e Cattani (1994), o intervalo de tempo de simulação adotado foi  $\Delta t = 10s$ .

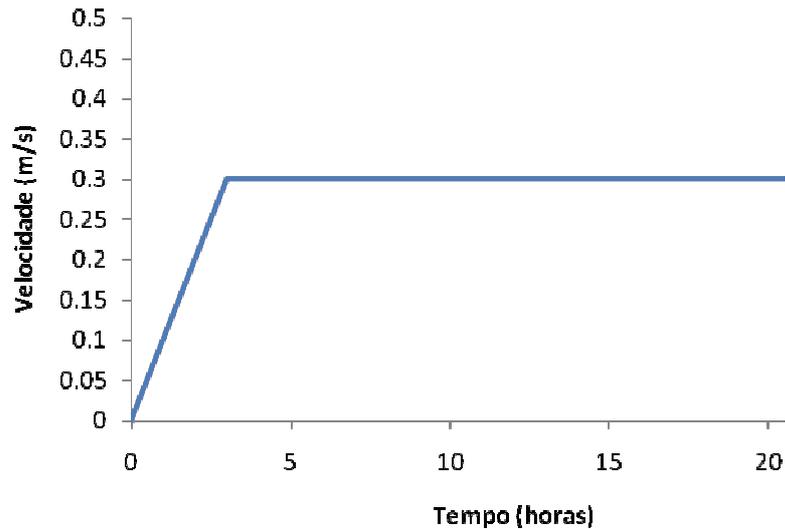


Figura 15 – Variação temporal da condição de entrada de velocidade na lagoa circular.

O efeito da força de Coriolis também foi simulado considerando o sistema em uma latitude média igual a  $23^{\circ} 48' S$  para todo o seu domínio. Supondo que inicialmente o sistema estava em repouso, observa-se a evolução dos campos de velocidade na lagoa circular estimados pelo modelo de grades estruturadas (IPH-ECO) e pelo modelo de grades não estruturadas (IPH-UnTRIM2D) (Figura 16).

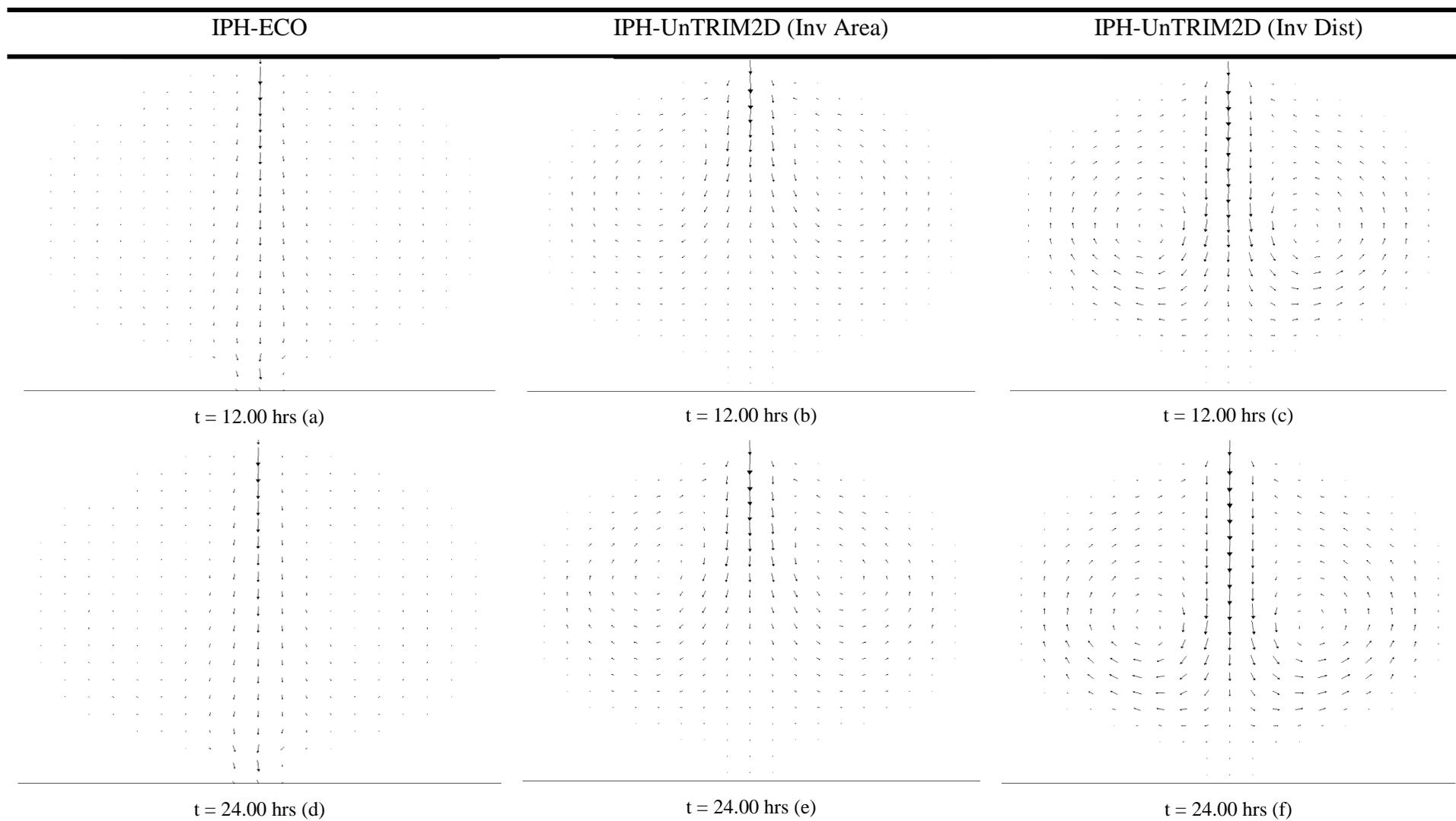


Figura 16 – Evolução dos campos de velocidade para o cenário 1 na lagoa circular usando o IPH-ECO (a, d) e o IPH-UnTRIM2D (b, c, e, f).

Constata-se que a solução hidrodinâmica calculada pelo método de diferenças finitas (IPH-ECO) segue um sentido preferencial de fluxo na parte central do sistema. Por outro lado, a solução do módulo hidrodinâmico através do método dos volumes finitos (IPH-UnTRIM2D) apresentou uma desaceleração uniforme ao longo do eixo principal de escoamento. Esta diferença pode estar relacionada ao modo como as velocidades no centro da célula para plotagem são calculadas nos dois modelos. No modelo IPH-ECO a componente na direção vertical é estimada utilizando a média das velocidades apenas nas faces inferior e superior do polígono, enquanto no modelo IPH-UNTRIM2D esta mesma componente é calculada utilizando a média das velocidades verticais em todas as faces, resultando em uma atenuação das velocidades ao longo do eixo principal de escoamento. Outra característica importante que pode ser verificada é a forma como estão distribuídos os vórtices no escoamento. A estrutura dos vórtices é influenciada, principalmente, pela viscosidade turbulenta do fluido expressa nas equações da quantidade de movimento ((4 e Eq. 5). E, em todas as simulações descritas neste trabalho, a viscosidade turbulenta foi mais um parâmetro adotado com base na literatura e não foi medida.

Uma sensível diferença numérica importante na solução hidrodinâmica dos modelos apresentados é no tratamento do termo da segunda derivada. Enquanto o modelo IPH-ECO estima o termo da segunda derivada na face utilizando velocidades pontuais em 4 faces vizinhas, o modelo IPH-UnTRIM2D calcula o termo da segunda derivada na face utilizando velocidades pontuais nos centros dos polígonos (segunda derivada na direção normal a face) e nos vértices da face (segunda derivada na direção tangencial a face). A aproximação numérica torna os vórtices formados no modelo de diferenças finitas (IPH-ECO) próximos e simétricos ao sentido preferencial do fluxo, enquanto que o modelo de volumes finitos (IPH-UnTRIM2D) apresenta vórtices simétricos, abrangentes, com campo de velocidade distribuído em grande parte do domínio e uniforme.

A Figura 17 trata-se do lançamento e monitoramento de 5 derivadores em posições escolhidas aleatoriamente na lagoa circular e adotados nas simulações dos demais cenários. Os pontos em preto indicam a posição inicial dos derivadores. As trajetórias sobrepostas dos derivadores indicam que o esquema numérico baseado no método dos volumes finitos (IPH-UnTRIM2D) apresenta uma maior dispersão das partículas que o método das diferenças finitas (IPH-ECO). A diferença entre a dispersão das partículas nos modelos é dada pelos diferentes métodos de interpolação do campo de velocidades que refletem diretamente na

solução numérica das equações que representam o escoamento. Maiores detalhes sobre os métodos de interpolação adotados em cada modelo são descritos no capítulo 3 deste manuscrito (i.e. interpolação pelo inverso da área do polígono e interpolação pelo inverso da distância ao quadrado) e em Fragoso Jr. (2005) (i.e. interpolação bilinear).

IPH-ECO

IPH-UnTRIM2D Inv Area

IPH-UnTRIM2D Inv Dist

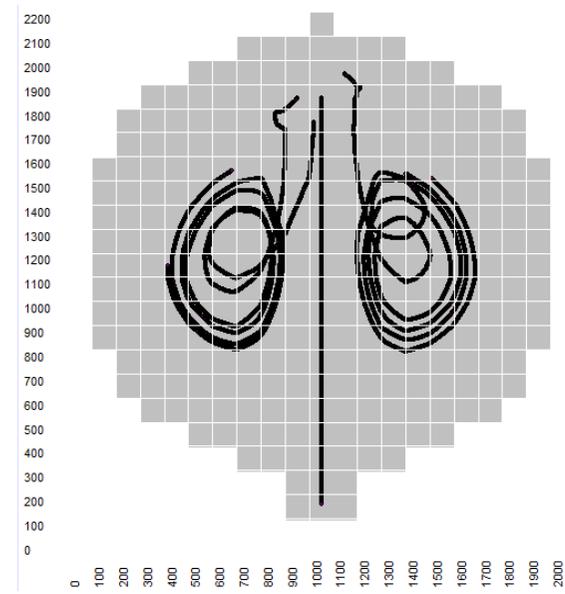
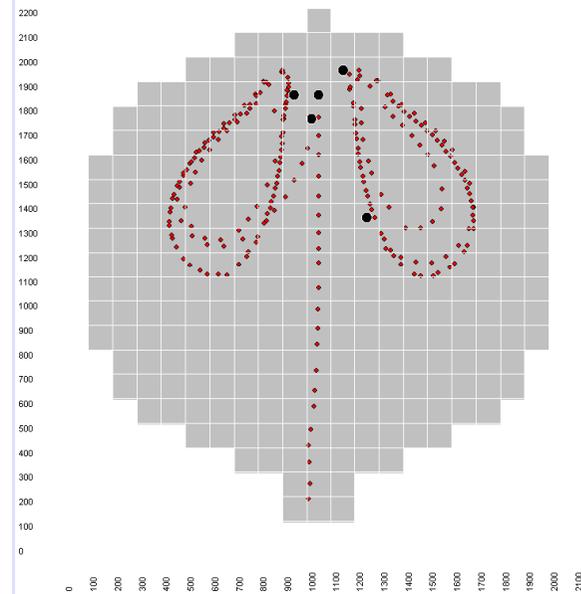
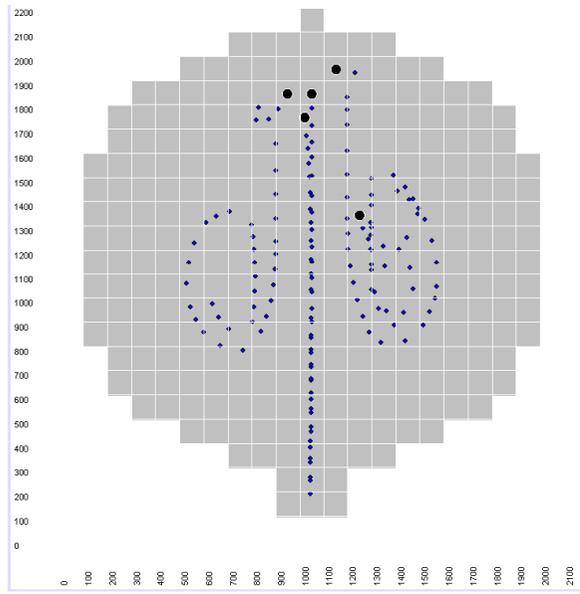


Figura 17 – Lançamento e acompanhamento da posição de 5 derivadores (bóias) na lagoa circular para as condições de contorno do cenário 01.

Considerando a equação da continuidade ((11), na verificação da conservação de volume foi calculado a diferença percentual entre o volume de entrada (Eq. 50) e o volume devido a variação do nível (Eq. 51) no sistema formado pela lagoa circular para cada intervalo de tempo de simulação. As equações utilizadas no balanço de volume são dadas por:

$$V_{entrada} = Q_{contorno\_aberto}^n \Delta t \quad (48)$$

e

$$V_{incremental} = A_{superficie} \sum_{i=1}^{N_{elem}} (\eta_i^{n+1} - \eta_i^n), \quad (49)$$

onde  $Q_c^n$  é a vazão afluente do sistema,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo adotado na simulação,  $\eta_i^n$  é o elevação do nível da água no elemento e  $A_s$  é a área total da superfície da lagoa circular. O erro percentual na conservação de volume é dado da seguinte forma:

$$Erro(\%) = 100 \left( \frac{V_{entrada} - V_{incremental}}{V_{entrada}} \right). \quad (50)$$

Sendo assim, o erro na conservação de volume para cada intervalo de tempo equivale à percentagem de volume de água que foi criada ou perdida artificialmente, em relação ao volume de água que entra. Os erros de conservação de volume foram registrados em ambos os modelos e comparados ao longo de 1 dia (Figura 18). Além da conservação de volume, ao longo desta simulação também foi monitorado o nível médio da lâmina d'água na lagoa circular (Figura 19). O nível médio da lâmina d'água corresponde a variação da superfície da água média produzida decorrente das condições de contorno aplicadas no sistema.

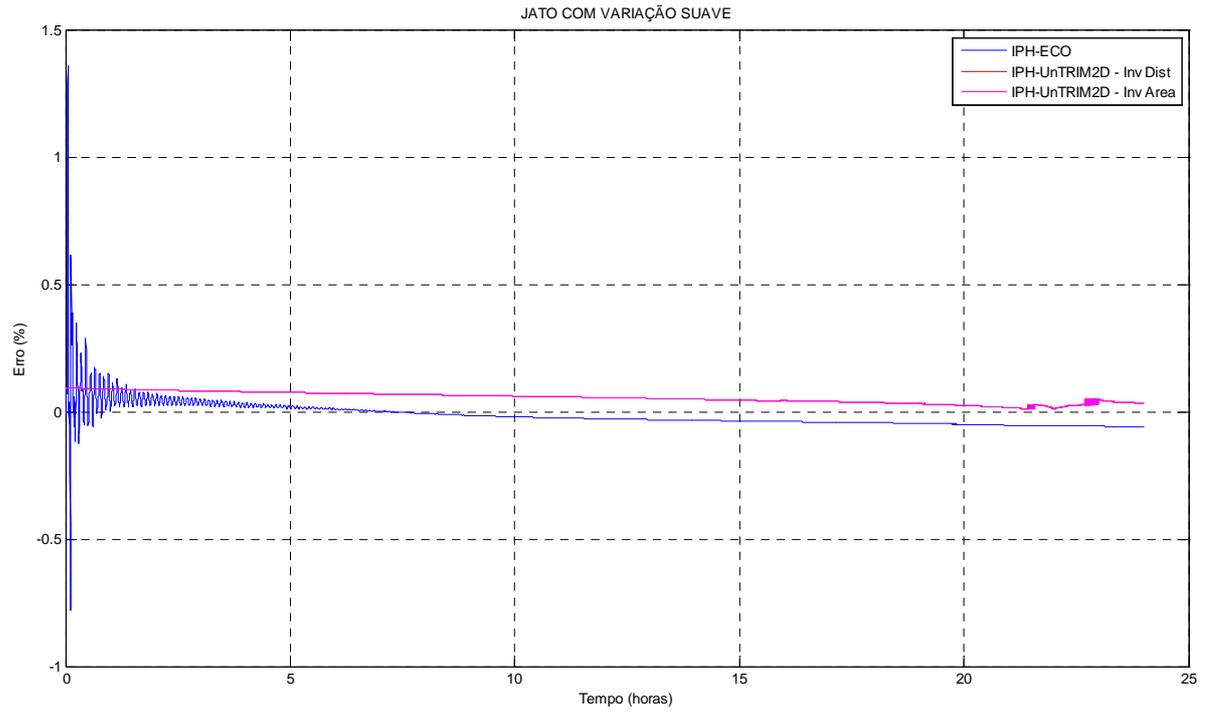


Figura 18 – Erro na conservação de volume com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D para o cenário 01 (vermelho).

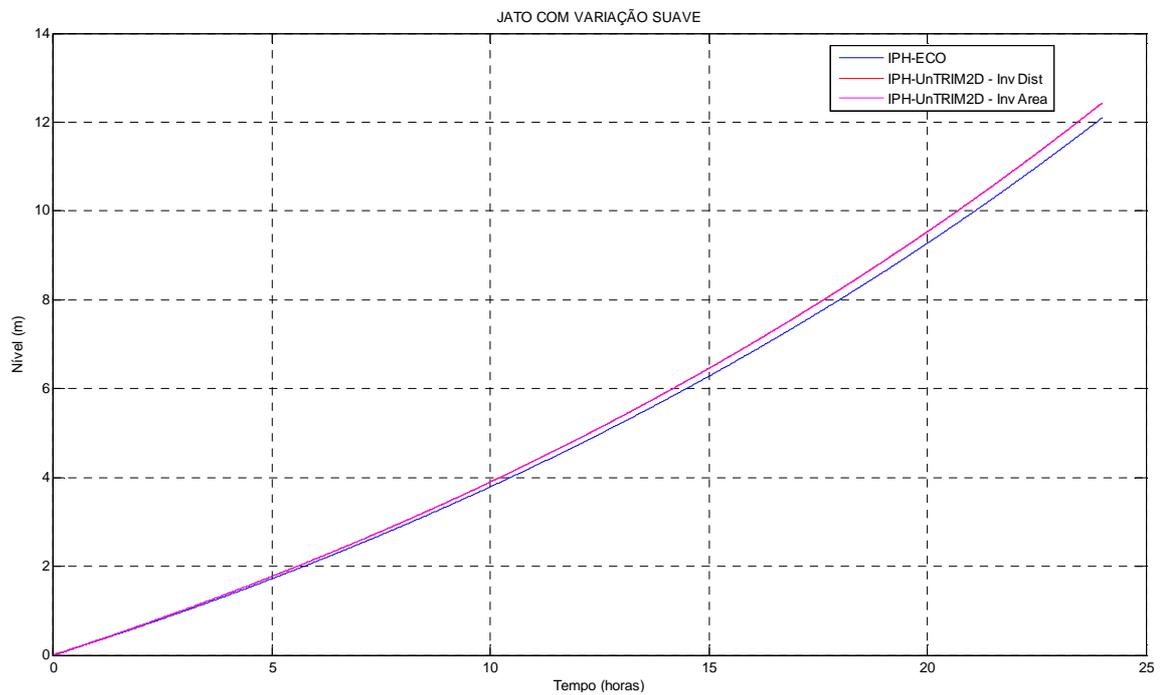


Figura 19 – Variação do nível médio com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) no cenário 01.

Em comparação com o IPH-ECO no teste de conservação de volume, o IPH-UnTRIM2D apresentou um sensível ganho de volume nas primeiras 3 horas de simulação com uma tendência de correção do erro no decorrer do tempo (Figura 18). O modelo IPH-ECO, por sua vez, possui uma sensível perda de volume em toda a simulação. Mediante os resultados do teste de conservação de volume, constata-se que o modelo IPH-UnTRIM2D é mais conservativo que o modelo IPH-ECO para o cenário 01. Além disso, foi possível verificar que a solução do modelo IPH-UnTRIM2D é numericamente estável. Na Figura 19 observa-se que o modelo IPH-ECO subestima o nível médio na lagoa circular com relação ao calculado pelo modelo IPH-UnTRIM2D refletindo uma perda de volume sistêmica ao longo da simulação.

#### 4.1.3 Circulação sob efeito de uma entrada de água bruscamente variada

No intuito de verificar o comportamento do modelo não estruturado em condições extremas, neste segundo cenário foi definida uma entrada bruscamente variada em um curto intervalo de tempo na face superior da lagoa circular. Esta condição de contorno consiste em aplicar uma variação de velocidade de  $\Delta v = 0,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  no 2º intervalo de tempo de simulação considerando o sistema inicialmente em repouso. Em seguida, a velocidade permanece constante e igual a 0,3 m/s para toda a simulação (Figura 20).

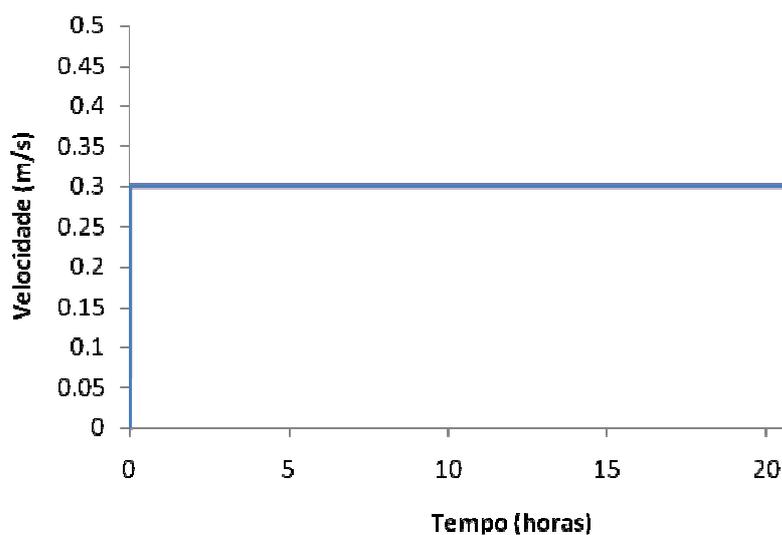


Figura 20 – Variação temporal da condição de entrada de velocidade na lagoa circular.

Neste cenário foi verificado o comportamento hidrodinâmico do sistema quando submetido a condições de mudanças rápidas da velocidade da água como, por exemplo, uma onda de cheia com alta celeridade.

A força de Coriolis e o efeito do vento na lagoa circular serão tratados de forma similar ao cenário 1. A Figura 21 apresenta o campo de velocidades com as simulações feitas sob efeito das condições de contorno do cenário 2 nos início e após 12 e 24 hrs de simulação.

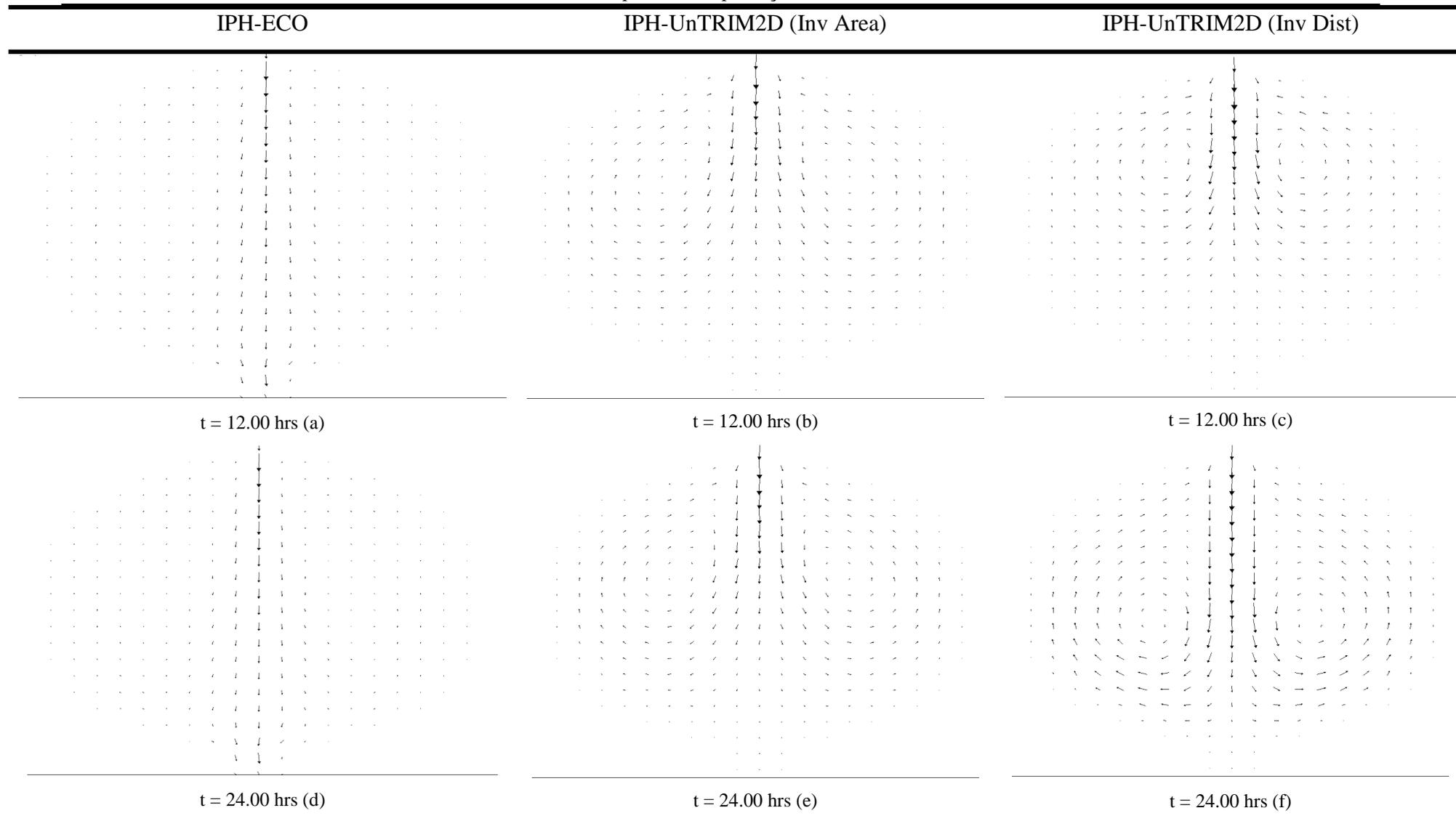


Figura 21 – Campos de velocidade para o cenário 2 na lagoa circular usando o IPH-ECO (a, d) e o IPH-UnTRIM2D (b, c, e, f).

Devido a escala temporal das condições de contorno, após 12 horas de simulação é razoável que os campos de velocidades tornem-se similar aos encontrados no cenário 01 (ver Figura 16 e Figura 21). No entanto, nas primeiras horas de simulação a lagoa circular apresenta significativas perturbações no nível devido a propagação de onda causada pela súbita variação nas condições de contorno do sistema. Os padrões de circulação são definidos com pequenas oscilações no campo de velocidades, em seguida, a circulação na lagoa circular é estabilizada caracterizando um regime permanente no escoamento. Neste cenário a formação da estrutura dos vórtices é definida nas primeiras iterações. Da mesma forma que no cenário anterior, os vórtices formados no modelo de grades estruturadas (IPH-ECO) transladam ao longo do sentido preferencial do fluxo. Enquanto que no modelo de grades não estruturadas (IPH-UnTRIM2D) os vórtices ficam contidos na região central da lagoa.

Neste cenário é verificado o comportamento da solução hidrodinâmica quando o sistema é submetido a condições críticas de escoamento, como por exemplo, uma onda de cheia com alta celeridade. A Figura 22 mostra a trajetória feita por 5 traçadores durante a simulação. Foi verificado que, com exceção da partícula lançada no eixo preferencial de fluxo, as partículas não convergem para uma trajetória em comum. No modelo IPH-ECO as partículas perfazem trajetórias paralelas ao eixo preferencial do escoamento e, em seguida, entram numa zona de turbulência no centro da lagoa circular. No modelo IPH-UnTRIM2D, por sua vez, as trajetórias das partículas são similares e permanecem compreendidas em dois vórtices principais formados no decorrer da simulação.

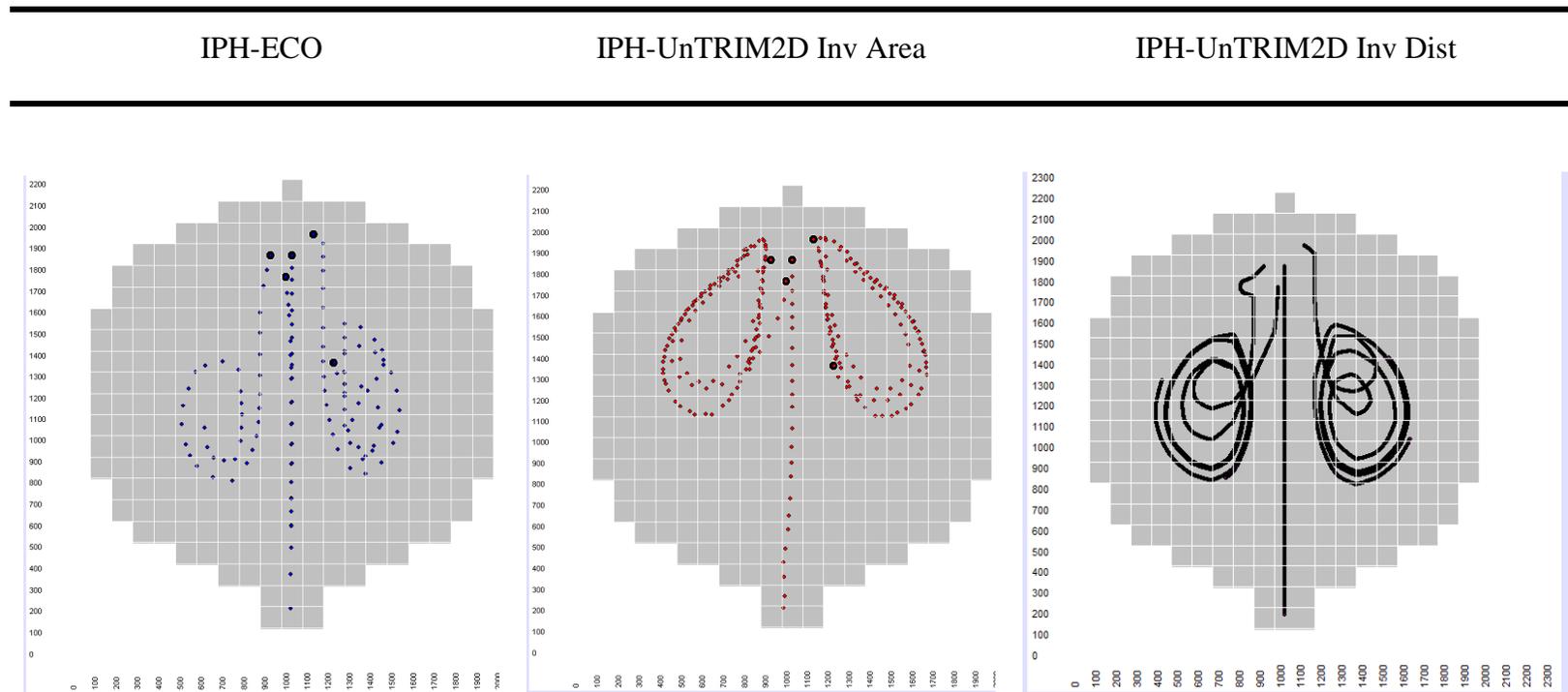


Figura 22 – Trajetória de 5 derivadores na lagoa circular para o cenário 02.

De maneira análoga ao cenário 01, os resultados dos erros com conservação de volume e da variação do nível médio da lâmina d'água na superfície da lagoa circular foram calculados utilizando o modelo IPH-UnTRIM2D e comparados com a solução do modelo IPH-ECO em uma simulação com duração de 1 dia.

O cenário 02 apresentou resultados distintos de conservação de volume quando comparado com os do cenário anterior (Figura 23). Verifica-se uma forte oscilação entre perda e ganho de volume no início da simulação utilizando o modelo IPH-ECO. Este erro se estabiliza após algumas horas, no entanto, nota-se uma sistemática perda de volume do sistema ao longo da simulação. Os erros de conservação de volume no modelo IPH-UnTRIM2D são pequenos e estáveis neste cenário. Estes erros de volume são atenuados ao longo da simulação, tendendo a zero. A perda sistemática de volume do modelo IPH-ECO é diretamente refletida no nível médio do sistema. Na Figura 24 é exposto o monitoramento do nível médio da lagoa circular no decorrer do tempo de simulação em ambos os modelos. Verifica-se que o modelo de grades estruturadas (IPH-ECO) subestima o nível médio da lagoa circular quando comparado com o modelo de grades não estruturadas (IPH-UnTRIM2D).

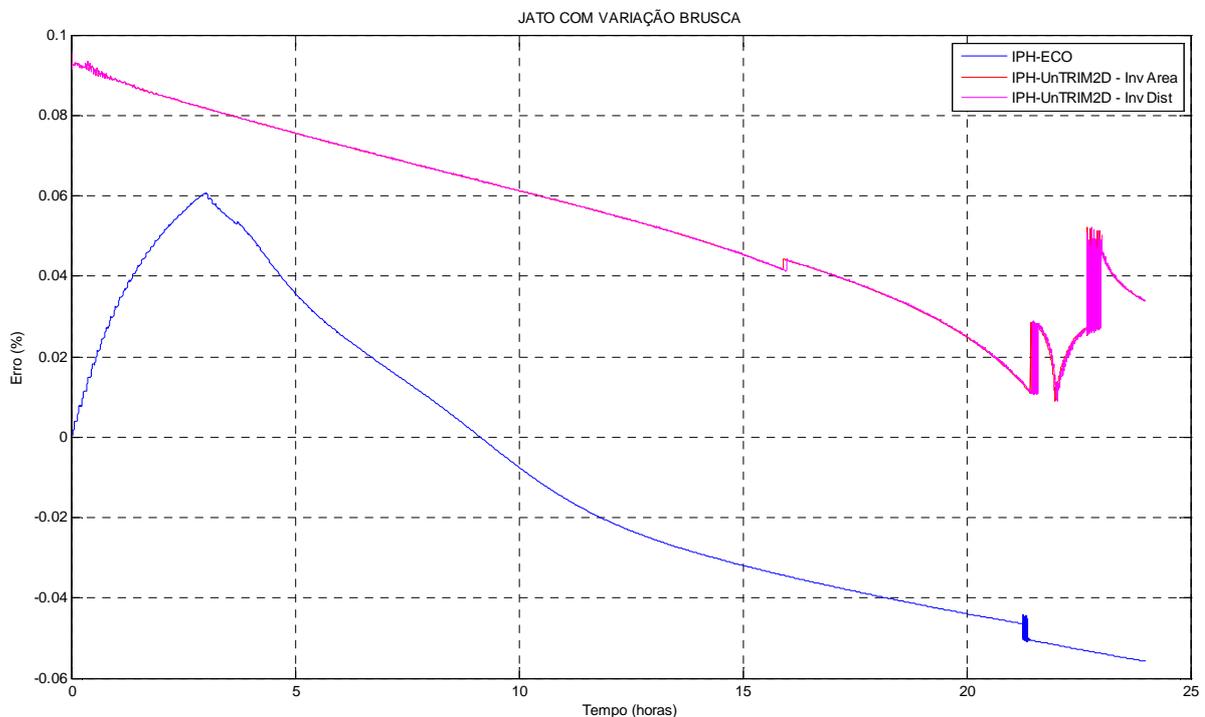


Figura 23 – Erro na conservação de volume com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) para as condições de contorno do cenário 02.

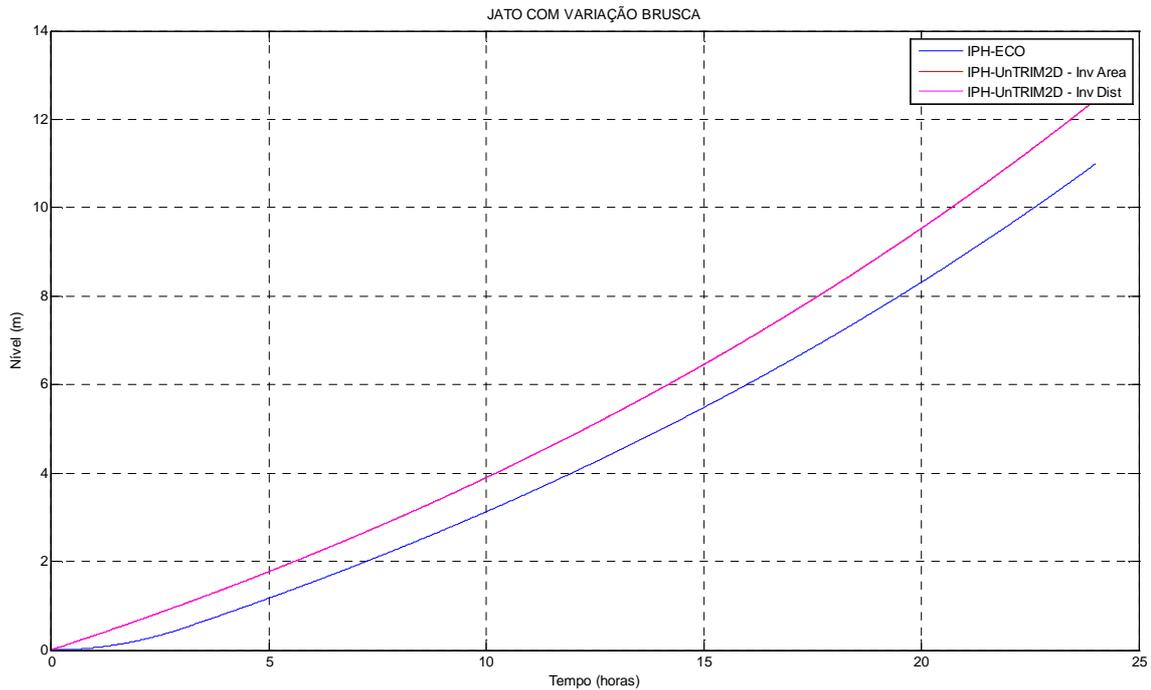


Figura 24 – Variação do nível médio com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) no cenário 02.

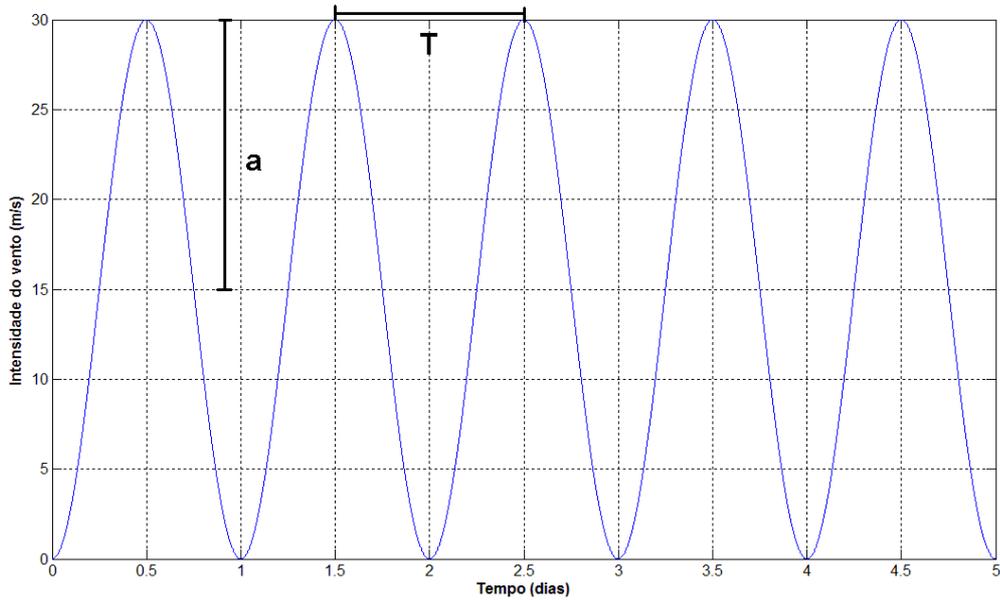
#### 4.1.4 Circulação sob efeito exclusivo do vento

O efeito do vento é um importante processo na definição da hidrodinâmica de um corpo d'água, principalmente quando movimentos atmosféricos são relevantes na circulação do sistema (BAW, 2004). Neste cenário de simulação todas as células da lagoa circular estão sujeitas a tensão de cisalhamento na superfície devido ao vento. Duas grandezas são necessárias para a representação da condição de contorno de vento: direção e intensidade.

Nesta aplicação foi adotado um vento sudoeste, atuando sobre a superfície da água do sistema. A intensidade do vento aplicado na lagoa circular varia ao longo do tempo segundo uma senóide com amplitude,  $A$ , de 15 m/s e comprimento de onda,  $T$ , de 12 horas (Figura 25). A expressão matemática da senóide é dada pela equação abaixo:

$$v(t) = a \sin\left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + a, \quad (51)$$

onde  $v$  é a velocidade do vento no tempo  $t$ ;  $a$  é a amplitude da senóide e  $w$  é a frequência angular.



**Figura 25 – Variação da intensidade do vento na superfície da lagoa circular para o cenário 03.**

O campo de velocidades e o gradiente de nível são apresentados na Figura 26 para alguns intervalos de tempo na lagoa circular. A diferença de níveis foi definida por um gradiente de cores, variando do azul para o verde (região em azul indica células com níveis mais baixos enquanto que a região em verde indica células com níveis mais altos). Verifica-se uma notável semelhança entre os gradientes de níveis estimados nos dois modelos.



Verifica-se uma inexistência de padrões de circulação neste sistema devido ao equilíbrio entre o gradiente de pressão e a tensão de cisalhamento na superfície. Ao atingir 12 horas de simulação (Figura 26a a Figura 26c), instante em que a intensidade do vento é máxima, fica evidente a formação de seiches (i.e. flutuações no nível da água de grandes corpos de água) diretamente influenciada pela ação do vento. Ambos os modelos tiveram uma solução hidrodinâmica semelhante, apresentando valores de velocidade da água não significativos ao ponto de não promover transporte de partículas na água ao longo da simulação (Figura 27).

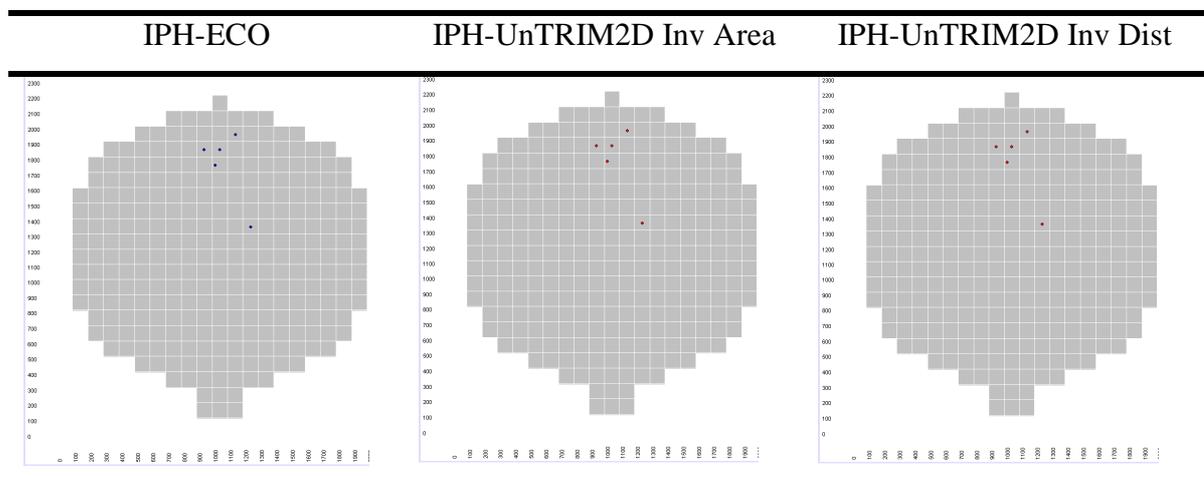


Figura 27 – Deslocamento dos derivadores sob ação do vento em 1 dia de simulação.

Como a única força externa que atua na circulação do sistema é o vento e o volume de entrada é nulo ( $V_e = 0$ ), encontra-se uma indeterminação no cálculo do erro da conservação de volume utilizando a equação apresentada anteriormente (Eq.54). Neste caso, o erro de conservação de volume pode ser calculado como:

$$Erro(\%) = 100 \left( \frac{V_{incremental}}{V_{total}} \right), \quad (52)$$

onde  $V_t$  trata-se do volume total do sistema. Isto implica que o modelo é conservativo quanto mais próximo de 0% for o seu erro. O erro de conservação de volume e a variação do nível médio d'água são apresentados nas Figura 28 e Figura 29, respectivamente. As simulações neste cenário foram estendidas para 2 dias no intuito de melhor representar o ciclo da senóide.

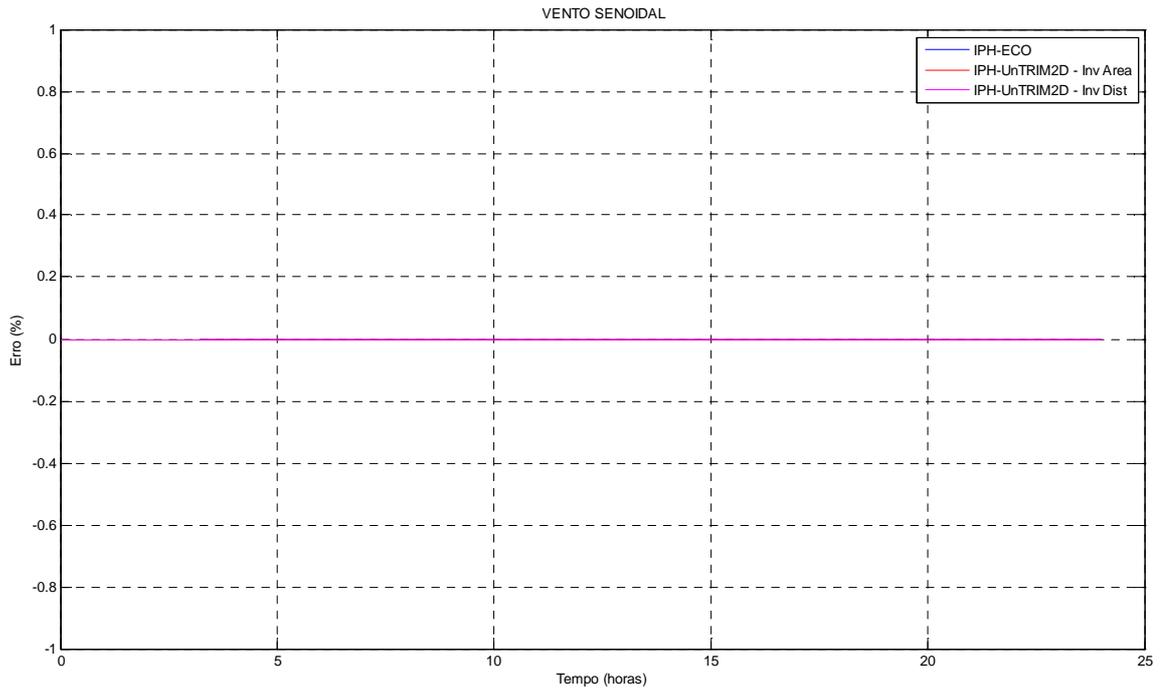


Figura 28 – Erro na conservação de volume com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) para o cenário 03.

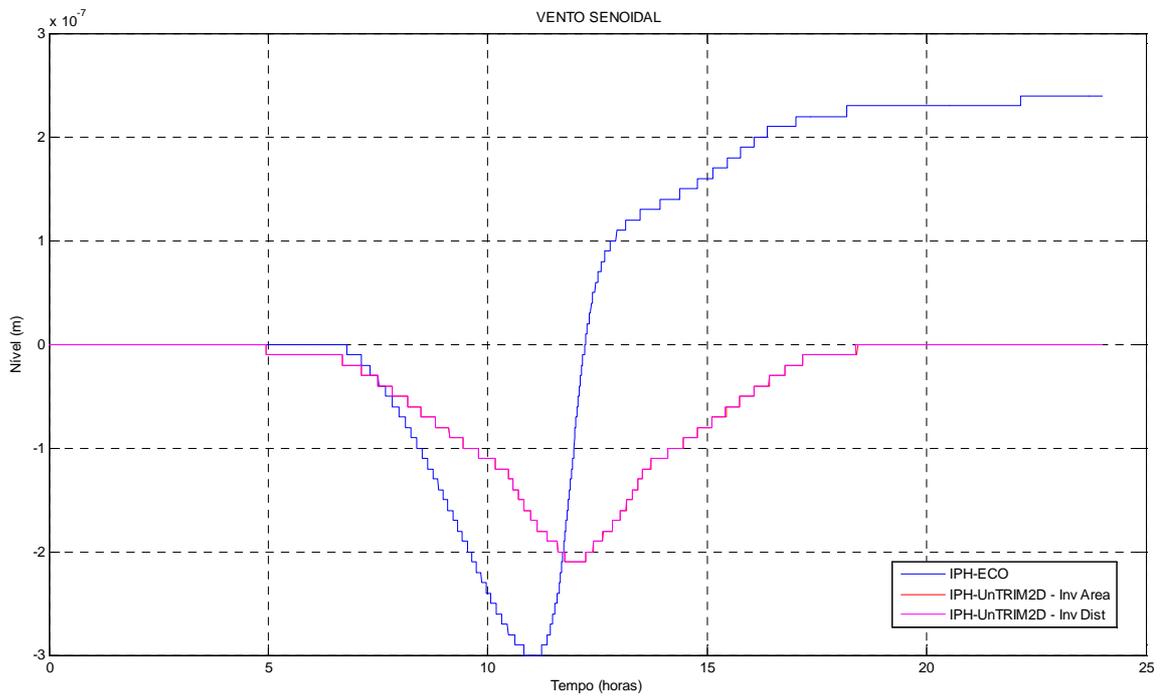


Figura 29 – Variação do nível médio com o modelo IPH-ECO (azul) e com o modelo IPH-UnTRIM2D (vermelho) com apenas o vento atuando no sistema.

Mediante os resultados apresentados na Figura 28, ambos os modelos demonstraram ser totalmente conservativos em um sistema onde o efeito do vento é preponderante no escoamento, ou seja, os erros de conservação de volume não são significativos. Como não há contribuições de fontes ou sumidouros na lagoa circular, o nível médio deveria permanecer constante e igual a zero em toda a simulação. O monitoramento do nível médio no sistema feito com os dois modelos é exposto na Figura 29. A solução de nível médio em ambos os modelos para este cenário apresenta um erro na ordem  $10^{-7}$  m, o qual pode ser considerado desprezível se comparado com, por exemplo, erros contidos na medição de nível utilizando régua ou linígrafo.

## 4.2 Aplicação idealizada no rio Guaíba

Nesta seção é apresentada uma aplicação do modelo de grades não estruturadas (IPH-UnTRIM2D) no rio Guaíba e uma discussão sobre a capacidade de previsão dos padrões de circulação de água e de avaliação dos impactos do lançamento de uma carga poluidora.

O objetivo principal desta aplicação foi demonstrar simulação matemática de escoamentos bidimensionais, desde a etapa de levantamento de dados à elaboração e aplicação do modelo IPH-UNTRIM2D no rio Guaíba, verificando o comportamento do sistema em alguns cenários distintos, com condições de contorno idealizadas ao longo do tempo.

### 4.2.1 Caracterização do sistema

Com uma extensão de aproximadamente 50 km e seções com larguras de até 15 km, o rio Guaíba deságua na Lagoa dos Patos e está localizado entre os meridianos  $50^{\circ}$  e  $55^{\circ}$  Oeste e paralelos  $28^{\circ}$  e  $35^{\circ}$  Sul (Menegat et al, 1998). Trata-se de um dos mananciais de água doce mais importantes do sistema costeiro lagunar do Rio Grande do Sul (i.e. sistema lagunar formado pelo rio Guaíba, Lagoa Mirim e Lagoa dos Patos), principalmente por banhar toda a região metropolitana e por ser o exutório das principais bacias que compõem a Região Hidrográfica do Guaíba (Alto Jacuí, Vacacaí, Pardo-Pardinho, Baixo Jacuí, Taquarí, Caí, Sinos e Gravataí) (Pró-Guaíba, 1998). Sendo que a área de drenagem do rio Jacuí é responsável por aproximadamente 90% da área total de contribuição da bacia hidrográfica do Guaíba (Silveira, 1986). Além disso, o rio Guaíba é de fundamental importância para o

transporte fluvial, irrigação, abastecimento de água e lançamento de efluentes das cidades e em seu entorno.

Ecossistemas aquáticos como o rio Guaíba são tipicamente centros de população, comércio, indústria, recreação e, conseqüentemente, são alvos de efluentes industriais, agrícolas e esgotos domésticos do município. De acordo com o Plano Diretor do Guaíba, dentre os seus principais problemas ambientais estão os esgotos domésticos, os resíduos industriais, o lixo domiciliar e a poluição do ar por fontes industriais e veicular. Nas áreas rurais, os problemas mais críticos são a erosão do solo, o assoreamento dos cursos d'água, a contaminação por agrotóxicos e resíduos orgânicos, especialmente dos dejetos animais jogados nos rios. Além disso, o enriquecimento de nutrientes minerais e orgânicos provenientes destes lançamentos aliado à falta de oxigênio são fatores agravantes do processo de eutrofização desse ecossistema (Fragoso Jr., 2005). Este processo fica evidente no verão devido ao acréscimo da luz solar, provocando excesso de vida vegetal e florações fitoplantônicas no Guaíba.

#### **4.2.2 Dados de entrada**

De forma geral, na aplicação de um modelo hidrodinâmico 2DH de transporte de poluentes, várias informações são necessárias na entrada desse tipo de modelo, tais como o contorno e a topografia do fundo do terreno de toda a região simulada e informações dos afluentes e efluentes relativos às condições de contorno abertas, além da definição dos parâmetros hidrodinâmicos e de transporte, tais como os coeficientes de viscosidade turbulenta, de rugosidade, arrasto do vento e dispersão. Na sequência são apresentados os dados de entrada utilizados nesta aplicação.

##### *4.2.2.1 Discretização espacial e batimetria*

A ferramenta de discretização de domínio consiste em um algoritmo desenvolvido em MATLAB que utiliza as características físicas do sistema (e.g. contorno, batimetria, rugosidade) para gerar os arquivos de entrada do modelo IPH-UnTRIM2D.

Os dados físicos utilizados para a representação do contorno do rio Guaíba no modelo bidimensional de grades não estruturadas são os mesmos definidos por Casas (1984). A discretização espacial no rio Guaíba resultou em uma malha triangular contendo

4622 nós, 12156 faces e 7527 triângulos com áreas maiores que 1800 m<sup>2</sup>, satisfazendo o critério de estabilidade do esquema (Casulli e Cattani, 1994). Na Figura 30a é apresentada a malha não-estruturada do rio Guaíba gerada pelo algoritmo.

Não existem dados detalhados e atualizados de batimetria no rio Guaíba. Sendo assim, as profundidades médias de cada elemento triangular contido na malha foram estimadas através de uma interpolação linear feita com base nos dados pontuais do levantamento realizado pela Diretoria de Hidrografia e Navegação do Ministério da Marinha em 1964. O resultado da interpolação das profundidades, tomadas abaixo do espelho d'água (plano de referência), é apresentado na Figura 30b.

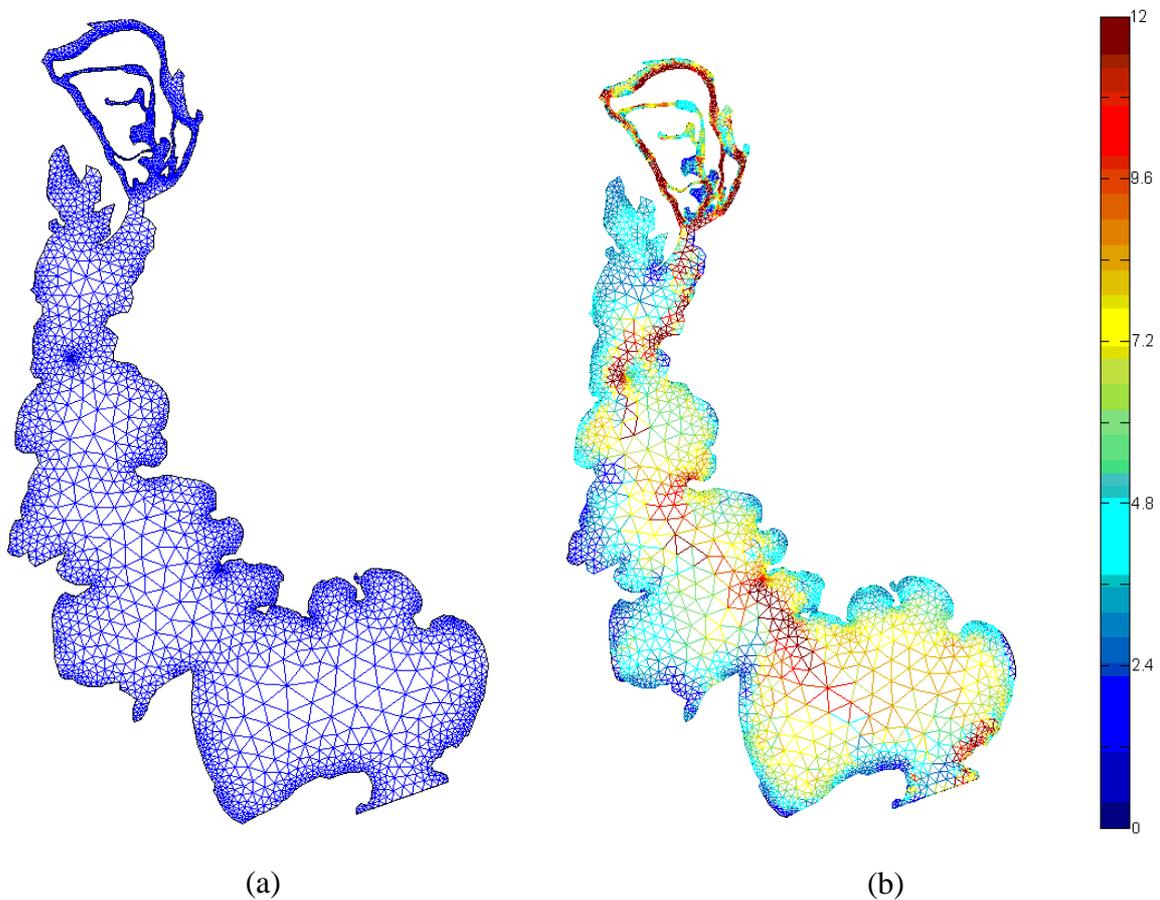


Figura 30 – Discretização espacial do rio Guaíba usando uma malha triangular (a) e sua batimetria (b).

#### 4.2.2.2 Condição de contorno de nível na interface com a Lagoa dos Patos

A variação de nível no rio Guaíba é influenciada pela sobreposição de efeitos devido a ação do vento, maré e entrada de água dos afluentes. Diversos estudos mencionam que as variações regulares de nível no rio Guaíba são influenciadas pela variação de níveis na Lagoa

dos Patos (Azevedo, 1945; Rosauero, 1982). Nesse sentido, na interface entre a Lagoa dos Patos e o rio Guaíba foi adotada uma condição de nível senoidal (Figura 31) da seguinte forma (Rosauero, 1982):

$$\eta(t) = a \sin\left( wt - \frac{\pi}{2} \right) + a + \eta_0, \quad (53)$$

onde  $\eta$  é o nível d'água acima do plano de referência,  $a = 15$  cm é a amplitude da onda,  $w = 0,5 \text{ dia}^{-1}$  é a frequência angular e  $\eta_0 = 0$  é o nível d'água de repouso acima do plano de referência.

#### 4.2.2.3 Dados de vento

O vento assume um papel fundamental na simulação, uma vez que é o principal agente de circulação das águas nas regiões de sulcos, pontais ou de baixas velocidades do rio Guaíba e afeta diretamente a resuspensão de sedimentos em lagos. A heterogeneidade espacial do vento foi desprezada, já que há apenas um ponto de dados observados disponíveis próximos ao Guaíba. Não foi adotado fator de redução da tensão de cisalhamento do vento na superfície das células do Guaíba.

Os dados de velocidade e direção do vento são provenientes de uma estação meteorológica de superfície do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). Os dados de vento horários foram observados numa estação (lat.  $30^\circ 03'$  e long.  $51^\circ 09' 59,7''$ ) localizada na capital, Porto Alegre, em uma altitude de 46,97 m durante todo o mês de março de 2009.

#### 4.2.2.4 Condições de contorno de vazões

De modo simplificado, a disponibilidade hídrica no Guaíba propriamente dito pode ser estimada como a vazão afluyente dos seus formadores: rios Jacuí, Caí, Sinos e Gravataí, cujas vazões médias são apresentadas na Tabela 3 e totalizam  $2.192 \text{ m}^3/\text{s}$ . Com o rio Jacuí sendo responsável por cerca de 90% da vazão de entrada de montante no rio Guaíba.

Por questões de simplificação foi adotada uma condição de contorno de vazão apenas nas faces que interagem com o rio Jacuí (Figura 31). Esta simplificação é razoável, uma vez que o rio Jacuí detém a absoluta maioria do volume de água que entra no Guaíba. Além disso, foram desprezados os balanços diretos de precipitação e evaporação com o espelho d'água do

rio. Estas simplificações não devem ser adotadas em corpos d'água com grandes áreas superficiais ou quando se pretende simular um longo período.

Tabela 3 – Vazão média afluyente de cada formador do rio Guaíba

Rio	Vazão média (m <sup>3</sup> /s)
Jacuí	1.969
Sinos	79
Caí	120
Gravataí	24
Total	2.192

#### 4.2.2.5 Parâmetros de simulação e condição inicial

O intervalo de tempo utilizado nas simulações hidrodinâmicas e de transporte de massa o intervalo de tempo foi de 30 s, estando dentro do limite de estabilidade numérica (Chapra, 1997; Rizzi, 2002). Para o parâmetro  $\theta$ , adotou-se um valor de 0,55 que está na faixa recomendada para as aplicações práticas (Casulli e Cattani, 1994). Os valores dos coeficientes de viscosidade turbulenta ( $A_h$ ), de difusividade do material transportado ( $K_h$ ) e de arraste do vento ( $C_D$ ) foram de 10 m<sup>2</sup>/s, 5 m<sup>2</sup>/s e 3e<sup>-6</sup>, respectivamente (Fragoso Jr, 2005).

Considera-se que o sistema está inicialmente em repouso, ou seja, foi considerado que a elevação do nível da água assim como os valores dos vetores de velocidade são nulos.

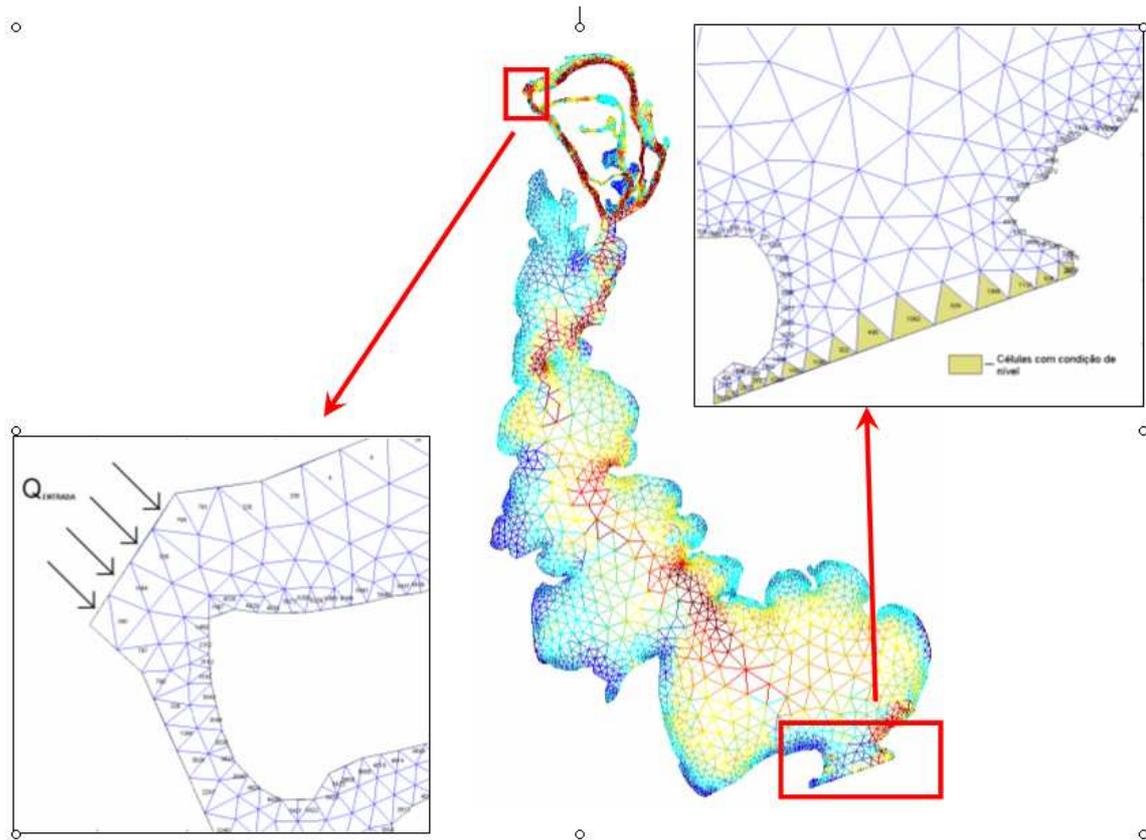
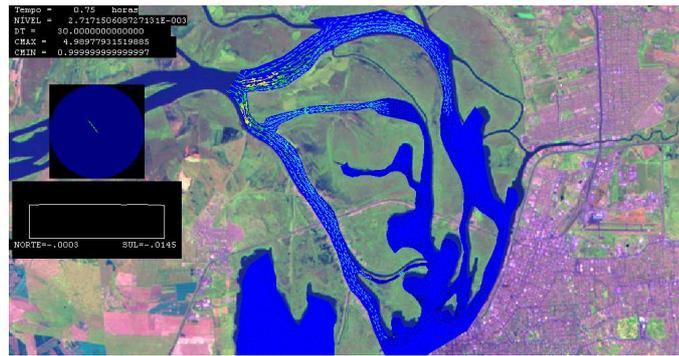


Figura 31 – Resumo das condições de contorno para a simulação de um cenário idealizado no rio Guaíba.

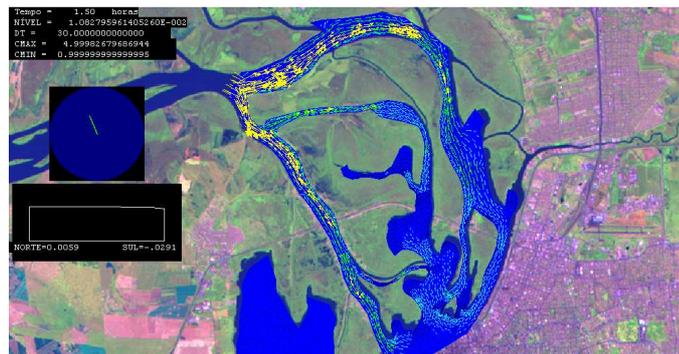
#### 4.2.3 Simulação do módulo hidrodinâmico

O módulo hidrodinâmico foi aplicado inicialmente apenas para análise dos padrões gerais de circulação de água no rio Guaíba. Além das informações nos contornos abertos (i.e. vazões afluentes e maré na Lagoa dos Patos), esta simulação também levou em consideração os dados observados de vento.

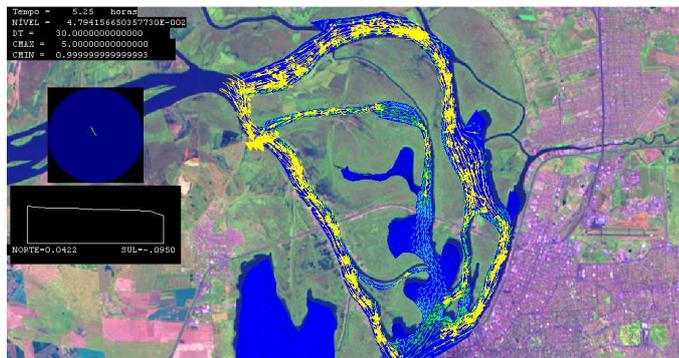
A evolução dos campos de velocidade no delta do Jacuí pode ser observada na Figura 32. Observa-se que o escoamento nos canais do delta são influenciados diretamente pela vazão média do rio Jacuí. Caracterizada com baixa superfície de contato com a superfície livre, a região do delta é marcada por zonas de alta velocidade (entre 0,75 e 1 m/s) e pouca influência do vento. Após 5 horas de simulação, observou-se que a vazão de entrada do rio Jacuí promove um significativo gradiente de elevação do nível da água entre a região do delta do Jacuí e a região do rio Guaíba (aproximadamente 5 cm) (Figura 33).



t = 0.75 hrs (b)



t = 1.50 hrs (c)



t = 5.25 hrs (d)

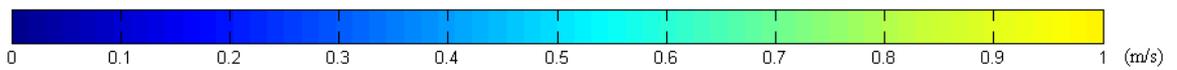
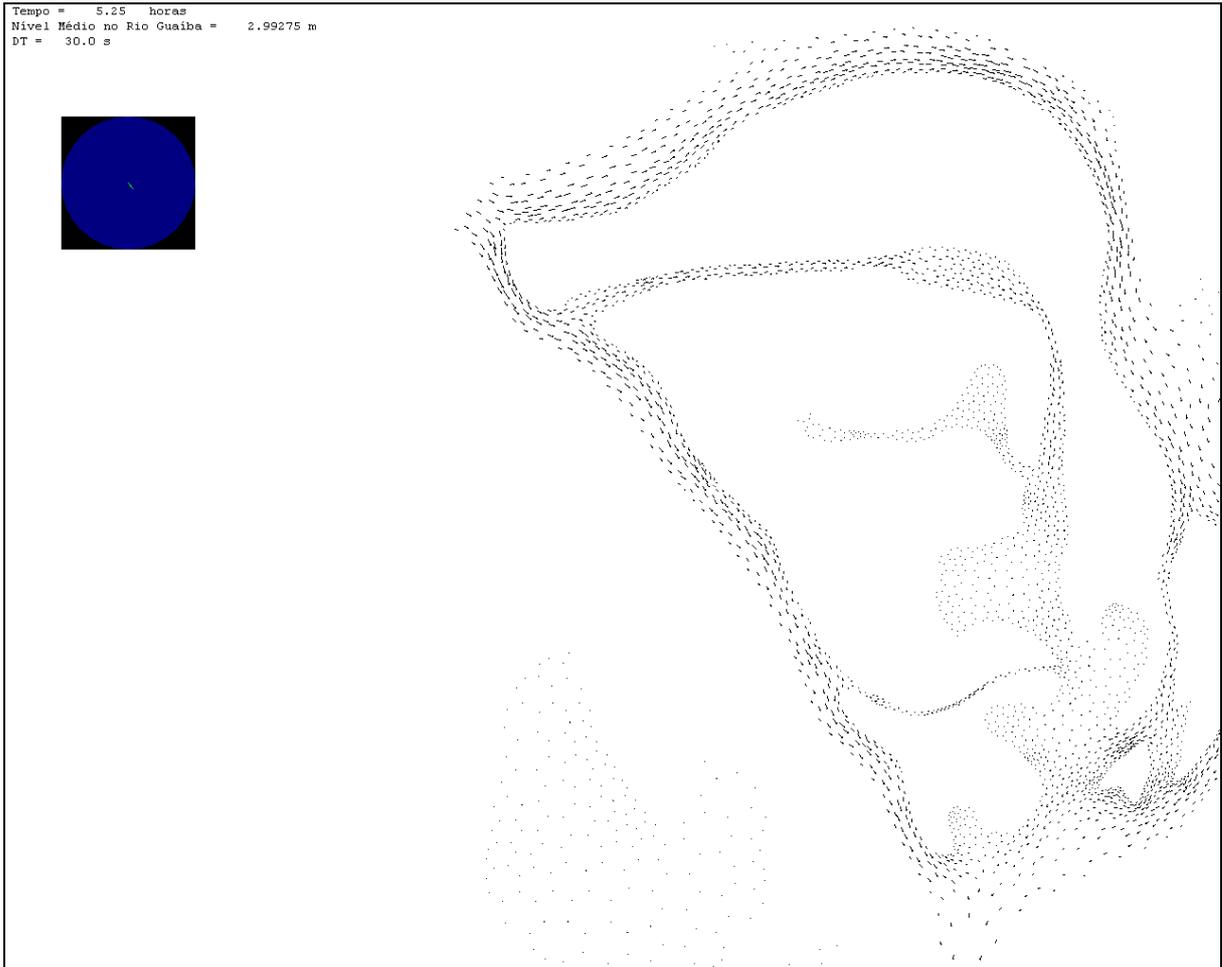


Figura 32 – Gradiente de velocidade na região do delta do Jacuí. À esquerda indica informações gerais sobre a simulação, como: intervalo de tempo, nível, a direção do vento e a oscilação da seixe na superfície da água entre o extremo norte e o extremo sul do rio Guaíba.



**Figura 33 – Vetores indicando o padrão de circulação da água no delta do Jacuí após 5 horas de vento predominante de Sudoeste.**

Os erros de conservação de volume para a simulação do rio Guaíba são apresentados na Figura 34. Observa-se que tais erros são suficientemente pequenos (da ordem de  $10^{-6}$  m em um dia de simulação) quando comparados com a taxa de evaporação diária (da ordem de  $10^{-3}$  m) e estáveis, oscilando em torno de zero ao longo da simulação. Estes erros não são significativos para serem considerados, por exemplo, no balanço de massa do sistema.

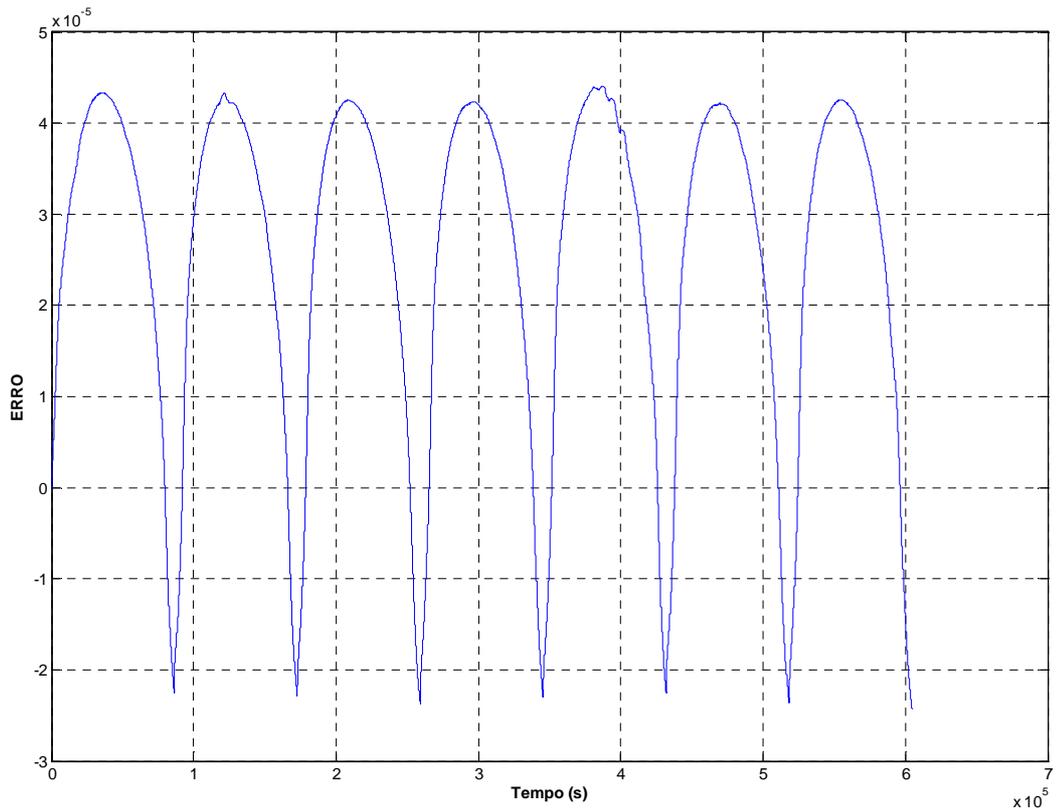


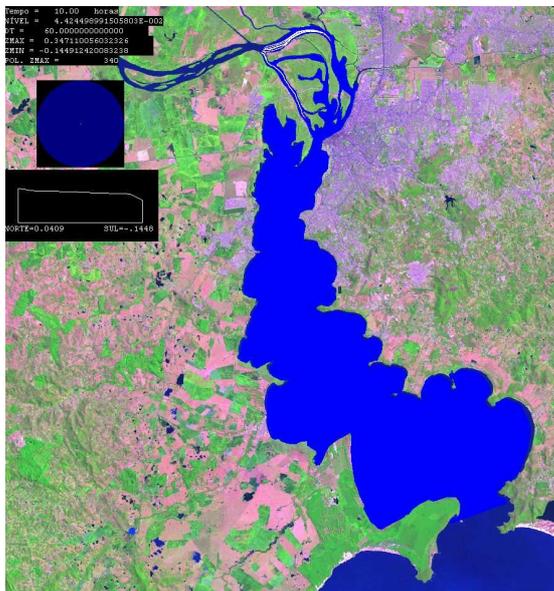
Figura 34 – Erro de conservação de volume para a simulação hidrodinâmica no rio Guaíba.

Uma análise sobre o sentido preferencial do escoamento foi desenvolvida a partir do monitoramento de flutuadores, onde a trajetória de 8 partículas, lançadas próximas ao Jacuí, foram acompanhadas ao longo do tempo. A posição destas partículas é calculada a cada intervalo de tempo considerando que cada uma delas está completamente imersa na água, e que viaja de acordo com a velocidade média do local. Uma estimativa preliminar do tempo de renovação da água também pode ser realizada através desta análise. A Figura 35 apresenta a trajetória desenvolvida pela partícula ao longo da simulação.

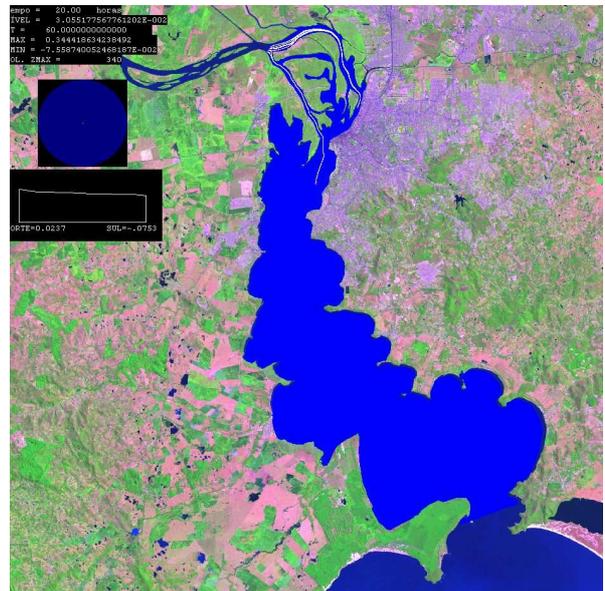
De acordo com as trajetórias das partículas expostas nos quadros da Figura 35, observa-se que o escoamento no Guaíba tem um sentido preferencial ao longo do canal contido em seu eixo longitudinal e um baixo tempo de residência da água nesta região, deixando o Guaíba com características hidrodinâmicas semelhantes às encontradas em rios (i.e. escoamento preferencialmente em uma direção).

Zonas de estagnação, com baixas velocidades, caracterizadas por um elevado tempo de renovação, foram observadas nos bolsões formados por pontais junto as margens. Nestas regiões o escoamento é praticamente estagnado (regido pelo efeito do vento), com um grande

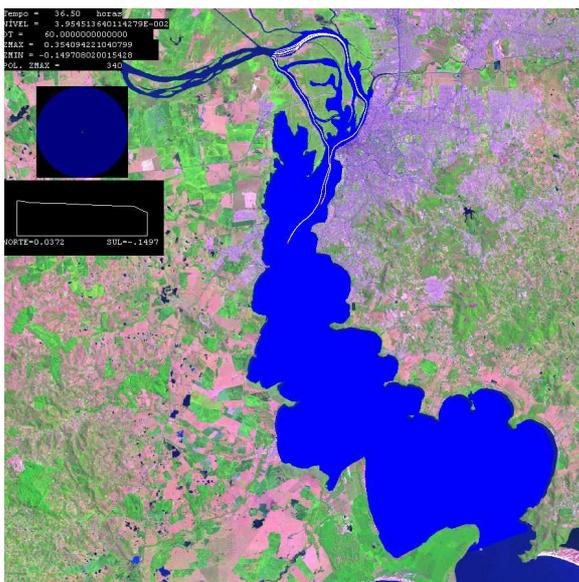
potencial de acumulo de nutrientes, o que pode favorecer a produção primária (florações de algas).



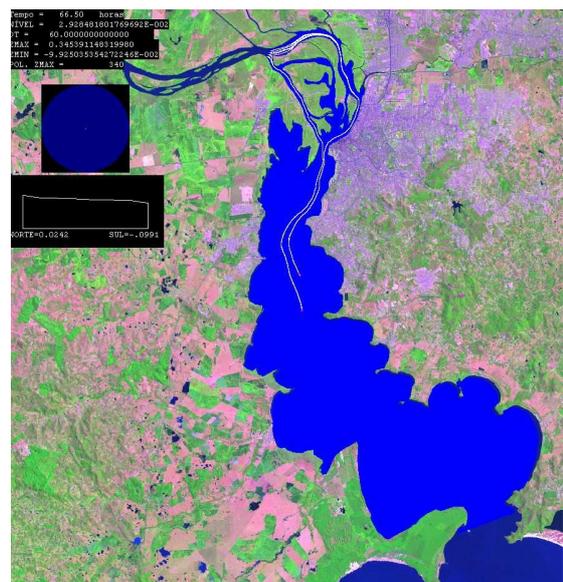
t = 10.00 hrs (a)



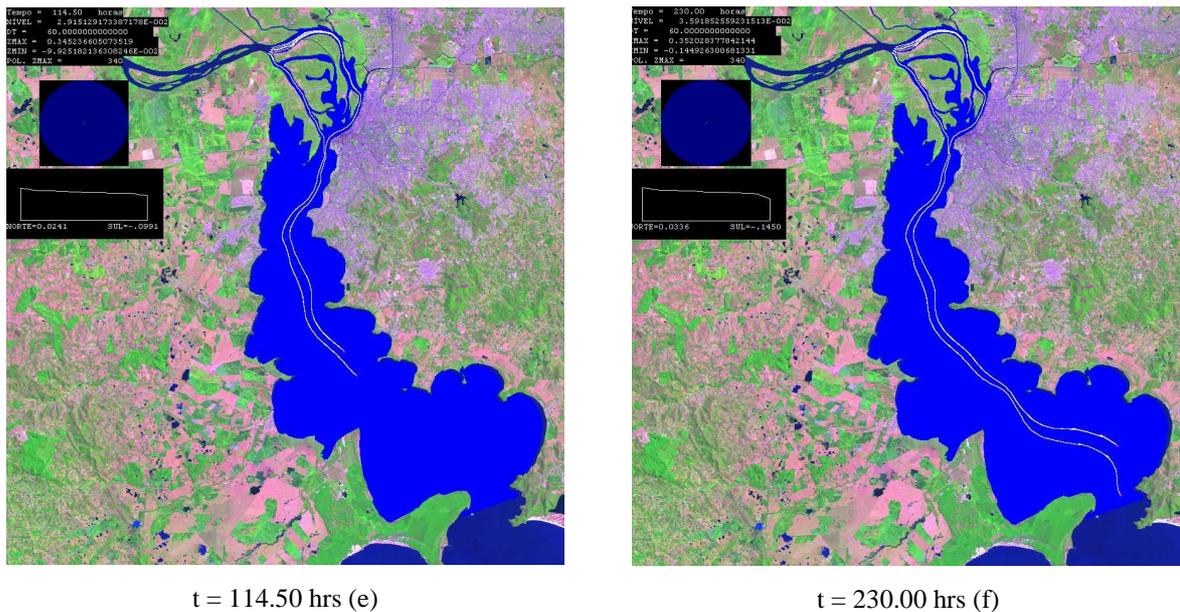
t = 20.00 hrs (b)



t = 36.50 hrs (c)



t = 66.50 hrs (d)



**Figura 35 – Distribuição de partículas (traçadores virtuais) no início e no final da simulação (230 horas considerando o vento observado em março de 2009).**

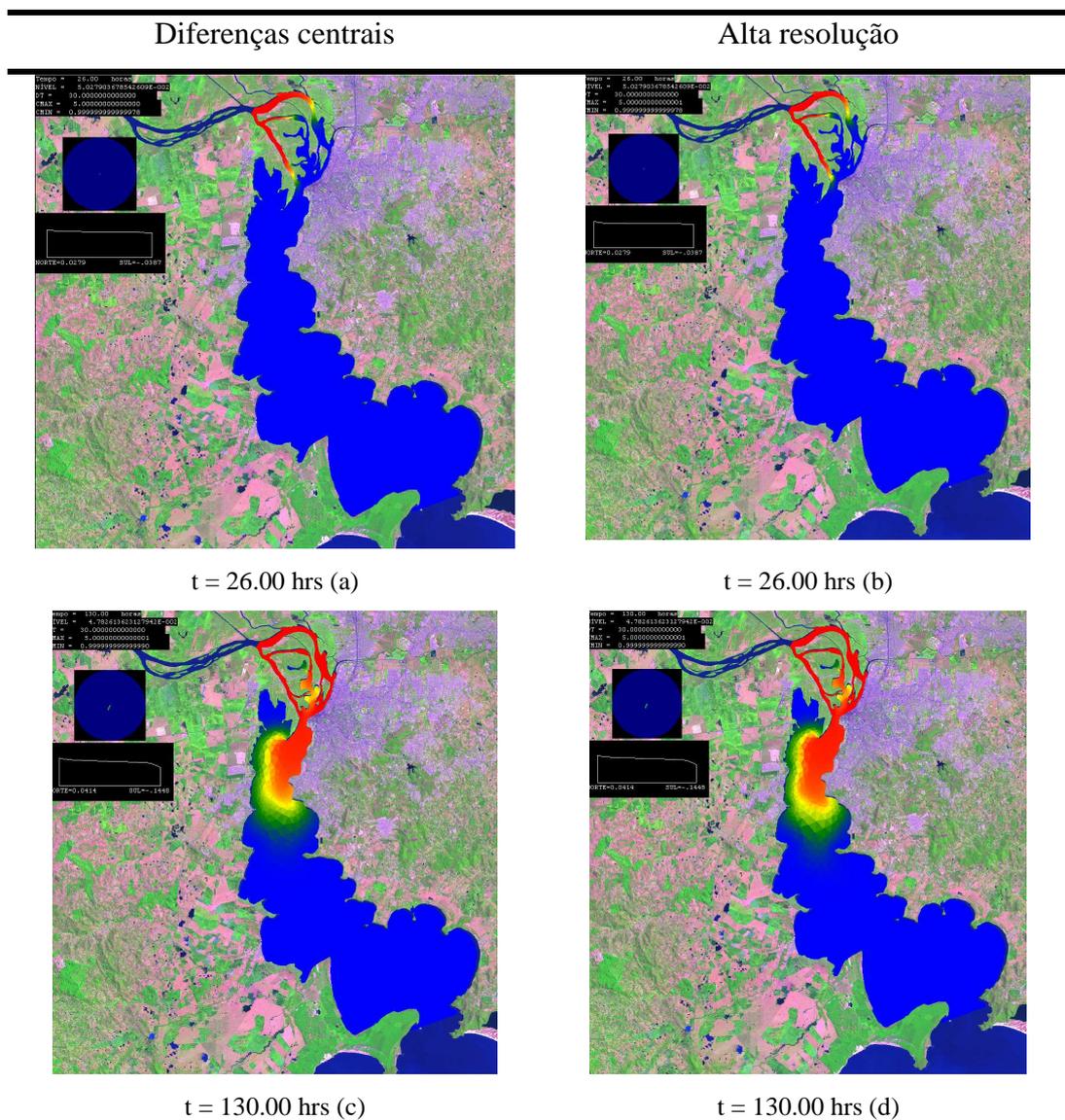
#### 4.2.4 Simulação do módulo de transporte

Este tópico apresenta a simulação do transporte de um poluente utilizando a equação do transporte de massa e a solução do módulo hidrodinâmico. Este poluente trata-se de uma substância conservativa. Em termos matemáticos, uma substância conservativa é representada desprezando os termos de perdas e/ou ganhos de massa na equação de transporte. Isto significa que a mudança nos valores de concentração acontece devido aos processos físicos (advecção e difusão). Foi admitido que as substâncias simuladas não promovem efeito na circulação hidrodinâmica.

Para avaliar o desempenho do módulo de transporte do modelo IPH-UnTRIM2D foram adotados 2 cenários de simulação considerando: (a) um lançamento permanente de um efluente conservativo; (b) um lançamento de um pulso de 10 horas de efluente. Ambos os cenários consideram o lançamento do poluente no rio Jacuí. Uma comparação entre o desempenho dos esquemas de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo foi realizada, considerando os aspectos relacionados a conservação de massa e a difusão numérica para os cenários simulados.

4.2.4.1 Lançamento permanente de um efluente

No primeiro cenário foi considerado um despejo permanente de um poluente, com concentração constante igual a  $5 \text{ g/m}^3$  no rio Jacuí. A concentração inicial adotada para o rio Guaíba foi de  $1 \text{ g/m}^3$ . Não foram consideradas taxas de sedimentação ou decaimento decorrentes de reações cinéticas. Os registros de intensidade e direção do vento observado para mês de março de 2009 foi adotado na simulação. O tempo total de simulação foi de 13 dias (312 horas) e o passo de tempo adotado foi de 30 s. Na Figura 36 é apresentada a evolução da mancha ou pluma deste poluente considerando os dois esquemas numéricos utilizados para solução da equação de transporte.



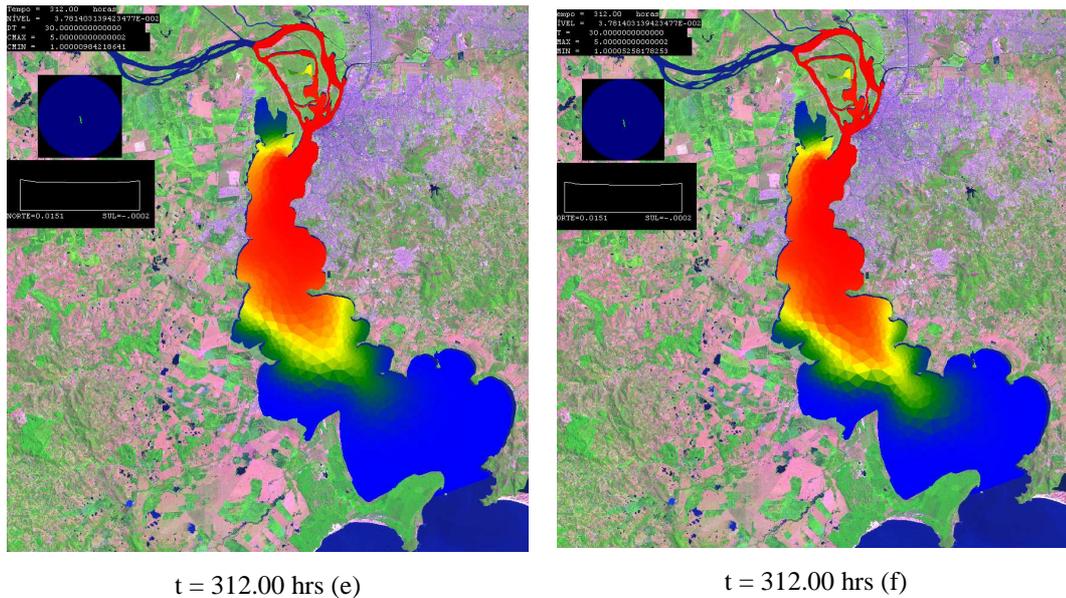
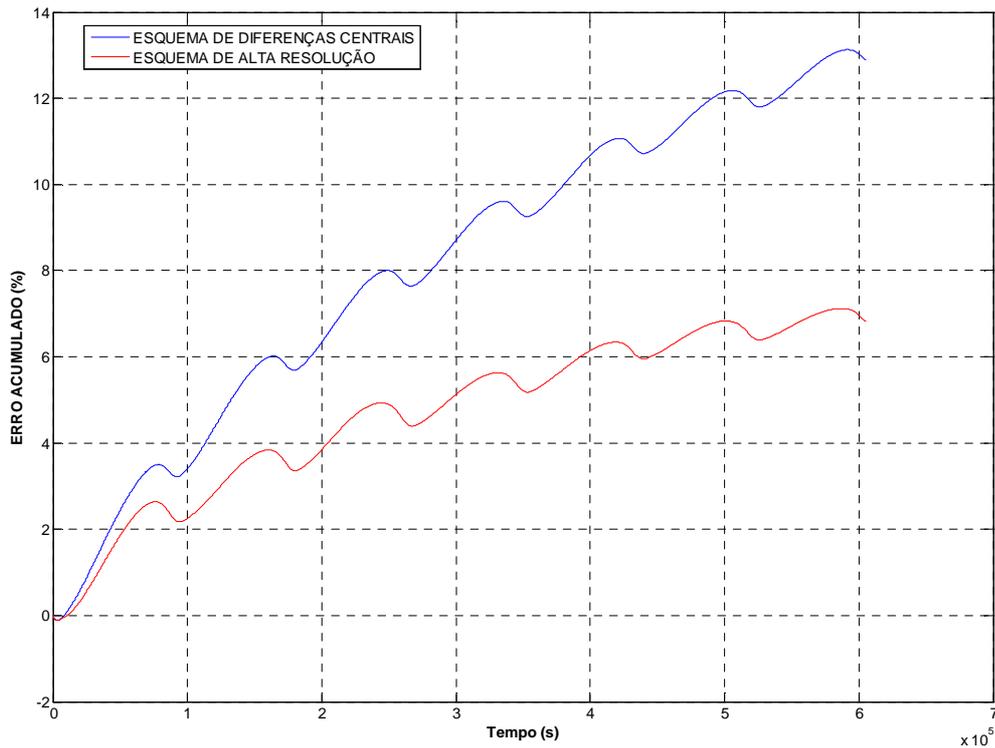


Figura 36 – Mancha de concentração de material suspenso oriundo do rio Jacuí ao final de 312 horas de simulação no rio Guaíba considerando vento observado em março de 2009 usando o esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo. Células onde os valores de concentração são maiores ou iguais a  $5 \text{ g/m}^3$  são apresentadas em vermelho, iguais ou menores a  $1 \text{ g/m}^3$  são indicados pela cor azul e o valor intermediário ( $3 \text{ g/m}^3$ ) é plotado em amarelo.

Observa-se que os esquemas de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo apresentam soluções semelhantes nas primeiras horas de simulação. Após 130 horas de simulação é possível observar uma pequena diferença entre os campos de concentração dos dois esquemas, a qual fica mais evidente ao final da simulação (312 horas). O esquema com limitador de fluxo apresenta uma maior dispersão da pluma de poluente na região pelágica ao final da simulação, indicando uma menor perda de massa ao longo da simulação. Esta afirmação pode ser confirmada através dos testes de conservação de massa realizados para os dois esquemas (Figura 37)



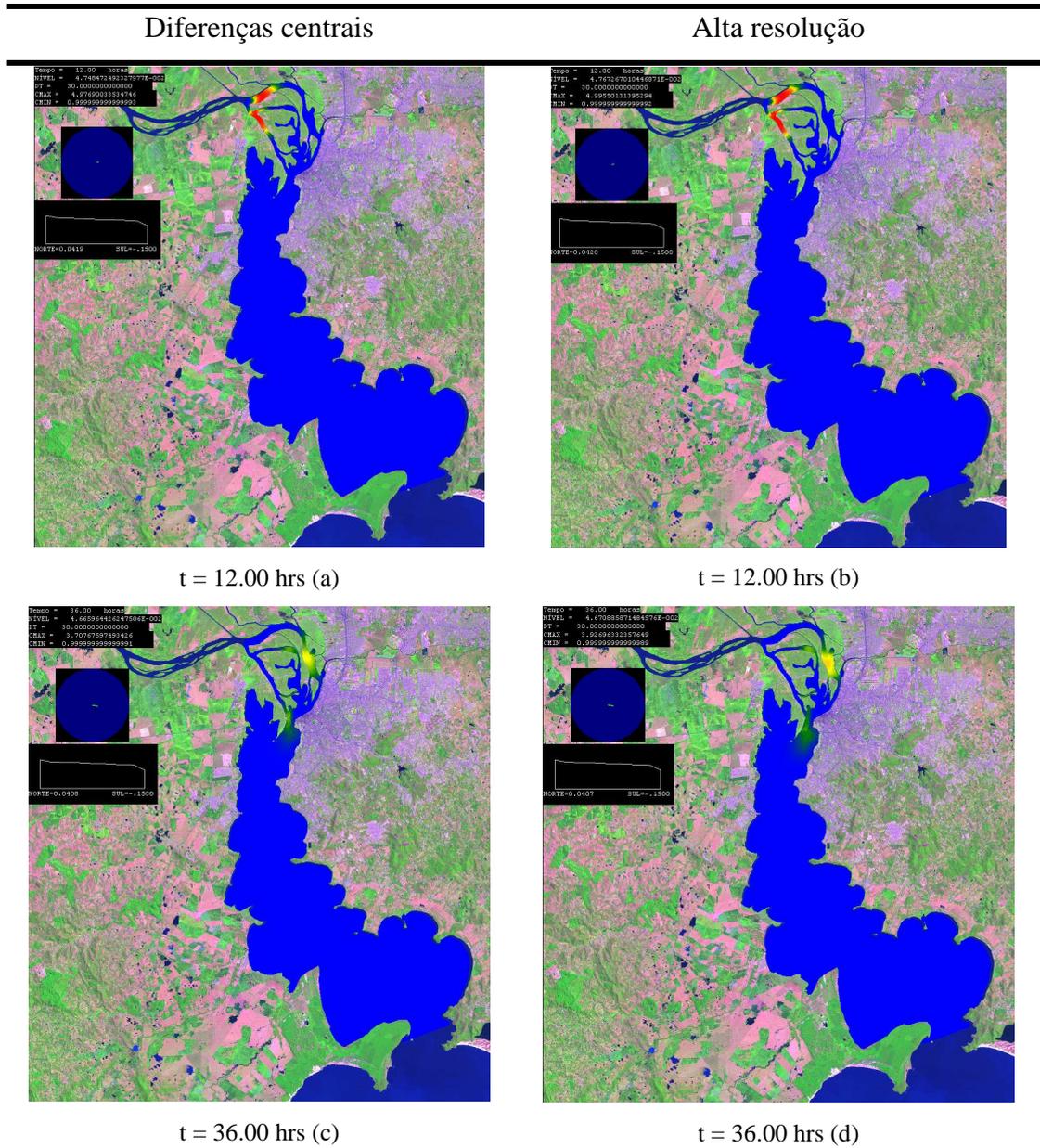
**Figura 37 – Comparação entre a conservação de massa com esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo para o primeiro cenário de simulação do transporte.**

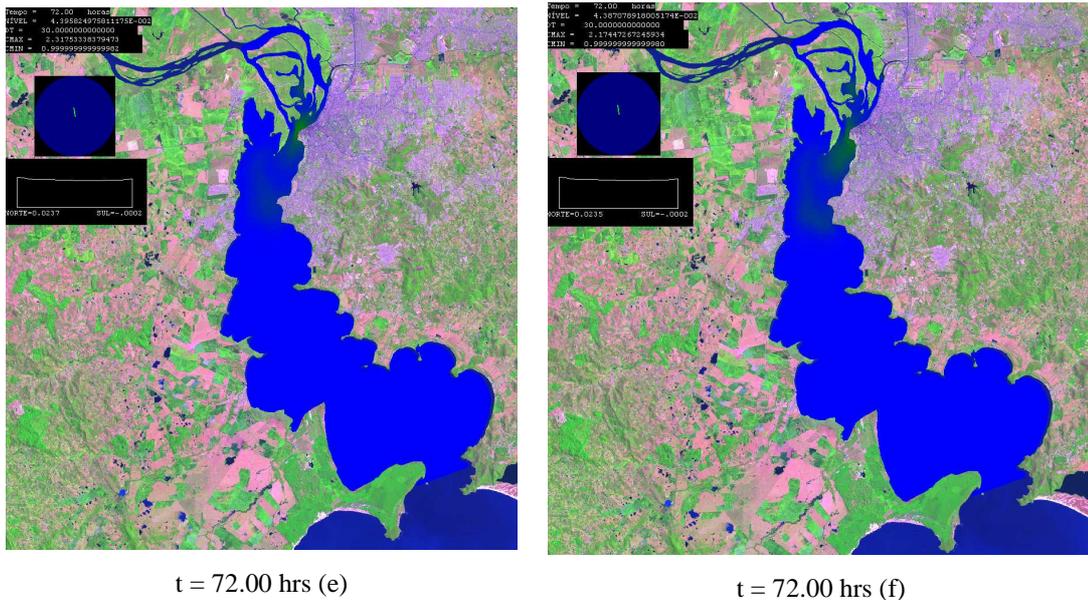
O erro acumulado da conservação de massa utilizando um esquema de diferenças centrais ao final de 7 dias de simulação no Guaíba foi da ordem de 13%, o que representa um decaimento médio de massa de  $0,0185 \text{ dia}^{-1}$ . O esquema com limitador de fluxo apresentou erro acumulado de 7% ao final da simulação, o que representa um decaimento médio de massa de  $0,01 \text{ dia}^{-1}$ . Além disso, observa-se uma tendência de estabilização do erro para o esquema com limitador de fluxo, ao contrário do esquema de diferenças centrais. Em resumo, o esquema com limitador de fluxo mostra ser mais conservativo que o esquema de diferenças centrais. Os erros calculados em ambos os esquemas não são significativos quando comparados, por exemplo, com um coeficiente de decaimento de sedimentação ou com uma taxa de degradação bacteriana na matéria orgânica.

#### 4.2.4.2 Lançamento de um pulso de 10 horas de efluente

No segundo cenário, considerou-se um cenário em que a água do rio Guaíba encontra-se inicialmente com mesma concentração (1 mg/L) e recebe um lançamento de um poluente no rio Jacuí, com concentração de 5 mg/L por um período de 10 horas. A

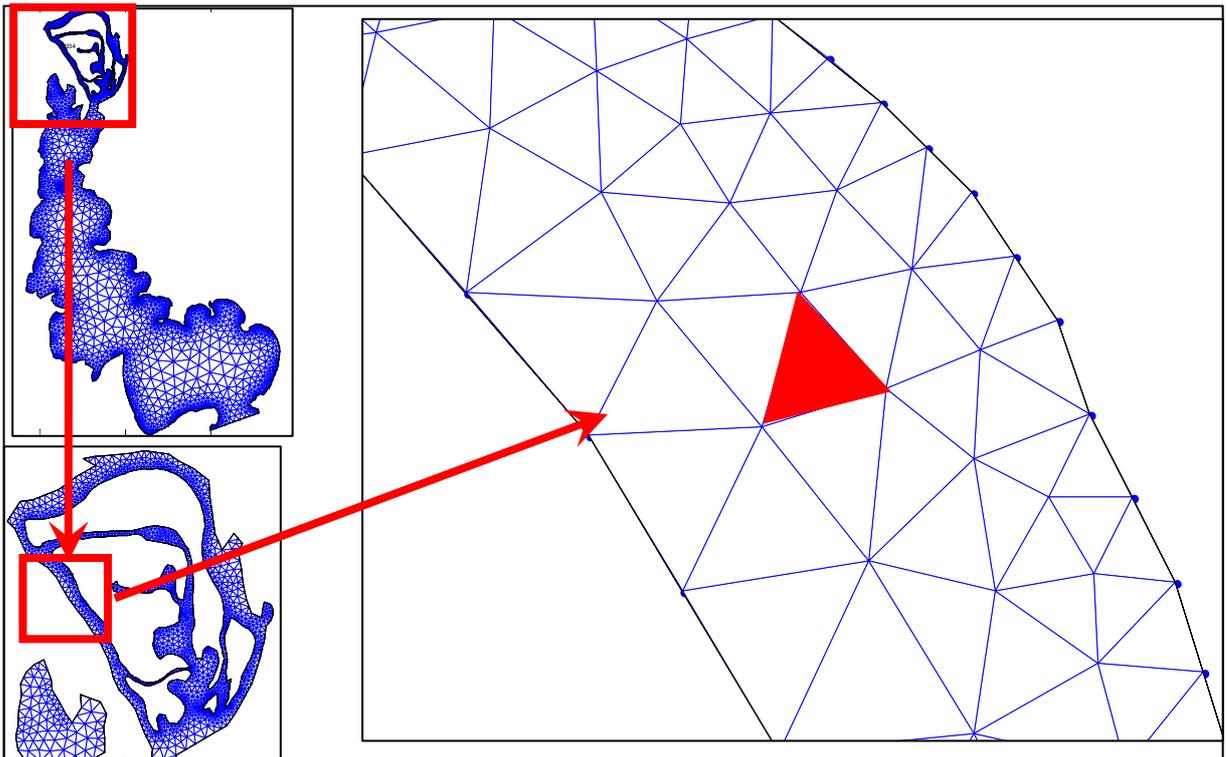
performance os dois esquemas foi avaliada para este cenário. O lançamento e a evolução da pluma decorrente do lançamento do efluente podem ser observados nos quadros da Figura 38.



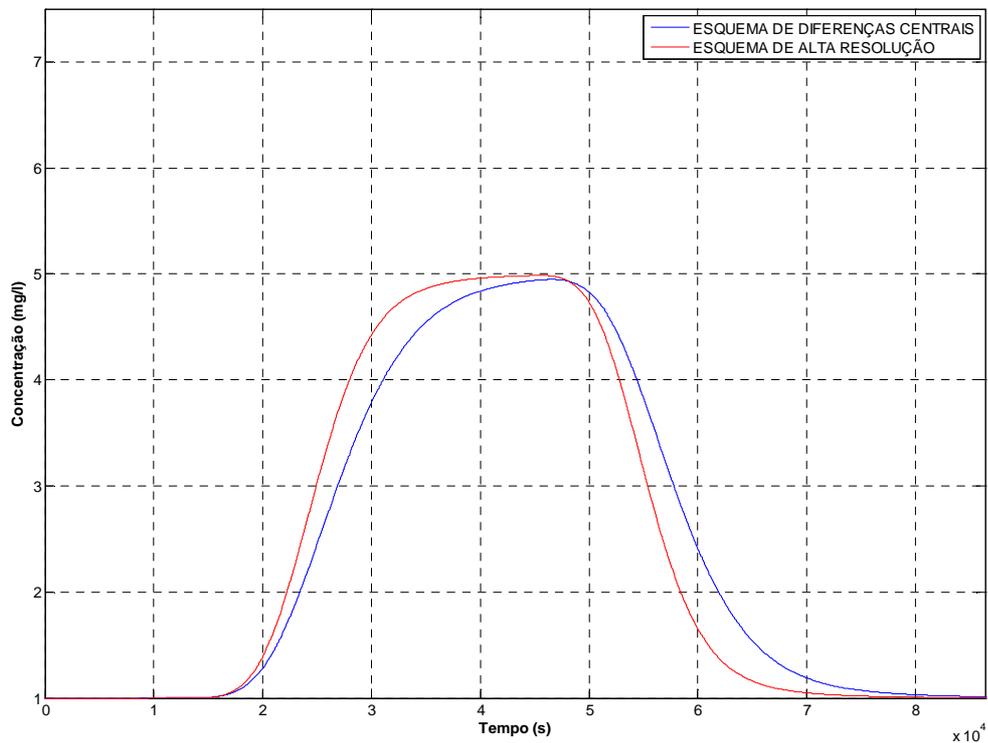


**Figura 38 – Evolução do pulso de 10 horas de um material suspenso proveniente do rio Jacuí ao final de 72 horas de simulação no rio Guaíba considerando vento observado em março de 2009 usando o esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo.**

Verifica-se que o pulso do poluente conservativo é diluído ao longo do delta do Jacuí devido a dispersão do material decorrente das altas velocidades encontradas nesta região. Após 72 horas de simulação o esquema com limitador de fluxo apresentou uma maior dispersão do poluente quando comparado com o esquema de diferenças centrais (Figura 38f). Este padrão era esperado uma vez que ao esquema com limitador de fluxo incorpora funções interpoladoras e limitadoras de fluxo que atribuem um esquema de advecção-difusão de segunda ordem nas células localizadas em regiões de alta velocidade (e.g. rios e canais) (Hundsorfer, 1996; Zijlema e Wesseling, 1995). Além de conservativo o esquema com limitador de fluxo é livre de difusão numérica, reduzindo o amortecimento e a defasagem da passagem de um pulso de concentração em uma célula localizada em um dos canais do delta do Jacuí (Figura 39a). O esquema com limitador de fluxo apresenta uma ascensão antecipada do pulso de concentração do que no outro esquema. Este esquema promove também um pico mais achatado e alongado, próximo à concentração máxima (5 mg/l), devido a redução da dispersão numérica. Outro aspecto que pode ser observado é que a base da curva de concentração é menor no esquema com limitador de fluxo, sendo reflexo da função limitadora de fluxo que suaviza a passagem de massa quando há fortes gradientes longitudinais de concentração.



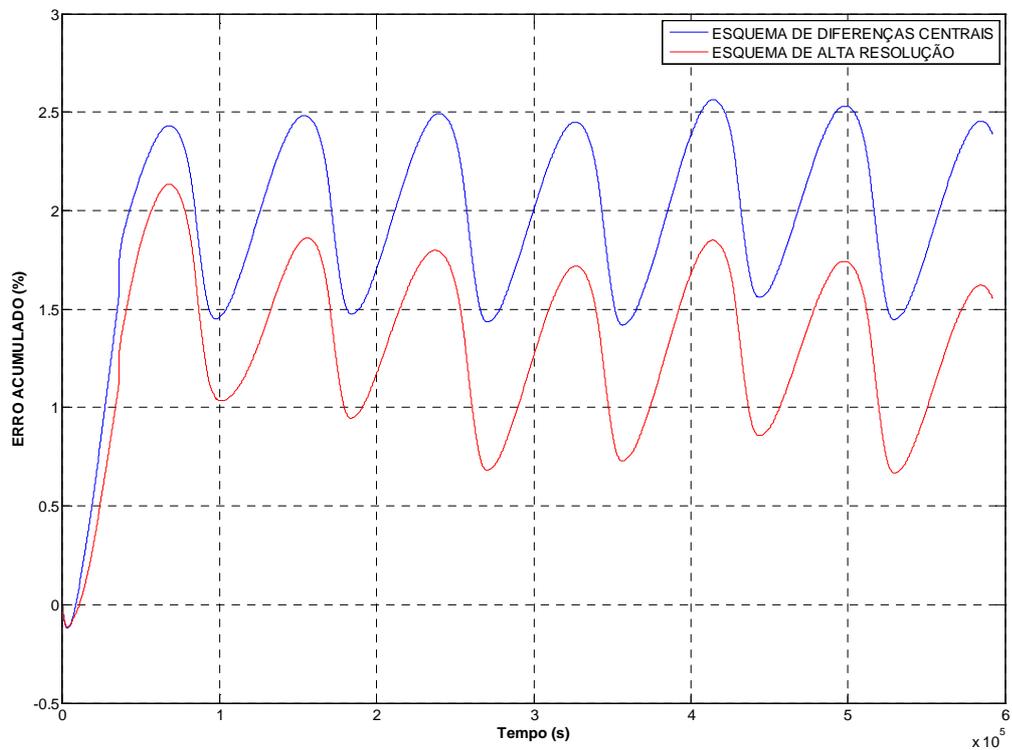
(a)



(b)

Figura 39 – (a) localização da célula onde foram monitorados os índices de concentração do pulso de efluente lançado no Jacuí; (b) variação da concentração no meio da seção transversal do canal no delta para ambos os esquemas de transporte de efluente.

O erro acumulado de massa pode ser observado na Figura 40. O esquema com limitador de fluxo mostrou ser mais eficiente e conservativo do que o esquema de diferenças centrais. Ao final de 7 dias de simulação, o erro acumulado na conservação de massa com o esquema de diferenças centrais atinge, aproximadamente, o dobro do erro calculado com esquema com limitador de fluxo. Estes erros se estabilizam após algumas horas de simulação. O esquema com limitador de fluxo apresenta um tendência de redução do erro de conservação de massa ao longo da simulação, ao contrário do esquema de diferenças centrais.



**Figura 40 – Comparação entre a conservação de massa com esquema de diferenças centrais e o esquema com limitador de fluxo para o primeiro cenário de simulação do transporte.**

## 5. Conclusões e Recomendações

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo hidrodinâmico e de transporte de escalares bidimensional utilizando grades não estruturadas capaz de simular os padrões de circulação de água e o transporte de poluentes. Este modelo foi aplicado em um estudo de caso simplificado e no rio Guaíba. A performance do modelo foi realizada através da comparação dos seus resultados com os resultados do modelo IPH-ECO.

Os testes de conservação de volume do estudo de caso simplificado demonstraram que o modelo de grades não estruturadas mostrou ser mais conservativo que o modelo IPH-ECO em todos os cenários simulados. A distribuição da circulação e a estrutura dos vórtices na solução hidrodinâmica do modelo de grades não estruturadas apresentaram padrões similares aos observados na solução hidrodinâmica do IPH-ECO. Ainda quanto ao estudo de caso simplificado, o módulo hidrodinâmico do modelo de grades não estruturadas mostrou-se estável e flexível para intervalos de tempo de simulação maiores que os adotados no modelo IPH-ECO.

Os resultados obtidos com a aplicação no rio Guaíba serviram para demonstrar a potencialidade do modelo bidimensional de grade não estruturadas como instrumento de ajuda ao gerenciamento dos recursos hídricos e na avaliação dos impactos do lançamento de cargas poluidoras. O modelo IPH-UnTRIM2D mostrou resultados promissores quanto a previsão dos padrões de circulação de água e do transporte de massa no rio Guaíba, estando apto a simular escoamentos com qualquer geometria e condições de contorno externas (e.g. nível ou velocidade). Sendo possível também, na representação do escoamento em corpos d'água, considerar a presença de ilhas (e.g. delta do Jacuí), estreitamentos e/ou alargamento de canais, estirões e outras conformações emersas compatíveis com a escala da malha de cálculo. Contudo, os resultados encontrados não são considerados como uma calibração efetiva do modelo. Para tanto, são necessários dados de correntologia em diversos pontos no Guaíba para aferir os mapas de velocidades calculados, mesmo que estes tenham se mostrado compatíveis com conhecimentos teóricos disponíveis.

O modelo de grades não estruturadas é uma expansão do modelo de grades estruturadas, sendo apto a simular escoamentos e transporte de efluentes em domínios representados com malhas compostas apenas por quadriláteros, com malhas compostas apenas

por triângulos ou com uma malha formada por quadriláteros e triângulos. Quanto ao esquema numérico, o método dos volumes finitos utilizado no modelo de grades não estruturadas mostrou-se uma excelente alternativa numérica para a solução dos termos advectivos nas equações de águas rasas com resultados mais eficientes e conservativos que os calculados pelo método das diferenças finitas. Além disso, a diferença no tratamento numérico de alguns termos e nas aproximações adotadas em determinados procedimentos (e.g. método de interpolação das velocidades, cálculo das velocidades normais e tangenciais) são fatores que influenciaram na distinção dos resultados entre os métodos.

O método dos volumes finitos com abordagem Euleriana-Lagrangiana permitiu uma maior flexibilidade no intervalo de tempo de simulação, sem prejudicar a estabilidade da solução hidrodinâmica. No entanto, o intervalo de tempo de simulação do modelo é limitado ao intervalo de tempo adequado para que a solução do módulo de transporte não apresente instabilidades.

O esquema com limitador de fluxo aplicado para a obtenção da solução de transporte apresentou bons resultados do ponto de vista numérico. A solução numérica desse esquema mantém uma boa precisão mesmo sob situações onde ocorrem elevados gradientes de concentração e em regiões de altas velocidades. O campo de concentrações gerado pelo esquema oscilou entre uma faixa de valor mínimo e máximo de concentração no sistema, satisfazendo princípios físicos. A principal desvantagem desse esquema é a restrição do passo de tempo, que eleva os custos computacionais.

Algumas limitações que persistem quanto a aplicação do modelo hidrodinâmico e de transporte no rio Guaíba tratam-se da disponibilidade de dados atualizados de batimetria e de medições simultâneas de nível e vazão. Na definição do tamanho da malha de cálculo (i.e. área mínima do polígono) e do intervalo de tempo de cálculo ( $\Delta t$ ) compatível com a estabilidade e precisão numérica é indicado a utilização dos critérios de estabilidade em Casulli e Cattani (1994). No entanto, recomenda-se uma área mínima de 2000 m<sup>2</sup> nos polígonos contidos na malha com o intuito de aumentar a flexibilidade na escolha do intervalo de tempo de simulação.

No decorrer deste trabalho foram desenvolvidas atividades que visaram a construção do modelo hidrodinâmico e de transporte de massa. Contudo, alguns pontos importantes não puderam ser abordados com a merecida relevância. Como recomendações para trabalhos futuros relacionados a este tema, seguem as seguintes sugestões:

Expandir o esquema numérico semi-implícito bidimensional para um tridimensional baseado no método dos volumes finitos para a solução da equação das águas rasas;

Acoplar um módulo químico e biológico para representar a dinâmica da de nutrientes e da estrutura trófica, tendo como base a equação de transporte de massa com termos de perdas e ganhos;

Calibração e verificação do módulo hidrodinâmico e de transporte de massa através da comparação dos resultados estimados pelo modelo (e.g. níveis, velocidade da água, concentração de substâncias dissolvidas na água) com valores observados em campo, no intuito de verificar a precisão e eficiência na estimativa dessas variáveis pelo modelo;

O desenvolvimento e implementação de um algoritmo de secagem e inundação para áreas sujeitas a inundações;

Elaboração de um software capaz de discretizar domínios com malhas mistas compostas por triângulos e/ou quadriláteros;

Realizar campanhas de campo para fazer medições simultâneas de vazões nos contornos do sistema, velocidades e direções de vento no rio Guaíba com a finalidade de melhorar a estimativa do modelo;

Aplicação de técnicas de processamento em paralelo e utilização do *cluster*, com a finalidade de desmembrar as tarefas do modelo maximizando a eficiência computacional;

Ligação do modelo com ferramentas computacionais de geoprocessamento, para digitalização do domínio e discretização espacial;

## 6. Referências Bibliográficas

- Azevedo, J. R. (1945). *Influência das Variações da Pressão Atmosférica sobre as Oscilações do Guaíba*. Revista de Engenharia do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, v.1, p. 120-144.
- BAW (2004). *Mathematical Model Untrim*. Technical Report. Validation Document. v 0.3. Bundesanstalt für Wasserbau. Hamburg.
- BAW. (1990). *Hydronumerisches Verfahren TRIM-2D*. Validierungsdokument Version 2.0. Bundesanstalt für Wasserbau. Hamburg. p. 55.
- Beltrame, L. (1998). *Estudo para avaliação da disponibilidade hídrica da bacia da lagoa Mirim*. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Benque J.P.; Cunge J.A.; Feuillet, J.; Hauguel, A.; Holly F.M. (1982). *New Method for Tidal Current Computation*. J. Waterways, Port, Coastal, Ocean Div., ASCE, v. 108, p. 396-417.
- Benqué, J. P.; Cunge, J. A.; Feuillet, J.; Hauguel, A.; Holly Jr.; F. M. (1982). *New method for tidal current computation*. Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division ASCE. vol. 108. N° WW3.
- Blumberg, A. F., and Mellor, G. L. (1987). *A Description of a Three-Dimensional Coastal Ocean Circulation Model*. Three Dimensional Coastal Ocean Models, N. S. Heaps, ed., Vol. 118, American Geophysical Union, Washington, D.C., p. 1-16.
- Borche, C. A. (1996). *IPH-A: Aplicativo para modelação de estuários e lagoas. Manual de utilização do sistema*. Publicação em Recursos Hídricos N°. 33, IPH UFRGS Porto Alegre, p. 38.
- Borche, C. A.; Cybis L. F. (1985). *Modelo matemático de circulação e de qualidade das águas do estuário do rio Guaíba*. In Anais: Simposio Brasileiro de Hidrologia e Recursos Hídricos. São Paulo : ABRH, 1985. vol. 1, p. 419-433.
- Borche, C.A. (1984). *Modelo Matemático de Correntologia do Estuário do rio Guaíba*. Relatório Interno IPH.
- Borouchaki, H. and Frey, P. J. (1998) *Adaptive Triangular-Quadrilateral Mesh Generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 41, p. 915-934.

- Brown, L. C. and T. O. Barnwell. (1987). *The enhanced stream water quality models QUAL2E and QUAL2E-UNCAS: documentation and user manual*. Env. Res. Laboratory. US EPA, EPA /600/3-87/007, Athens, GA. p. 189
- Burau, J.R.; Cheng, R.T. (1988). *Predicting Tidal Currents in San Francisco Bay Using a Spectral Model*. Proceedings 1988 ACSE National Conference Hydraulic Engineering, p. 634-639
- Campos, E. J. D. (1999). *O Modelo Oceânico da Universidade de Princeton (POM)*. Mini-curso no Workshop sobre Ambientes Costeiros e Mudanças Globais p. 16 – Instituto Oceanográfico, Universidade de São Paulo.
- Casulli, V. (1987). *Eulerian-Lagrangian Methods for Hyperbolic and Convection Dominated Parabolic Problems*. Computational Methods for Non-Linear Problems, editado por C. Taylor, D. R. J. Owen and E. Hinton (Pineridge Press, Swansea), p. 239.
- Casulli, V. (1990). *Semi-implicit Finite Difference Methods for the Two-Dimensional Shallow Water Equations*. Journal of Computational Physics, vol. 86, p. 56-74.
- Casulli, V., Cattani, E. (1994). *Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow*. Computers and Mathematics with Applications 27, p. 99-112.
- Casulli, V.; Cheng, R. T. (1992). *Semi-Implicit Finite Difference Methods for Three-Dimensional Shallow Water Flow*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 15, p. 629-648.
- Casulli, V.; Walters, R.A. (2000). *An Unstructured Grid, Three-Dimensional Model Based on the Shallow Water Equations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 32, p. 331-348.
- Casulli, V.; Zanolli, P. (1990). *Semi-Implicit Numerical Modeling of Nonhydrostatic Free-Surface Flows for Environmental Problems*. Mathematical and computer modelling, vol. 36, p. 1131-1149.
- Casulli, V.; Zanolli, P. (2005). *High resolution methods for multidimensional advection-diffusion problems in free-surface hydrodynamics*. Ocean Modelling, vol. 10, p. 137-151.
- K., M. (2005). *Comparison of Turbulence Models with Use of UnTRIM in the Delaware Bay*. Estuarine and Coastal Modeling. vol. 209, p. 7

- Chapra, Steven C. (1997). *Surface water-quality modeling*. McGraw-Hill series in water resources and environmental engineering. Editora: McGraw-Hill.
- Cheng, R. T. ; Casulli V. (2001). *Evaluation of the UnTRIM Model for 3-D Tidal Circulation*. Proceedings of the 7-th International Conference on Estuarine and Coastal Modeling, Novembro de 2001 p. 628-642.
- Cheng, R.T.; Casulli, V.; Gartner, J.W. (1993). *Tidal, Residual, Intertidal Mudflat (TRIM) Model and its Applications to San Francisco Bay*. California. Estuarine, Coastal and Shelf Science, vol. 36, p. 235-280.
- Collischonn, W. (2005). *Padrões e Estruturas no Sistema Lagunar Costeiro de Água Doce do RS: Elementos para Definição de uma Política de Gestão*. Relatório de Pesquisador Visitante. Instituto de Pesquisas Hidráulicas, UFRGS.
- Collischonn, W.; Motta Marques, D. L. (2003). *Desenvolvimento de um Modelo Bidimensional de Transporte de Sedimentos e Nutrientes para Lagos*. In: Anais do Congresso Brasileiro de Limnologia, Juiz de Fora MG.
- Coutinho, P. N. (1986). *Sugestões para Gerenciamento de Estuários*. Arq. Ciên. Mar. Fortaleza, p. 77-86.
- Csanady, G. T. (1975). *Hydrodynamics of Large Lakes*. Annu Rev Fluid Mech.vol 5, p. 357-386
- Cunge J.A.; Holly Jr F.M.; Verwey A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Ed., p. 420
- Falconer, R. A. (1980). *Numerical Modeling of Tidal Circulation in Harbors*. J. Waterways, Port, Coastal, Ocean Div., ASCE, v. 106, n° WW1 p. 31-48.
- Fox, R. W.; MacDonald, A. T. (1998). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 5ª edição, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro/RJ.
- Fragoso Jr, C. R. (2005). *Simulações da Dinâmica de Fitoplâncton no Sistema Ecológico do Taim (RS)*. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Fragoso Jr, C. R. (2009). *Modelagem Tridimensional da Estrutura Trófica em Ecossistemas Aquáticos Continentais Rasos*. Tese (Doutorado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

- Fragoso Jr, C. R.; Ferreira, T. F.; Motta Marques, D. M. L. (2009). *Modelagem Ecológica em Ecossistemas Aquáticos*. 1ª Edição. Editora: Oficina de Textos. São Paulo
- Gravel, S.; Staniforth, A. (1992). *Variable Resolution and Robustness*. Monthly Weather Review, 20, p. 2633-2640.
- Gross, E. S.; Koseff, J. R.; Monismith, S. G. (1999a). *Evaluation of advective schemes for estuarine salinity simulations*. Journal of Hydraulic Engineering. 32 – 46.
- Gross, E. S.; Koseff, J. R.; Monismith, S. G. (1999b). *Three-dimensional salinity simulations of south San Francisco Bay*. Journal of Hydraulic Engineering. 1199 – 1209.
- Halliday, D.; Resnick R.; Walker, J. (1993). *Fundamentos de Física*. 4ª edição. Editora: Livros Técnicos e Científicos, LTC. Rio de Janeiro.
- HEC. (1978). *Water quality for River Reservoir System*. US Army Corps of Engineers Davis.
- Horne, A. J.; Goldman, C. R. (1994). *Limnology*. McGraw-Hill. New York p. 576.
- Huebner, K.H. (1975). *The Finite Element Methods for Engineers*. New York, John Wiley & Sons. cap 5, p. 143-145
- Hundsorfer, W. (1996). *Numerical Solution of Advection-Diffusion-Reaction Equations*. (Lecture Notes for Ph.D. Course) – Thomas Stieltjes Institute, Amsterdam. (Report NM-N9603).
- Imboden, D. M. (2004). *The Lakes Handbook, Volume 1: Limnology and Limnetic Ecology*. 1ª Edição, Blackwell Science Ltd. p. 115-152.
- Jin, K. R.; Wang, K. H. (1998). *Wind generated waves in lake Okeechobee*. Journal of the American Water Resources Association. v. 34, p.1099 - 1108.
- Klausmeyer, S. M. (2004). *Drag, lift, and moment estimates of transonic aircraft using the Navier-Stokes equations*. 42<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada.
- Laval, B.; Imberger, J.; Hodges, B.R.; Stocker, R. (2003). *Modeling Circulation in Lakes: Spatial and Temporal Variations*. Limnology and Oceanography. p. 983-994.
- Le Veque, R.J.(1996). *High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow*. SIAM Journal on Numerical Analysis 33, p. 627-665
- Le Veque, R.J., (1990). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics, Birkhauser Verlag, p. 214.
- Lee, C. K. (1998) *Automatic adaptive mesh generation using metric advancing front approach*, Engineering Computations, vol. 16, N°. 2.

- Leendertse, J. J. (1967). *Aspects of a Computational Model for Long-Period Water Wave Propagation*. RM-5294-PR, Rand Corp.
- Lo, S.H. (1991), *Automatic mesh generation and adaptation by using contours*. Int. J. Numer. Methods Engrg, vol. 31, p. 689-707.
- Lynch, D.R.; Gray, W.G.A. (1979). *A Wave Equation Model for Finite Element Computations*. Computer and Fluids. vol. 7, p. 207-228.
- Maliska, C.R. & Vasconcellos, J.F.V. (2000). *An Unstructured Finite Volume Procedure for Simulating Flows with Moving Fronts*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier Science S.A, vol. 182, pp.401-420.
- Marshall, J.; Adcroft, A.; Hill, C.; Perelman, L.; Heisey, C. (1997). *A finite, incompressible Navier Stokes model for studies of the ocean on parallel computers*. Journal of Geophysical Research, vol. 102, n° C3, p. 5753-5766.
- Martin, J. L.; McCutcheon, S. C. (1999) *Hydrodynamics and transport for water quality modeling*. Lewis. Boca Raton. p. 794.
- Menegat, R.; Porto M. L.; Carraro, C. C.; Fernandes, L. A. D. (1998). *Atlas Ambiental de Porto Alegre*. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, p. 228.
- Monsen, N. E.; Cloern, J. V.; Lucas, L.V. (2002). *A comment on the use of flushing time, residence time, and age as transport time scales*. Note. Limnol. Oceanogr. vol. 47, N°. 5, p. 1545-1553.
- Motta Marques, D. L. (2003). *Sistema Hidrológico do Taim – PELD/CNPq Sítio 7: Relatório*. Porto Alegre. p. 52
- Nece, R. E.; Faconer, R. A.; Tsutsumi, T. (1976). *Planform Influence on Flushing and Circulation in Small Harbors*. Proceedings, 15° Coastal Engineering Conference. Hawaii. p. 3471-3486.
- Nece, R. E.; Richey, E. P. (1972). *Flushing Characteristics of Small Boat Marinas*. Proceedings, 13° Coastal Engineering Conference. Vancouver, B.C., Canada.vol III, p. 2499-2512.
- Nelson, J. S. (1994). *Fishes of the World*. New York, Jonh Wiley & Sons, 3<sup>rd</sup> ed, vol. XVII, p. 600
- Nicolaidis, R.A. (1993). *The Covolume Approach to Computing Incompressible Flows*. Incompressible Computational Fluid Dynamics, p. 295–333.
- Oran, E.S.; Boris, J.P. (1987). *Numerical Simulation of Reactive Flow*, Elsevier, New York.

- Paz, A. R. (2003). *Análise dos Principais Fatores Intervenientes no Comportamento Hidrodinâmico do Banhado do Taim (RS)*. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- PNRH – Plano Nacional de Recursos Hídricos. Documento base de referência, novembro de 2003. ANA – Agência Nacional de Águas – [www.ana.gov.br](http://www.ana.gov.br).
- Poole, E.L.; Ortega, J.M. (1987). *Multicolor ICCG Methods for Vector Computers*, SIAM. *Journal of Numerical Analysis*. vol. 24, p. 1394-1418
- Press, W. H.; Tuskolsky, S. A.; Vetterling W. T. & Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press. 2ª Ed. p. 657
- Pró-Guaíba (1998). PLANO DIRETOR DA REGIÃO HIDROGRÁFICA DO GUAÍBA.
- Reynolds, C. S. (1984). *The ecology of freshwater phytoplankton*. Cambridge University Press. p. 396
- Reynolds, C. S. (1994) *The role of fluid motion in the dynamics of phytoplankton in lakes and rivers*. In Giller, P. S.; Hilarew, A. G.; Raffaelli, D. G. *Aquatic ecology – Scale, pattern and process*. Blackwell Science. p. 649
- Rizzi, R. L. (2002). *Modelo Computacional Paralelo para a Hidrodinâmica e para o Transporte de Substâncias Bidimensional e Tridimensional*. Tese (Doutorado em Ciência da Computação), Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Roache, P. (1982). *Computational Fluid Dynamics*. Revised Printing. Hermosa, Albuquerque, NM.
- Roe, P.L., (1985). *Some contributions to the modeling of discontinuous flows*. *Lectures Notes in Applied Mathematics*, 22, p. 163–193.
- Rosauro, N. M. L. (1979). *Modelo Hidrodinâmico para Rios e Redes de Canais Naturais*. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Rosauro, N. M. L. (1982). *A Finite Elements Application to the Study of Seiches and Water Circulation in the Jacuí Delta, Guaíba River and Patos Lagoon*. Transfer Report. University of Southampton. Faculty of Engineering and Applied Sciences. Dep of Civil Eng, Sep.

- Rosman, P. C. C. (1989). *Modelos de Circulação em Corpos D'Água Rasos*. In: Métodos Numéricos em Recursos Hídricos. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Recursos Hídricos. vol. 1, p. 156 - 215.
- Rosman, P. C. C. (2000) *Referência Técnica do SisBaHiA – SISTEMA BASE DE HIDRODINÂMICA AMBIENTAL*. Programa COPPE: Engenharia Oceânica, Área de Engenharia Costeira e Oceanográfica, Rio de Janeiro, Brasil.
- Ruppert J. (1995). *A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation*. *Journal of Algorithms*. vol. 18, n° 3, p. 548-585
- Scheffer, M., Hosper, S.H., Meijer, M.-L., Moss, B., Jeppesen, E. (1993). *Alternative Equilibria in Shallow Lakes*. *Trends in Ecology and Evolution*, vol. 8, p. 275-279.
- Schettini, E. B. C. (1991). *Modelo Matemático Bidimensional de Transporte de Massa em Elementos Finitos com Ênfase em Estuários*. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Silveira, A. L. L. (1986). *Modelo hidrodinâmico bidimensional com aplicação ao rio Guaíba*. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Souza, R. C.; Kjerve, B. (1997). *Fundamentos da maré e sua Predição*. XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Gramado/RS.
- Stelling, G.S. (1984). *On the Construction of Computational Methods for Shallow Flow Problems*, Rijkswaterstaat Communications, n° 35, The Hague.
- Streeter, H.W. e Phelps, E.B. (1925). *Study of the pollution and natural purification of the Ohio river*. U.S. Public Health Service, Washington D.C., Bulletin N0. 146p.
- Sweby, P.K., (1984). *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*. *SIAM Journal of Numerical Analysis* 21, 995–1011.
- Tucci, C. E. M. (2005). *Modelos hidrológicos*. 2ª ed. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS/ABRH.
- Van der Molen, J.; Stelling, J.S. (1997). *A Non-Orthogonal Finite Difference Method for Shallow Water Flow*, em J. von der Molen (ed.). *Tides in a Salt-Marsh*, FeboDruk BV, Enschede, Holanda.
- van Leer, B., (1979). *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method*. *Journal of Computational Physics* 32, 101–136.

- Walters, R.A. (1987). *A model for Tides and Currents in the English Channel and Southern Northern Sea*. *Advances in Water Resources*. vol. 10, p. 138-148
- Weare, T.J. (1979). *Errors Arising from Irregular Boundaries in ADI Solutions of the Shallow Water Equations*, *Int j. Numerical Methods for Engineering*, v. 14, p. 921-931.
- White, A. A.; Bromley, R. A (1995). *Dynamically consistent, quasi-hydrostatic equations for global models with a complete representation of the Coriolis force*. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 121, n° 522, p. 399-418.
- Zhang, Y.; Baptista, A. M. (2003). *A cross-scale model for 3-D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: I. Formulation and skill assessment*. Department of Environmental and Biomolecular Systems. Beaverton, USA.
- Zijlema, M.; Wesseling, P. (1995). *Higher Order Flux-limiting Methods for Steady-state, Multidimensional, Convection-dominated Flow*. Delft: Delft University of Thecnology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, p. 28. (Report 95-131)