

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

Plasmas empoeirados com partículas de poeira de carga variável  
por colisões inelásticas com íons e elétrons e por fotoionização

Renato Andrade Galvão

Porto Alegre - RS

2011

Renato Andrade Galvão

Plasmas empoeirados com partículas de poeira de carga variável  
por colisões inelásticas com íons e elétrons e por fotoionização\*

Dissertação apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Física da Uni-  
versidade Federal do Rio Grande do Sul  
como requisito parcial para a obtenção  
do título de Mestre em Física.

Orientador: Luiz Fernando Ziebell

Porto Alegre - RS

2011

---

\*Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Renato Andrade Galvão

Plasmas empoeirados com partículas de poeira de carga variável  
por colisões inelásticas com íons e elétrons e por fotoionização

Dissertação apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Física da Uni-  
versidade Federal do Rio Grande do Sul  
como requisito parcial para a obtenção  
do título de Mestre em Física.

Orientador: Luiz Fernando Ziebell

05 de outubro de 2011.

Banca Examinadora

Vera Jatenco-Pereira (IAG-USP)  
Marcia Cristina Bernardes Barbosa (IF-UFRGS)  
Renato Pakter (IF-UFRGS)

A meus pais (*in memoriam*)  
e a meus irmãos.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Luiz Fernando Ziebell, meu orientador.

Aos professores do IF-UFRGS dos quais fui aluno e ao CNPq.

A Stoian Ivanov Zlatev e André Maurício Conceição de Souza, professores do DFI-UFS.

A Célia Lauar, João Thiago e Márcio Moreira, pelo apoio que me deram quando cheguei a Porto Alegre.

A Silvana e a minha avó Maria, pelo carinho de sempre.

A todos colegas e amigos que conheci.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| Resumo . . . . .   | viii      |
| Abstract . . . . .                                       | ix        |
| <b>1 Introdução</b>                                      | <b>1</b>  |
| <b>2 Plasmas Empoeirados</b>                             | <b>5</b>  |
| 2.1 Plasmas empoeirados cósmicos . . . . .               | 5         |
| 2.1.1 Cometas . . . . .                                  | 5         |
| 2.1.2 Anéis planetários . . . . .                        | 7         |
| 2.1.3 Nuvens noctilucentes . . . . .                     | 8         |
| 2.2 Plasmas empoeirados criados em laboratório . . . . . | 9         |
| 2.2.1 Incidência UV . . . . .                            | 10        |
| 2.3 Processos de carregamento . . . . .                  | 12        |
| 2.3.1 Absorção de partículas . . . . .                   | 13        |
| 2.3.2 Fotoemissão . . . . .                              | 14        |
| <b>3 Teoria Cinética</b>                                 | <b>16</b> |
| 3.1 Equação de Klimontovich . . . . .                    | 16        |
| 3.2 Funções de distribuição e de correlação . . . . .    | 18        |
| 3.3 Hierarquia BBGKY . . . . .                           | 23        |
| 3.4 Equação de Vlasov . . . . .                          | 25        |
| 3.5 Correlações binárias . . . . .                       | 27        |
| 3.5.1 Equação colisional de Landau . . . . .             | 31        |
| 3.5.2 Equação de Fokker-Planck . . . . .                 | 32        |
| 3.6 Equações Cinéticas de um Plasma Empoeirado . . . . . | 33        |
| 3.6.1 Integrais de colisão . . . . .                     | 35        |
| <b>4 Tensor dielétrico</b>                               | <b>37</b> |
| 4.1 Modelo . . . . .                                     | 38        |
| 4.1.1 Fontes de partículas . . . . .                     | 38        |
| 4.2 Linearização do sistema de equações . . . . .        | 39        |
| 4.3 Relações constitutivas . . . . .                     | 43        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.4      | Análise de Fourier do sistema Vlasov-Maxwell em primeira ordem . . . . .                   | 45        |
| 4.5      | Componente $\epsilon_{ij}^C$ . . . . .   | 47        |
| 4.6      | Carga elétrica da partícula de poeira . . . . .  | 55        |
| 4.7      | Componente $\epsilon_{ij}^A$ . . . . .   | 62        |
| 4.8      | Componente $\epsilon_{ij}^{EF}$ . . . . .  | 64        |
| 4.9      | $\epsilon_{ij}^{EF}$ em potências do raio de Larmor . . . . .                              | 70        |
| 4.9.1    | Expansão em série do tensor $\tilde{\Pi}^{l\alpha}$ e $\tilde{\Pi}^{l\alpha,EF}$ . . . . . | 72        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões</b>  | <b>82</b> |
| <b>A</b> | <b>Emissão fotoelétrica</b>  | <b>84</b> |

## Resumo

Neste trabalho fizemos uma revisão da teoria cinética de plasmas e obtivemos as equações cinéticas para um plasma empoeirado magnetizado com carga variável das partículas de poeira. Além das correntes de carregamento por absorção de partículas do plasma, incluímos a corrente de emissão de fotoelétrons à corrente total, e consideramos que o plasma é povoado por poeira com partículas com diferentes tamanhos.

## **Abstract**

In this work we have made a review of the plasmas kinetic theory and obtained the kinetic equations for a magnetized dusty plasma with variable charges of the dust particles. In addition to currents due to absorption of plasma particles, we have included in the total current the photoelectrons emission current and considered that the dusty plasma is populated by dust with particles with different sizes.

# Capítulo 1

## Introdução

Plasmas podem ser definidos como uma coleção de íons, elétrons e partículas neutras em determinadas condições de densidade e temperatura, caracterizando um estado da matéria. A natureza eletricamente ativa das partículas que o constituem dá origem a interações de longo alcance, exibindo o comportamento coletivo que é sua distinta e principal característica. Em sua forma mais simples, é composto por duas componentes, uma de íons uma vez ionizados e outra de elétrons, de modo que, no estado de equilíbrio, cada componente tem aproximadamente o mesmo número de partículas carregadas.

Plasma empoeirado é um plasma que contém um conjunto de partículas de poeira imersas em seu volume. Sua principal característica reside no fato de que os grãos de poeira possuem carga elétrica variável devido a suas interações com o plasma que os cerca e com agentes externos, como radiação. O processo de carregamento tem um papel importante em processos perturbativos, que pode afetar as propriedades eletromagnéticas do plasma assim como suas propriedades dinâmicas, sendo necessário levar em conta o carregamento da poeira na teoria cinética envolvida.

A carga elétrica de um grão de poeira no plasma é determinada pelo balanço das correntes de carregamento na sua superfície. A carga pode variar em módulo de zero a milhares de vezes a carga do elétron, dependendo do tamanho da partícula de poeira e das condições do plasma. A carga elétrica da poeira surge como um importante parâmetro que afeta a dinâmica do plasma, tanto em plasmas produzidos em laboratório como em plasmas cósmicos, cabendo notar que as partículas de poeira no plasma também podem estar sob efeito de outras forças além da elétrica, como força gravitacional, forças de recuo devido a íons e partículas neutras e forças de termodifusão. Entretanto, a física das interações plasma-poeira não se limita ao processo de carregamento e à ação de forças sobre os grãos. As partículas de poeira geralmente não possuem uma carga constante, sua interação com o plasma que as cerca é complexa e, portanto, a carga da poeira é uma função não trivial das condições do plasma.

Num plasma empoeirado onde processos de emissão de elétrons não são significativos, a carga de equilíbrio é predominantemente negativa, porque o fluxo de elétrons para a

superfície de uma partícula com carga neutra é maior do que o de íons, devido à maior mobilidade dos elétrons. Quando a densidade de partículas de poeira for suficientemente alta, a interação eletrostática entre os grãos pode levar à formação de cristais de poeira, nos quais os grãos de poeira desempenham um papel similar ao dos íons em um metal iônico, enquanto os elétrons e íons desempenham um papel similar ao de elétrons livres. Por outro lado, se processos de emissão são importantes, a carga será positiva, o que pode mudar de forma relevante as características de um plasma empoeirado. Neste caso, a densidade de elétrons no plasma é maior do que a de íons. Plasmas empoeirados com partículas positivas são encontrados na natureza como consequência da fotoemissão em regiões onde há incidência de radiação ultravioleta (UV), como na ionosfera terrestre, meio interestelar, coroa solar, cometas, etc.

A mudança nas densidades das partículas do plasma de acordo com a carga da poeira implica em mudança no comprimento de Debye. Em particular, plasmas cósmicos povoados por poeira podem ser classificados em uma das duas formas [27, 45]:

$$1) \ a \ll \lambda_D < r_d$$

$$2) \ a \ll r_d < \lambda_D$$

onde  $a$  é o raio do grão de poeira,  $\lambda_D$  o comprimento de Debye e  $r_d$  a distância média entre os grãos. No primeiro caso a poeira pode ser considerada como uma coleção de grãos isolados no plasma, no segundo a poeira contribui no processo de blindagem do plasma e, portanto, tem um papel no comportamento coletivo do mesmo. Os mecanismos de carregamento mais importantes são transferência de carga por absorção de partículas do plasma via colisões inelásticas, fotoemissão e emissão secundária, como veremos no capítulo 2.

Em 1937, Jung [21] já considerava que a emissão fotoelétrica em plasmas interestelares era o processo predominante para o aumento de elétrons no plasma. Em 1941 e 1948, realizou uma exaustiva investigação a respeito da ionização de partículas sólidas por efeito fotoelétrico, com a simplificação de que todas as partículas possuíam a mesma carga e desprezando a influência da carga no processo de emissão. Muitas investigações [11, 12, 28] a respeito de carregamento da poeira por emissão fotoelétrica tem sido realizadas ultimamente, sendo que grande parte delas leva em conta que os fotoelétrons emitidos obedecem uma distribuição maxwelliana.

Uma revisão crítica a respeito da teoria para cálculo da emissão fotoelétrica para metais foi realizada por Dewdney [5], baseada nas hipóteses de Fowler: 1) a probabilidade de absorção de um fóton por um elétron na superfície do material é independente do estado inicial do elétron; 2) a energia do fóton absorvida pelo elétron aumenta a energia cinética do elétron na direção normal à superfície; 3) elétrons com energia normal maior do que  $\psi$ <sup>1</sup>,

---

<sup>1</sup>Barreira de potencial na superfície a ser vencida pelo elétron.

atravessam a superfície. No trabalho de Dewdney, ele considerou que, numa aproximação semiclássica, os fotoelétrons emitidos obedecem à distribuição de Fermi-Dirac. Seguindo esta linha, podemos citar alguns trabalhos de Sodha *et al.* [40, 41], levando em conta o efeito da carga da partícula emissora sobre a emissão [38, 39], e Ignatov [13].

Uma propriedade distintiva dos plasmas empoeirados é que eles são sistemas abertos. O caráter de abertura está relacionado com o fluxo contínuo de partículas, íons ou elétrons, em direção à poeira, porque fontes de partículas, externas ou internas, se fazem necessárias para a manutenção do plasma, ou ele pode deixar de existir. Desta forma, a poeira desempenha o importante papel de sumidouro de partículas, ao mesmo tempo que pode vir a ser uma fonte, por exemplo, na presença de radiação. A captura de partículas pela poeira deve ser devidamente levada em conta introduzindo o processo de captura correspondente nas equações de conservação de partículas e de energia [50]. Então, fontes de partículas são componentes básicos de um plasma empoeirado e suas propriedades devem ser especificadas para uma descrição completa desses sistemas. Devido ao caráter de abertura e a variação da carga da poeira, espera-se que uma teoria cinética geral para plasmas empoeirados deve ser mais complexa do que a teoria cinética de plasmas padrão [47].

A análise teórica de ondas e instabilidades em plasmas empoeirados teve início com o trabalho de Bliokh e Yaroshenko [3, 54] sobre o estudo de propagação de ondas nos anéis de Saturno. A maior parte dos estudos foram realizados utilizando teoria de fluidos e apenas alguns deles levaram em conta o carregamento das partículas de poeira, apesar de que já era conhecida a importância deste processo. Muitas análises realizadas no início da década de noventa, considerando a poeira como uma coleção de partículas com carga e massa uniforme, mostraram que a presença da poeira dá origem a novos modos de propagação de ondas, como também à modificação de modos existentes no plasma.

A teoria de fluidos, no entanto, possui limitações no que diz respeito à descrição de efeitos puramente cinéticos, como o amortecimento de Landau [54]. Além disso, a flutuação da carga da poeira assim como a dinâmica do processo de carregamento podem levar a um novo mecanismo de amortecimento [17]. Isto deu motivação para o desenvolvimento da teoria cinética para plasmas empoeirados, como nos trabalhos de Melandso [26], Varma [48] e Tsytoich e Havnes [44], em 1993, que consideraram a carga elétrica das partículas de poeira como uma nova variável dinâmica do sistema, particularizando a análise para o caso em que não há campos externos e considerando um modo específico de propagação. Pode ser também mencionado como um dos trabalhos precursores o trabalho de Vladimirov, em 1994, no qual foram obtidas expressões gerais para o tensor dielétrico [49].

Plasmas empoeirados cósmicos estão, em geral, sob a ação de campos magnéticos. Uma teoria cinética que leva em conta esta característica, assim como a variação da carga das partículas de poeira devido a correntes de carregamento por colisões inelásticas, foi de-

envolvida durante o trabalho de Doutorado de Marcelo Camargo de Juli, sob orientação da Prof.<sup>a</sup> Ruth de Souza Schneider [14, 15, 16], que obtiveram expressões gerais e exatas para o tensor dielétrico para um plasma empoeirado magnetizado. Nesse trabalho, além disso, foi feita uma análise de propagação de ondas perpendicularmente ao campo magnético considerando uma distribuição Maxwelliana de partículas (íons e elétrons). A poeira foi considerada imóvel e, conseqüentemente, a validade do modelo proposto está restrita a ondas com frequências maiores que a frequência de plasma da poeira, excluindo, portanto, a possibilidade de análise de modos que possam surgir da dinâmica da poeira. Um bom número de trabalhos tem sido publicado por integrantes do grupo de Física de Plasmas do IF-UFRGS, com aplicações em propagação de ondas eletromagnéticas e eletrostáticas no âmbito da teoria cinética [8, 9, 17, 18, 32, 52, 53, 54].

Na presente dissertação, nossa intenção foi fazer uma revisão da teoria cinética de plasmas e de plasmas empoeirados, assim como incrementar o modelo existente, obtendo o tensor dielétrico para plasmas empoeirados magnetizados considerando o fato de que o plasma é povoado por poeira com partículas esféricas de diversos tamanhos [10]. Além disso, incorporamos um mecanismo interno de fonte de partículas ao plasma, utilizando a possibilidade de fotoemissão de elétrons pelas partículas de poeira por incidência de radiação UV, considerando que os fotoelétrons emitidos obedecem à estatística de Fermi-Dirac. Até onde sabemos, ainda não há trabalhos publicados que levem em conta o efeito das correntes de emissão de fotoelétrons pela poeira, pelo menos numa abordagem cinética.

Nossa perspectiva é de fazer estudos de propagação de ondas eletromagnéticas e eletrostáticas com o tensor dielétrico obtido, e possivelmente incorporar outros mecanismos de fonte de partículas usando metodologia similar.

A dissertação está dividida adiante da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos algumas características gerais de plasmas empoeirados, comentamos sobre ambientes onde são encontrados e descrevemos os processos de carregamento da poeira. No Capítulo 3 fazemos uma revisão da teoria cinética padrão de plasmas, que esperamos ser uma base para apresentar no final as equações cinéticas de um plasma empoeirado. No Capítulo 4, apresentamos a derivação do tensor dielétrico de um plasma empoeirado magnetizado composto por partículas de poeira com diferentes tamanhos, incorporando o mecanismo de fotoionização, e escrevemos esse tensor na forma de uma expansão infinita e uma finita, incorporando efeitos de todos os harmônicos e de todas as ordens na expansão em potências do raio de Larmor. A conclusão do trabalho é apresentada no capítulo 5.

# Capítulo 2

## Plasmas Empoeirados

Processos envolvendo plasmas de múltiplas componentes contendo partículas de poeira tem atraído grande atenção nas últimas três décadas. O interesse em plasmas empoeirados é estimulado pela sua abundância na natureza e pela sua importância na área tecnológica.

Neste capítulo apresentamos brevemente alguns exemplos de plasmas cósmicos e de métodos de produção de plasmas empoeirados de laboratório. A maior parte dos principais processos de carregamento são apresentados, e entramos em algum detalhe sobre dois processos que serão considerados nos capítulos posteriores.

### 2.1 Plasmas empoeirados cósmicos

Plasmas são onipresentes em meios cósmicos. Existem vários sistemas no universo, como nuvens interestelares, sistemas solares, nuvens noctilucetas, etc., em cuja dinâmica a presença de poeira eletricamente carregada desempenha papel decisivo.

O espaço interestelar é composto de gás e poeira. O gás continuamente diminui sua quantidade à medida que novas estrelas são formadas durante o colapso de grandes nuvens compostas por moléculas. O colapso e fragmentação dessas nuvens dá origem à formação de *clusters* estelares. Os grãos de poeira das nuvens estelares são dielétricos (gelo, silicatos, etc.) ou condutores (grafite, magnetitas, etc.). Parâmetros típicos de plasmas empoeirados em nuvens interestelares são  $n_e = 10^{-3} - 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e \simeq 12 \text{ K}$ ,  $n_d = 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a \simeq 0,2 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $n_n \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$  e  $r_d/\lambda_D \leq 0,3$  [36].

Focando nossa atenção para nosso sistema solar, apresentamos as seguintes seções com alguns detalhes de plasmas empoeirados em diferentes sistemas.

#### 2.1.1 Cometas

Cometas são corpos celestes relativamente pequenos, de forma irregular, compostos por material sólido, água e gás congelados. São constituídos por um núcleo de raio não maior que 10 km envolto por uma nuvem de material difuso denominada *coma*, que pode

crescer em tamanho e brilho à medida que o cometa se aproxima do Sol. Com o aumento da temperatura, materiais voláteis se evaporam, contribuindo para o aumento da coma. O gás da coma absorve radiação ultravioleta do Sol e o cometa torna-se fluorescente a uma distância aproximada de 5 UA do Sol, onde 1 UA (unidade astronômica) = 149.597.900 km é a distância do Sol à Terra. A pressão da radiação solar e o vento solar expulsam partículas para fora do cometa, com diferentes velocidades dependendo das suas massas. Por isto, partículas massivas tendem a formar caudas curvas, e as menos massivas, como íons, a formar linhas retilíneas, sempre na direção oposta ao Sol [35].



Figura 2.1: Cometa Hale-Bopp. Observadores: Herman Mikuz, B. Kambic. Local: Crni Vrh Observatory, Slovenia. Data: 8 de abril de 1997, 19:56-20:06 UT

|                           | Dentro da ionopausa | Fora da ionopausa            |
|---------------------------|---------------------|------------------------------|
| $n_e$ (cm <sup>-3</sup> ) | $10^3 - 10^4$       | $10^2 - 10^3$                |
| $T_e$ (K)                 | $< 10^3$            | $\sim 10^4$                  |
| $n_d$ (cm <sup>-3</sup> ) | $10^{-3}$           | $5 \times 10^{-9} - 10^{-7}$ |
| $n_n$ (cm <sup>-3</sup> ) | $10^{10}$           | -                            |
| $a$ (μm)                  | 0, 1 - 10           | 0, 01 - 10                   |
| $r_d/\lambda_D$           | $\geq 1$            | $\geq 10$                    |

Tabela 2.1: Parâmetros típicos de plasma empoeirado no cometa Halley [27].

O processo de desenvolvimento da cauda tem início quando a pressão da coma se torna próxima à do vento solar junto com a pressão magnética interplanetária. Então, à medida que a coma se torna mais densa, o vento solar desacelera para velocidades subsônicas, levando à formação de um arco de choque. Na cometopausa, o vento solar e as linhas magnéticas são empurradas ao redor da cometosfera, que nessas circunstâncias está composta por íons. A então formada ionosfera cometária, se densa o suficiente, forma uma região livre de campos magnéticos, delimitada pela ionopausa<sup>1</sup>, que mantém a

<sup>1</sup>Ionopausa é a região de fronteira que delimita e separa a ionosfera da mesosfera cometária.

ionosfera blindada e empurra os íons na direção e para fora do núcleo, formando a cauda de íons [29].

Na Figura 2.1 vemos uma imagem do cometa Hale-Bopp que exhibe distintamente duas caudas. A cauda azul é composta por gás, e a branca por poeira macroscópica. A Tabela 2.1 mostra parâmetros de plasma empoeirado no cometa Halley, dentro e fora da ionopausa.

## 2.1.2 Anéis planetários

Todos os planetas jovianos, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, também conhecidos como gigantes gasosos, possuem anéis planetários. Estes anéis são formados por pequenas partículas de rocha ou gelo mas também podem conter rochas tão grandes como uma montanha. Apresentamos uma breve descrição dos anéis de Saturno, porque esse planeta possui os anéis mais largos e notáveis entre os quatro gigantes.

Os anéis de Saturno têm intrigado astrônomos desde que foram descobertos por Galileu, em 1610, com seu primeiro telescópio. Os resultados das missões Voyager 1 e Voyager 2 foram fontes de muitos estudos e muitos mistérios.

Seus anéis se espalham num raio de cerca de  $282 \times 10^3$  km [35] mas são extremamente finos, com 1 km ou menos de espessura. Os anéis consistem de bilhões de partículas formadas em sua maioria por água congelada.

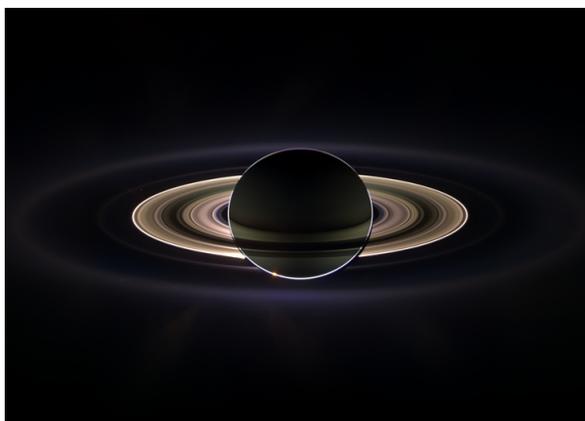


Figura 2.2: Composição de 165 imagens capturadas pela sonda espacial Cassini em setembro de 2006 num intervalo de 3h [35].

Denominados na ordem pelo qual foram descobertos, os anéis estão relativamente próximos uns dos outros, com exceção dos anéis A e B, que estão separados entre si por uma distância de 4700 km, a Divisão de Cassini. Os anéis principais são, de dentro para fora, o C, o B e o A. O anel D é bem mais tênue e o mais próximo do planeta. O F é o mais fino e fica logo após o anel A. Há ainda outros dois anéis mais externos e mais tênues, E e G. Os anéis apresentam diversas estruturas em várias escalas. Algumas delas

|                           | Anel E                            | Anel F                            |
|---------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $n_e$ (cm <sup>-3</sup> ) | ~ 10                              | ~ 10                              |
| $T_e$ (K)                 | 10 <sup>5</sup> - 10 <sup>6</sup> | 10 <sup>5</sup> - 10 <sup>6</sup> |
| $n_d$ (cm <sup>-3</sup> ) | 10 <sup>-7</sup>                  | ≤ 10                              |
| $n_n$ (cm <sup>-3</sup> ) | 1                                 | -                                 |
| $a$ (μm)                  | ~ 1                               | 1                                 |
| $r_d/\lambda_D$           | 0, 1                              | ≤ 10 <sup>-3</sup>                |

Tabela 2.2: Parâmetros típicos de plasma empoeirado nos anéis de Saturno [36].

estão relacionadas com perturbações gravitacionais causadas pelas luas de Saturno. A missão Cassini revelou que a lua Enceladus bombardeia o anel E com material congelado, tornando-se uma fonte de matéria para crescimento do anel E. Além disso, a mesma missão mostrou que as luas parecem orbitar em anéis parciais ou completos, formados por partículas ejetadas de suas superfícies por impacto com asteróides [31].

As características de plasma e poeira variam de um anel a outro. A Tabela 2.3 mostra alguns dados relativos aos anéis E e F.

### 2.1.3 Nuvens noctilucentes

Nos últimos anos, estudos têm sido realizados das chamadas *nuvens noctilucentes*, que aparecem normalmente durante o verão na mesosfera polar terrestre a uma altitude entre 80 – 90 km. Elas têm uma espessura máxima de 1 km, sendo assim consideradas finas se comparadas com a escala de espessura da atmosfera da Terra. Nessa estação do ano, a temperatura nesta altitude é de cerca de 150 K e o vapor de água presente é supersaturado, causando a formação de partículas de gelo com diâmetros da ordem de micrometros.



Figura 2.3: Nuvens noctilucentes fotografadas a partir da International Space Station - ISS, quando estava localizada a 340 km sobre a Mongólia, em 22 de julho 2008 [34].

Estes grãos de gelo são contaminados por impurezas, que reduzem a função trabalho das partículas. Devido à fotoionização por radiação solar, os grãos possuem uma carga

| Nuvens noctilucentes      |                      |
|---------------------------|----------------------|
| $n_e$ (cm <sup>-3</sup> ) | 10 <sup>3</sup>      |
| $T_e$ (K)                 | 150                  |
| $n_d$ (cm <sup>-3</sup> ) | 10 - 10 <sup>3</sup> |
| $n_n$ (cm <sup>-3</sup> ) | 10 <sup>14</sup>     |
| $a$ (μm)                  | 0,01 - 0,1           |
| $r_d/\lambda_D$           | 0,2                  |

Tabela 2.3: Parâmetros típicos de partículas em nuvens noctilucentes [27].

elétrica positiva. Reflexões de ondas de rádio na região polar que ocorrem na mesosfera são atribuídas às nuvens noctilucentes, que possuem uma densidade de elétrons ligeiramente elevada [13, 23].

## 2.2 Plasmas empoeirados criados em laboratório

Os primeiros experimentos com plasmas empoeirados foram realizados por Langmuir na década de 20 do século passado. Algumas décadas depois, plasmas empoeirados já eram estudados no escopo da magnetohidrodinâmica (MHD). O grande *boost* nas investigações experimentais ocorreu logo após a descoberta em 1994 dos cristais de plasma, estruturas formadas por partículas de poeira fortemente acopladas por interação coulombiana, podendo formar colóides e padrões cristalinos [50].

O acoplamento é caracterizado, entre outros, pelo parâmetro de acoplamento de Coulomb

$$\Gamma_C = \frac{(Z_d e)^2}{r_d k_B T_d} \exp\left(-\frac{r_d}{\lambda_D}\right) \quad (2.1)$$

definido como a razão entre a energia potencial do grão de poeira e sua energia térmica. O plasma empoeirado será um sistema fracamente acoplado quando  $\Gamma_C \ll 1$ , e fortemente acoplado quando  $\Gamma_C \gg 1$ . Experimentos mostram [50] que sistemas com  $\Gamma_C \sim 10^2$  cristalizam.

Plasmas de laboratório podem ser categorizados pelo método em que são produzidos:

- Descargas elétricas
- Reação nuclear
- Incidência UV
- Emissão termoiônica

Uma diferença básica entre estes quatro métodos é que o primeiro corresponde a um regime em que as partículas de poeira presentes no plasma adquirem carga negativa; em todos os outros a carga adquirida é positiva.

Há várias propriedades inerentes a cada método de produção, mas não as apresentaremos todas aqui. No entanto, fazemos uma breve explanação de alguns experimentos para a produção de plasma empoeirado utilizando radiação UV, uma vez que neste trabalho buscamos incorporar processos de fotoemissão na descrição cinética de plasmas empoeirados.

### 2.2.1 Incidência UV

Quando as partículas de poeira são atingidas por radiação UV, elétrons são ejetados da superfície das mesmas se a energia dos fótons incidentes é maior que a função trabalho do material que compõe a poeira. O valor característico das funções trabalho dos diferentes materiais não excede 6 eV.

Plasmas empoeirados com partículas de poeira ionizadas por radiação UV podem ser produzidos por fontes de radiação interna ou externa. No último caso, as partículas de poeira estão expostas a radiação cuja origem está fora do volume do plasma, oriunda de um laser, uma lâmpada ou uma estrela. Fontes de radiação internas podem ser produzidas experimentalmente por descargas elétricas em ampolas de gás. Descargas elétricas são uma fonte de radiação devido a excitação de partículas neutras por impacto com elétrons.

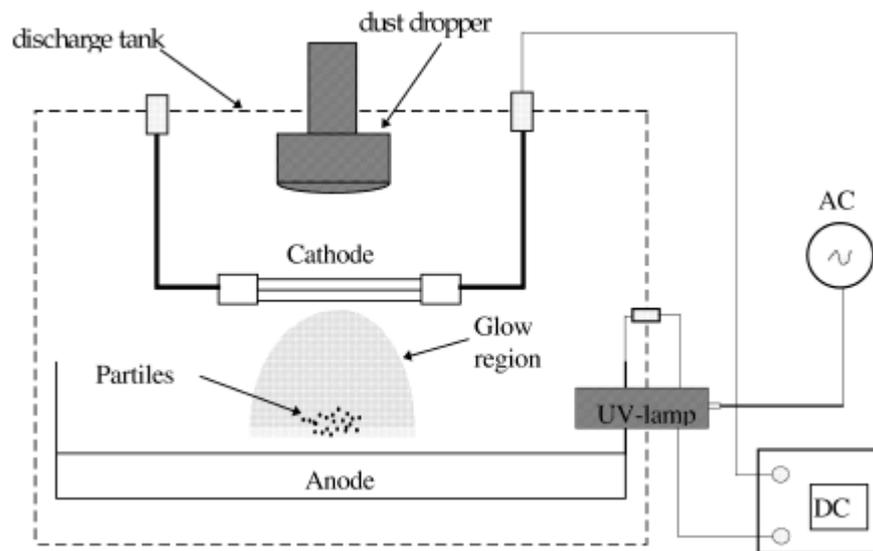


Figura 2.4: Diagrama esquemático do aparato experimental [30].

Descargas elétricas por este método têm sido efetivamente utilizadas para a produção de plasmas empoeirados. Há certas configurações em que a intensidade do campo elétrico na região do cátodo pode levar a um acúmulo de elétrons, aumentando a intensidade da radiação nessa região. Essa configuração sugere que partículas de poeira são carregadas por fotoionização e por emissão secundária.

Num experimento realizado por Samarian e Vaulina (Figura 2.4), eles obtiveram a formação de uma nuvem composta por dezenas de grãos de poeira carregados positivamente. A descarga ocorre numa câmara cilíndrica de aço inoxidável e a corrente da descarga varia de 0,5 mA a 15 mA, com pressão interna entre 0,2 a 2 Torr. A poeira é lançada no recipiente pela parte superior, e o aprisionamento das partículas de poeira se dá pela barreira de potencial formada pelo aumento da densidade de elétrons na direção do cátodo. O gradiente na densidade dos elétrons cria um campo elétrico que possibilita a formação de uma nuvem de poeira.

Plasmas empoeirados induzidos por radiação solar existem naturalmente no espaço, como vimos na seção anterior sobre plasmas cósmicos, mas podem também ser produzidos experimentalmente utilizando a mesma fonte de radiação. Em 1998, foi realizado um experimento para o estudo de formação de estruturas de partículas carregadas por fotoemissão sob a ação de radiação solar a bordo da estação espacial Mir [7]. Com a condição de microgravidade, não foi necessário utilizar outros mecanismos para obter um confinamento adequado das macropartículas para compensar a ação da gravidade.

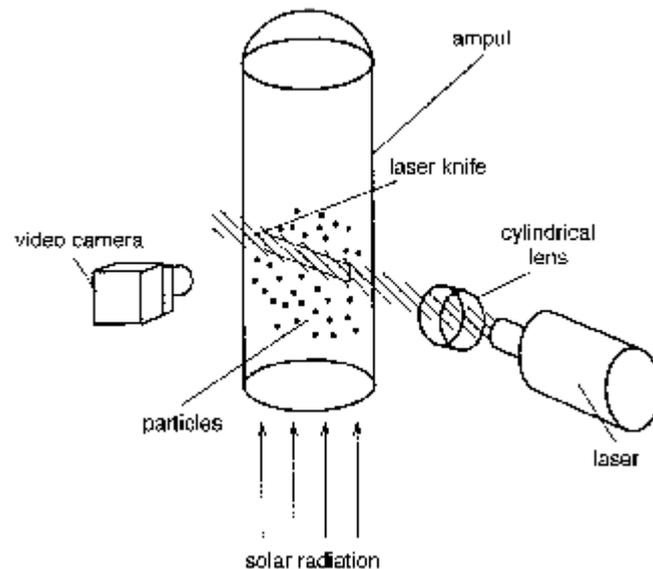


Figura 2.5: Representação esquemática da configuração experimental [7].

Neste experimento foram utilizadas ampolas contendo gás neon e micropartículas de um determinado composto químico cada uma (ver Figura 2.5). O gás neon foi escolhido por ser quimicamente inerte. O experimento foi realizado sob dois regimes de pressão diferentes, a 0,01 e 40 Torr, para possibilitar a observação da dinâmica da formação de estruturas para diferentes valores da carga elétrica das partículas. A dinâmica é determinada pelo tempo de carregamento, o tempo de amortecimento, de formação das estruturas, e o tempo de confinamento.

## 2.3 Processos de carregamento

O ponto de partida de qualquer estudo sobre a física de um plasma empoeirado é definir e entender os processos de carregamento da poeira. Os processos básicos que levam ao carregamento não são triviais e dependem principalmente das condições do plasma.

Partículas de poeira absorvem partículas do plasma, assumindo uma função de sumidouro de íons e elétrons. Então, para o plasma se manter na presença da poeira, é necessário que haja uma fonte de partículas, seja por ionização de partículas neutras ou por fontes externas.

Quando grãos de poeira estão imersos num plasma eles tanto podem absorver íons e elétrons quanto emitir elétrons. Então há uma corrente de partículas carregadas sobre a superfície da partícula de poeira que fará com que ela adquira uma carga elétrica positiva ou negativa. A carga elétrica adquirida num dado instante é determinada pela equação [27, 50]

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} [C(\varphi_s - \bar{\varphi})] = \sum_{\alpha} I_{\alpha} - \sum_{\beta} I_{\beta}^{Out} = I \quad (2.2)$$

onde  $I$  é a corrente média sobre a poeira,  $I_{\alpha}$  e  $I_{\beta}^{Out}$  são respectivamente as correntes de absorção e emissão,  $C$  é a capacitância do grão,  $\varphi_s$  é o potencial sobre a sua superfície e  $\bar{\varphi}$  é o potencial médio do plasma onde a poeira está distribuída. As correntes de absorção usualmente se referem à coleta de íons e elétrons por colisões inelásticas. As correntes  $I_{\beta}^{Out}$  se devem aos processos de emissão:

1. fotoelétrica
2. secundária de elétrons por impacto com elétrons energéticos
3. secundária de elétrons por impacto com íons energéticos
4. por campo elétrico
5. termiônica
6. triboelétrica
7. radioativa de elétrons e partículas  $\alpha$

Ao escrevermos a equação (2.2), convencionamos como positiva a corrente no sentido do grão. Em  $I_{\alpha}$ , íons atingindo o grão dão contribuição positiva para a carga do grão (corrente entrando) e elétrons atingindo o grão dão contribuição negativa (corrente saindo). O sinal negativo em frente de  $I_{\beta}^{Out}$  indica explicitamente que o movimento dos portadores é no sentido oposto. A emissão de elétrons resulta em aumento da carga positiva do grão. Se houvesse emissão de íons, representaria contribuição negativa para a carga do grão.

De acordo com a definição (2.2), a corrente de íons absorvidos dão contribuição positiva à carga da poeira, enquanto que elétrons dão contribuição negativa. Em processos de emissão, as partículas emitidas dão contribuição oposta ao sinal de suas cargas.

As correntes sobre a superfície do grão de poeira dependem de diversas propriedades, tanto do plasma quanto da poeira. Por exemplo, a absorção de íons e elétrons depende não somente do tamanho do grão e sua forma, mas também das distribuições de velocidade e de densidade dos íons e elétrons, do movimento da poeira em relação ao plasma e da diferença de potencial  $\varphi_s - \bar{\varphi}$ . A corrente fotoelétrica depende do potencial de superfície e do fluxo da radiação incidente. A emissão por campo elétrico pode ser significativa para grãos de raios suficientemente pequenos [36].

Há mais detalhes a respeito destas e das outras correntes mas nos limitamos a citar apenas estes.

A carga elétrica de equilíbrio de um grão de poeira é determinada pela condição de que a corrente média em sua superfície seja zero, satisfazendo a igualdade

$$\sum_{\alpha} I_{\alpha} = \sum_{\beta} I_{\beta}^{Out} \quad (2.3)$$

No que segue, acrescentamos alguns comentários a respeito dos processos de absorção por meio de colisões inelásticas e de fotoemissão, que são os processos relevantes para a formulação utilizada no presente trabalho.

### 2.3.1 Absorção de partículas

Usualmente, as colisões de partículas do plasma com os grãos de poeira são abordadas utilizando a teoria de movimento orbital limitado, OLM. Faremos uma breve descrição deste método. Nesta abordagem, assume-se que

- O grão de poeira está isolado de modo que outros grãos não afetam o movimento dos elétrons e íons.
- Elétrons e íons não sofrem outras colisões quando estiverem em rota de colisão com o grão.
- Independentemente da estrutura do potencial eletrostático no plasma próximo ao grão de poeira, qualquer partícula no plasma pode atingir uma partícula de poeira, se permitido pelas leis de conservação, e, se for o caso, se unirá à partícula de poeira.
- Para partículas de poeira esféricas, o parâmetro de impacto limite de uma partícula do plasma corresponde a uma trajetória tangencial à partícula de poeira.

Uma vantagem dessa abordagem é que a seção de choque da colisão pode ser encontrada utilizando somente as leis de conservação de energia e momento angular, independente-

mente da complexidade e não linearidade do potencial do plasma próximo ao grão de poeira [45].

Consideremos uma partícula de carga  $q_\alpha$  se aproximando a uma longa distância de um grão de poeira de raio  $a$  e carga  $q$ . Sejam  $c_\alpha$  o parâmetro de impacto e  $v_\alpha$  e  $v_\alpha^d$  as velocidades da partícula do tipo  $\alpha$  antes e depois da colisão. Então, para uma velocidade  $v_\alpha$ , há um valor máximo de  $c_\alpha$  para o qual a partícula atingirá o grão de poeira, de modo que podemos escrever as leis de conservação

$$m_\alpha v_\alpha c_\alpha = m_\alpha v_\alpha^d a \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{v_\alpha^d}{v_\alpha}\right)^2 = 1 - \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha v_\alpha^2} \quad (2.5)$$

onde  $\varphi = \varphi_s - \bar{\varphi}$ .

Em relação à interação eletrostática nesse processo podemos distinguir dois casos: atração entre o grão e a partícula quando  $q_\alpha \varphi < 0$ , e repulsão quando  $q_\alpha \varphi > 0$ . Neste último caso, a equação (2.5) impõe a condição

$$v_\alpha > \sqrt{\frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha}} = v_\alpha^{min}, \quad q_\alpha \varphi > 0 \quad (2.6)$$

Como a seção de choque da colisão é dada por  $\sigma_\alpha = \pi c_\alpha^2$ , segue de (2.4-2.6) que

$$\sigma_\alpha = \pi a^2 \left(1 - \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha v_\alpha^2}\right) \Theta \left(1 - \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha v_\alpha^2}\right) \quad (2.7)$$

A carga do grão de poeira está relacionada com o potencial  $\varphi$  pela equação  $q = C\varphi$ , onde  $C$  é a capacitância do grão. Aproximando a capacitância à de uma esfera no vácuo, temos que  $C = a$ , de modo que  $\varphi = q/a$ . Então podemos escrever (2.7), levando em conta também que  $p = m_\alpha v_\alpha$ , como

$$\sigma_\alpha(p, q) = \pi a^2 \left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2}\right) \Theta \left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2}\right) \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Fotoemissão

Quando uma superfície de determinado material é atingida por radiação, ela pode emitir elétrons se a energia da radiação incidente for maior que a função trabalho do material, que é definida como a energia mínima para remover um elétron para fora de um sólido, até uma distância grande se comparada com a escala atômica, mas pequena se comparada com as dimensões lineares da superfície.

No caso de uma partícula de poeira carregada, o elétron emitido deverá ter energia

suficiente para vencer o potencial eletrostático da poeira, de modo que

$$\frac{p^2}{2m_e} > \frac{eq}{a} \quad (2.9)$$

onde  $e$  e  $m_e$  são a carga e massa do elétron. Caso contrário, retornará para o grão.

O número de elétrons emitidos por unidade de área por unidade de tempo é proporcional à intensidade da radiação. Para o caso em que a radiação é unidirecional, incidindo somente em um hemisfério do grão, podemos escrever a seção de choque

$$\sigma_{EF}(p, q) = \frac{2}{3}\pi a^2 \beta(\nu) \Lambda(\nu) \Theta\left(\frac{p^2}{2m_e} - \frac{eq}{a}\right) \quad (2.10)$$

onde  $\beta(\nu)$  é a probabilidade de um elétron absorver um fóton na superfície e  $\Lambda(\nu)$  o número de fótons incidentes por unidade de área por unidade de tempo<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Ver Apêndice A.

# Capítulo 3

## Teoria Cinética

A descrição microscópica de um plasma é baseada nos espaços de distribuição de velocidade e de configuração das partículas, como também suas correlações e microcampos produzidos por elas. As quantidades microscópicas são mais difíceis de medir diretamente, mas frequentemente elas têm um papel dominante na determinação das propriedades macroscópicas do plasma. A abordagem cinética no estudo de plasmas provê uma base para uma visão mais profunda de conceitos como equilíbrio, ondas e estabilidade. A teoria de equilíbrio de Vlasov aplicada a ondas de pequena amplitude prevê fenômenos que estão fora do escopo da teoria de fluidos para plasmas, como o amortecimento de Landau, que é um amortecimento não colisional associado aos modos normais de propagação de ondas no plasma.

Neste capítulo faremos uma revisão da teoria cinética dos plasmas. A revisão varia em grau de detalhamento de um trecho para o outro, para facilitar a leitura do texto, e está em boa parte baseada no livro do Sitenko [37], havendo também referências a outros livros bem conhecidos, como Krall & Trivelpiece [25], Akhiezer *et al.* [2] e Klimontovich [22].

### 3.1 Equação de Klimontovich

Uma descrição completa de um sistema de muitas partículas seria aquela em que, num determinado instante, pudéssemos determinar a posição e o *momentum* de todas as partículas. A distribuição de Klimontovich [37]

$$F_{\sigma}(\xi, t) = \sum_{1 \leq i \leq N_{\sigma}} \delta[\xi - \xi_{\sigma i}(t)] \quad (3.1)$$

é uma densidade que nos fornece uma descrição microscópica no espaço de fase, em função do tempo, de  $N_{\sigma}$  partículas do tipo  $\sigma$  que compõem um plasma, onde definimos

$$\xi \doteq (\vec{r}, \vec{p}) \quad , \quad \xi_{\sigma i} \doteq [\vec{r}_{\sigma i}(t), \vec{p}_{\sigma i}(t)]$$

A densidade (3.1) é tal que  $F_\sigma(\xi, t)d\xi$  representa o número exato de partículas do tipo  $\sigma$  no elemento de volume  $d\xi$  em torno do ponto  $\xi$  e é uma quantidade que muda com o tempo de acordo com as posições  $\xi_{\sigma i}(t)$  de todas as respectivas partículas. De forma semelhante, definimos as densidades  $F_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t)$ ,  $F_{\sigma\sigma'\sigma''}(\xi, \xi', \xi'', t), \dots, F_{\sigma\sigma'\sigma''\dots\sigma^{s-1}}(\xi, \xi', \xi'', \dots, \xi^{s-1}, t)$ , que estão associadas à probabilidade de encontrar duas, três ou mais partículas simultaneamente em determinados pontos, onde o número  $s$  se refere à ordem da distribuição relativa ao número de partículas. Assim obtemos, junto com (3.1), a seqüência de equações

$$\begin{aligned}
F_\sigma(\xi, t) &= \sum_j \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \\
F_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) &= \sum_{jj'} \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta[\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \Theta(1 - \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{jj'}) \\
F_{\sigma\sigma'\sigma''}(\xi, \xi', \xi'', t) &= \sum_{jj'j''} \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta[\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \delta[\xi'' - \xi_{\sigma'' j''}(t)] \\
&\quad \times \Theta(1 - \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{jj'} - \delta_{\sigma\sigma''}\delta_{jj''} - \delta_{\sigma'\sigma''}\delta_{j'j''}) \\
&\quad \vdots \\
F_{\sigma\sigma'\sigma''\dots\sigma^{s-1}}(\xi, \xi', \xi'', \dots, \xi^{s-1}, t) \\
&= \sum_{jj'j''\dots j^{s-1}} \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta[\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \delta[\xi'' - \xi_{\sigma'' j''}(t)] \dots \delta[\xi^{s-1} - \xi_{\sigma^{s-1} j^{s-1}}(t)] \\
&\quad \times \Theta \left[ 1 - \sum_{a=0}^{s-2} \sum_{b=a+1}^{s-1} \delta_{\sigma^a \sigma^b} \delta_{j^a j^b} \right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

em que

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Num plasma, além de depender da posição e *momentum* das partículas, o estado microscópico é determinado também pelos campos elétrico e magnético autoconsistentes,  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$ , que são a resultante dos campos produzidos por todas as partículas do plasma mais a contribuição de campos externos, se existentes. Então se  $\vec{r}_{\sigma i}(t)$  e  $\vec{p}_{\sigma i}(t)$  são a posição e *momentum* de uma partícula, a equação dinâmica para a partícula é definida pela força de Lorentz e os campos são governados pelas equações de Maxwell, de modo que

$$\frac{d\vec{r}_{\sigma i}}{dt} = \frac{\vec{p}_{\sigma i}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \quad , \quad \frac{d\vec{p}_{\sigma i}}{dt} = q_\sigma \left[ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}_{\sigma i}, t) + \frac{\vec{p}_{\sigma i}}{m_\sigma \gamma_\sigma c} \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}_{\sigma i}, t) \right] \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\mathcal{B}} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}^m + \vec{j}_0) \\
\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} &= 0 \\
\nabla \times \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{B}} \\
\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= 4\pi(\rho^m + \rho_0)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

em que definimos as densidades de carga e de corrente microscópicas

$$\begin{aligned}
\rho^m(\vec{r}, t) &= \sum_{\sigma} \sum_{1 \leq i \leq N_{\sigma}} q_{\sigma} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\sigma i}(t)] = \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int F_{\sigma}(\xi, t) d\vec{p} \\
\vec{j}^m(\vec{r}, t) &= \sum_{\sigma} \sum_{1 \leq i \leq N_{\sigma}} q_{\sigma} \frac{\vec{p}_{\sigma i}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma}} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\sigma i}(t)] = \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \frac{\vec{p}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma}} F_{\sigma}(\xi, t) d\vec{p}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Os termos  $\vec{j}_0$  e  $\rho_0$  são as densidades de corrente e de carga associadas a fontes externas e

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}^m(\vec{r}, t) + \vec{E}_0(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{B}^m(\vec{r}, t) + \vec{B}_0(\vec{r}, t) \tag{3.6}$$

O índice  $m$  indica que estamos tomando os valores precisos dos campos microscópicos na posição e instante  $(\vec{r}, t)$ , e não seus valores médios. O índice 0 indica os campos externos.

De acordo com sua definição,  $F_{\sigma}(\xi, t)$  satisfaz a equação de continuidade no espaço de fase

$$\frac{dF_{\sigma}}{dt} = \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} F_{\sigma} + q_{\sigma} \left[ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}_{\sigma i}, t) + \frac{\vec{p}_{\sigma i}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma} c} \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}_{\sigma i}, t) \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} F_{\sigma} = 0 \tag{3.7}$$

conhecida como *equação de Klimontovich*. As equações (3.4), (3.5) e (3.7) formam um conjunto fechado que é suficiente para uma completa descrição microscópica do plasma e de suas propriedades dinâmicas, pois uma solução para elas é equivalente à solução de todas equações de movimento de todas as partículas. No entanto, uma descrição tão detalhada, além de ser complicada, não é necessária se estivermos interessados em propriedades macroscópicas do plasma. Neste sentido, podemos obter uma descrição apropriada fazendo uma abordagem estatística.

## 3.2 Funções de distribuição e de correlação

A essência de uma abordagem estatística para sistemas de muitas partículas está no fato de considerarmos um *ensemble* [19, 37] de subsistemas idênticos compostos pelas partículas do sistema, ao invés de determinarmos a posição e *momentum* de todas as partículas num determinado instante de acordo com seus valores iniciais. Os subsistemas diferem entre si pelo estado em que se encontram, e cada estado é representado por um ponto num espaço de fase de dimensão  $6N$ . Cada ponto neste espaço representa um estado

possível para o *ensemble* num determinado instante, definido como *ponto representativo*. A função de distribuição de Liouville  $D_N(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_{N_\sigma}} \dots)_{\sigma=\alpha, \beta, \gamma, \dots}$  é uma função das posições e *momenta* de todas as partículas do plasma e representa uma densidade de probabilidade, em que  $N = \sum_{\sigma} N_{\sigma}$  é o número total de partículas no plasma. Para partículas de mesmo tipo,  $D_N$  é simétrica em relação à permutação de pontos no espaço de fase. O significado físico de  $D_N$  está no fato de que a quantidade

$$D_N(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_{N_\sigma}} \dots; t)_{\sigma=\alpha, \beta, \gamma, \dots} \prod_{\sigma} d\xi_{\sigma_1} \dots d\xi_{\sigma_{N_\sigma}}$$

representa a probabilidade de no instante  $t$  as coordenadas e *momenta*  $\xi_{\sigma_1}, \xi_{\sigma_2}, \dots, \xi_{\sigma_{N_\sigma}}$  estarem nos respectivos intervalos  $d\xi_{\sigma_1}, d\xi_{\sigma_2}, \dots, d\xi_{\sigma_{N_\sigma}}$ . O significado de probabilidade contido em  $D_N$  indica que ela pode ser normalizada de modo que

$$\int D_N(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_{N_\sigma}} \dots; t)_{\sigma=\alpha, \beta, \gamma, \dots} \prod_{\sigma} d\xi_{\sigma_1} \dots d\xi_{\sigma_{N_\sigma}} = 1 \quad (3.8)$$

Além disso ela satisfaz a condição de continuidade no espaço de fase

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \{D_N, H\} = 0 \quad (3.9)$$

conhecida como *equação de Liouville*, em que  $\{, \}$  é o operador de Poisson e  $H$  a função Hamiltoniana do sistema.

A equação de Liouville descreve a evolução temporal de  $D_N$ , o que nos permite conhecer  $D_N$  num instante  $t$ , dadas as suas condições iniciais. Segue de (3.9) que

$$D_N(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_{N_\sigma}} \dots; t)_{\sigma=\alpha, \beta, \gamma, \dots} = D_N(\xi_{\sigma_1}(0), \dots, \xi_{\sigma_{N_\sigma}}(0) \dots; 0)_{\sigma=\alpha, \beta, \gamma, \dots}$$

A quantidade de informação contida em  $D_N$  é grande o suficiente para que seja inviável fazer um cálculo direto ou mesmo uma estimativa de seu valor, pois  $D_N$  é uma função das coordenadas de um grande número de partículas. No entanto, podemos obter representações reduzidas de  $D_N$  e também médias de quantidades microscópicas do plasma através dela.

Seja  $G(\xi, \xi', \dots, t)$  uma quantidade microscópica definida em pontos  $\xi, \xi', \dots$ . A dependência temporal de  $G$  se dá através das coordenadas e *momenta* das partículas, de modo que podemos definir a média de  $G$  na forma [25]

$$\begin{aligned} & \langle G(N_{\alpha}, N_{\beta}, \dots, N_{\gamma}, \dots; t) \rangle \\ & \doteq \int G(N_{\alpha}, N_{\beta}, \dots, N_{\gamma}, \dots; t) D_N(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_{N_\sigma}} \dots; t)_{\sigma=\alpha, \beta, \gamma, \dots} \prod_{\sigma} d\xi_{\sigma_1} \dots d\xi_{\sigma_{N_\sigma}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Fazendo a média de  $F_\alpha$  de acordo com (3.10) obtemos<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
\langle F_\alpha(\xi, t) \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq N_\alpha} \int D_N \delta(\xi - \xi_{\alpha i}) \prod_{\sigma} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_\sigma} \\
&= N_\alpha \int D_N \delta(\xi - \xi_{\alpha 1}) d\xi_{\alpha 1} d\xi_{\alpha 2} \dots d\xi_{\alpha N_\alpha} \prod_{\sigma \neq \alpha} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_\sigma} \\
&= f_\alpha(\xi, t)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde

$$f_\alpha(\xi_{\alpha 1}, t) = N_\alpha \int D_N d\xi_{\alpha 2} \dots d\xi_{\alpha N_\alpha} \prod_{\sigma \neq \alpha} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_\sigma} \tag{3.12}$$

é definida como a função de distribuição de uma partícula, que é a descrição mais reduzida possível que podemos obter de  $D_N$ . De acordo com (3.8),  $f_\alpha$  está normalizada de modo que [2, 37]

$$\int f_\alpha(\xi_{\alpha 1}, t) d\xi_{\alpha 1} = N_\alpha$$

Por outro lado, a probabilidade de encontrar, por exemplo, um elétron na posição  $\vec{r}$  é modificada pela presença de outro elétron, ou um íon, na posição  $\vec{r}'$ . No entanto, a influência que uma partícula exerce sobre outra, ou a interação entre elas, não está contida em  $f_\alpha$ , mas na distribuição para duas partículas. Em analogia com a média (3.11) e considerando a segunda das equações (3.2), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle F_{\alpha\beta}(\xi, \xi', t) \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq N_\alpha} \sum_{1 \leq j \leq N_\beta - \delta_{\alpha\beta}} \Theta(1 - \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}) \int D_N \delta(\xi - \xi_{\alpha i}) \delta(\xi' - \xi_{\beta j}) \prod_{\sigma} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_\sigma} \\
&= N_\alpha (N_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \int D_N \delta(\xi - \xi_{\alpha 1}) \delta(\xi' - \xi_{\beta[1+\delta_{\alpha\beta}]}) \\
&\quad \times d\xi_{\alpha 1} \dots d\xi_{\alpha N_\alpha} d\xi'_{\beta[1+\delta_{\alpha\beta}]} \dots d\xi'_{\beta N_\beta} \prod_{\sigma \neq \alpha, \beta} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_\sigma} \\
&= N_\alpha (N_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \int D_N d\xi_{\alpha 2} \dots d\xi_{\alpha N_\alpha} d\xi'_{\beta[2+\delta_{\alpha\beta}]} \dots d\xi'_{\beta N_\beta} \prod_{\sigma \neq \alpha, \beta} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_\sigma} \\
&= f_{\alpha\beta}(\xi, \xi', t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

em que

$$f_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha 1}, \xi'_{\beta[1+\delta_{\alpha\beta}]}, t) = N_\alpha (N_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \int D_N d\xi_{\alpha 2} \dots d\xi_{\alpha N_\alpha} d\xi'_{\beta[2+\delta_{\alpha\beta}]} \dots d\xi'_{\beta N_\beta} \prod_{\sigma \neq \alpha, \beta} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_\sigma}$$

é a distribuição de duas partículas, sendo mais detalhada e menos reduzida do que  $f_\alpha$  e

<sup>1</sup>Aqui, apesar de fazermos o mesmo procedimento para calcular a média, utilizamos uma normalização diferente da referência [25].

tem normalização

$$\int f_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha 1}, \xi'_{\beta[1+\delta_{\alpha\beta}]}, t) d\xi_{\alpha 1} d\xi'_{\beta[1+\delta_{\alpha\beta}]} = N_{\alpha}(N_{\beta} - \delta_{\alpha\beta})$$

As interações entre três ou mais partículas estão contidas em distribuições menos reduzidas, que seguem na sequência

$$\begin{aligned} & f_{\alpha\beta\gamma}(\xi_{\alpha 1}, \xi'_{\beta[1+\delta_{\alpha\beta}]}, \xi''_{\gamma[1+\delta_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}]}, t) \\ &= N_{\alpha}(N_{\beta} - \delta_{\alpha\beta})(N_{\gamma} - \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\beta\gamma}) \\ &\times \int D_N d\xi_{\alpha 2} \dots d\xi_{\alpha N_{\alpha}} d\xi'_{\beta[2+\delta_{\alpha\beta}]} \dots d\xi'_{\beta N_{\beta}} d\xi''_{\gamma[2+\delta_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}]} \dots d\xi''_{\gamma N_{\gamma}} \prod_{\sigma \neq \alpha, \beta, \gamma} d\xi_{\sigma 1} \dots d\xi_{\sigma N_{\sigma}} \\ &\vdots \\ & f_{\sigma\sigma'\sigma'' \dots \sigma^{s-1}}(\xi_{\sigma 1}, \xi'_{\sigma'[1+\delta_{\sigma\sigma'}]}, \xi''_{\sigma''[1+\delta_{\sigma\sigma'}+\delta_{\sigma\sigma''}+\delta_{\sigma'\sigma''}]}, \dots, \xi_{\sigma^{s-1}[1+\sum_{a=0}^{s-2} \sum_{b=a+1}^{s-1} \delta_{\sigma^a\sigma^b}]}, t) \\ &= N_{\sigma}(N_{\sigma'} - \delta_{\sigma\sigma'})(N_{\sigma''} - \delta_{\sigma\sigma'} - \delta_{\sigma\sigma''} - \delta_{\sigma'\sigma''}) \dots (N_{\sigma^s} - \sum_{a=0}^{s-2} \sum_{b=a+1}^{s-1} \delta_{\sigma^a\sigma^b}) \\ &\times \int D_N d\xi_{\sigma 2} \dots d\xi_{\sigma N_{\sigma}} d\xi'_{\beta[2+\delta_{\sigma\sigma'}]} \dots d\xi'_{\sigma' N_{\sigma'}} d\xi''_{\sigma''[2+\delta_{\sigma\sigma'}+\delta_{\sigma\sigma''}+\delta_{\sigma'\sigma''}]} \dots d\xi''_{\sigma'' N_{\sigma''}} \\ &\times d\xi_{\sigma^{s-1}[2+\sum_{a=0}^{s-2} \sum_{b=a+1}^{s-1} \delta_{\sigma^a\sigma^b}]} \dots d\xi_{\sigma^{s-1} N_{\sigma^{s-1}}} \prod_{\lambda \neq \sigma\sigma'\sigma'' \dots \sigma^s} d\xi_{\lambda 1} \dots d\xi_{\lambda N_{\lambda}} \end{aligned}$$

com normalização

$$\begin{aligned} & \int f_{\sigma\sigma'\sigma'' \dots \sigma^{s-1}} d\xi_{\sigma 1} d\xi'_{\sigma'[1+\delta_{\sigma\sigma'}]} d\xi''_{\sigma''[1+\delta_{\sigma\sigma'}+\delta_{\sigma\sigma''}+\delta_{\sigma'\sigma''}]} \dots d\xi_{\sigma^{s-1}[1+\sum_{a=0}^{s-2} \sum_{b=a+1}^{s-1} \delta_{\sigma^a\sigma^b}]} \\ &= N_{\sigma}(N_{\sigma'} - \delta_{\sigma\sigma'})(N_{\sigma''} - \delta_{\sigma\sigma'} - \delta_{\sigma\sigma''} - \delta_{\sigma'\sigma''}) \dots (N_{\sigma^{(s)}} - \sum_{a=0}^{s-2} \sum_{b=a+1}^{s-1} \delta_{\sigma^a\sigma^b}) \end{aligned}$$

O produto da densidade (3.1) na forma  $F_{\sigma}(\xi, t)F_{\sigma'}(\xi', t)$ , associado a dois pontos distintos, é dado explicitamente por [37]

$$\begin{aligned} F_{\sigma}F_{\sigma'} &= \sum_{jj'} \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta[\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \\ &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\xi - \xi') \sum_j \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] + \sum_{jj'} \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta[\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \Theta(1 - \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{jj'}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Os valores médios do primeiro e do segundo termo à direita da equação são respectivamente a distribuição de uma partícula e a distribuição de duas partículas de acordo com (3.11) e (3.13), de modo que

$$\langle F_{\sigma}F_{\sigma'} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\xi - \xi') f_{\sigma}(\xi, t) + f_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \quad (3.15)$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
& F_{\sigma} F_{\sigma'} F_{\sigma''} \\
&= \sum_{j''} \delta [\xi'' - \xi_{\sigma'' j''}(t)] \left[ \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\xi - \xi') \sum_j \delta [\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{jj'} \delta [\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta [\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \Theta (1 - \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{jj'}) \right] \\
&= \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\xi - \xi') \delta_{\sigma\sigma''} \delta(\xi - \xi'') \sum_j \delta [\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \\
&\quad + \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\xi - \xi') \sum_{jj''} \delta [\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta [\xi'' - \xi_{\sigma'' j''}(t)] \Theta (1 - \delta_{\sigma\sigma''} \delta_{jj''}) \\
&\quad + [\delta_{\sigma\sigma''} \delta(\xi - \xi'') + \delta_{\sigma'\sigma''} \delta(\xi' - \xi'')] \sum_{jj'} \delta [\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta [\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \Theta (1 - \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{jj'}) \\
&\quad + \sum_{jj'j''} \delta [\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta [\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \delta [\xi'' - \xi_{\sigma'' j''}(t)] \Theta (1 - \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{jj'} - \delta_{\sigma\sigma''} \delta_{jj''} - \delta_{\sigma'\sigma''} \delta_{j'j''})
\end{aligned}$$

cujo valor médio é

$$\begin{aligned}
\langle F_{\sigma} F_{\sigma'} F_{\sigma''} \rangle &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\sigma\sigma''} \delta(\xi - \xi') \delta(\xi - \xi'') f_{\sigma}(\xi, t) \\
&\quad + [\delta_{\sigma\sigma''} \delta(\xi - \xi'') + \delta_{\sigma'\sigma''} \delta(\xi' - \xi'')] f_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \\
&\quad + \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\xi - \xi') f_{\sigma\sigma''}(\xi, \xi'', t) + f_{\sigma\sigma'\sigma''}(\xi, \xi', \xi'', t)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Em analogia com (3.11), (3.15) e (3.16) concluímos que a média do produto das densidades microscópicas em  $s$  pontos de fase distintos pode ser expressa em termos de uma seqüência de distribuições  $f_{\sigma}, f_{\sigma\sigma'}, \dots, f_{\sigma\sigma'\dots\sigma^{s-1}}$ .

No limite em que as interações individuais podem ser desprezadas, as partículas se tornam estatisticamente independentes, conduzindo o limite das médias dos produtos das distribuições à forma

$$\langle F_{\sigma\sigma'\sigma''\dots\sigma^{s-1},s} \rangle \rightarrow \langle F_{\sigma} \rangle \langle F_{\sigma'} \rangle \langle F_{\sigma''} \rangle, \dots, \langle F_{\sigma^{s-1}} \rangle$$

o que implica que as distribuições de ordem  $s$  se tornam um produto de  $s$  funções de ordem 1

$$f_{\sigma\sigma'\sigma''\dots\sigma^{s-1}} \rightarrow f_{\sigma} f_{\sigma'} f_{\sigma''} \dots f_{\sigma^{s-1}}$$

Desta forma, a função de distribuição para mais de uma partícula pode ser considerada como a soma de um termo não interagente mais outros interagentes, que são escritos em termos de uma seqüência de funções definidas como funções de correlação. Isto define

uma série conhecida como expansão de Mayer [25]

$$\begin{aligned}
f_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) &= f_{\sigma}(\xi, t)f_{\sigma'}(\xi', t) + g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \\
f_{\sigma\sigma'\sigma''}(\xi, \xi', \xi'', t) &= f_{\sigma}(\xi, t)f_{\sigma'}(\xi', t)f_{\sigma''}(\xi'', t) \\
&\quad + f_{\sigma}(\xi, t)g_{\sigma'\sigma''}(\xi', \xi'', t) \\
&\quad + f_{\sigma'}(\xi', t)g_{\sigma\sigma''}(\xi, \xi'', t) \\
&\quad + f_{\sigma''}(\xi'', t)g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \\
&\quad + g_{\sigma\sigma'\sigma''}(\xi, \xi', \xi'', t) \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

As funções  $g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t)$ ,  $g_{\sigma\sigma'\sigma''}(\xi, \xi', \xi'', t)$  levam em conta colisões binárias e ternárias no sistema, e se anulam quando não há interdependência no movimento das partículas, levando ao limite descrito acima.

### 3.3 Hierarquia BBGKY

A sucessão de funções  $f_{\sigma}$ ,  $f_{\sigma\sigma'}$ ,  $\dots$ ,  $f_{\sigma, \dots, \sigma(s-1)}$  satisfaz um conjunto de equações estatísticas acopladas conhecido como *hierarquia BBGKY* [37], por terem sido derivadas, independentemente, por Bogolyubov, Born e Green, Kirkwood, e Yvon. Uma das formas de obtê-la é fazendo médias envolvendo o conjunto de equações para as densidades e campos microscópicos, equações (3.4) e (3.7), como mostraremos a seguir.

Antes de prosseguirmos, é conveniente que façamos algumas simplificações. Consideramos que não há campos externos, ou seja,  $\vec{E}_0 = 0$  e  $\vec{B}_0 = 0$ . Consideramos também que as velocidades envolvidas são não relativísticas ou fracamente relativísticas, de modo que podemos desprezar efeitos de retardo. Podemos então utilizar o *gauge* de Coulomb, em que o estado do sistema é determinado num instante  $t$  pelas coordenadas e momenta das partículas, todas no mesmo instante  $t$  [25]. Vamos também simplificar a abordagem inicial desprezando efeitos magnéticos, ou seja, fazendo  $\vec{B}^m = 0$ . Isto não altera o resultado que será obtido a menos de um termo adicional devido ao campo magnético, que pode ser introduzido posteriormente. Teremos então

$$\nabla \times \vec{E}^m = 0 \quad , \quad \vec{E}^m = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi^m$$

Considerando a equação para a densidade de carga microscópica (3.5) podemos obter o potencial  $\phi^m(\vec{r}, t)$  da lei de Gauss nas equações (3.4)

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{E}^m(\vec{r}, t) = -\nabla^2\phi^m(\vec{r}, t) = 4\pi \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int F_{\sigma}(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}$$

$$= 4\pi \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int F_{\sigma}(\vec{r}', \vec{p}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' d\vec{p} = -\nabla^2 \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \frac{F_{\sigma}(\vec{r}', \vec{p}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' d\vec{p}'$$

de modo que

$$\phi^m = \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \frac{F_{\sigma}(\vec{r}', \vec{p}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' d\vec{p}'$$

e

$$\vec{E}^m(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \sum_{\sigma'} q_{\sigma'} \int \frac{F_{\sigma'}(\vec{r}', \vec{p}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' d\vec{p}' \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.7)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) F_{\sigma}(\xi, t) = \sum_{\sigma'} \int d\xi' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_{\sigma} q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} F_{\sigma}(\xi, t) F_{\sigma'}(\xi', t) \quad (3.19)$$

A primeira equação da hierarquia pode ser obtida multiplicando (3.19) pela distribuição de Liouville em ambos os lados e integrando sobre todo o espaço de fase. Escrevendo  $F_{\sigma}$  e seu produto na forma das equações (3.1) e (3.14)

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) \sum_j \int D_N \delta(\xi - \xi_{\sigma j}) \prod_{\lambda} d\xi_{\lambda 1} \dots d\xi_{\lambda N_{\lambda}} \\ &= \sum_{\sigma'} \int d\xi' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_{\sigma} q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \\ & \quad \times \int D_N \prod_{\lambda} d\xi_{\lambda 1} \dots d\xi_{\lambda N_{\lambda}} \\ & \quad \times \left[ \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\xi - \xi') \sum_j \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] + \sum_{jj'} \delta[\xi - \xi_{\sigma j}(t)] \delta[\xi' - \xi_{\sigma' j'}(t)] \Theta(1 - \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{jj'}) \right] \end{aligned}$$

Considerando (3.11) e (3.15) obtemos

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) \langle F_{\sigma}(\xi, t) \rangle = \sum_{\sigma'} \int d\xi' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_{\sigma} q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \langle F_{\sigma}(\xi, t) F_{\sigma'}(\xi, \xi', t) \rangle \quad (3.20)$$

No cálculo do campo (3.18) foi omitido o campo da  $j$ -ésima partícula, pois a força na partícula  $j$  é devida aos campos produzidos pelas outras. Desta forma, dada uma partícula na posição  $\vec{r}$ , a função delta de Dirac no primeiro termo de (3.15) nunca será satisfeita, de modo que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\sigma} \gamma_{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) f_{\sigma}(\xi, t) = \sum_{\sigma'} \int d\xi' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_{\sigma} q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \quad (3.21)$$

Esta é a primeira equação da hierarquia BBGKY.

A equação para  $f_{\sigma}(\xi, t)$  não é uma equação fechada, por conta da dependência com  $f_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t)$  no lado direito. Precisamos encontrar uma equação para  $f_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t)$  a fim

de solucionar (3.21). Para determiná-la, multiplicamos a equação (3.19) para  $F(\xi, t)$  por  $F(\xi', t)$ , a equação para  $F(\xi', t)$  por  $F(\xi, t)$ , e adicionamos uma à outra. Obtemos [37]

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \right) F_\sigma(\xi, t) F_{\sigma'}(\xi', t) \\ &= \sum_{\sigma''} \int d\xi'' \left[ \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma''}}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} + \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_{\sigma''}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right] F_\sigma(\xi, t) F_{\sigma'}(\xi', t) F_{\sigma''}(\xi'', t) \end{aligned}$$

Fazendo a média com os mesmos argumentos que utilizamos em (3.19) para obter (3.21) e considerando (3.16)

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_\sigma}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right] f_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \\ &= \sum_{\sigma''} \int d\xi'' \left[ \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma''}}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} + \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_{\sigma''}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right] f_{\sigma\sigma'\sigma''}(\xi, \xi', \xi'', t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vemos que a equação para  $f_{\sigma\sigma'}$  depende de  $f_{\sigma\sigma'\sigma''}$  e também não é fechada. Repetindo o processo obtemos todas equações da hierarquia, que no caso geral relacionam a função de distribuição  $f_{\sigma\sigma', \dots, \sigma^{s-1}}$  de ordem  $s$  com a distribuição de ordem  $s + 1$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{a,b=0}^{s-1} \left[ \frac{\vec{p}^a}{m_{\sigma^a} \gamma_{\sigma^a}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}^a} - (1 - \delta_{ab}) \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}^a} \frac{q_{\sigma^a} q_{\sigma^b}}{|\vec{r}^a - \vec{r}^b|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}^a} \right] \right\} f_{\sigma\sigma', \dots, \sigma^{s-1}}(\xi, \xi', \dots, \xi^{s-1}, t) \\ &= \sum_{a=0}^{s-1} \sum_{\sigma^s} \int d\xi'' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}^a} \frac{q_{\sigma^a} q_{\sigma^s}}{|\vec{r}^a - \vec{r}^s|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}^a} f_{\sigma\sigma', \dots, \sigma^s}(\xi, \xi', \dots, \xi^s, t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.4 Equação de Vlasov

Encontrar uma solução para o conjunto de equações (3.23), uma vez que uma solução para a equação de ordem  $s$  requer uma solução para a equação de ordem  $s + 1$ , é tão complicado quanto resolver as equações microscópicas iniciais (3.1), (3.3), (3.4) e (3.5). Entretanto, assim como na teoria cinética dos gases, há uma vantagem na descrição estatística pela possibilidade de se fazer um corte na cadeia e obter um conjunto de equações fechado para as distribuições de ordem mais baixa. No caso de gases *neutros* fracamente densos, o corte da cadeia toma como parâmetro a distância máxima de interação entre átomos  $r_0$ , que é um parâmetro característico do sistema. Se  $r_{av} = n^{-\frac{1}{3}}$  é a distância interatômica média, podemos dizer que, se  $r_0 \ll r_{av}$ , as colisões binárias são difíceis de ocorrer e, mais difíceis ainda, as ternárias. Isto permite tomar a razão  $r_0/r_{av}$  como parâmetro de corte para correlações de ordem superior.

No caso dos plasmas a situação é inversa, porque a interação entre as partículas é de

longo alcance devido a sua natureza coulombiana, e portanto  $r_0$  é da ordem do comprimento de Debye,  $r_0 \approx \lambda_D$ . Assim tomamos o parâmetro

$$g = \frac{r_{av}^3}{\lambda_D^3} \quad (3.24)$$

como parâmetro de corte para plasmas, e atribuímos a ordem de  $g$  à ordem das correlações

$$\begin{aligned} f_\sigma &\approx O(1) \\ g_{\sigma\sigma'} &\approx O(g) \\ g_{\sigma\sigma'\sigma''} &\approx O(g^2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Isto é possível porque a condição  $g \ll 1$  indica que, ao contrário de gases pouco densos, temos um grande número de partículas na esfera de raio  $\lambda_D$ . Então, num volume infinitesimal  $dV$  tal que

$$r_{av}^3 \ll dV \ll \lambda_D^3 \quad (3.25)$$

esperamos que, por exemplo, a correlação  $g_{\sigma\sigma'}$  seja pequena se comparada com  $f_\sigma f_{\sigma'}$ , pois a distribuição  $f_{\sigma\sigma'}$  de duas partículas dentro de  $dV$  é determinada por partículas que estão fora de  $dV$  e não entre elas [25].

A condição  $g \ll 1$  nos permite desprezar todas as correlações de primeira ordem e superiores. Em particular, a equação (3.21) torna-se

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) f_\sigma(\xi, t) = q_\sigma \sum_{\sigma'} q_{\sigma'} \int d\xi' \left( \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}} f_{\sigma'}(\xi', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma(\xi, t) \quad (3.26)$$

A quantidade do lado direito de (3.26) contém a média da equação (3.18)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{E}^m(\vec{r}, t) \rangle = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \sum_{\sigma'} q_{\sigma'} \int \frac{f_{\sigma'}(\vec{r}', \vec{p}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' d\vec{p}' \quad (3.27)$$

de modo que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + q_\sigma \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right) f_\sigma(\xi, t) = 0 \quad (3.28)$$

Esta equação é conhecida como *equação de Vlasov* e governa a distribuição para uma partícula. Uma característica desta aproximação é que o campo elétrico médio  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , calculado autoconsistentemente através das equações de Maxwell, aparece representando a interação entre as partículas.

A equação de Vlasov pode ser generalizada de forma a conter todo o campo eletromagnético. Junto com as equações para os campos autoconsistentes  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , a

média do sistema (3.4), ela forma o sistema de equações Vlasov-Mawell

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + q_\sigma \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right\} f_\sigma(\xi, t) &= 0 \\
\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \left[ \vec{j}(\vec{r}, t) + \vec{j}_0 \right] \\
\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 4\pi \left[ \rho(\vec{r}, t) + \rho_0 \right] \\
\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\
\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{r}, t) &= \sum_\sigma q_\sigma \int f_\sigma(\xi, t) d\vec{p} \\
\vec{j}(\vec{r}, t) &= \sum_\sigma q_\sigma \int \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} f_\sigma(\xi, t) d\vec{p}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

O conjunto (3.29) é formalmente idêntico às equações (3.4) e (3.7). Entretanto, é importante observar que são fisicamente distintos. A equação (3.7) governa a distribuição microscópica, que descreve a natureza aleatória da posição e *momentum* das partículas, e é exata, enquanto que a equação de Vlasov determina a distribuição macroscópica, a média da distribuição microscópica, mas é aproximada, assim como as equações para os campos autoconsistentes.

### 3.5 Correlações binárias

A equação de Vlasov despreza todas as correlações. Se quisermos levar em conta colisões binárias num *ensemble* de partículas, desprezando correlações superiores, devemos manter os termos de ordem 0 e 1 em  $g$  na série de Mayer, o que nos permite obter um conjunto fechado de equações para as distribuições  $f_\sigma, f_{\sigma\sigma'}$ . De modo geral, levando em conta colisões de ordem  $s - 1$  em  $g$ , podemos obter um conjunto fechado de  $s$  equações da hierarquia BBGKY para as distribuições  $f_\sigma, f_{\sigma\sigma'}, \dots, f_{\sigma\sigma' \dots \sigma^{s-1}}$ .

Desta forma, levando em conta a série (3.17) com  $g_{\sigma\sigma'\sigma''} = 0$  e a equação (3.27), segue diretamente de (3.21) e (3.22) que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + q_\sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right] f_\sigma(\xi, t) = \sum_{\sigma'} \int d\xi' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \tag{3.31}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f_\sigma - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma \right] f_{\sigma'}(\xi', t) \\
& + \left[ \frac{\partial f_{\sigma'}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} f_{\sigma'} - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_\sigma}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right] f_\sigma(\xi, t) \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \right. \\
& \quad \left. - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_\sigma}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right] g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \\
& = - \left[ q_\sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma \right] f_{\sigma'}(\xi', t) - \left[ q_{\sigma'} \vec{E}(\vec{r}', t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right] f_\sigma(\xi, t) \\
& + \sum_{\sigma''} \int d\xi'' g_{\sigma'\sigma''}(\xi', \xi'', t) \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma''}}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma \\
& + f_\sigma(\xi, t) \sum_{\sigma''} \int d\xi'' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_{\sigma''}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} g_{\sigma'\sigma''} \\
& + f_{\sigma'}(\xi', t) \sum_{\sigma''} \int d\xi'' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma''}}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} g_{\sigma\sigma''} \\
& + \sum_{\sigma''} \int d\xi'' g_{\sigma\sigma''}(\xi, \xi'', t) \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_{\sigma''}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \\
& - q_\sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) - q_{\sigma'} \vec{E}(\vec{r}', t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t)
\end{aligned}$$

que, utilizando (3.31), se reduz a

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} + q_\sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} + q_{\sigma'} \vec{E}(\vec{r}', t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right. \\
& \quad \left. - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} - \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_\sigma}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right] g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \\
& - \sum_{\sigma''} \int d\xi'' g_{\sigma'\sigma''}(\xi', \xi'', t) \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma''}}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma \\
& - \sum_{\sigma''} \int d\xi'' g_{\sigma\sigma''}(\xi, \xi'', t) \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{q_{\sigma'} q_{\sigma''}}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \\
& = \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \left[ f_{\sigma'}(\xi', t) \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma - f_\sigma(\xi, t) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

O conjunto de equações (3.31) e (3.32) pode ser simplificado no limite de interações fracas, nos permitindo obter a função de correlação para um plasma fora do equilíbrio mas que não está muito distante do equilíbrio, denominado como um *plasma quiescente*. Como antes, consideramos que  $g \ll 1$ , o que corresponde à condição (3.25). Se  $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg r_{av}$ , podemos desprezar o sexto e sétimo termos em (3.32), uma vez que, assumindo  $|g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t)| \ll f_\sigma(\xi, t) f_{\sigma'}(\xi', t)$ , estes termos são pequenos se comparados com o lado direito de (3.32). Se, além disso, a distância entre as partículas é apreciavelmente menor

do que o comprimento de Debye de modo que  $\lambda_D \gg |\vec{r} - \vec{r}'| \gg r_{av}$ , podemos desprezar o oitavo e nono termos, porque a interação entre duas partículas pode ser desprezada se uma delas está próxima de uma terceira. Como o plasma é considerado ligeiramente não-homogêneo, o campo autoconsistente é fraco se comparado com o campo médio de correlação, de modo que também desprezamos o terceiro termo de (3.31) e quarto e quinto de (3.32). Com estas aproximações obtemos um sistema de equações para  $f_\sigma$  e  $g_{\sigma\sigma'}$  na forma

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right] f_\sigma(\xi, t) = \sum_{\sigma'} \int d\xi' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \right] g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) \\ & = \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \left[ f_{\sigma'}(\xi', t) \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma - f_\sigma(\xi, t) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Notamos que a equação (3.34) não possui derivada com relação ao *momentum* das partículas em  $g_{\sigma\sigma'}$ . Isto significa que a aproximação de interação e campo autoconsistente fracos equivale a tomar somente interações de longo alcance, onde a variação dos *momenta* das partículas é desprezível [37].

A fim de encontrar uma equação para  $f_\sigma$ , eliminamos  $g_{\sigma\sigma'}$  de (3.33) utilizando (3.34), que é uma equação não homogênea. Portanto, sua solução geral pode ser escrita como a solução geral da equação homogênea mais outra solução particular da parte não homogênea. Esta última depende da condição de contorno para  $g_{\sigma\sigma'}$ .

Consideremos uma função  $\psi$  na forma homogênea [2]

$$\psi(t', \vec{r}, \vec{r}', g_{\sigma\sigma'}) = 0$$

onde  $t' = t - \tau$ ,  $\tau > 0$ , ou seja,  $\psi$  é uma função de  $g_{\sigma\sigma'}$  num tempo anterior a  $t$ . Tomando sua derivada total em relação a  $t'$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} + \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}'} \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t'} + \frac{\partial \psi}{\partial g_{\sigma\sigma'}} \left( \frac{\partial g_{\sigma\sigma'}}{\partial t'} + \frac{\partial g_{\sigma\sigma'}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} + \frac{\partial g_{\sigma\sigma'}}{\partial \vec{r}'} \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t'} \right) = 0 \quad (3.35)$$

infere-se que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = - \frac{\partial \psi}{\partial g_{\sigma\sigma'}} \frac{\partial g_{\sigma\sigma'}}{\partial t'} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} = - \frac{\partial \psi}{\partial g_{\sigma\sigma'}} \frac{\partial g_{\sigma\sigma'}}{\partial \vec{r}} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}'} = - \frac{\partial \psi}{\partial g_{\sigma\sigma'}} \frac{\partial g_{\sigma\sigma'}}{\partial \vec{r}'} \quad (3.36)$$

Com a condição de contorno

$$\vec{r}(t' = t) = \vec{r} \quad , \quad \vec{r}'(t' = t) = \vec{r}'$$

e utilizando (3.36), podemos obter uma equação a partir (3.34) na forma

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \right] \psi \\ & + \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \left[ f_{\sigma'}(\xi', t') \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma - f_\sigma(\xi, t') \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right] \frac{\partial \psi}{\partial g_{\sigma\sigma'}} = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

de modo que a solução de (3.37) em  $t' = t$  também é uma solução de (3.34). Comparando (3.37) com (3.35) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt'} &= \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \quad , \quad \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} \quad , \\ \frac{dg_{\sigma\sigma'}}{dt'} &= \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \left[ f_{\sigma'}(\xi', t') \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma - f_\sigma(\xi, t') \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Se as equações (3.38) são integradas de  $t_0$  a  $t$  obtemos

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} (t - t_0) \quad , \quad \vec{r}'(t) = \vec{r}'(t_0) + \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} (t - t_0) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) &= g_{\sigma\sigma'}^0 \left( \vec{r} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} (t - t_0), \vec{p}; \vec{r}' - \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}} (t - t_0), \vec{p}'; t_0 \right) \\ &+ \int_{t_0}^t dt' \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{q_\sigma q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}' - (\frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} - \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'} \gamma_{\sigma'}})(t - t')|} \right) \cdot \left[ f_{\sigma'}(\xi', t') \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma - f_\sigma(\xi, t') \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

O primeiro e segundo termos à direita de (3.40) representam, respectivamente, a parte homogênea e não homogênea da solução de (3.34).

Assumindo que o intervalo entre  $t_0$  e  $t$  é muito longo, aplicamos a condição de Bogolyubov de que as correlações são fracas num tempo distante tal que  $t_0 \rightarrow -\infty$ , de modo que [37]

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} g_{\sigma\sigma'}^0 = 0$$

O tempo de correlação  $\tau_g \simeq \lambda_D / v_\sigma$  [22], no qual a mudança de  $g_{\sigma\sigma'}$  é significativa, tem ordem definida pelo comprimento de Debye, sendo  $v_\sigma$  é a velocidade térmica, enquanto que o tempo de relaxação de  $f_\sigma$ ,  $\tau_{f_\sigma} = \ell / v_\sigma$ , tem ordem definida pelo livre caminho médio das partículas,  $\ell$ , que, num estado próximo do equilíbrio, é muito maior que o comprimento de Debye:  $\ell \gg \lambda_D$ . Portanto

$$\tau_g \ll \tau_{f_\sigma} \quad (3.41)$$

O tempo de relaxação é o tempo necessário para que a distribuição de partículas do tipo  $\sigma$  estabeleça o estado de equilíbrio.

Como não há mudança significativa em  $f_\sigma$  durante o tempo de interação  $\tau_g$ , os dois termos entre colchetes da integral (3.40) podem ser considerados constantes. Com estas

considerações a equação (3.40) se reduz a [37]

$$g_{\sigma\sigma'}(\xi, \xi', t) = \left[ f_{\sigma'}(\vec{p}', t) \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\sigma} - f_{\sigma}(\vec{p}, t) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\sigma'} \right] \cdot \int_{-\infty}^0 d\tau \left( \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}}}{|\vec{r} - \vec{r}'| + \left( \frac{\vec{p}}{m_{\sigma}\gamma_{\sigma}} - \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'}\gamma_{\sigma'}} \right) \tau} \right) \quad (3.42)$$

Devido à homogeneidade espacial, a correlação (3.40) depende das coordenadas através da distância relativa entre as partículas.

Substituindo (3.42) em (3.33) obtemos a equação cinética para  $f_{\sigma}$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\sigma}\gamma_{\sigma}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right] f_{\sigma}(\xi, t) = J^C \{ f_{\sigma} \} \quad (3.43)$$

com o termo colisional

$$J^C \{ f_{\sigma} \} \doteq \sum_{\sigma'} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \int d\vec{p}' I_{ij}^{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}') \left[ f_{\sigma'}(\vec{p}', t) \frac{\partial}{\partial p_i} f_{\sigma} - f_{\sigma}(\vec{p}, t) \frac{\partial}{\partial p'_i} f_{\sigma'} \right] \quad (3.44)$$

onde

$$I_{ij}^{\sigma\sigma'}(\vec{p}, \vec{p}') \doteq \int d\vec{r}' \left( \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{q_{\sigma} q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \int_{-\infty}^0 d\tau \left( \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{q_{\sigma} q_{\sigma'}}{|\vec{r} - \vec{r}'| + \left( \frac{\vec{p}}{m_{\sigma}\gamma_{\sigma}} - \frac{\vec{p}'}{m_{\sigma'}\gamma_{\sigma'}} \right) \tau} \right) \quad (3.45)$$

O índice  $C$  foi utilizado para indicar que as colisões são coulombianas.

### 3.5.1 Equação colisional de Landau

Podemos obter uma forma diferente para (3.45) escrevendo-a em termos da transformada de Fourier do potencial de interação

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= (2\pi)^{-3} \int d\vec{k} V(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ V(\vec{k}) &= \int d\vec{r} \phi(\vec{r}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

de modo que

$$\begin{aligned} I_{ij}^{\sigma\sigma'} &= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{r}' \int_0^{\infty} d\tau \int d\vec{k} V(\vec{k}) k_j e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \int d\vec{k}' V(\vec{k}') k'_i e^{i\vec{k}' \cdot [\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}\tau]} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d\tau \int d\vec{k} V(\vec{k}) k_j \int d\vec{k}' V(\vec{k}') k'_i \delta(\vec{k} + \vec{k}') e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{v}\tau} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int d\vec{k} |V(\vec{k})|^2 k_i k_j \delta(\vec{k} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

onde  $\vec{v} = \vec{p}/(m_\sigma\gamma_\sigma) - \vec{p}'/(m_{\sigma'}\gamma_{\sigma'})$  e utilizamos  $V(-\vec{k}) = V(\vec{k})^*$ . A natureza tensorial de  $I_{ij}^{\sigma\sigma'}$  nos permite escrever [37]

$$I_{ij}^{\sigma\sigma'} = \frac{1}{16\pi^2} \left( \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{v^2} \right) \int d\vec{k} |V(\vec{k})|^2 k^2 \delta(\vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (3.47)$$

Por (3.46) segue que  $V(\vec{k}) = 4\pi q_\sigma q_{\sigma'}/k^2$ . Então, integrando (3.47) em coordenadas esféricas, obtemos

$$I_{ij}^{\sigma\sigma'} = 2\pi q_\sigma^2 q_{\sigma'}^2 \frac{v^2 \delta_{ij} - v_i v_j}{v^3} \ln \left( \frac{\lambda_D}{r_{min}} \right) \quad (3.48)$$

onde supusemos que, por conta da divergência da integral nos limites de integração, 0 e  $\infty$ , existem  $k_{min} \sim 1/\lambda_D$  e  $k_{max} \sim 1/r_{min}$ , onde  $r_{min} = q_\sigma q_{\sigma'}/k_B T$  é a distância em que a energia de interação é igual à energia térmica média e

$$\lambda_D = \frac{1}{\sqrt{\sum_\sigma \frac{4\pi n_\sigma q_\sigma^2}{k_B T_\sigma}}}$$

O termo colisional (3.44) junto com (3.48) é conhecido como a integral colisional de Landau,

$$J^C \{f_\sigma\} \doteq 2\pi q_\sigma^2 \ln \left( \frac{\lambda_D}{r_{min}} \right) \sum_{\sigma'} q_{\sigma'}^2 \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \int d\vec{p}' \frac{v^2 \delta_{ij} - v_i v_j}{v^3} \times \left[ f_{\sigma'}(\vec{p}', t) \frac{\partial}{\partial p_i} f_\sigma - f_\sigma(\vec{p}, t) \frac{\partial}{\partial p'_i} f_{\sigma'} \right] \quad (3.49)$$

É interessante notar que se a função de distribuição é maxwelliana

$$f_\sigma(p) = \frac{n_{\sigma 0}}{(2\pi m_\sigma k_B T_\sigma)^{\frac{3}{2}}} \exp \left( -\frac{p^2}{2m_\sigma k_B T_\sigma} \right) \quad (3.50)$$

a integral de colisão (3.49) se anula, satisfazendo o equilíbrio de Vlasov.

### 3.5.2 Equação de Fokker-Planck

No desenvolvimento que levou à integral colisional de Landau (3.49), consideramos que no plasma cada partícula carregada interage simultaneamente com muitas outras, todas dentro da esfera de Debye, mas a maioria das interações binárias é fraca, o que resulta numa difusão de partículas no espaço de *momentum* [4]. Então, a equação de Landau é uma equação do tipo Fokker-Planck.

Isto se evidencia quando podemos naturalmente reescrever (3.49) na forma

$$J^C \{f_\sigma\} \doteq \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \left[ D_{ij}^\sigma \frac{\partial}{\partial p_i} f_\sigma - A_i^\sigma f_\sigma(\vec{p}, t) \right] \quad (3.51)$$

onde

$$D_{ij}^\sigma \doteq \sum_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial p_j} \int d\vec{p}' I_{ij}^{\sigma\sigma'} f_{\sigma'} \quad (3.52)$$

e

$$A_i^\sigma \doteq \sum_{\sigma'} \int d\vec{p}' I_{ij}^{\sigma\sigma'} \frac{\partial}{\partial p'_i} f_{\sigma'} \quad (3.53)$$

onde (3.52) e (3.53) são respectivamente os coeficientes de difusão e de fricção.

## 3.6 Equações Cinéticas de um Plasma Empoeirado

A principal característica na formulação da teoria cinética de plasmas empoeirados é considerar a carga elétrica das partículas de poeira como uma nova variável independente, em mesmo nível hierárquico com a posição e *momentum* das mesmas. Esta nova propriedade foi originalmente proposta por Tsytovich e Havnes [44].

Em geral, as equações cinéticas que governam as partículas em um plasma empoeirado envolvem termos de colisões coulombianas, como no caso de um plasma convencional, outros termos relacionados a colisões inelásticas atribuídas ao processo de carregamento da poeira, e também podem conter outros termos devidos a fontes externas ou internas de partículas e/ou radiação.

Com a carga  $q$  considerada como uma nova variável, o *ensemble* de partículas de poeira é descrito por uma função distribuição  $\tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t)$  de estados definidos num espaço de fase de dimensão  $7N_d$ , onde  $N_d$  é o número total de partículas de poeira no plasma e  $\xi_{di}(t) \doteq [\vec{r}_{di}(t), \vec{p}_{di}(t), q_i(t), t]$  o estado que cada uma delas ocupa num determinado instante  $t$ .

A densidade das partículas de poeira

$$\tilde{n}_d(\vec{r}, q, t) = \int d\vec{p}_d \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \quad (3.54)$$

é obtida pela integração da distribuição  $\tilde{f}_d$  obtida da média da distribuição microscópica da poeira, integrada sobre todas as coordenadas e *momenta* de todas as partículas de poeira menos uma.

Duas abordagens são possíveis na dedução das equações cinéticas. A primeira se dá por intuição física e por analogia com plasmas convencionais, como em [20, 43]. A segunda com um certo grau de rigor matemático, constituindo uma generalização do procedimento para plasmas convencionais através da equação de Liouville, incluindo mais uma dimensão

relativa à variável  $q$ . Este procedimento pode ser visto em [46] e, mais rigorosamente, em [33], que obteve a hierarquia BBGKY para plasmas empoeirados levando em conta interações poeira-poeira e poeira-partícula e processo de carregamento por absorção de partículas.

Desprezando os termos de interação poeira-poeira [33], as equações das quatro referências citadas acima são equivalentes. Para cada componente, elas têm a seguinte forma [14, 15]

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f_\sigma + q_\sigma \left[ \vec{E} + \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma c} \times \vec{B} \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_\sigma = J_\sigma^A + J_\sigma^C \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_d}{\partial t} + \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \tilde{f}_d + q \left[ \vec{E} + \frac{\vec{p}}{m_d \gamma_d c} \times \vec{B} \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \tilde{f}_d = J_d^A + J_d^C \quad (3.56)$$

onde os índices  $A$  e  $C$  se referem a colisões inelásticas de absorção de partículas e a colisões elásticas, respectivamente.

Estamos interessados nos termos que participam diretamente no processo de carregamento. Então, vamos desprezar as colisões coulombianas entre as partículas do plasma, íons e elétrons, de modo que  $J_\sigma^C = 0$ . A probabilidade de um elétron ou íon colidir com um grão de poeira é proporcional à carga elétrica do grão e à velocidade relativa. Então, se  $\vec{p}$  é o momento da partícula do tipo  $\sigma$  e  $\vec{p}_d$  o momento de um grão de poeira, podemos expressar a probabilidade de colisão como

$$W_\sigma(q, \vec{p}_d, \vec{p}) \doteq \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \sigma_\sigma \left( q, \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \right)$$

onde  $\sigma_\sigma(q, v)$  é dada por (2.7). Assim, a integral de colisão que descreve a absorção de partículas pela partícula de poeira, e a evolução da componente da poeira, podem ser escritas na forma [20]

$$J_\sigma^A = - \sum_\sigma \int dq \int d\vec{p}_d \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \sigma_\sigma \left( q, \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \right) \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) f_\sigma(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (3.57)$$

$$J_d^A = - \sum_\sigma \int d\vec{p} f_\sigma(\vec{r}, \vec{p}, t) \left[ \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \sigma_\sigma \left( q, \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \right) \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \right. \\ \left. - \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} - \delta \vec{v}_\sigma \right| \right] \quad (3.58)$$

$$\times \sigma_\sigma \left( q - q_\sigma, \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} - \delta \vec{v}_\sigma \right| \right) \tilde{f}_d(\vec{r}, m_d \gamma_d \{ \vec{v}_d - \delta \vec{v}_\sigma \}, q - q_\sigma, t) \quad (3.59)$$

em que  $\delta \vec{v}_\sigma = \frac{\vec{p}}{m_d \gamma_d}$  é a variação da velocidade do grão devido a uma colisão com uma partícula do plasma.

Como  $q_\sigma$  e  $\delta \vec{v}_\sigma$  são pequenos, podemos expandir o lado direito de (3.58) em série de

Taylor em torno desses parâmetros. O segundo termo expandido até primeira ordem resulta em

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \sigma_\sigma \left( q, \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \right) \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \\ - \delta \vec{v}_\sigma \frac{\partial}{\partial \vec{p}_d} & \left[ \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \sigma_\sigma \left( q, \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \right) \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \right] \\ - q_\sigma \frac{\partial}{\partial q} & \left[ \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \sigma_\sigma \left( q, \left| \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} - \frac{\vec{p}}{m_\sigma \gamma_\sigma} \right| \right) \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \right] \end{aligned}$$

Substituindo em (3.58) considerando que  $p/(m_\sigma \gamma_\sigma) \simeq |\vec{p}_d/(m_d \gamma_d) - \vec{p}/(m_\sigma \gamma_\sigma)|$  já que a velocidade dos grãos de poeira é muito menor que a velocidade os íons e elétrons

$$J_d^A = -\frac{\partial}{\partial p_d} (\vec{A}^A \tilde{f}_d) - \frac{\partial}{\partial q} (I_\sigma \tilde{f}_d) \quad (3.60)$$

onde

$$\vec{A}^A = \sum_\sigma \int d\vec{p} f_\sigma(\vec{r}, \vec{p}, t) \vec{p} \frac{p}{m_\sigma} \sigma_\sigma(q, p) \quad (3.61)$$

$$I_\sigma = \sum_\sigma q_\sigma \int d\vec{p} f_\sigma(\vec{r}, \vec{p}, t) \frac{p}{m_\sigma} \sigma_\sigma(q, p) \quad (3.62)$$

são a força de freamento e a corrente sobre a superfície devidas à absorção de partículas. A seção de choque  $\sigma_\sigma$  é dada pela equação (2.8)

### 3.6.1 Integrais de colisão

Para descrever a interação coulombiana da poeira com as partículas do plasma, é conveniente considerar a integral de Landau [15, 20], com a aproximação  $r_{min} \sim a$  na equação (3.48), para o termo colisional  $J_d^C$  na equação cinética para a poeira (3.56). Então, podemos utilizar a forma de Fokker-Plank (3.51), de modo que

$$J_d^C \left\{ \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \right\} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{dj}} \left[ D_{ij}^C \frac{\partial}{\partial p_{di}} \tilde{f}_d - A_i^C \tilde{f}_d \right]$$

Fizemos a hipótese de que as partículas de poeira estão paradas, de modo que o coeficiente de difusão é nulo. Então temos que a distribuição da poeira é independente do *momentum*, de modo que  $\tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \rightarrow f_d(\vec{r}, q, t)$ . Então teremos

$$J_d^C \left\{ \tilde{f}_d(\vec{r}, \vec{p}_d, q, t) \right\} = 0 \quad (3.63)$$

A equação cinética da componente da poeira pode ser escrita como

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} + \frac{\vec{p}_d}{m_d \gamma_d} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f_d = -\frac{\partial}{\partial q}(I_\sigma f_d) \quad (3.64)$$

Como a massa das partículas de poeira é considerada infinita em relação à massa dos íons e elétrons do plasma, esta equação se reduz a

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(I_\sigma f_d) = 0 \quad (3.65)$$

# Capítulo 4

## Tensor dielétrico

Apresentamos neste capítulo a dedução do tensor dielétrico para um plasma empoeirado na presença de um campo magnético externo,  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ , com incidência de radiação anisotrópica, cuja direção de propagação será tomada considerando dois casos limite: perpendicularmente e paralelamente à direção de  $\vec{B}_0$ . No nosso modelo, consideramos que há  $n$  diferentes populações de poeira caracterizadas por um raio  $a_j$  e carga elétrica variável  $q_j$ .

O tensor dielétrico de um plasma empoeirado é de fundamental importância no estudo de propagação de ondas, através de sua relação de dispersão. Uma abordagem cinética é essencial, por exemplo, na análise da propagação de ondas de baixa frequência, como ondas de Alfvén e magnetoacústicas, uma vez que efeitos de amortecimento devido ao carregamento da poeira podem levar a uma modificação do amortecimento de Landau usual, ou ao surgimento de mecanismos de amortecimento adicionais neste regime de frequência [17].

Faremos portanto a dedução do tensor dielétrico no escopo da teoria cinética para plasmas empoeirados. Nossa abordagem será bem próxima daquela utilizada na tese de doutorado de Marcelo Camargo de Juli, defendida no ano 2000 sob orientação da Prof.<sup>a</sup> Ruth de Souza Schneider [16]. As modificações necessárias para incluir os efeitos de fotoionização são introduzidas considerando o termo de fonte como definimos na equação (3.54), generalizado como uma soma sobre as diversas populações de partículas de poeira.

Veremos que a perturbação da função de distribuição de partículas do tipo  $\alpha$  se separa em três termos. Um é devido à perturbação dos campos autoconsistentes. Os dois outros são relacionados à perturbação pela presença da poeira. Mais especificamente, pelas correntes de absorção de partículas carregadas do plasma pela poeira e pela corrente de emissão fotoelétrica. Identificaremos os três termos respectivamente pelos índices:  $C$ ,  $A$  e  $EF$ , que também serão utilizados para indicar os três termos do tensor dielétrico que correspondem aos três processos perturbativos.

## 4.1 Modelo

Seguimos o modelo colisional utilizado por Vladimirov [49] e Marcelo de Juli [15], e as linhas apresentadas no Apêndice A sobre fotoemissão, como um guia para a construção do modelo de emissão fotoelétrica pelas partículas de poeira por incidência de radiação. O termo de fonte está modelado de modo a satisfazer a equação de Vlasov no equilíbrio, e as correntes de emissão incorporadas às correntes de carregamento da poeira.

A equação cinética das partículas de poeira, (3.65), foi adequadamente obtida considerando colisões inelásticas de íons e elétrons com a poeira, ou seja, considerando que as correntes de carregamento eram somente por absorção de partículas, e também desprezando o movimento das partículas de poeira. Agora estamos considerando, também, correntes de emissão de elétrons por fotoionização, de modo que, no lugar da equação (3.65), utilizaremos

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(If_d) = 0 \quad (4.1)$$

onde  $I$  é a corrente total sobre a superfície da poeira, tanto de absorção como de emissão [46]. Se tivéssemos considerado o mecanismo de fotoionização na derivação feita na seção 3.6.1, termos correspondentes a esse mecanismo teriam aparecido naturalmente nas equações 3.64 e 3.65.

### 4.1.1 Fontes de partículas

Os termos colisionais nas equações (3.55) e (3.56) incluem termos relacionados com o carregamento da partículas de poeira por colisão de íons e elétrons do plasma. Termos de fonte de partículas podem ser adicionados apropriadamente do lado direito dessas equações devido a fontes externas ou internas.

Estamos interessados em incluir fontes de partículas, mais especificamente elétrons, emitidos por fotoionização. Seguindo o modelo de absorção de partículas de [49, 14] e de fotoemissão de [40], modelamos o termo devido a fotoionização das partículas de poeira de modo a satisfazer o equilíbrio de Vlasov na forma

$$J_e^{EF} = \beta(\nu)\Lambda(\nu) \int dq \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1,-n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1,-n_z} \right] F(p) \times \sum_j \sigma_{EF}^j(p, q) (f_d^j - f_{d0}^j) \quad (4.2)$$

onde  $\hat{n}_\Lambda$  é um vetor unitário na direção de propagação da radiação,  $\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{x} = n_x$ ,  $\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{z} = n_z$ , e  $\beta(\nu)$ ,  $\Lambda(\nu)$  e  $\sigma_{EF}^j$  são quantidades que foram apresentadas no capítulo anterior. Aqui nós assumimos que os fotoelétrons emitidos obedecem à estatística de Fermi-Dirac através da distribuição

$$F(p) = \frac{2}{h^3} \left[ 1 + \exp \left( \frac{p^2}{2m_e k_B T_d} - \zeta \right) \right]^{-1} \quad (4.3)$$

onde  $\zeta = (k_B T_d)^{-1} (h\nu - \phi)$ . Aqui assumimos que toda a radiação incidente é absorvida, de modo que o coeficiente de absorção pode ser tomado como<sup>1</sup>  $S_a \approx 1$ .

Assumimos neste modelo que a incidência da radiação é unidirecional, de modo que somente um hemisfério do grão é atingido. Analisamos dois casos limite, um em que a direção de propagação da radiação é perpendicular e outro em que a direção é paralela ao campo magnético. O termo  $(p_x/m_e)\Theta(p_x)$  desempenha o papel, na integração em  $d\vec{p}$ , de garantir que os elétrons emitidos tenham uma componente  $p_x > 0$ , considerando incidência perpendicular à direção de  $\vec{B}_0$ . O termo  $(p_z/m_e)\Theta(p_z)$  desempenha o mesmo papel para o caso de incidência paralela.

## 4.2 Linearização do sistema de equações

O sistema de equações Vlasov-Maxwell para um plasma empoeirado com diversas populações de partículas de poeira de raio  $a_j$ , tomando o limite não relativístico  $\gamma_\alpha \rightarrow 1$ , levando em conta emissão de elétrons por fotoionização, é dado por [15, 40]

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_d^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} [I^j f_d^j] = 0 \\
& \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \vec{\nabla} + q_\alpha \left[ \vec{E} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B} \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right\} f_\alpha \\
& = - \int dq \frac{p}{m_\alpha} \sum_j \sigma_\alpha^j(p, q) (f_d^j f_\alpha - f_{d0}^j f_{\alpha 0}) \\
& \quad + \delta_{\alpha e} \beta(\nu) \Lambda(\nu) \int dq \left[ \frac{p_x}{m_\alpha} \Theta(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_\alpha} \Theta(p_z) \delta_{1, -n_z} \right] F(p) \\
& \quad \times \sum_j \sigma_{EF}^j(p, q) (f_d^j - f_{d0}^j) \tag{4.4} \\
& \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d\vec{p} + 4\pi \sum_j \int dq q f_d^j(\vec{r}, q, t) \\
& \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int \vec{p} f_\alpha d\vec{p} \\
& \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\
& \nabla \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned}$$

onde

$$I^j(\vec{r}, q, t) = \sum_\alpha I_\alpha^j(\vec{r}, q, t) - I_{EF}^j(q) \tag{4.5}$$

$$I_{EF}^j(q) = -e\beta(\nu)\Lambda(\nu) \int d\vec{p} \sigma_{EF}^j(p, q) \left[ \frac{p_x}{m_\alpha} \Theta(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_\alpha} \Theta(p_z) \delta_{1, -n_z} \right] F(p) \tag{4.6}$$

---

<sup>1</sup>Ver discussão no Apêndice A.

$$I_\alpha^j(\vec{r}, q, t) = q_\alpha \int d\vec{p} \sigma_\alpha^j(q, p) \frac{p}{m_\alpha} f_\alpha \quad (4.7)$$

A linearização do sistema é realizada expressando os campos médios, as correntes e as distribuições em torno de um valor de equilíbrio na forma

$$\begin{aligned} f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) &= f_{\alpha 0}(\vec{p}) + \varepsilon f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) \\ f_d^j(\vec{r}, \vec{p}, t) &= f_{d0}^j(q) + \varepsilon f_{d1}^j(\vec{r}, \vec{p}, t) \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 + \varepsilon \vec{E}_1(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 + \varepsilon \vec{B}_1(\vec{r}, t) \\ I^j(\vec{r}, q, t) &= I_0^j(q) + \varepsilon I_1^j(\vec{r}, q, t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Substituindo estas quantidades em (4.4) e desprezando os termos não lineares de ordem  $\varepsilon^2$ , obtemos dois sistemas: um de ordem zero

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} [I_0^j f_{d0}^j] &= 0 \\ \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} [\vec{p} \times \vec{B}_0] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha 0} &= 0 \\ \sum_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 0} d\vec{p} + \sum_j \int dq q f_{d0}^j &= 0 \\ \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int \vec{p} f_{\alpha 0} d\vec{p} &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

e outro de primeira ordem em  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{d1}^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} [I_1^j f_{d0}^j + I_0^j f_{d1}^j] &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \vec{\nabla} + q_\alpha \left[ \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right\} f_{\alpha 1} + \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0} f_{\alpha 1} \\ = -q_\alpha \left[ \vec{E}_1 + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}_1 \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha 0} - \sum_j \nu_{\alpha d}^{j1} f_{\alpha 0} + \sum_j \nu_{EF}^{j1} F(p) \\ \nabla \cdot \vec{E}_1 = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 1} d\vec{p} + 4\pi \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} q f_{d1}^j(\vec{r}, q, t) dq \\ \nabla \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_1 + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int \vec{p} f_{\alpha 1} d\vec{p} \\ \nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_1 \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \nu_{EF}^{j1}(\vec{r}, p, t) &\doteq \delta_{\alpha e} \beta \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} dq \sigma_{EF}^j(p, q) \\ &\times \left[ \frac{p_x}{m_\alpha} \Theta(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_\alpha} \Theta(p_z) \delta_{1, -n_z} \right] f_{d1}^j(\vec{r}, q, t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\nu_{\alpha d}^{j1}(\vec{r}, p, t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\alpha^j(p, q) \frac{p}{m_\alpha} f_{d1}^j(\vec{r}, q, t) dq \quad (4.12)$$

$$\nu_{\alpha d}^{j0}(p) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\alpha^j(p, q) \frac{p}{m_\alpha} f_{d0}^j(q) dq \quad (4.13)$$

$$\sigma_{EF}^j(p, q) = \frac{2}{3} \pi a_j^2 \Theta \left[ 1 - \frac{2m_e e q}{a_j p^2} \Theta(q) \right] \quad (4.14)$$

$$\sigma_\alpha^j(p, q) = \pi a_j^2 \left( 1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{a_j p^2} \right) \Theta \left[ 1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{a_j p^2} \right] \quad (4.15)$$

$$I_0^j(q) = -I_{EF}^j + \sum_\alpha q_\alpha \int d\vec{p} \sigma_\alpha^j(q, p) \frac{p}{m_\alpha} f_{\alpha 0} \quad (4.16)$$

$$I_1^j(\vec{r}, q, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int d\vec{p} \sigma_\alpha^j(q, p) \frac{p}{m_\alpha} f_{\alpha 1} \quad (4.17)$$

e supusemos em (4.9) que a carga está uniformemente distribuída de modo que o campo elétrico de equilíbrio  $\vec{E}_0 = 0$ . Também assumimos que a perturbação na corrente é devida à perturbação da corrente de carregamento [46].

Podemos resolver a equação para  $f_{\alpha 1}$  em (4.10) pelo método das características, integrando sobre as órbitas não perturbadas, definindo

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{\vec{p}'}{m_\alpha} \quad , \quad \frac{d\vec{p}'}{dt'} = q_\alpha \left[ \vec{E}_0(\vec{r}', t') + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \vec{B}_0(\vec{r}', t') \right], \quad (4.18)$$

sob condições de contorno

$$\vec{r}'(t' = t) = \vec{r} \quad , \quad \vec{p}'(t' = t) = \vec{p}' \quad (4.19)$$

Primeiro, transformamos  $f_{\alpha 1}$  através do *ansatz* [14]

$$f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) = e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_\alpha^{aux}(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (4.20)$$

de modo que a equação cinética para as partículas  $\alpha$  toma a forma

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \vec{\nabla} + q_\alpha \left[ \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right\} e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_\alpha^{aux} + \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0} e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_\alpha^{aux} \\ &= -q_\alpha \left[ \vec{E}_1 + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}_1 \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha 0} - \sum_j \nu_{\alpha d}^{j1} f_{\alpha 0} + \sum_j \nu_{EF}^{j1} F(p) \end{aligned} \quad (4.21)$$

As operações no primeiro termo do lado esquerdo (4.21) resultam em

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} = - \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p) e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_{\alpha}^{aux} + e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} \frac{\partial f_{\alpha}^{aux}}{\partial t} \quad (4.22)$$

$$\frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha 1} = e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha}^{aux} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha 1} \\ &= q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \left( -e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_{\alpha}^{aux} \vec{\nabla}_{\vec{p}} \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t + e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha}^{aux} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Desenvolvendo o primeiro termo à direita de (4.24)

$$\begin{aligned} & -q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \left( e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_{\alpha}^{aux} \vec{\nabla}_{\vec{p}} \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t \right) \\ &= -q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \left( e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_{\alpha}^{aux} \sum_j \frac{d\nu_{\alpha d}^{j0}(p)}{dp} \left( \frac{\partial p}{\partial p_x} \hat{x} + \frac{\partial p}{\partial p_y} \hat{y} + \frac{\partial p}{\partial p_z} \hat{z} \right) t \right) \\ &= -q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \left( e^{-\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} f_{\alpha}^{aux} \sum_j \frac{d\nu_{\alpha d}^{j0}(p)}{dp} \frac{\vec{p}}{p} t \right) = 0 \end{aligned}$$

já que  $\vec{p} \times \vec{B}_0$  é perpendicular a  $\vec{p}$ . Então obtemos por substituição de (4.22), (4.23) e (4.24) em (4.21)

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} + q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right\} f_{\alpha}^{aux} \\ &= \left\{ -q_{\alpha} \left[ \vec{E}_1 + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_1 \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha 0} - \sum_j \nu_{\alpha d}^{j1} f_{\alpha 0} + \sum_j \nu_{EF}^{j1} F(p) \right\} e^{\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} \end{aligned}$$

Considerando  $f_{\alpha 1}$  como função de  $t'$ ,  $f_{\alpha 1}[\vec{r}'(t'), \vec{p}'(t'), t']$ , e as equações (4.18)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt'} f_{\alpha}^{aux}(\vec{r}', \vec{p}', t') \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{d\vec{r}'}{dt'} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} + \frac{d\vec{p}'}{dt'} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right\} f_{\alpha}^{aux} \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} + q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0(\vec{r}', t') \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} \right\} f_{\alpha}^{aux} \\
&= \left\{ -q_{\alpha} \left[ \vec{E}_1(\vec{r}', t') + \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_1(\vec{r}', t') \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(\vec{p}') \right. \\
&\quad \left. - \sum_j \nu_{\alpha d}^{j1}(\vec{r}', \vec{p}', t') f_{\alpha 0}(p') + \sum_j \nu_{EF}^{j1}(\vec{r}', p', t') F(p) \right\} e^{\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p') t'}
\end{aligned}$$

Integrando esta equação em  $t'$  de  $-\infty$  a  $t$  e utilizando a condição de contorno (4.19)

$$\begin{aligned}
f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) = & -e^{\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p) t} \int_{-\infty}^t dt' e^{\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p') t'} \left\{ q_{\alpha} \left[ \vec{E}_1(\vec{r}', t') + \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_1(\vec{r}', t') \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(\vec{p}') \right. \\
& \left. + \sum_j \nu_{\alpha d}^{j1}(\vec{r}', \vec{p}', t') f_{\alpha 0}(p') - \sum_j \nu_{EF}^{j1}(\vec{r}', p', t') F(p) \right\} \\
& (4.25)
\end{aligned}$$

onde recompomos  $f_{\alpha 1}$  por (4.20) e utilizamos a condição de contorno [25]

$$f_{\alpha 1}[\vec{r}'(-\infty), \vec{p}'(-\infty), -\infty] = 0$$

### 4.3 Relações constitutivas

O sistema de equações (4.4), composto pelas equações de Maxwell e as equações cinéticas dos elétrons e íons e das partículas de poeira, constitui um sistema fechado, em que as densidades de carga e de corrente que aparecem nas equações de Maxwell dependem das distribuições das partículas do plasma.

Em meios materiais, as densidades  $\rho$  e  $\vec{j}$  são funcionais dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . A conexão entre as densidades e os campos que representa a dependência funcional entre eles é conhecida como relação constitutiva.

Num plasma as densidades macroscópicas de carga e de corrente são expressas pelas equações (3.30) e, de acordo com a linearização (4.8), são devidas ao termo perturbativo da distribuição, já que as densidades como momentos do estado de equilíbrio resultam em zero. Portanto, são também funcionais lineares de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , já que uma solução para  $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t)$  através da equação cinética, colisional ou não, depende de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ .

Em geral, a relação constitutiva é dispersiva no tempo, devido à inércia das partículas

que retarda a resposta a variações dos campos com o tempo, e dispersiva no espaço, já que partículas que contribuem para as densidades num ponto  $\vec{r}$  no instante  $t$  retêm alguma memória dos efeitos de campos em outros pontos do espaço. Estas considerações sugerem que a relação linear entre  $\vec{E}$  e  $\vec{j}$  seja da forma [4]

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \tilde{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (4.26)$$

O tensor  $\tilde{\sigma}$  é conhecido como tensor condutividade.

A dispersão espacial e a dispersão temporal se expressam na natureza não local de  $\tilde{\sigma}$ . A restrição  $t' < t$  indica que a corrente no instante  $t$  sofre influência de campos produzidos em instantes anteriores, expressando o princípio de causalidade.

No caso de um plasma espacialmente homogêneo e estacionário,  $\tilde{\sigma}$  depende somente das diferenças  $\vec{r} - \vec{r}'$  e  $t - t'$ , de modo que

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \tilde{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (4.27)$$

Neste caso os campos e correntes podem ser analisados por suas transformadas de Fourier. Segue de (4.27) que

$$\begin{aligned} & \int d\omega \int d\vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{j}(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' \int d\omega' \int d\vec{k}' e^{i[\vec{k}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - \omega'(t - t')]} \tilde{\sigma}(\vec{k}', \omega') \\ & \quad \cdot \int d\omega'' \int d\vec{k}'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r}' - \omega'' t')} \vec{E}(\vec{k}'', \omega'') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \int d\omega' \int d\vec{k}' e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} \tilde{\sigma}(\vec{k}', \omega') \cdot \int d\omega'' \int d\vec{k}'' \delta(\vec{k}'' - \vec{k}') \delta(\omega'' - \omega') \vec{E}(\vec{k}'', \omega'') \\ &= \int d\omega' \int d\vec{k}' e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} \tilde{\sigma}(\vec{k}', \omega') \cdot \vec{E}(\vec{k}', \omega') \end{aligned}$$

de modo que

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) \quad (4.28)$$

---

<sup>2</sup>Geralmente não somente no módulo da distância  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  pois, se o plasma estiver imerso num campo magnético, diferentes direções não são equivalentes, evidenciando a natureza tensorial de  $\tilde{\sigma}$ . A diferença  $t - t'$  indica que a dependência temporal é não instantânea.

## 4.4 Análise de Fourier do sistema Vlasov-Maxwell em primeira ordem

Tomando a transformada de Fourier da equação (4.25)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} f_{\alpha\vec{k}} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4} e^{\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)t} \int_{-\infty}^t dt' e^{\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p')t'} \int d\omega' \int d\vec{k}' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega't')} \\
&\quad \times \left\{ q_\alpha \left[ \bar{E}(\vec{k}', \omega') + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \bar{B}(\vec{k}', \omega') \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(\vec{p}') \right. \\
&\quad \left. + \sum_j \hat{\nu}_{\alpha d}^j(\vec{k}', p', \omega') f_{\alpha 0}(p') - \sum_j \hat{\nu}_{EF}^j(\vec{k}', p', t') F(p') \right\}
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\vec{k}} &= -\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&\quad \times \left\{ q_\alpha \left[ \bar{E}(\vec{k}, \omega) + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \bar{B}(\vec{k}, \omega) \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha 0}(\vec{p}) + \sum_j \hat{\nu}_{\alpha d}^j(\vec{k}, \vec{p}, \omega) f_{\alpha 0}(\vec{p}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_j \hat{\nu}_{EF}^j(\vec{k}, p, \omega) F(p) \right\} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

onde fizemos  $\vec{k}' \rightarrow \vec{k}$ ,  $\omega' \rightarrow \omega$ ,  $\vec{r}' - \vec{r} = \vec{R}$  e  $t' - t = \tau$ .

Observamos que a distribuição (4.29) pode ser separada em três termos diferentes. A forma de (4.29) é uma consequência direta do modelo de carregamento adotado na equação cinética das partículas do tipo  $\alpha$ . O primeiro termo é devido à perturbação dos campos, o segundo e o terceiro são devidos à presença das partículas de poeira. Mais especificamente, o segundo devido à corrente de carregamento de absorção e o terceiro à corrente de carregamento de emissão fotoelétrica.

É conveniente escrever também o sistema de equações linearizado (4.10) em termos de

coordenadas espectrais

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\vec{k}} &= f_{\alpha\vec{k}}^C + f_{\alpha\vec{k}}^A + f_{\alpha\vec{k}}^{EF} \\
-i\omega\hat{f}_d^j(\vec{k}, \omega, q) + \frac{\partial}{\partial q} \left[ \hat{I}^j(\vec{k}, \omega, q)f_{d0}^j + I_0^j\hat{f}_d^j(\vec{k}, \omega, q) \right] &= 0 \\
i\vec{k} \cdot \bar{E}(\vec{k}, \omega) &= 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha\vec{k}} d\vec{p} + 4\pi \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} q\hat{f}_d^j dq \\
i\vec{k} \times \bar{B}(\vec{k}, \omega) &= -i\frac{\omega}{c}\bar{E} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \vec{p}f_{\alpha\vec{k}} d\vec{p} \\
\vec{k} \times \bar{E}(\vec{k}, \omega) &= \frac{\omega}{c}\bar{B}(\vec{k}, \omega) \\
\nabla \cdot \bar{B}_1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\vec{k}}^C &= -q_{\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \left[ \bar{E}(\vec{k}, \omega) + \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha}c} \times \bar{B}(\vec{k}, \omega) \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(\vec{p}) \\
f_{\alpha\vec{k}}^A &= - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \sum_j \hat{\nu}_{\alpha d}^j(\vec{k}, p, \omega) f_{\alpha 0}(p) \\
f_{\alpha\vec{k}}^{EF} &= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \sum_j \hat{\nu}_{EF}^j(\vec{k}, p, \omega) F(p)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

e

$$\bar{j}(\vec{k}, \omega) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \vec{p}f_{\alpha\vec{k}}(\vec{k}, \vec{p}, \omega) d\vec{p} \tag{4.32}$$

$$\hat{\nu}_{EF}^j(\vec{k}, p, \omega) \doteq \delta_{\alpha e} \beta \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} dq \sigma_{EF}^j(p, q) \tag{4.33}$$

$$\times \left[ \frac{p_x}{m_{\alpha}} \Theta(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} \Theta(p_z) \delta_{1, -n_z} \right] \hat{f}_d^j(\vec{k}, q, \omega) \tag{4.34}$$

$$\hat{\nu}_{\alpha d}^j(\vec{k}, p, \omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\alpha}^j(p, q) \frac{p}{m_{\alpha}} \hat{f}_d^j(\vec{k}, q, \omega) dq \tag{4.35}$$

$$\hat{I}^j(\vec{k}, q, \omega) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \sigma_{\alpha}^j(q, p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha\vec{k}} \tag{4.36}$$

As funções (4.31) são as três partes da distribuição  $f_{\alpha\vec{k}}$  como mencionamos. Reescrevemos o produto escalar no integrando de  $f_{\alpha\vec{k}}^C$  na forma

$$\begin{aligned}
\left[ \bar{E}(\vec{k}, \omega) + \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha}c} \times \bar{B}(\vec{k}, \omega) \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} &= \left( \bar{E} + \frac{1}{m_{\alpha}\omega} \left[ (\vec{p}' \cdot \bar{E})\vec{k} - (\vec{p}' \cdot \vec{k})\bar{E} \right] \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} \\
&= \left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_{\alpha}\omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_{\alpha}\omega} \vec{p}' \right] \cdot \bar{E}
\end{aligned}$$

de modo que

$$f_{\alpha\vec{k}}^C = -q_\alpha \vec{A}^\alpha \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) \quad (4.37)$$

em que

$$\vec{A}^\alpha \doteq \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_\alpha \omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_\alpha \omega} \vec{p}' \right] \quad (4.38)$$

Utilizando a expressão (4.28) e a Lei de Ampère expressa em sua transformada de Fourier nas equações (4.30) e a corrente na expressão de (4.32)

$$i\vec{k} \times \vec{B}(\vec{k}, \omega) = -i\frac{\omega}{c} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int \vec{p} f_{\alpha\vec{k}} d\vec{p}$$

$$\vec{k} \times \vec{B}(\vec{k}, \omega) = -\frac{\omega}{c} \left[ \tilde{I} + \frac{4\pi i}{\omega} \tilde{\sigma}(\vec{k}, \omega) \right] \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

A quantidade

$$\tilde{\epsilon}(\vec{k}, \omega) = \tilde{I} + \frac{4\pi i}{\omega} \tilde{\sigma}(\vec{k}, \omega) \quad (4.39)$$

é definida como tensor dielétrico do plasma, onde  $\tilde{I}$  é o tensor identidade.

Em termos de suas componentes, (4.28) e (4.39) são expressos como

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} \quad (4.40)$$

$$\bar{j}_i(\vec{k}, \omega) = \sum_j \sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) \bar{E}_j(\vec{k}, \omega) \quad (4.41)$$

Comparando (4.41) com (4.32) obtemos a igualdade

$$\sum_j \sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) \bar{E}_j(\vec{k}, \omega) = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int d\vec{p} p_i f_{\alpha\vec{k}} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int d\vec{p} p_i (f_{\alpha\vec{k}}^C + f_{\alpha\vec{k}}^A + f_{\alpha\vec{k}}^{EF}) \quad (4.42)$$

Com o uso de (4.37) e (4.38) em (4.42) pode-se mostrar que o termo com  $f_{\alpha\vec{k}}^C$  do lado direito de (4.42) é proporcional à componente  $\bar{E}_j$ . A dependência em  $\bar{E}_j$  dos outros dois termos será investigada oportunamente nas próximas seções.

## 4.5 Componente $\epsilon_{ij}^C$

Na dedução das componentes  $\epsilon_{ij}^C$  do tensor dielétrico de um plasma empoeirado magnetizado, veremos que estas diferem daquelas de um plasma convencional por um termo adicional da frequência de carregamento no denominador do integrando, e mais um novo termo nas componentes  $\epsilon_{iz}^C$  [15].

Do que foi discutido na seção anterior, substituímos (4.37) em (4.42) e podemos iden-

tificar a componente

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^C(\vec{k}, \omega) = & - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int p_i d\vec{p} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_{\alpha} \omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_{\alpha} \omega} \vec{p}' \right]_j \\ & \times \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_{\ell} \nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)]\tau\}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

O campo magnético introduz uma anisotropia no plasma, sendo mais conveniente utilizar coordenadas cilíndricas no espaço de *momentum*. Consideramos então as seguintes relações entre vetores e operadores associados a coordenadas cartesianas e a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\perp} &= \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{e}_{\phi} &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{e}_{\parallel} &= \hat{z} \\ \hat{x} &= \cos \phi \hat{e}_{\perp} - \sin \phi \hat{e}_{\phi} \\ \hat{y} &= \sin \phi \hat{e}_{\perp} + \cos \phi \hat{e}_{\phi} \\ \vec{p} &= p_{\perp} \hat{e}_{\perp} + p_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} \\ &= p_{\perp} \cos \phi \hat{x} + p_{\perp} \sin \phi \hat{y} + p_{\parallel} \hat{z} \\ \vec{\nabla}_{\vec{p}} &= \hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{e}_{\phi} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \\ &= \hat{x} \frac{p_x}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{y} \frac{p_y}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos definir o vetor de onda  $\vec{k}$  no plano coordenado  $xz$  de modo que [25]

$$\vec{k} = k_{\perp} \hat{x} + k_{\parallel} \hat{z}$$

Desenvolvendo a expressão  $[\vec{p} \times \vec{B}_0] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{\alpha 0} = 0$  em (4.9)

$$\begin{aligned} [(p_{\perp} \hat{e}_{\perp} + p_{\parallel} \hat{e}_{\parallel}) \times B_0 \hat{e}_{\parallel}] \cdot \left( \hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{e}_{\phi} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) f_{\alpha 0} &= 0 \\ B_0 p_{\perp} (\hat{e}_{\perp} \times \hat{e}_{\parallel}) \cdot \left( \hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{e}_{\phi} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) f_{\alpha 0} &= 0 \\ -B_0 p_{\perp} \hat{e}_{\phi} \cdot \left( \hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{e}_{\phi} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) f_{\alpha 0} &= 0 \\ -B_0 \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \phi} &= 0 \\ \Rightarrow f_{\alpha 0}(\vec{p}) &= f_{\alpha 0}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \end{aligned}$$

concluimos que a distribuição de equilíbrio  $f_{\alpha 0}$  possui simetria azimutal. Podemos, então,

reescrever o operador  $\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'}$  e o termo  $\vec{p}' \cdot \vec{k}$  presentes no integrando de (4.43) como

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} &= (k_{\perp} \hat{x} + k_{\parallel} \hat{z}) \cdot \left( \hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{e}_{\phi} \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) \\ &= (k_{\perp} \cos \phi \hat{e}_{\perp} - k_{\perp} \sin \phi \hat{e}_{\phi} + k_{\parallel} \hat{e}_{\parallel}) \cdot \left( \hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{e}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) \\ &= p'_x \frac{k_{\perp}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}\end{aligned}$$

$$\vec{p}' \cdot \vec{k} = (p'_x \hat{x} + p'_y \hat{y} + p'_z \hat{z}) \cdot (k_{\perp} \hat{x} + k_{\parallel} \hat{z}) = k_{\perp} p'_x + k_{\parallel} p_{\parallel}$$

de modo que

$$\begin{aligned}&\left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_{\alpha} \omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_{\alpha} \omega} \vec{p}' \\ &= \left( 1 - \frac{k_{\perp} p'_x + k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \left( p'_x \frac{k_{\perp}}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha} \omega}\end{aligned}\quad (4.44)$$

As componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da equação (4.44) são dadas por

$$\begin{aligned}&\left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_{\alpha} \omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_{\alpha} \omega} \vec{p}' \right]_x \\ &= \left( 1 - \frac{k_{\perp} p'_x + k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \right) \frac{p'_x}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \left( p'_x \frac{k_{\perp}}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{p'_x}{m_{\alpha} \omega} \\ &= \frac{p'_x}{p_{\perp}} \left( \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} p_{\perp}}{m_{\alpha} \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \\ &= \cos(\phi - \omega_{\alpha} \tau) \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right]\end{aligned}\quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}&\left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_{\alpha} \omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_{\alpha} \omega} \vec{p}' \right]_y \\ &= \left( 1 - \frac{k_{\perp} p'_x + k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \right) \frac{p'_y}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \left( p'_x \frac{k_{\perp}}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{p'_y}{m_{\alpha} \omega} \\ &= \sin(\phi - \omega_{\alpha} \tau) \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right]\end{aligned}\quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_\alpha \omega} \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_\alpha \omega} \vec{p}' \right]_z \\
&= \left( 1 - \frac{k_\perp p'_x + k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \left( p'_x \frac{k_\perp}{p_\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} + k_\parallel \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} \right) \frac{p'_z}{m_\alpha \omega} \\
&= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} - \frac{k_\perp p'_x}{m_\alpha \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \frac{p_\parallel}{p_\perp} \frac{k_\perp p'_x}{m_\alpha \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} \\
&= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \cos(\phi - \omega_\alpha \tau) \frac{k_\perp}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0})
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde definimos o operador

$$\Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) = p_\parallel \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - p_\perp \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} \tag{4.48}$$

Então de (4.45), (4.46) e (4.47) as componentes (4.43) são

$$\begin{aligned}
\sigma_{ix}^C(\vec{k}, \omega) &= - \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int p_i d\vec{p} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau \cos(\phi - \omega_\alpha \tau) e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
\sigma_{iy}^C(\vec{k}, \omega) &= - \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int p_i d\vec{p} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau \sin(\phi - \omega_\alpha \tau) e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
\sigma_{iz}^C(\vec{k}, \omega) &= - \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int p_i d\vec{p} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \cos(\phi - \omega_\alpha \tau) \frac{k_\perp}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Procedemos agora com o cálculo das integrais em  $\tau$ . Primeiramente obtemos da função geradora de Bessel as relações [25, 4]

$$\begin{aligned}
e^{\pm ix \sin \phi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{\pm in\phi} \\
e^{\pm ix \sin \phi} \cos \phi &= \frac{1}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) e^{\pm in\phi} \\
e^{\pm ix \sin \phi} \sin \phi &= \mp i \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) e^{\pm in\phi}
\end{aligned}$$

Isto implica em

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{(k_{\perp}\hat{x}+k_{\parallel}\hat{z})\cdot(\vec{r}'-\vec{r})-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{k_{\perp}(x'-x)+k_{\parallel}(z'-z)-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\frac{k_{\perp}p_{\perp}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}}[\sin\phi-\sin(\phi-\omega_{\alpha}\tau)]+\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}\tau-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J_l(b_{\alpha}) e^{i\{n\phi-l(\phi-\omega_{\alpha}\tau)+\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}\tau-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J_l(b_{\alpha}) e^{i(n-l)\phi} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}+l\omega_{\alpha}-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\}\tau} \\
&= i \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J_l(b_{\alpha}) \frac{e^{i(n-l)\phi}}{\omega-l\omega_{\alpha}-\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
\\
& \int_{-\infty}^0 d\tau \cos(\phi-\omega_{\alpha}\tau) e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau \cos(\phi-\omega_{\alpha}\tau) e^{i\{\frac{k_{\perp}p_{\perp}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}}[\sin\phi-\sin(\phi-\omega_{\alpha}\tau)]+\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}\tau-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \frac{m_{\alpha}\omega_{\alpha}}{k_{\perp}p_{\perp}} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} l J_n(b_{\alpha}) J_l(b_{\alpha}) e^{i(n-l)\phi} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}+l\omega_{\alpha}-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\}\tau} \\
&= \frac{i}{b_{\alpha}} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} l J_n(b_{\alpha}) J_l(b_{\alpha}) \frac{e^{i(n-l)\phi}}{\omega-l\omega_{\alpha}-\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
\\
& \int_{-\infty}^0 d\tau \sin(\phi-\omega_{\alpha}\tau) e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau \sin(\phi-\omega_{\alpha}\tau) e^{i\{\frac{k_{\perp}p_{\perp}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}}[\sin\phi-\sin(\phi-\omega_{\alpha}\tau)]+\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}\tau-[\omega+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\
&= i \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J'_l(b_{\alpha}) \frac{e^{i(n-l)\phi}}{\omega-l\omega_{\alpha}-\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
&= - \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J'_l(b_{\alpha}) \frac{e^{i(n-l)\phi}}{\omega-l\omega_{\alpha}-\frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}}+i\sum_j\nu_{\alpha d}^{j0}(p)}
\end{aligned}$$

em que  $b_\alpha = \frac{k_\perp p_\perp}{m_\alpha \omega_\alpha}$ . Voltando às equações (4.49) com o resultado das integrais em  $\tau$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ix}^C(\vec{k}, \omega) &= -i \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{l}{b_\alpha} J_n(b_\alpha) J_l(b_\alpha) p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \\
&\quad \times \frac{p_i e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\
\sigma_{iy}^C(\vec{k}, \omega) &= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} J_n(b_\alpha) J'_l(b_\alpha) p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \\
&\quad \times \frac{p_i e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\
\sigma_{iz}^C(\vec{k}, \omega) &= -i \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} J_n(b_\alpha) J_l(b_\alpha) p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \\
&\quad \times \frac{p_i e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \frac{l}{b_\alpha} \frac{k_\perp}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

A integração em  $\phi$  deve envolver os  $p_{i=x,y}$  uma vez que eles possuem dependência em  $\phi$ . As integrais que envolvem a variável  $\phi$  são

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi e^{i(n-l)\phi} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi [e^{i(n-l+1)\phi} + e^{i(n-l-1)\phi}] \\
&= \pi(\delta_{n,l-1} + \delta_{n,l+1}) \\
\int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi e^{i(n-l)\phi} &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} d\phi [e^{i(n-l+1)\phi} - e^{i(n-l-1)\phi}] \\
&= \pi i(\delta_{n,l+1} - \delta_{n,l-1}) \\
\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-l)\phi} &= 2\pi \delta_{n,l}
\end{aligned}$$

Utilizando as relações de recorrência para as funções de Bessel

$$J_{l+1}(x) = \frac{2l}{x} J_l(x) - J_{l-1}(x) \tag{4.51}$$

$$J'_l(x) = \frac{1}{2} [J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x)] \tag{4.52}$$

a somatória em  $l$  e  $n$  resulta nos seguintes termos para as componentes  $\sigma_{ix}^C$ , com  $i = x, y, z$ :

$$\sigma_{xx}^C \Rightarrow \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} l(J_{l-1} + J_{l+1}) J_l = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} l \left( \frac{2l}{b_\alpha} J_l \right) J_l = \frac{2\pi}{b_\alpha} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 J_l^2 = 2\pi b_\alpha \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{xx}^{l\alpha}$$

$$\sigma_{yx}^C \Rightarrow i\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} l(J_{l+1} - J_{l-1}) J_l = i\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} l(-2J'_l) J_l = -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} l J'_l J_l = 2\pi b_\alpha \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{yx}^{l\alpha}$$

$$\sigma_{zx}^C \Rightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_l^2 = 2\pi b_\alpha \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{zx}^{l\alpha}$$

Procedendo da mesma forma para as demais componentes, obtemos o resultado seguinte

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^C &\Rightarrow \frac{2\pi}{b_\alpha} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_l J_l' = -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{xy}^{l\alpha} & \sigma_{xz}^C &\Rightarrow \frac{2\pi}{b_\alpha} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 J_l^2 = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{xz}^{l\alpha} \\ \sigma_{yy}^C &\Rightarrow -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l'^2 = -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{yy}^{l\alpha} & \sigma_{yz}^C &\Rightarrow -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_l' J_l = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{yz}^{l\alpha} \\ \sigma_{zy}^C &\Rightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l J_l' = -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{zy}^{l\alpha} & \sigma_{zz}^C &\Rightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_l^2 = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{zz}^{l\alpha} \end{aligned}$$

Os termos  $\Pi_{ij}^{l\alpha}$  definem o tensor

$$\tilde{\Pi}^{l\alpha}(p_\perp) \doteq \begin{pmatrix} \frac{l^2 J_l^2}{b_\alpha^2} & i \frac{l J_l' J_l}{b_\alpha} & \frac{l J_l^2}{b_\alpha} \\ -i \frac{l J_l' J_l}{b_\alpha} & J_l'^2 & -i J_l' J_l \\ \frac{l J_l^2}{b_\alpha} & i J_l J_l' & J_l^2 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Fazendo as devidas substituições temos que

$$\begin{aligned} \sigma_{ix}^C(\vec{k}, \omega) &= -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int_0^\infty p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \frac{p_\parallel^{\delta_{iz}} p_\perp^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{ix}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\ \sigma_{iy}^C(\vec{k}, \omega) &= -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int_0^\infty p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \frac{p_\parallel^{\delta_{iz}} p_\perp^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iy}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\ \sigma_{iz}^C(\vec{k}, \omega) &= -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \int_0^\infty p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \frac{p_\parallel^{\delta_{iz}} p_\perp^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \frac{l\omega_\alpha}{\omega p_\perp} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Podemos reescrever o último termo da equação (4.54) como [54]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{l\omega_{\alpha}}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} &= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{l\omega_{\alpha}}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} - \frac{\omega}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} + \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} \frac{1}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} - i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \frac{1}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} \\
&\quad + \frac{\omega}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} \frac{1}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \frac{1}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} \\
&= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} - \left[ \omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \right] \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\perp}} \\
&\quad + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} - \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \frac{1}{\omega p_{\perp}} \Lambda_{\alpha} \\
&= - \left[ \omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \right] \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\perp}} + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) + i \sum_j \frac{\nu_{\alpha d}^{j0}(p)}{\omega} \frac{\Lambda_{\alpha}}{p_{\parallel}} \right]
\end{aligned} \tag{4.55}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\sigma_{iz}^C(\vec{k}, \omega) &= -2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
&\quad \times \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) + i \sum_j \frac{\nu_{\alpha d}^{j0}(p)}{\omega} \frac{\Lambda_{\alpha}}{p_{\parallel}} \right] \\
&\quad + 2\pi i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iz}^{l\alpha} \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\perp}}
\end{aligned}$$

Observando que

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_l^2 = 0 \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l J'_l = 0 \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2 = 1 \tag{4.56}$$

vemos que para a soma em  $l$  no último termo de  $\sigma_{iz}^C$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{iz}^{l\alpha} = \delta_{iz}$$

Assim, com estas considerações finais, recompondo a integral em coordenadas cilíndricas

e fazendo  $2\pi \rightarrow \int_0^{2\pi} d\phi$ , obtemos a parte do tensor dielétrico devida a  $f_{\alpha\vec{k}}^C$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ix}^C &= \delta_{ix} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha}} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix}+\delta_{iy}} \Pi_{ix}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right] \\
\epsilon_{iy}^C &= \delta_{iy} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha}} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix}+\delta_{iy}} \Pi_{iy}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right] \\
\epsilon_{iz}^C &= \delta_{iz} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha}} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix}+\delta_{iy}} \Pi_{iz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
&\quad \times \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) + i \sum_j \frac{\nu_{\alpha d}^{j0}(p)}{\omega} \frac{\Lambda_{\alpha}}{p_{\parallel}} \right] \\
&\quad - \delta_{iz} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 n_{\alpha}} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0})
\end{aligned} \tag{4.57}$$

onde

$$\omega_{p\alpha} = \left( \frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

é a frequência angular de plasma das partículas do tipo  $\alpha$ .

## 4.6 Carga elétrica da partícula de poeira

Os termos do tensor dielétrico devidos à componente da poeira e à fotoemissão são determinados respectivamente pelas distribuições  $f_{\alpha\vec{k}}^A$  e  $f_{\alpha\vec{k}}^{EF}$  expressas em (4.31). A fim de as escrevermos em termos do campo elétrico devemos, antes, fazer algumas considerações a respeito da distribuição  $f_d^j$ .

Começamos por tomar os momentos de ordem zero e de primeira ordem de  $f_d^j$  na variável  $q$ :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_d^j(\vec{r}, q, t) dq &= n_d^j(\vec{r}, t) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f_d^j(\vec{r}, q, t) q dq &= n_d^j(\vec{r}, t) Q^j(\vec{r}, t)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

O limite de integração superior difere daquele utilizado na referência [14] porque estamos supondo que a carga da poeira pode assumir valores positivos devido à emissão de elétrons. Introduzindo a linearização (4.8) e

$$Q^j(\vec{r}, t) = Q_0^j + Q_1^j(\vec{r}, t) \tag{4.59}$$

onde  $Q_0^j$  é a carga média de equilíbrio das partículas de poeira, obtemos em ordem zero

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{d0}^j(q) dq &= n_{d0}^j \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{d0}^j(q) q dq &= n_{d0}^j Q_0^j \end{aligned} \quad (4.60)$$

e em primeira ordem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{d1}^j(\vec{r}, q, t) dq &= n_{d1}^j(\vec{r}, t) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{d1}^j(\vec{r}, q, t) q dq &= n_{d0}^j Q_1^j(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Implica de (4.60) que a distribuição de equilíbrio da poeira é dada por

$$f_{d0}^j(q) = n_{d0}^j \delta(q - Q_0^j) \quad (4.62)$$

É razoável supor que, para frequências de ondas muito maiores do que a frequência característica das partículas de poeira, podemos assumir que a forma da distribuição  $f_d^j$  não difere muito da lei que define  $f_{d0}^j$ , de modo que a perturbação  $f_{d1}^j$  pode ser escrita como

$$f_{d1}^j(\vec{r}, q, t) = n_{d0}^j \{ \delta[q - Q^j(\vec{r}, t)] - \delta[q - Q_0^j] \} \quad (4.63)$$

Tomando sua transformada de Fourier

$$\hat{f}_d^j(\vec{k}, q, \omega) = n_{d0}^j \{ \delta[q - \hat{Q}_T^j(\vec{k}, t)] - \delta[q - Q_0^j] \} \quad (4.64)$$

com  $\hat{Q}_T^j = Q_0^j + \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega)$

Podemos determinar a carga  $\hat{Q}^j(\vec{k}, \omega)$  tomando o primeiro momento da equação cinética para a componente da poeira (4.30) e considerando a transformada de Fourier da equação (4.61), obtendo para  $\hat{Q}^j$

$$\hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} \left[ I_0^j(\hat{Q}_T^j) + \hat{I}^j(\vec{k}, Q_0^j, \omega) \right] \quad (4.65)$$

onde utilizamos a condição de que, na carga média de equilíbrio, a corrente média  $I_0^j(Q_0) = 0$ . Expandindo  $I_0^j(\hat{Q}_T^j)$  em série de Taylor em torno de  $Q_0^j$  obtemos

$$I_0^j(\hat{Q}_T^j) = I_0^j(Q_0^j) + \frac{\partial I_0^j}{\partial \hat{Q}_T^j} \Big|_{\hat{Q}_T^j=Q_0^j} (\hat{Q}_T^j - Q_0^j) + \dots \quad (4.66)$$

Supondo que  $|\hat{Q}^j| \ll |Q_0^j|$  e lembrando que  $I_0^j(Q_0^j) = 0$ , obtemos

$$I_0^j(\hat{Q}_T^j) \simeq -\nu_{ch}^j \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) \quad (4.67)$$

onde

$$\nu_{ch}^j \equiv -\frac{\partial I_0^j}{\partial \hat{Q}_T^j} \Big|_{\hat{Q}_T^j=Q_0^j} \quad (4.68)$$

é a frequência de carregamento.

Em termos de  $f_{\alpha\vec{k}} = f_{\alpha\vec{k}}^C + f_{\alpha\vec{k}}^A + f_{\alpha\vec{k}}^{EF}$ , devemos escrever a perturbação da corrente  $\hat{I}^j$  como

$$\hat{I}^j(\vec{k}, Q_0^j, \omega) = \hat{I}^{jC}(\vec{k}, Q_0^j, \omega) + \hat{I}^{jA}(\vec{k}, Q_0^j, \omega) + \hat{I}^{jEF}(\vec{k}, Q_0^j, \omega) \quad (4.69)$$

onde

$$\hat{I}^{jC}(\vec{k}, q, \omega) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \sigma_{\alpha}^j(Q_0^j, p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha\vec{k}}^C \quad (4.70)$$

$$\hat{I}^{jA}(\vec{k}, q, \omega) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \sigma_{\alpha}^j(Q_0^j, p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha\vec{k}}^A \quad (4.71)$$

$$\hat{I}^{jEF}(\vec{k}, q, \omega) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \sigma_{\alpha}^j(Q_0^j, p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha\vec{k}}^{EF} \quad (4.72)$$

e as distribuições são definidas por (4.31). Usando as expressões para  $\nu_{\alpha d}^{j0}(p)$

$$\nu_{\alpha d}^{j0}(p) = \frac{n_{d0}^j p}{m_{\alpha}} \sigma_{\alpha}^j(p, Q_0^j) \quad (4.73)$$

obtemos

$$\hat{I}^{jC}(\vec{k}, q, \omega) = \frac{1}{n_{d0}^j} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \nu_{\alpha d}^{j0}(p) f_{\alpha\vec{k}}^C \quad (4.74)$$

$$\hat{I}^{jA}(\vec{k}, q, \omega) = \frac{1}{n_{d0}^j} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \nu_{\alpha d}^{j0}(p) f_{\alpha\vec{k}}^A \quad (4.75)$$

$$\hat{I}^{jEF}(\vec{k}, q, \omega) = \frac{1}{n_{d0}^j} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \nu_{\alpha d}^{j0}(p) f_{\alpha\vec{k}}^{EF} \quad (4.76)$$

Estamos num ponto adequado para expressar as correntes (4.74), (4.75) e (4.76) em função da carga. Começamos substituindo a perturbação (4.64) em (4.33), obtendo após

integração em  $q$

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}_{EF}^j(\vec{k}, p, \omega) &= \delta_{\alpha e} \beta \Lambda n_{d0}^j \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1, -n_z} \right] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dq \sigma_{EF}^j(p, q) [\delta(q - \hat{Q}_T^j) - \delta(q - Q_0^j)] \\
&= \delta_{\alpha e} \beta \Lambda \frac{2}{3} \pi a_j^2 n_{d0}^j \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1, -n_z} \right] \\
&\times \left[ \Theta \left( 1 - \frac{2m_e e \hat{Q}_T^j}{a_j p^2} \Theta(\hat{Q}_T^j) \right) - \Theta \left( 1 - \frac{2m_e e Q_0^j}{a_j p^2} \Theta(Q_0^j) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Expandindo o primeiro termo em série de Taylor até primeira ordem em torno de  $Q_0^j$ , com a condição  $|\hat{Q}_T^j| \ll |Q_0^j|$ ,

$$\begin{aligned}
&\Theta \left( 1 - \frac{2m_e e \hat{Q}_T^j}{a_j p^2} \Theta(\hat{Q}_T^j) \right) \\
&= \Theta \left( 1 - \frac{2m_e e Q_0^j}{a_j p^2} \Theta(Q_0^j) \right) + (\hat{Q}_T^j - Q_0^j) \frac{\partial}{\partial \hat{Q}_T^j} \Theta \left( 1 - \frac{2m_e e \hat{Q}_T^j}{a_j p^2} \Theta(\hat{Q}_T^j) \right) \Big|_{\hat{Q}_T^j = Q_0^j} + \dots \\
&\simeq \Theta \left( 1 - \frac{2m_e e Q_0^j}{a_j p^2} \Theta(Q_0^j) \right) - \frac{2m_e e \Theta(Q_0^j)}{a_j p^2} \delta \left( 1 - \frac{2m_e e Q_0^j}{a_j p^2} \Theta(Q_0^j) \right) \hat{Q}_T^j
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.77)

$$\hat{\nu}_{EF}^j(\vec{k}, p, \omega) \simeq \delta_{\alpha e} n_{d0}^j \sigma_{EF}^{j'}(p) \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1, -n_z} \right] \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) \tag{4.78}$$

$$\sigma_{EF}^{j'}(p) \doteq -\frac{2\pi a_j m_e e}{p^2} \beta \Lambda \frac{2}{3} \delta \left( 1 - \frac{2m_e e Q_0^j}{a_j p^2} \Theta(Q_0^j) \right) \Theta(Q_0^j) \tag{4.79}$$

Pelo mesmo procedimento, obtemos para  $\hat{\nu}_{\alpha d}^j$ , equação (4.35),

$$\hat{\nu}_{\alpha d}^j(\vec{k}, p, \omega) \simeq n_{d0}^j \sigma_{\alpha}^{j'}(p) \frac{p}{m_{\alpha}} \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) \tag{4.80}$$

onde

$$\sigma_{\alpha}^{j'}(p) \doteq -\frac{2\pi a_j q_{\beta} m_{\beta}}{p^2} \left[ \Theta \left( 1 - \frac{2q_{\alpha} m_{\alpha} Q_0^j}{a_j p^2} \right) + \left( 1 - \frac{2q_{\alpha} m_{\alpha} Q_0^j}{a_j p^2} \right) \delta \left( 1 - \frac{2q_{\alpha} m_{\alpha} Q_0^j}{a_j p^2} \right) \right] \tag{4.81}$$

As frequências (4.78) e (4.80) escritas em termos da carga permitem que as distri-

buições  $f_{\alpha\vec{k}}^A$  e  $f_{\alpha\vec{k}}^{EF}$ , então, também o sejam, de modo que

$$\begin{aligned} f_{\alpha\vec{k}}^A &= - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \sum_j n_{d0}^j \sigma_{\alpha}^{j'}(p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha 0}(p) \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) \\ f_{\alpha\vec{k}}^{EF} &= \delta_{\alpha e} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \sum_j n_{d0}^j \sigma_{EF}^{j'}(p) F(p) \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) \\ &\quad \times \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1,-n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1,-n_z} \right] \end{aligned} \quad (4.82)$$

Substituindo estas duas em (4.75) e (4.76), e (4.37) em (4.74), obtemos para as três correntes de absorção

$$\hat{I}^{jC}(\vec{k}, q, \omega) = -\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) \quad (4.83)$$

$$\hat{I}^{jA}(\vec{k}, q, \omega) = - \sum_{\ell} \nu_1^{j\ell} \hat{Q}^{\ell}(\vec{k}, \omega) \quad (4.84)$$

$$\hat{I}^{jEF}(\vec{k}, q, \omega) = \sum_{\ell} \nu_{EF1}^{j\ell} \hat{Q}^{\ell}(\vec{k}, \omega) \quad (4.85)$$

onde

$$\begin{aligned} \nu_1^{j\ell} &= \frac{n_{d0}^{\ell}}{n_{d0}^j} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d\vec{p} \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \sigma_{\alpha}^{\ell'}(p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha 0}(p) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_{\ell} \nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)]\tau\}} \\ \nu_{EF1}^{j\ell} &= \frac{n_{d0}^{\ell}}{n_{d0}^j} \sum_{\alpha} \delta_{\alpha e} q_{\alpha} \int d\vec{p} \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \sigma_{EF}^{\ell'}(p) \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1,-n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1,-n_z} \right] F(p) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_{\ell} \nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)]\tau\}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

e

$$\vec{A}^{j0} \doteq \frac{1}{n_{d0}^j} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d\vec{p} \nu_{\alpha d}^{j0}(p) \vec{A}^{\alpha} \quad (4.88)$$

Finalmente, considerando (4.69), (4.67), (4.83), (4.84) e (4.85) obtemos de (4.65) a igualdade

$$(\omega + i\nu_{ch}^j) \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) + i \sum_{\ell} \left( \nu_1^{j\ell} - \nu_{EF1}^{j\ell} \right) \hat{Q}^{\ell}(\vec{k}, \omega) = -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E} \quad (4.89)$$

A equação (4.89) apresenta um acoplamento na variável  $\hat{Q}^j$ , o que torna difícil encontrar uma expressão exata para a transformada da carga média. Podemos tentar uma solução aproximada. Numa primeira aproximação, desprezamos a “interação” entre diferentes populações de partículas de poeira, e escrevemos

$$(\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}) \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) \simeq -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E}$$

$$\hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) \simeq \frac{-i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E}}{[\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}]}$$

Usando esta aproximação no resultado original,

$$\begin{aligned} (\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}) \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) &= -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E} - i \sum_{\ell \neq j} \left( \nu_1^{j\ell} - \nu_{EF1}^{j\ell} \right) \hat{Q}^\ell(\vec{k}, \omega) \\ &= -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E} - i \sum_{\ell \neq j} \left( \nu_1^{j\ell} - \nu_{EF1}^{j\ell} \right) \frac{-i\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E}}{\omega + i\nu_{ch}^\ell + i\nu_1^{\ell\ell} - i\nu_{EF1}^{\ell\ell}} \\ &= -i \left[ \vec{A}^{j0} - i \sum_{\ell \neq j} \frac{\left( \nu_1^{j\ell} - \nu_{EF1}^{j\ell} \right) \vec{A}^{\ell 0}}{\omega + i\nu_{ch}^\ell + i\nu_1^{\ell\ell} - i\nu_{EF1}^{\ell\ell}} \right] \cdot \vec{E} \\ \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) &= \frac{-i}{\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}} \sum_{\ell} \left[ \delta_{j\ell} - i \frac{(1 - \delta_{j\ell}) \left( \nu_1^{j\ell} - \nu_{EF1}^{j\ell} \right)}{\omega + i\nu_{ch}^\ell + i\nu_1^{\ell\ell} - i\nu_{EF1}^{\ell\ell}} \right] (\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E}) \end{aligned}$$

Usando novamente a aproximação no resultado original,

$$\begin{aligned} (\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}) \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) &= -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E} - i \sum_{\ell_2 \neq j} \left( \nu_1^{j\ell_2} - \nu_{EF1}^{j\ell_2} \right) \hat{Q}^{\ell_2}(\vec{k}, \omega) \\ &= -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E} - i \sum_{\ell_2 \neq j} \left( \nu_1^{j\ell_2} - \nu_{EF1}^{j\ell_2} \right) \frac{-i}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_2} + i\nu_1^{\ell_2\ell_2} - i\nu_{EF1}^{\ell_2\ell_2}} \\ &\quad \times \sum_{\ell_1} \left[ \delta_{\ell_2\ell_1} - i \frac{(1 - \delta_{\ell_2\ell_1}) \left( \nu_1^{\ell_2\ell_1} - \nu_{EF1}^{\ell_2\ell_1} \right)}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_1} + i\nu_1^{\ell_1\ell_1} - i\nu_{EF1}^{\ell_1\ell_1}} \right] (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) &= \frac{-i}{(\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj})} \\ &\quad \times \sum_{\ell_1} \left[ \delta_{j\ell_1} - i \sum_{\ell_2} \frac{(1 - \delta_{j\ell_2}) \left( \nu_1^{j\ell_2} - \nu_{EF1}^{j\ell_2} \right)}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_2} + i\nu_1^{\ell_2\ell_2} - i\nu_{EF1}^{\ell_2\ell_2}} \left[ \delta_{\ell_2\ell_1} - i \frac{(1 - \delta_{\ell_2\ell_1}) \left( \nu_1^{\ell_2\ell_1} - \nu_{EF1}^{\ell_2\ell_1} \right)}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_1} + i\nu_1^{\ell_1\ell_1} - i\nu_{EF1}^{\ell_1\ell_1}} \right] \right] (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) \\ &= \frac{-i}{(\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj})} \\ &\quad \times \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \left[ \delta_{j\ell_1} \delta_{j\ell_2} - i \frac{(1 - \delta_{j\ell_2}) \left( \nu_1^{j\ell_2} - \nu_{EF1}^{j\ell_2} \right)}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_2} + i\nu_1^{\ell_2\ell_2} - i\nu_{EF1}^{\ell_2\ell_2}} \left[ \delta_{\ell_2\ell_1} - i \frac{(1 - \delta_{\ell_2\ell_1}) \left( \nu_1^{\ell_2\ell_1} - \nu_{EF1}^{\ell_2\ell_1} \right)}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_1} + i\nu_1^{\ell_1\ell_1} - i\nu_{EF1}^{\ell_1\ell_1}} \right] \right] (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) \end{aligned}$$

Utilizando novamente esta expressão,

$$\begin{aligned}
(\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}) \hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) &= -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E} - i \sum_{\ell_3 \neq j} \left( \nu_1^{j\ell_3} - \nu_{EF1}^{j\ell_3} \right) \hat{Q}^{\ell_3}(\vec{k}, \omega) \\
&= -i\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E} - i \sum_{\ell_3 \neq j} \nu_1^{j\ell_3} \frac{-i}{(\omega + i\nu_{ch}^{\ell_3} + i\nu_1^{\ell_3\ell_3} - i\nu_{EF1}^{\ell_3\ell_3})} \\
&\times \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \left[ \delta_{\ell_3\ell_1} \delta_{\ell_3\ell_2} - i \frac{(1 - \delta_{\ell_3\ell_2}) (\nu_1^{\ell_3\ell_2} - \nu_{EF1}^{\ell_3\ell_2})}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_2} + i\nu_1^{\ell_2\ell_2} - i\nu_{EF1}^{\ell_2\ell_2}} \left[ \delta_{\ell_2\ell_1} - i \frac{(1 - \delta_{\ell_2\ell_1}) (\nu_1^{\ell_2\ell_1} - \nu_{EF1}^{\ell_2\ell_1})}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_1} + i\nu_1^{\ell_1\ell_1} - i\nu_{EF1}^{\ell_1\ell_1}} \right] \right] (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E})
\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) &= \frac{-i}{(\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj})} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} \left[ \delta_{j\ell_1} \delta_{j\ell_2} \delta_{j\ell_3} - i \frac{(1 - \delta_{j\ell_3}) (\nu_1^{j\ell_3} - \nu_{EF1}^{j\ell_3})}{(\omega + i\nu_{ch}^{\ell_3} + i\nu_1^{\ell_3\ell_3} - i\nu_{EF1}^{\ell_3\ell_3})} \right. \\
&\times \left. \left[ \delta_{\ell_3\ell_1} \delta_{\ell_3\ell_2} - i \frac{(1 - \delta_{\ell_3\ell_2}) (\nu_1^{\ell_3\ell_2} - \nu_{EF1}^{\ell_3\ell_2})}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_2} + i\nu_1^{\ell_2\ell_2} - i\nu_{EF1}^{\ell_2\ell_2}} \left[ \delta_{\ell_2\ell_1} - i \frac{(1 - \delta_{\ell_2\ell_1}) (\nu_1^{\ell_2\ell_1} - \nu_{EF1}^{\ell_2\ell_1})}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_1} + i\nu_1^{\ell_1\ell_1} - i\nu_{EF1}^{\ell_1\ell_1}} \right] \right] \right] (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E})
\end{aligned}$$

Podemos definir

$$C_{\ell_1\ell_2} = -i \frac{(1 - \delta_{\ell_1\ell_2}) (\nu_1^{\ell_1\ell_2} - \nu_{EF1}^{\ell_1\ell_2})}{\omega + i\nu_{ch}^{\ell_2} + i\nu_1^{\ell_2\ell_2} - i\nu_{EF1}^{\ell_2\ell_2}}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) &= \frac{-i}{(\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj})} \\
&\times \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} [\delta_{j\ell_1} \delta_{j\ell_2} \delta_{j\ell_3} + C_{j\ell_3} [\delta_{\ell_3\ell_1} \delta_{\ell_3\ell_2} + C_{\ell_3\ell_2} [\delta_{\ell_2\ell_1} + C_{\ell_2\ell_1}]]] (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E})
\end{aligned}$$

Os primeiros termos na somatória podem ser escritos separadamente.

Primeiro termo

$$\sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} \delta_{j\ell_1} \delta_{j\ell_2} \delta_{j\ell_3} (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) = (\vec{A}^{j0} \cdot \vec{E})$$

Segundo termo,

$$\sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} C_{j\ell_3} \delta_{\ell_3\ell_1} \delta_{\ell_3\ell_2} (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) = \sum_{\ell_1} C_{j\ell_1} (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) = \sum_{\ell} C_{j\ell} (\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E})$$

Terceiro termo,

$$\sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} C_{j\ell_3} C_{\ell_3\ell_2} \delta_{\ell_2\ell_1} (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) = \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_3} C_{j\ell_3} C_{\ell_3\ell_1} (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) = \sum_{\ell} \sum_{\ell_2} C_{j\ell_2} C_{\ell_2\ell} (\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E})$$

Quarto termo,

$$\sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} C_{j\ell_3} C_{\ell_3\ell_2} C_{\ell_2\ell_1} (\vec{A}^{\ell_1 0} \cdot \vec{E}) = \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} C_{j\ell_3} C_{\ell_3\ell_2} C_{\ell_2\ell} (\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E})$$

Podemos iterar até quanto se queira, a fim de melhorar a aproximação. Então, podemos escrever

$$\hat{Q}^j(\vec{k}, \omega) = \frac{-i}{(\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj})} \sum_{\ell} B_{j\ell} (\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E}) \quad (4.90)$$

onde

$$B_{j\ell} = \left[ \delta_{j\ell} + C_{j\ell} + \sum_{\ell_2} C_{j\ell_2} C_{\ell_2\ell} + \sum_{\ell_2} \sum_{\ell_3} C_{j\ell_3} C_{\ell_3\ell_2} C_{\ell_2\ell} + \dots \right]$$

Substituindo (4.90) na distribuições (4.82) elas se tornam

$$\begin{aligned} f_{\alpha\vec{k}}^A &= \sum_j n_{d0}^j \sigma_{\alpha}^{j'}(p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha 0}(p) \frac{i}{\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}} \sum_{\ell} B_{j\ell} (\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E}) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \\ f_{\alpha\vec{k}}^{EF} &= \delta_{\alpha e} \sum_j n_{d0}^j \sigma_{EF}^{j'}(p) \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1,-n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1,-n_z} \right] F(p) \\ &\quad \times \frac{-i}{\omega + i\nu_{ch}^j + i\nu_1^{jj} - i\nu_{EF1}^{jj}} \sum_{\ell} B_{j\ell} (\vec{A}^{\ell 0} \cdot \vec{E}) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)]\tau\}} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Estas equações evidenciam a dependência linear das distribuições  $f_{\alpha\vec{k}}^A$  e  $f_{\alpha\vec{k}}^{EF}$  com as componentes do campo elétrico, como havíamos mencionado anteriormente. Isto nos permite obter as componentes  $\sigma_{ij}^A$  e  $\sigma_{ij}^{EF}$  através da equação (4.42).

## 4.7 Componente $\epsilon_{ij}^A$

Implica da equação (4.42) que

$$\sum_j \sigma_{ij}^A(\vec{k}, \omega) \vec{E}_j(\vec{k}, \omega) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int d\vec{p} p_i f_{\alpha\vec{k}}^A$$

da qual obtemos, considerando (4.91)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^A(\vec{k}, \omega) &= i \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int d\vec{p} p_i \sigma_{\alpha}^{k'}(p) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha 0}(p) \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Calculando a integral em  $\tau$  de forma similar à forma utilizada anteriormente na página 53,

$$\begin{aligned}
p_{\parallel} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_{\parallel} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_l \frac{ie^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \\
p_{\perp} \int_{-\infty}^0 d\tau \cos \phi e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= \frac{p_{\perp}}{b_{\alpha}} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} n J_n J_l \frac{ie^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \\
p_{\perp} \int_{-\infty}^0 d\tau \sin \phi e^{i\{\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_{\perp} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J'_l \frac{e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)}
\end{aligned}$$

onde  $b_{\alpha} = (k_{\perp} p_{\perp}) / (m_{\alpha} \Omega_{\alpha})$ . A integração em  $\phi$  resulta em

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-l)\phi} = 2\pi \delta_{n,l} \quad (4.93)$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\sigma_{xj}^A(\vec{k}, \omega) &= - \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\
&\quad \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \int d\vec{p} \frac{p_{\perp} p \sigma_{\alpha}^{k'}(p) f_{\alpha 0}(p) \Pi_{xz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\
\sigma_{yj}^A(\vec{k}, \omega) &= - \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\
&\quad \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \int d\vec{p} \frac{p_{\perp} p \sigma_{\alpha}^{k'}(p) f_{\alpha 0}(p) \Pi_{yz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\
\sigma_{zj}^A(\vec{k}, \omega) &= - \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\
&\quad \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel} p \sigma_{\alpha}^{k'}(p) f_{\alpha 0}(p) \Pi_{zz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0}
\end{aligned}$$

Então

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}^A \quad (4.94)$$

onde

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^A(\vec{k}, \omega) &= - \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \\
&\quad \times \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} p \sigma_{\alpha}^{k'}(p) f_{\alpha 0}(p) \Pi_{iz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i\sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0}
\end{aligned} \quad (4.95)$$

## 4.8 Componente $\epsilon_{ij}^{EF}$

Equivalentemente, de (4.42) e (4.91)

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= -i \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \sum_\alpha \delta_{\alpha e} \frac{q_\alpha}{m_\alpha m_e} \\
&\times \int d\vec{p} \sigma_{EF}^{k'}(p) p_i \left[ \frac{p_x}{m_e} \Theta(p_x) \delta_{1,-n_x} + \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \delta_{1,-n_z} \right] F(p) \sum_\ell B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\
&\times \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} \quad (4.96)
\end{aligned}$$

Nesta parte do tensor dielétrico devida à fotoionização, identificamos dois termos que correspondem à incidência de radiação perpendicular e paralela ao eixo do campo magnético externo, que são uma consequência do modelo de emissão adotado expresso na equação (4.2) e da equação cinética dos elétrons no sistema (4.4).

Devido à presença das funções  $\Theta(p_x)$  e  $\Theta(p_z)$ , temos limites de integração diferentes em  $d\vec{p}$ . Para que o integrando não seja nulo, devemos requerer que  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$  e  $0 < \theta < \pi$  para o termo que contém  $\Theta(p_x)$ . Para o outro termo, com a função  $\Theta(p_z)$ , devemos tomar os intervalos de integração  $0 < \phi < 2\pi$  e  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . A integração na variável  $\theta$  deve ser considerada para cálculos posteriores utilizando as expressões que serão obtidas nesta seção. Em ambos os casos, a integração em  $\phi$  pode ser realizada de imediato.

As componentes  $p_i$ ,  $i = x, y, z$ , podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
p_x &= p_\perp \cos \phi \\
p_y &= p_\perp \sin \phi \\
p_z &= p_\parallel
\end{aligned}$$

Para o caso  $\delta_{1,-n_x} = 1$ , elas formam produto com  $p_\perp \cos \phi$ . Como estes termos são constantes em relação à integração em  $\tau$ , obtemos respectivamente às componentes com  $i = x, y, z$

$$\begin{aligned}
p_\perp^2 \cos \phi \int_{-\infty}^0 d\tau \cos \phi e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_\perp \frac{p_\perp}{b_\alpha} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} n J_n J_l \frac{i e^{i(n-l)\phi} \cos \phi}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \\
p_\perp^2 \cos \phi \int_{-\infty}^0 d\tau \sin \phi e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_\perp p_\perp \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_l' \frac{e^{i(n-l)\phi} \cos \phi}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \\
p_\perp p_\parallel \cos \phi \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_\perp p_\parallel \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_l \frac{i e^{i(n-l)\phi} \cos \phi}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \quad (4.97)
\end{aligned}$$

De (4.97), vemos que a integração para as três componentes se dá sobre a mesma função em  $\phi$ . Para a integração de  $-\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{\pi}{2}$  obtemos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos \phi e^{i(n-l)\phi} = \frac{\pi}{2} [\delta_{n,l-1} + \delta_{n,l+1}] + \frac{1}{n-l+1} \sin \left[ \frac{\pi}{2}(n-l+1) \right]_{n \neq l-1} + \frac{1}{n-l-1} \sin \left[ \frac{\pi}{2}(n-l-1) \right]_{n \neq l+1}$$

Deste resultado, há infinitos valores do argumento para os quais a função seno resulta em 1 e  $-1$ . O segundo termo com  $n \neq l-1$

$$\frac{1}{n-l+1} \sin \left[ \frac{\pi}{2}(n-l+1) \right]_{n \neq l-1} = \begin{cases} \frac{1}{n-l+1} & , \quad n = l + 4m \\ -\frac{1}{n-l+1} & , \quad n = 2 + l + 4m \end{cases}$$

e o terceiro termo

$$\frac{1}{n-l-1} \sin \left[ \frac{\pi}{2}(n-l-1) \right]_{n \neq l+1} = \begin{cases} \frac{1}{n-l-1} & , \quad n = 2 + l + 4m \\ -\frac{1}{n-l-1} & , \quad n = 4 + l + 4m \end{cases}$$

onde

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Então a integral em  $\phi$  é equivalente a

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos \phi e^{i(n-l)\phi} = \frac{\pi}{2} [\delta_{n,l-1} + \delta_{n,l+1}] + \frac{\delta_{n,l+4m} + \delta_{n,2+l+4m}}{1+4m} - \frac{\delta_{n,2+l+4m} + \delta_{n,4+l+4m}}{3+4m} \quad (4.98)$$

Quando  $\delta_{1,-n_z} = 1$ , teremos

$$\begin{aligned} p_{\parallel} p_{\perp} \int_{-\infty}^0 d\tau \cos \phi e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_{\parallel} \frac{p_{\perp}}{b_{\alpha}} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} n J_n J_l \frac{ie^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \\ p_{\parallel} p_{\perp} \int_{-\infty}^0 d\tau \sin \phi e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_{\parallel} p_{\perp} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J'_l \frac{e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \\ p_{\parallel}^2 \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\{\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)]\tau\}} &= p_{\parallel} p_{\parallel} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_l \frac{ie^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_k \nu_{\alpha d}^{k0}(p)} \end{aligned} \quad (4.99)$$

A integração em  $\phi$  de 0 a  $2\pi$  é a mesma realizada em (4.93).

Eliminando  $\delta_{\alpha \neq e}$  na somatória em  $\alpha$ , e aplicando o resultado (4.98) em (4.97) e (4.96), e (4.93) em (4.99) e (4.96), a somatória de  $-\infty$  a  $\infty$  em  $n$  dá lugar a outra em  $m$  para os

termos de (4.97), obtendo para cada componente de (4.96)

$$\begin{aligned}
\sigma_{xj}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= \frac{q_e}{m_e^2} \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\
&\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \int dp_{\parallel} \frac{\frac{p_{\perp}}{b_e} \sigma_{EF}^{k'l}(p) F(p)}{\omega - l\omega_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\
&\times \left\{ 2\pi l J_l p_{\parallel} \delta_{1,-n_z} + p_{\perp} \delta_{1,-n_x} \left[ \frac{\pi}{2} [(l-1)J_{l-1} + (l+1)J_{l+1}] \right. \right. \\
&+ \sum_m \left[ \frac{(l+4m)J_{l+4m} + (2+l+4m)J_{2+l+4m}}{1+4m} \right. \\
&\left. \left. \times - \frac{(2+l+4m)J_{2+l+4m} + (4+l+4m)J_{4+l+4m}}{3+4m} \right] \right\} J_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yj}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= -i \frac{q_e}{m_e^2} \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\
&\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \int dp_{\parallel} \frac{p_{\perp} \sigma_{EF}^{k'l}(p) F(p)}{\omega - l\omega_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\
&\times \left\{ 2\pi J_l p_{\parallel} \delta_{1,-n_z} + p_{\perp} \delta_{1,-n_x} \left[ \frac{\pi}{2} [(l-1)J_{l-1} + (l+1)J_{l+1}] \right. \right. \\
&+ \sum_m \left[ \frac{J_{l+4m} + J_{2+l+4m}}{1+4m} - \frac{J_{2+l+4m} + J_{4+l+4m}}{3+4m} \right] \left. \right\} J'_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zj}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= \frac{q_e}{m_e^2} \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\
&\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \int dp_{\parallel} \frac{p_{\parallel} \sigma_{EF}^{k'l}(p) F(p)}{\omega - l\omega_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\
&\times \left\{ 2\pi J_l p_{\parallel} \delta_{1,-n_z} + p_{\perp} \delta_{1,-n_x} \left[ \frac{\pi}{2} [(l-1)J_{l-1} + (l+1)J_{l+1}] \right. \right. \\
&+ \sum_m \left[ \frac{J_{l+4m} + J_{2+l+4m}}{1+4m} - \frac{J_{2+l+4m} + J_{4+l+4m}}{3+4m} \right] \left. \right\} J_l
\end{aligned}$$

Podemos utilizar as relações

$$[(l-1)J_{l-1} + (l+1)J_{l+1}] J_l = [l(J_{l-1} + J_{l+1}) - (J_{l-1} - J_{l+1})] J_l = \frac{2l^2}{b_{\alpha}} J_l^2 - 2J'_l J_l$$

$$J_{l+4m} + J_{2+l+4m} = \frac{2(1+l+4m)}{b_e} J_{1+l+4m}$$

$$J_{2+l+4m} + J_{4+l+4m} = \frac{2(3+l+4m)}{b_e} J_{3+l+4m}$$

e escrever estas componentes em termos do tensor (4.53) obtendo, após recompor a integral em  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{xj}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= \frac{q_e}{2m_e^2} \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d\vec{p} \frac{p_{\perp} \sigma_{EF}^{k'}(p) F(p)}{\omega - l\omega_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\ &\times \left\{ 2p_{\parallel} \Pi_{xz}^{le} \Theta(\vec{p} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z} \right. \\ &\quad \left. + p_{\perp} \delta_{1,-n_x} \left[ \Pi_{xx}^{le} - i\Pi_{yz}^{le} + \frac{1}{\pi b_e} \sum_m \left[ \frac{(l+4m)J_{l+4m} + (2+l+4m)J_{2+l+4m}}{1+4m} \right. \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. \left. - \frac{(2+l+4m)J_{2+l+4m} + (4+l+4m)J_{4+l+4m}}{3+4m} \right] J_l \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yj}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= \frac{q_e}{2m_e^2} \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d\vec{p} \frac{p_{\perp} \sigma_{EF}^{k'}(p) F(p)}{\omega - l\omega_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\ &\times \left\{ 2p_{\parallel} \Pi_{yz}^{le} \Theta(\vec{p} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z} \right. \\ &\quad \left. + p_{\perp} \delta_{1,-n_x} \left[ \Pi_{yx}^{le} + \frac{2}{\pi b_e} \sum_m \left[ \frac{(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right] J_l \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zj}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= \frac{q_e}{2m_e^2} \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel} \sigma_{EF}^{k'}(p) F(p)}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \\ &\times \left\{ 2p_{\parallel} \Pi_{zz}^{le} \Theta(\vec{p} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z} \right. \\ &\quad \left. + p_{\perp} \delta_{1,-n_x} \left[ \Pi_{zx}^{le} + \frac{2}{\pi b_e} \sum_m \left[ \frac{(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right] J_l \right] \right\} \end{aligned}$$

Aqui nós reintroduzimos a função  $\Theta(\vec{p} \cdot \hat{z})$  no termo de incidência paralela para manter a restrição no intervalo de integração na variável angular  $\theta$ . Estas componentes podem ser reduzidas à expressão

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{EF}(\vec{k}, \omega) &= \frac{q_e}{2m_e^2} \sum_k \frac{n_{d0}^k}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ &\int d\vec{p} \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \sigma_{EF}^{k'}(p) F(p) [p_{\perp} (\Pi_{ix}^{le} - i\delta_{ix} \Pi_{yz}^{le} + \Pi_{ix}^{le,EF}) \delta_{1,-n_x} + 2p_{\parallel} \Pi_{iz}^{le} \Theta(\vec{p} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z}]}{\omega - l\omega_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \\ &\times \sum_{\ell} B_{k\ell} A_j^{\ell 0} \end{aligned} \quad (4.100)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \Pi_{xx}^{le,EF} &\doteq \frac{1}{\pi b_e} \sum_m \left[ \frac{(l+4m)J_{l+4m} + (2+l+4m)J_{2+l+4m}}{1+4m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2+l+4m)J_{2+l+4m} + (4+l+4m)J_{4+l+4m}}{3+4m} \right] J_l \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\Pi_{yx}^{le,EF} \doteq \frac{2}{\pi b_e} \sum_m \left[ \frac{(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right] J'_l \quad (4.102)$$

$$\Pi_{zx}^{le,EF} \doteq \frac{2}{\pi b_e} \sum_m \left[ \frac{(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right] J_l \quad (4.103)$$

A equação para o tensor dielétrico pode ser reescrita em termos de outros dois tensores na forma

$$\epsilon_{ij}^{EF} = \sum_k U_i^{EF,k} S_j^{EF,k} \quad (4.104)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} U_i^{EF,k} &= \frac{1}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \frac{q_e}{2a_k m_e^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ &\times \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \sigma_{EF}^{k'}(p) F(p) [p_{\perp} (\Pi_{ix}^{le} - i\delta_{ix} \Pi_{yz}^{le} + \Pi_{ix}^{le,EF}) \delta_{1,-n_x} + 2p_{\parallel} \Pi_{iz}^{le} \Theta(\vec{p} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z}]}{\omega - l\omega_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(p)} \end{aligned} \quad (4.105)$$

e

$$S_j^{EF,k} = \frac{4\pi i}{\omega} a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d\vec{p} \nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p) A_j^{\alpha} \quad (4.106)$$

onde utilizamos a equação (4.88).

As componentes  $A_j^{\alpha}$  foram desenvolvidas na seção (4.5) e estão expressas nas componentes do tensor (4.50), de modo que podemos utilizar aquele resultado exceto por alguns

fatores, como  $p_i$  e  $\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)$ . Obtemos então

$$\begin{aligned}
S_x^{EF,k} &= -4\pi a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{l}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) J_l(b_{\alpha}) p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \\
&\quad \times \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right] \\
S_y^{EF,k} &= -4\pi i a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J'_l(b_{\alpha}) p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \\
&\quad \times \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right] \\
S_z^{EF,k} &= -4\pi a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J_l(b_{\alpha}) p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \\
&\quad \times \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] e^{i(n-l)\phi}}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{l}{b_{\alpha}} \frac{k_{\perp}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right]
\end{aligned}$$

As integrações em  $\phi$  resultam em  $2\pi\delta_{n,l}$ . Utilizando o desenvolvimento (4.55) no último termo da componente  $S_z^{EF,k}$

$$\begin{aligned}
S_x^{EF,k} &= -4\pi a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d\vec{p} \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] [l J_l^2(b_{\alpha})/b_{\alpha}]}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
&\quad \times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right] \\
S_y^{EF,k} &= -4\pi i a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d\vec{p} \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] J_l(b_{\alpha}) J'_l(b_{\alpha})}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
&\quad \times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right] \\
S_z^{EF,k} &= -4\pi a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d\vec{p} \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] J_l(b_{\alpha})^2}{\omega - l\omega_{\alpha} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j0}(p)} \\
&\quad \times \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) + i \sum_j \frac{\nu_{\alpha d}^{j0}(p)}{\omega} \frac{\Lambda_{\alpha}}{p_{\parallel}} \right] \\
&\quad + 4\pi a_k \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d\vec{p} \frac{\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)}{\omega} J_l(b_{\alpha})^2 \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\perp}}
\end{aligned}$$

Levando em conta ainda que  $\sum_l J_l^2 = 1$  e utilizando as componentes  $\Pi_{zi}^{l\alpha}$

$$\begin{aligned}
S_x^{EF,k} &= -4\pi a_k \sum_\ell B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^\ell} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha q_\alpha^2 \int d\vec{p} \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] \Pi_{zx}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j 0}(p)} \\
&\quad \times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\
S_y^{EF,k} &= -4\pi a_k \sum_\ell B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^\ell} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha q_\alpha^2 \int d\vec{p} \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] \Pi_{zy}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j 0}(p)} \\
&\quad \times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] \\
S_z^{EF,k} &= -4\pi a_k \sum_\ell B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^\ell} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha q_\alpha^2 \int d\vec{p} \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] \Pi_{zz}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j 0}(p)} \\
&\quad \times \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) + i \sum_j \frac{\nu_{\alpha d}^{j 0}(p)}{\omega} \frac{\Lambda_\alpha}{p_{\parallel}} \right] \\
&\quad + 4\pi a_k \sum_\ell B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^\ell} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{\omega} \int \frac{d\vec{p}}{p_{\perp}} \frac{\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)}{\omega} \Lambda_\alpha
\end{aligned} \tag{4.107}$$

que podem ser escritas juntas na expressão

$$\begin{aligned}
S_j^{EF,k} &= -a_k \sum_\ell B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^\ell} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_\alpha}{n_{\alpha 0}} \int d\vec{p} \frac{[\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)/\omega] \Pi_{zj}^{l\alpha}}{\omega - l\omega_\alpha - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} + i \sum_j \nu_{\alpha d}^{j 0}(p)} \\
&\quad \times \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{jz}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) + \delta_{jz} i \sum_j \frac{\nu_{\alpha d}^{j 0}(p)}{\omega} \frac{\Lambda_\alpha}{p_{\parallel}} \right] \\
&\quad + \delta_{jz} \frac{a_k}{\omega} \sum_\ell B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^\ell} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_\alpha}{n_{\alpha 0}} \int \frac{d\vec{p}}{p_{\perp}} \frac{\nu_{\alpha d}^{\ell 0}(p)}{\omega} \Lambda_\alpha
\end{aligned} \tag{4.108}$$

## 4.9 $\epsilon_{ij}^{EF}$ em potências do raio de Larmor

Em todas as componentes dos tensores  $\epsilon_{ij}^C$ ,  $\epsilon_{ij}^A$  e  $\epsilon_{ij}^{EF}$  há uma soma em  $l$  de  $-\infty$  a  $\infty$ , que as expandem em termos de determinadas funções de Bessel. Estas são funções de  $p_{\perp}$  através do parâmetro  $b_\alpha$ , que depende do raio de Larmor. Cada termo na expansão envolve uma integral na dimensão transversal cuja potência em  $b_\alpha$  é da ordem de  $2l$ , se considerarmos a aproximação

$$J_{\pm l} \approx (\pm 1)^l \frac{b_\alpha^l}{2^l \Gamma(l+1)} \tag{4.109}$$

Pretendemos apresentar aqui uma outra forma de escrever estas integrais, onde utilizamos a expansão em potências de  $b_\alpha$  da função de Bessel  $J_l(b_\alpha)$  em sua plenitude, no lugar

da expressão truncada (4.109). A nova formulação torna mais convenientes os cálculos para uma ordem arbitrária de  $l$ , o que é particularmente útil para cálculos numéricos. Este procedimento foi aplicado nas outras duas partes da componente  $\epsilon_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}^C$  e  $\epsilon_{ij}^A$ , em outros trabalhos [10, 54]. Decidimos não apresentá-las nas seções anteriores, mas ilustrar o método com aplicação à nova componente  $\epsilon_{ij}^{EF}$ .

A fim de escrevermos  $\epsilon_{ij}^{EF}$  em potências do raio de Larmor, é conveniente fazer algumas mudanças de variável, de forma análoga às transformações realizadas nas componentes  $\epsilon_{ij}^C$  e  $\epsilon_{ij}^A$  em [16].

Começamos definindo a variável adimensional

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{2m_e k_B T_d}} \quad (4.110)$$

Então, de (4.105) obtemos

$$\begin{aligned} U_i^{EF,k} &= \frac{1}{\omega + i\nu_{ch}^k + i\nu_1^{kk} - i\nu_{EF1}^{kk}} \frac{q_e}{2a_k m_e^2} 2m_e k_B T_d (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ &\times \int d\vec{u} \frac{u_{\parallel}^{\delta_{iz}} u_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \sigma_{EF}^{kl}(u) F(u) [u_{\perp} (\Pi_{ix}^{le} - i\delta_{ix} \Pi_{yz}^{le} + \Pi_{ix}^{le,EF}) \delta_{1,-n_x} + 2u_{\parallel} \Pi_{iz}^{le} \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z}]}{\omega - l\omega_e - \sqrt{2m_e k_B T_d} \frac{k_{\parallel} u_{\parallel}}{m_e} + i \sum_k \nu_{ed}^{k0}(u)} \\ &= \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^k + i\tilde{\nu}_1^{kk} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{kk}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ &\times \int d\vec{u} \frac{u_{\parallel}^{\delta_{iz}} u_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \sigma_{EF}^{kl}(u) F(u) [u_{\perp} (\Pi_{ix}^{le} - i\delta_{ix} \Pi_{yz}^{le} + \Pi_{ix}^{le,EF}) \delta_{1,-n_x} + 2u_{\parallel} \Pi_{iz}^{le} \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z}]}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_k \tilde{\nu}_{ed}^{k0}(u)} \end{aligned} \quad (4.111)$$

onde

$$r_{\alpha} = \frac{\omega_{\alpha}}{\omega} \quad , \quad q_{\parallel\alpha} = \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha}\omega} \sqrt{2m_e k_B T_d} \quad , \quad \tilde{\nu}_{\alpha d}^{k0}(u) = \frac{\nu_{\alpha d}^{k0}(u)}{\omega} \quad (4.112)$$

$$q_{\perp\alpha} = \frac{k_{\perp}}{m_{\alpha}\omega} \sqrt{2m_e k_B T_d} \quad , \quad F(u) = \frac{2}{h^3} [1 + \exp(u^2 - \zeta)]^{-1} \quad (4.113)$$

Para a adimensionalização da componente  $S_j^{EF,k}$  começamos por notar que o operador  $\Lambda_{\alpha}$  em termos da nova variável  $\vec{u}$  torna-se

$$\Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) = u_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} - u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\parallel}} \quad (4.114)$$

onde a distribuição de equilíbrio  $f_{\alpha 0}$  é uma função de  $u$  através de (4.110). Então de

(4.108) segue que

$$\begin{aligned}
S_j^{EF,k} &= -\frac{a_k}{\omega\sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \int d\vec{u} \frac{\tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \Pi_{zj}^{l\alpha}}{1 - lr_{\alpha} - q_{\parallel\alpha} u_{\parallel} + i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u)} \\
&\times \left( \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \right)^{\delta_{jz}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} - q_{\parallel\alpha} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) + \delta_{jz} i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u) \frac{\Lambda_{\alpha}}{u_{\parallel}} \right] \\
&+ \delta_{jz} \frac{a_k}{\omega\sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{\ell} B_{k\ell} \frac{n_{d0}^k}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \int \frac{d\vec{u}}{u_{\perp}} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \Lambda_{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.115}$$

onde utilizamos (4.114) e redefinimos a função distribuição, de modo que

$$\int d\vec{p} f(\vec{p}) = \int d\vec{u} f(\vec{u})$$

#### 4.9.1 Expansão em série do tensor $\tilde{\Pi}^{l\alpha}$ e $\tilde{\Pi}^{l\alpha,EF}$

A função de Bessel do primeiro tipo  $J_l(x)$  pode ser representada através da expansão [1]

$$J_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2(l+k)}}{k! \Gamma(l+k+1)} \left( \frac{1}{2} \right)^{2k+l} \tag{4.116}$$

O produto  $J_l J_{l'}$  expressa-se em

$$J_l(x) J_{l'}(x) = \left( \frac{1}{2} x \right)^{l+l'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(l+l'+2k+1)}{\Gamma(l+k+1) \Gamma(l'+k+1) \Gamma(l+l'+k+1) k!} \left( \frac{1}{4} x^2 \right)^k \tag{4.117}$$

Segue de (4.117) que

$$J_l^2(b_{\alpha}) = J_{-l}^2(b_{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{\alpha}^{2(|l|+k)} M(l, k) \tag{4.118}$$

com

$$M(l, k) = \frac{(-1)^k [2(|l|+k)]!}{[ (|l|+k)! ]^2 (2|l|+k)! k!} \left( \frac{1}{2} \right)^{2(|l|+k)} \tag{4.119}$$

Derivando ambos os lados de (4.118) em relação a  $b_{\alpha}$ , obtemos

$$J_l(b_{\alpha}) J_l'(b_{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{\alpha}^{2(|l|+k)-1} P(l, k) \tag{4.120}$$

onde

$$P(l, k) = (|l|+k) M(l, k) \tag{4.121}$$

Consideremos a equação diferencial de Bessel de ordem  $l$

$$x^2 J_l''(x) + x J_l'(x) - (l^2 - x^2) J_l(x) = 0 \quad (4.122)$$

Derivando (4.120) em relação a  $b_\alpha$

$$J_l'^2(b_\alpha) = -J_l(b_\alpha) J_l''(b_\alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} [2(|l| + k) - 1] b_\alpha^{2(|l|+k-1)} P(l, k) \quad (4.123)$$

Multiplicando (4.122) por  $J_l$  e substituindo em (4.123) eliminamos o termo  $J_l J_l''$

$$\begin{aligned} J_l'^2(b_\alpha) &= \frac{1}{b_\alpha} J_l(b_\alpha) J_l'(b_\alpha) + \left(1 - \frac{l^2}{b_\alpha^2}\right) J_l^2(b_\alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} [2(|l| + k) - 1] b_\alpha^{2(|l|+k-1)} P(l, k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_\alpha^{2(|l|+k)} M(l, k) - l^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_\alpha^{2(|l|+k-1)} M(l, k) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (|l| + k)^2 b_\alpha^{2(|l|+k-1)} M(l, k) \end{aligned} \quad (4.124)$$

onde fizemos uso de (4.120) para eliminar o termo  $J_l J_l'/b_\alpha$ .

Podemos escrever a primeira somatória de (4.124) como

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_\alpha^{2(|l|+k)} M(l, k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_\alpha^{2(|l|+k-1)} M(l, k-1)$$

Com a convenção de que

$$\frac{1}{-k!} = 0 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

segue que os coeficientes  $M(l, k)$  com valores de  $k$  negativos são nulos, de modo que podemos escrever todos os termos numa única somatória

$$J_l'^2(b_\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} b_\alpha^{2(|l|+k-1)} [M(l, k-1) - l^2 M(l, k) + 2(|l| + k)^2 M(l, k)]$$

Finalmente escrevemos

$$J_l'^2(b_\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} R(l, k) b_\alpha^{2(|l|+k-1)} \quad (4.125)$$

onde definimos

$$R(l, k) = M(l, k-1) - [l^2 - 2(|l| + k)^2] M(l, k) \quad (4.126)$$

Podemos então reescrever o tensor (4.53) em série de potências do raio de Larmor

$$\tilde{\Pi}^{l\alpha}(u_{\perp}) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} l^2 M(l, k) & iP(l, k) & lM(l, k)b_{\alpha} \\ -iP(l, k) & R(l, k) & -iP(l, k)b_{\alpha} \\ lM(l, k)b_{\alpha} & iP(l, k)b_{\alpha} & M(l, k)b_{\alpha}^2 \end{pmatrix} b_{\alpha}^{2(|l|+k-1)} \quad (4.127)$$

O mesmo processo pode ser aplicado às componentes (4.101), (4.102) e (4.103). Pela equação (4.117) temos que

$$\begin{aligned} J_{1+l+2m}J_l &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+m+k)+1]!}{(l+k)!(l+k+2m+1)![2(l+m)+k+1]!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+m)+1} \\ J_{1+l+2m}J'_l &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+m+k)]!}{(l+k-1)!(l+k+2m+1)![2(l+m)+k]!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+m)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+m+k+1)]!}{(l+k+1)!(l+k+2m+1)!(2l+2m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+m+1)} \\ J_{l+4m}J_l &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+2m+k)]!}{(l+4m+k)!(l+k)!(2l+4m+k)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)} \\ J_{1+l+4m}J_l &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2l+4m+2k+1)!}{(l+4m+k+1)!(l+k)!(2l+4m+k+1)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)+1} \\ J_{2+l+4m}J_l &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+2m+k+1)]!}{(l+4m+k+2)!(l+k)!(2l+4m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)+2} \\ J_{3+l+4m}J_l &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2l+4m+2k+3)!}{(l+4m+k+3)!(l+k)!(2l+4m+k+3)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)+3} \\ J_{4+l+4m}J_l &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+2m+k+2)]!}{(l+4m+k+4)!(l+k)!(2l+4m+k+4)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)+4} \\ J_{1+l+4m}J'_l &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+2m+k)]!}{(l+4m+k+1)!(l+k-1)!(2l+4m+k)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+2m+k+1)]!}{(l+4m+k+1)!(l+k+1)!(2l+4m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)+2} \\ J_{3+l+4m}J'_l &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+2m+k+1)]!}{(l+4m+k+3)!(l+k-1)!(2l+4m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)+2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(l+2m+k+2)]!}{(l+4m+k+3)!(l+k+1)!(2l+4m+k+4)!k!} \left(\frac{1}{2}b_e\right)^{2(l+k+2m)+4} \end{aligned}$$

Substituindo obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx}^{le,EF} &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [E_1(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)-1} + E_2(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)+1} \\
&\quad - E_3(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)+1} - E_4(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)+3}] \\
\Pi_{yx}^{le,EF} &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [E_5(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)-1} - E_6(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)+1} \\
&\quad - E_7(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)+1} + E_8(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)+3}] \\
\Pi_{zx}^{le,EF} &\doteq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [E_9(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)} - E_{10}(l, k, m)b_e^{2(l+k+2m)+2}]
\end{aligned} \tag{4.128}$$

onde

$$\begin{aligned}
E_1(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(l+4m)[2(l+2m+k)]!}{\pi(1+4m)(l+4m+k)!(l+k)!(2l+4m+k)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)} \\
E_2(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(2+l+4m)[2(l+2m+k+1)]!}{\pi(1+4m)(l+4m+k+2)!(l+k)!(2l+4m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)+2} \\
E_3(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(2+l+4m)[2(l+2m+k+1)]!}{\pi(3+4m)(l+4m+k+2)!(l+k)!(2l+4m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)+2} \\
E_4(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(4+l+4m)[2(l+2m+k+2)]!}{\pi(3+4m)(l+4m+k+4)!(l+k)!(2l+4m+k+4)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)+4} \\
E_5(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(1+l+4m)[2(l+2m+k)]!}{\pi(1+4m)(l+4m+k+1)!(l+k-1)!(2l+4m+k)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)} \\
E_6(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(1+l+4m)[2(l+2m+k+1)]!}{\pi(1+4m)(l+4m+k+1)!(l+k+1)!(2l+4m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)+2} \\
E_7(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(3+l+4m)[2(l+2m+k+1)]!}{\pi(3+4m)(l+4m+k+3)!(l+k-1)!(2l+4m+k+2)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)+2} \\
E_8(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(3+l+4m)[2(l+2m+k+2)]!}{\pi(3+4m)(l+4m+k+3)!(l+k+1)!(2l+4m+k+4)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)+4} \\
E_9(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(1+l+4m)(2l+4m+2k+1)!}{\pi(1+4m)(l+4m+k+1)!(l+k)!(2l+4m+k+1)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)} \\
E_{10}(l, k, m) &= \frac{(-1)^k(3+l+4m)(2l+4m+2k+3)!}{\pi(3+4m)(l+4m+k+3)!(l+k)!(2l+4m+k+3)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(l+k+2m)+2}
\end{aligned}$$

A fim de escrever as componentes  $\hat{U}_i^{EF,n}$  em termos dos tensores (4.127) e (4.128), é conveniente que as separemos em partes correspondentes à incidência perpendicular e

paralela. Considerando a equação (4.111) podemos escrever

$$\hat{U}_i^{EF,n} = \hat{U}_{i\perp}^{EF,n} + \hat{U}_{i\parallel}^{EF,n} \quad (4.129)$$

onde

$$\hat{U}_{i\perp}^{EF,n} = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \quad (4.130)$$

$$\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d\vec{u} \frac{u_{\parallel}^{\delta_{iz}} u_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) (\Pi_{ix}^{le} - i\delta_{ix} \Pi_{yz}^{le} + \Pi_{ix}^{le,EF}) \delta_{1,-n_x}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \quad (4.131)$$

$$\hat{U}_{i\parallel}^{EF,n} = \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \quad (4.132)$$

$$\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d\vec{u} \frac{u_{\parallel}^{\delta_{iz}} u_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} u_{\parallel} \sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) \Pi_{iz}^{le} \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \quad (4.133)$$

Como consequência, o tensor (4.104) pode ser expresso pela soma

$$\epsilon_{ij}^{EF} = \epsilon_{ij\perp}^{EF} + \epsilon_{ij\parallel}^{EF} \quad (4.134)$$

Em termos das potências de Larmor podemos escrever as componentes perpendiculares (4.130) como

$$\begin{aligned} \hat{U}_{x\perp}^{EF,n} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ &\times \left[ l^2 M(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k-1|)} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) u_{\perp}^{2(|l+k|)} \delta_{1,-n_x}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right. \\ &\left. + P(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) u_{\perp}^{2(|l+k|)+1} \delta_{1,-n_x}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right] \\ &+ \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\ &\times \left[ E_1(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)-1} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+1} \delta_{1,-n_x}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right. \\ &+ E_2(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+3} \delta_{1,-n_x}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \\ &- E_3(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+3} \delta_{1,-n_x}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \\ &\left. - E_4(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+3} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}^{n'}(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+5} \delta_{1,-n_x}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right] \end{aligned} \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{y\perp}^{EF,n} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\
&\times \left[ -i l P(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\perp}^{2(|l+k|)} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right] \\
&+ \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\
&\times \left[ E_5(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)-1} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+1} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right. \\
&- E_6(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+3} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \\
&- E_7(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+3} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \\
&\left. + E_8(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+3} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\perp}^{2(l+k+2m)+5} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right] \quad (4.136)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{z\perp}^{EF,n} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\
&\times \left[ l M(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(|l+k|)} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right] \\
&+ \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\
&\times \left[ E_9(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(l+k+2m)+1} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \right. \\
&- E_{10}(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+2} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(l+k+2m)+3} \delta_{1,-n_x}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \left. \right] \quad (4.137)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, para as componentes paralelas (4.132) obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{x\parallel}^{EF,n} &= \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\
&\times l M(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(|l+k|)} \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1,-n_z}}{1 - l r_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)} \quad (4.138)
\end{aligned}$$

$$\hat{U}_{y\parallel}^{EF,n} = -i \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \quad (4.139)$$

$$\times P(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} \int d\vec{u} \frac{\sigma_{EF}^n(u) F(u) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(|l+k|)} \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1, -n_z}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)}$$

$$\hat{U}_{z\parallel}^{EF,n} = \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \quad (4.140)$$

$$\times M(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|)} \int d\vec{u} \frac{u \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_{\parallel}^2 u_{\perp}^{2(|l+k|)} \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1, -n_z}}{1 - lr_e - q_{\parallel e} u_{\parallel} + i \sum_n \tilde{\nu}_{ed}^{n0}(u)}$$

Fazendo o mesmo com as componentes  $\hat{S}_j^{EF,n}$

$$\hat{S}_x^{EF,n} = \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} l M(l, k) \left( \frac{q_{\perp \alpha}}{r_{\alpha}} \right)^{2(|l+k|-1)} \quad (4.141)$$

$$\times \int d\vec{u} \frac{\tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) u_{\perp}^{2(|l+k|-1)}}{1 - lr_{\alpha} - q_{\parallel \alpha} u_{\parallel} + i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} - q_{\parallel \alpha} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right]$$

$$\hat{S}_y^{EF,n} = i \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} P(l, k) \left( \frac{q_{\perp \alpha}}{r_{\alpha}} \right)^{2(|l+k|-1)} \quad (4.142)$$

$$\times \int d\vec{u} \frac{\tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) u_{\perp}^{2(|l+k|-1)}}{1 - lr_{\alpha} - q_{\parallel \alpha} u_{\parallel} + i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} - q_{\parallel \alpha} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right]$$

$$\hat{S}_z^{EF,n} = \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} M(l, k) \left( \frac{q_{\perp \alpha}}{r_{\alpha}} \right)^{2(|l+k|)} \quad (4.143)$$

$$\times \int d\vec{u} \frac{\tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(|l+k|-1)}}{1 - lr_{\alpha} - q_{\parallel \alpha} u_{\parallel} + i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u)}$$

$$\times \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} - q_{\parallel \alpha} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) + i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u) \frac{\Lambda_{\alpha}}{u_{\parallel}} \right]$$

$$- \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \int \frac{d\vec{u}}{u_{\perp}} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \Lambda_{\alpha}$$

Definindo as integrais [54]

$$Y_{\alpha}(l, k, h; H) = \int d\vec{u} \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(|l+k|)} H}{1 - lr_{\alpha} - q_{\parallel \alpha} u_{\parallel} + i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u)} \quad (4.144)$$

$$W_\alpha(l, k, m, h; H) = \int d\vec{u} \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(l+k+2m)} H}{1 - lr_\alpha - q_\parallel u_\parallel + i \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j0}(u)} \quad (4.145)$$

podemos escrever as componentes  $\hat{U}_{i\perp}^{EF,n}$  e  $\hat{U}_{i\parallel}^{EF,n}$ , equações (4.135), (4.136), (4.137), (4.138), (4.139) e (4.140), na forma

$$\begin{aligned} \hat{U}_{x\perp}^{EF,n} = & \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ & \times \left[ l^2 M(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k-1|)} Y_e(l, k, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) \delta_{1,-n_x}) \right. \\ & \left. + P(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} Y_e(l, k, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp \delta_{1,-n_x}) \right] \\ & + \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\ & \times \left[ E_1(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)-1} W_e(l, k, m, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp \delta_{1,-n_z}) \right. \\ & + E_2(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} W_e(l, k, m, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp^3 \delta_{1,-n_z}) \\ & - E_3(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} W_e(l, k, m, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp^3 \delta_{1,-n_z}) \\ & \left. - E_4(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+3} W_e(l, k, m, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp^5 \delta_{1,-n_z}) \right] \end{aligned} \quad (4.146)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{y\perp}^{EF,n} = & -i \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ & \times l P(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k-1|)} Y_e(l, k, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) \delta_{1,-n_x}) \\ & + \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\ & \times \left[ E_5(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)-1} W_e(l, k, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp \delta_{1,-n_x}) \right. \\ & - E_6(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} W_e(l, k, m, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp^3 \delta_{1,-n_x}) \\ & - E_7(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+1} W_e(l, k, m, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp^3 \delta_{1,-n_x}) \\ & \left. + E_8(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+3} W_e(l, k, m, 0; \sigma_{EF}^n(u) F(u) u_\perp^5 \delta_{1,-n_x}) \right] \end{aligned} \quad (4.147)$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{z\perp}^{EF,n} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\
&\times lM(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} Y_e(l, l, 1; \sigma_{EF}'(u) F(u) \delta_{1, -n_x}) \\
&+ \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\
&\times \left[ E_9(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)} W_e(l, k, m, 1; \sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\perp} \delta_{1, -n_x}) \right. \\
&\left. - E_{10}(l, k, m) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(l+k+2m)+2} W_e(l, k, m, 1; \sigma_{EF}'(u) F(u) u_{\perp}^3 \delta_{1, -n_x}) \right]
\end{aligned} \tag{4.148}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{x\parallel}^{EF,n} &= \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\
&\times lM(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} Y_e(l, k, 1; \sigma_{EF}'(u) F(u) \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1, -n_z})
\end{aligned} \tag{4.149}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{y\parallel}^{EF,n} &= -i \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\
&\times P(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|-1)} Y_e(l, k, 1; \sigma_{EF}'(u) F(u) \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1, -n_z})
\end{aligned} \tag{4.150}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{z\parallel}^{EF,n} &= \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i\tilde{\nu}_{ch}^n + i\tilde{\nu}_1^{nn} - i\tilde{\nu}_{EF1}^{nn}} q_e \frac{k_B T_d}{a_k m_e} (2m_e k_B T_d)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\
&\times M(l, k) \left( \frac{q_{\perp e}}{r_e} \right)^{2(|l+k|)} Y_e(l, k, 2; \sigma_{EF}'(u) F(u) \Theta(\vec{u} \cdot \hat{z}) \delta_{1, -n_z})
\end{aligned} \tag{4.151}$$

Igualmente, as componentes  $\hat{S}_j^{EF,n}$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x^{EF,n} &= \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} lM(l, k) \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \left( \frac{q_{\perp \alpha}}{r_{\alpha}} \right)^{2(|l+k|-1)} \\
&\times \left[ Y_{\alpha}(l, k, 0; u_{\perp}^{-1} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}}) - q_{\parallel \alpha} Y_{\alpha}(l, k, 0; u_{\perp}^{-1} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0})) \right]
\end{aligned} \tag{4.152}$$

$$\hat{S}_y^{EF,n} = i \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(l, k) \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \left( \frac{q_{\perp\alpha}}{r_{\alpha}} \right)^{2(|l+k|-1)} \quad (4.153)$$

$$\times \left[ Y_{\alpha}(l, k, 0; u_{\perp}^{-1} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}}) - q_{\parallel\alpha} Y_{\alpha}(l, k, 0; u_{\perp}^{-1} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0})) \right]$$

$$\hat{S}_z^{EF,n} = \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} M(l, k) \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \left( \frac{q_{\perp\alpha}}{r_{\alpha}} \right)^{2(|l+k|)} \quad (4.154)$$

$$\times \left[ Y_{\alpha}(l, k, 1; u_{\perp}^{-1} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}}) - q_{\parallel\alpha} Y_{\alpha}(l, k, 1; u_{\perp}^{-1} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0})) \right.$$

$$\left. + i Y_{\alpha}(l, k, 0, s; u_{\perp}^{-1} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \sum_j \tilde{\nu}_{\alpha d}^{j 0}(u) \Lambda_{\alpha}) \right]$$

$$- \frac{a_n}{\omega \sqrt{2m_e k_B T_d}} \sum_{\ell} B_{n\ell} \frac{n_{d0}^n}{n_{d0}^{\ell}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \int \frac{d\vec{u}}{u_{\perp}} \tilde{\nu}_{\alpha d}^{\ell 0}(u) \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0})$$

Como falamos no início desta seção, as componentes  $\hat{U}_i^{EF,n}$  e  $\hat{S}_j^{EF,n}$  escritas em termos de uma expansão sobre potências do raio de Larmor, equações (4.146) - (4.154), constituem uma forma bastante conveniente para análise numérica, dependendo apenas da integração de integrais de forma padronizada, dadas por (4.144) e (4.145).

Nesta seção fizemos a dedução das componentes do tensor dielétrico de um plasma empoeirado magnetizado que são devidas à fotoionização, considerando a correspondente componente do tensor condutividade implícita na equação (4.42). Para o cálculo dessas componentes, consideramos que os estados acessíveis dos fotoelétrons obedecem à estatística de Fermi-Dirac.

# Capítulo 5

## Conclusões

Na parte inicial deste trabalho, foi realizada uma breve apresentação de plasmas empoeirados. No Capítulo 3, fizemos uma revisão da teoria cinética de plasmas, obtendo a hierarquia BBGKY e em seguida apresentamos a equação de equilíbrio de Vlasov e a equação colisional de Landau. Finalizamos o capítulo apresentando as equações cinéticas para as distribuições de poeira e de elétrons e íons em um plasma empoeirado, levando em conta processos de carregamento da poeira por absorção e emissão de partículas.

No Capítulo 4, apresentamos um sistema de equações que descreve um plasma empoeirado composto por populações de poeira de diferentes tamanhos, considerando dois casos de incidência de radiação, perpendicular e paralela à direção do campo magnético. Como em trabalhos anteriores, consideramos correntes de carregamento dos grãos de poeira por colisões inelásticas com íons e elétrons do plasma, e, além disso, a corrente de carregamento devido à emissão fotoelétrica. O conjunto de equações (4.4) difere daquele de Galvão, Ziebell, Gaelzer e De Juli [10] pelo termo adicional de fonte de elétrons na equação cinética para  $\alpha = e$ , assim como pelas equações (4.1) e (4.5), onde a corrente fotoelétrica foi incluída na corrente total.

A adição de um termo de fonte de partículas separa a perturbação da função de distribuição,  $f_{\alpha 1}$ , em três termos: um devido à parte convencional, e outros dois devido à presença da poeira; mais especificamente, um devido às correntes de absorção e outro devido à corrente de fotoemissão. Esta separação conduz, também, a três partes correspondentes no tensor dielétrico do plasma.

A presença de diferentes populações de grãos de poeira causa um acoplamento entre as cargas médias de cada população, que, em primeira aproximação, a carga de uma população  $j$  pode ser expressa através de uma soma com um número arbitrário de iterações sobre as outras populações presentes.

No nosso modelo, assumimos que os fotoelétrons emitidos obedecem à estatística de Fermi-Dirac. Uma vez que os grãos de poeira possuem carga elétrica variável, a emissão de elétrons deve ser perturbada para o caso em que a carga do grão é positiva. Pudemos constatar isto através das equações (4.78) e (4.79), que são zero quando a carga é negativa,

onde a perturbação da distribuição da poeira (4.64) foi utilizada.

As componentes  $\epsilon_{ij}^{EF}$  do tensor dielétrico, equação (4.134), são expressas na forma de duas contribuições,  $\epsilon_{ij\perp}^{EF}$  e  $\epsilon_{ij\parallel}^{EF}$ , correspondendo respectivamente aos casos de incidência perpendicular e paralela de radiação em relação a  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ . Nesta configuração, as expressões finais das componentes  $\epsilon_{ij\perp}^{EF}$  e  $\epsilon_{ij\parallel}^{EF}$  obtidas se expressam através de somatórias infinitas duplas e triplas sobre potências do raio de Larmor, assim como uma somatória sobre os coeficientes de acoplamento entre as cargas das diversas populações.

Nossa expectativa é de que o tensor dielétrico obtido, que leva em conta a emissão de fotoelétrons, possa ser utilizado para o estudo de propagação de ondas eletrostáticas e ondas eletromagnéticas em plasmas empoeirados. Por exemplo, no estudo de ondas de Alfvén com direção de propagação paralela ou oblíqua relativamente ao campo magnético local. O formalismo adotado abre a possibilidade de realizar estudos com distribuições maxwellianas ou supertérmicas de íons e elétrons, como é o caso de partículas supertérmicas presentes no vento solar, que obedecem a distribuições do tipo kappa isotrópicas e anisotrópicas. Numa publicação recente [10], consideramos este tipo de distribuição para íons uma vez ionizados e elétrons num plasma empoeirado com diversas populações de poeira. Somos motivados, então, a realizar no futuro próximo um estudo de efeitos causados pela fotoemissão de elétrons neste tipo de ambiente.

Se a análise dos efeitos de emissão fotoelétrica mostrar-se relevante, ficaremos motivados a incluir outros processos de emissão, citados no presente trabalho, pelo mesmo formalismo adotado.

# Apêndice A

## Emissão fotoelétrica

O modelo de Sommerfeld propõe que os estados de energia para elétrons livres num metal estão uniformemente distribuídos no espaço dos *momenta*, e que a probabilidade de ocupação de um estado é dada pela distribuição de Fermi-Dirac [38]

$$F(p') = \frac{2}{h^3} \left[ 1 + \exp \left( \frac{p'^2}{2m_e k_B T} - \frac{\varepsilon_F}{k_B T} \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.1})$$

em que  $m_e$  é a massa do elétron,  $h$  a constante de Planck,  $k_B$  a constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura do metal e  $\varepsilon_F$  a energia de Fermi. Então o número de elétrons por unidade de volume com componentes de momento nos intervalos  $p'_x$  a  $p'_x + dp'_x$ ,  $p'_y$  a  $p'_y + dp'_y$  e  $p'_z$  a  $p'_z + dp'_z$  é dado por

$$dN' = F(p') d\vec{p}' \quad (\text{A.2})$$

Definindo a direção  $z$  normal à superfície do material, numa aproximação semiclássica podemos dizer que

$$d\Sigma_s = \frac{p'_z}{m_e} dN' \quad (\text{A.3})$$

é a densidade de elétrons que atingem a superfície por unidade de área por unidade de tempo. Elétrons que tenham uma energia tal que

$$\frac{p_z'^2}{2m_e} > \psi$$

poderão escapar do metal, onde  $\psi$  é a energia requerida para um elétron sobrepor a barreira de potencial da superfície.

A incidência de radiação sobre a superfície do metal pode fazer com que os elétrons na superfície sejam emitidos, desde que a frequência  $\nu$  da radiação seja maior que a frequência de corte  $\nu_0$  característica do metal. Isto é conhecido como efeito fotoelétrico. O número de fotoelétrons emitidos deve ser proporcional ao número de fótons incidentes por unidade de área por unidade de tempo, que expressamos por  $\Lambda$ , que tem dimensão  $[l^2 t]^{-1}$ , onde  $[l]$  representa dimensão de comprimento e  $[t]$  dimensão de tempo. Se  $\beta$  é a razão do número

médio de elétrons na superfície por unidade de área por unidade de tempo que absorvem a energia de um fóton pelo produto do número de fótons incidentes por unidade de área por unidade de tempo com o número de elétrons incidentes na superfície por unidade de área por unidade de tempo por dentro do metal, a densidade de elétrons na superfície que pode levar à emissão fotoelétrica é

$$d\Sigma_{ph} = \beta\Lambda d\Sigma_s \quad (\text{A.4})$$

Devemos notar que o produto  $\beta\Lambda$  é uma grandeza adimensional, pois pelas definições de  $\beta$  e  $\Lambda$  dadas acima, temos que

$$[\beta\Lambda] = \frac{[l^2t]^{-1}}{[l^2t]^{-1}[l^2t]^{-1}} [l^2t]^{-1} = 1$$

As quantidades  $\beta$  e  $\Lambda$  dependem da frequência da radiação e  $\beta$  pode ser considerada como a probabilidade de absorção de um fóton por um elétron na superfície.

Os fotoelétrons emitidos terão uma energia tal que

$$\frac{p^2}{2m_e} = \frac{p'^2}{2m_e} - \psi + h\nu \quad (\text{A.5})$$

em que  $h\nu$  é a energia do fóton transmitida ao elétron. Se o material emissor possui um potencial eletrostático  $\varphi(r) > 0$ , fotoelétrons que não tenham energia maior que  $e\varphi(a)$  retornarão e serão capturados. Assim, o número de fotoelétrons emitidos por unidade de área por unidade de tempo é dado por

$$\Sigma_{ph} = \beta(\nu)\Lambda(\nu)\frac{2}{h^3} \int d\vec{p} \frac{p_z}{m_e} \Theta(p_z) \Theta \left\{ \frac{p^2}{2m_e} - e\varphi(a) \Theta[\varphi(a)] \right\} \left[ 1 + \exp \left( \frac{p^2}{2m_e k_B T_d} - \zeta \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.6})$$

em que  $\phi = \psi - \varepsilon_F$  é a função trabalho do material e

$$\zeta = \frac{1}{k_B T_d} (h\nu - \phi)$$

No caso de emissão por uma partícula esférica de raio  $a$  carregada com carga  $q$  uniformemente distribuída em sua superfície, o potencial eletrostático em sua superfície é dado por  $\varphi(a) = q/a$ . Se considerarmos incidência de radiação anisotrópica, somente um hemisfério da partícula é atingido. Definindo a direção  $z$  como a direção de propagação da radiação, e considerando que uma fração  $S_a$  da radiação incidente é absorvida, temos que a intensidade da radiação varia sobre a superfície, considerando a simetria azimutal, de acordo com

$$\Lambda(\nu) S_a \cos \theta \quad (\text{A.7})$$

onde  $\theta$  é a variável angular em relação ao eixo  $z$  e  $S_a$  o coeficiente de absorção da ra-

dição. Deste modo, devemos integrar sobre a superfície da esfera considerando o limite de integração  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Então, considerando que a componente do *momentum* normal à superfície da esfera é dada por  $\vec{p}'' \cdot \hat{r}$ , onde  $\hat{r}$  é um vetor unitário normal à superfície, podemos dizer que o número de fotoelétrons emitidos por uma partícula esférica por unidade de tempo é dado por

$$\Omega_{ph,q} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a \cos \theta \int d\vec{p}'' \frac{(\vec{p}'' \cdot \hat{r})}{m_e} \Theta \left[ \frac{p''^2}{2m_e} - \frac{eq}{a} \Theta(q) \right] F(p'') \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a \sin \theta \cos \phi \hat{x} + a \sin \theta \sin \phi \hat{y} + a \cos \theta \hat{z} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= a \cos \theta \cos \phi \hat{x} + a \cos \theta \sin \phi \hat{y} - a \sin \theta \hat{z} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= -a \sin \theta \sin \phi \hat{x} + a \sin \theta \cos \phi \hat{y} \\ \hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \end{aligned}$$

Integrando sobre as variáveis  $\theta$  e  $\phi$ , obtemos

$$\Omega_{ph,q} = \frac{2}{3} \pi a^2 \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a \int d\vec{p} \frac{p_z}{m_e} \Theta \left[ \frac{p^2}{2m_e} - \frac{eq}{a} \Theta(q) \right] F(p)$$

onde fizemos  $p'' \rightarrow p$ .

Podemos definir a quantidade

$$\sigma_{EF}(p, q) \doteq \frac{2}{3} \pi a^2 \Theta \left[ 1 - \frac{2m_e eq}{ap^2} \Theta(q) \right] \quad (\text{A.9})$$

como a seção de choque de fotoemissão, obtendo

$$\Omega_{ph,q} = \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a \frac{2}{h^3} \int d\vec{p} \sigma_{EF}(p, q) \frac{p_z}{m_e} \left[ 1 + \exp \left( \frac{p^2}{2m_e k_B T_d} - \zeta \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.10})$$

Escrevemos a expressão (A.7) de acordo com a teoria de Mie [42] de modo que  $S_a = S_e - S_s$ , sendo  $S_e$  e  $S_s$  os coeficientes de extinção e espalhamento respectivamente. O parâmetro  $\lambda$  é o comprimento de onda da radiação, e  $\mu$  o índice refrativo complexo do material. Para o caso em que  $2\pi a/\lambda \geq 10$ , pode-se considerar  $S_a \approx 1$ . Tabelas com valores de  $S_e$  e  $S_s$  com dependência em  $2\pi a/\lambda$  podem ser encontradas em [6, 51].

# Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover: Dover, 1970.
- [2] Akhiezer, A. I.; Akhiezer, I. A.; Polovin, R. V.; Sitenko, A. G.; Stepanov, K. N. *Plasma Electrodynamics*. Pergamon Press Ltd., 1975.
- [3] Bliokh, P. K.; Yaroshenko, V. V. Electrostatic waves in Saturn's rings. *Soviet. Astr. Engl. Transl.* v. 29, 330, 1985.
- [4] Brambilla, M. *Kinetic Theory of Plasma Waves: Homogeneous Plasmas*. Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [5] Dewdney, J. W. Energy distributions of photoelectrons from metals due to surface effect. *Phys. Rev.*, v. 125, n. 2, Jan. 15. 1962.
- [6] Dorschner, J. Theoretische Untersuchungen über den interstellaren Staub II. Optische Eigenschaften kugelförmiger Staubteilchen aus meteoritischen Silikaten und aus schmutzigem Eis. *Astron. Nachr.*, v. 292, n. 71. 1970.
- [7] Fortov, V. E.; Nefedov, A. P.; Vaulina, O. S.; Lipaev, A. M.; Molotkov, V. I.; Samaryan, A. A.; Nikitsk, V. P.; Ivanov, A. I.; Savin, S. F.; Kalmykov, A. V.; Solovev, A. Ya.; Vinogradov, P. V. Dusty plasma induced by solar radiation under microgravitational conditions: an experiment on board the Mir orbiting space station. *J. Exp. Th. Phys.*, 87(6), 1087-1097, Dez. 1998.
- [8] Gaelzer, R.; Juli, M. C. de; Schneider, R. S.; Ziebell, L. F. Obliquely propagating Alfvén waves in a Maxwellian dusty plasma. *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 51(1):015011, Jan. 2009.
- [9] Gaelzer, R.; Juli, M. C. de; Ziebell, L. F. The effect of superthermal electrons on Alfvén wave propagation in the dusty plasmas of solar and stellar winds. *J. Geophys. Res.* 115:A09109, Sept. 2010.
- [10] Galvão, R. A.; Ziebell, L. F.; Gaelzer, R.; Juli, M. C. de. The dielectric tensor for magnetized dusty plasmas with superthermal plasma populations and dust particles of different sizes. *Braz. J. Phys.*, accepted, Aug. 2011.

- [11] Goertz, C. K. Dusty plasmas in the solar system. *Rev. Geophys.*, v. 27, 271, 1989.
- [12] Goree, J. Charging of particles in a plasma. *Plasma Sources Sci. Technol.*, v. 3, 400, 1994.
- [13] Ignatov, A. M. Photoelectric charging of dust grains. *Plasma Phys. Rep.*, v. 35, n. 8, 647-650, 2009.
- [14] Juli, M. C. de; Schneider, R. S. The dielectric tensor for dusty magnetized plasmas with variable charge on dust particles. *J. Plasma Phys.*, 60(2):243-263, 1998.
- [15] Juli, M. C. de; Schneider, R. S. The spatial absorption of the magnetosonic waves in dusty magnetized plasmas. *J. Plasma Physics*, 64:57-56, 2000.
- [16] Juli, M. C. de. *Ondas em plasmas empoeirados magnetizados, com carga variável das partículas de poeira*. Tese de Doutorado. Instituto de Física - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.
- [17] Juli, M. C. de; Schneider, R. S.; Ziebell, L. F.; Jatenco-Pereira, V. Effects of dust-charge fluctuation on the damping of Alfvén waves in dusty plasmas. *Phys. Plasmas*, 12:052109, 2005.
- [18] Juli, M. C. de; Schneider, R. S.; Ziebell, L. F.; Gaelzer, R. Mode-coupling of low-frequency electromagnetic waves in dusty plasmas with temperature anisotropy. *Phys. Plasmas*, 14(2):022104, Feb. 2007.
- [19] Huang, K. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [20] Ignatov, A. M. The simplest model of a dust cloud in a plasma. *Plasma Phys. Rep.*, 24(8):677-683, 1998.
- [21] Jung, B. The origin of the solid particles in interstellar space. *Astron. Nachr.*, 263:426, 1937.
- [22] Klimontovich, Yu. L. *Kinetic Theory of Nonideal Gases & Nonideal Plasmas*. Pergamon Press Ltd., 1982.
- [23] Klumov, B. A.; Vladimirov, S. V.; Morfill, G. E. Features of dusty structures in the upper Earth's atmosphere. *JETP Lett.*, 82(10):632-637, 2005.
- [24] Klumov, B. A.; Vladimirov, S. V.; Morfill, G. E. On the role of dust in the cometary plasma. *JETP Lett.*, 85(10):478-482, 2007.
- [25] Krall, N. A.; Trivelpiece, A. W. *Principles of Plasma Physics*. McGrall-Hill, Inc., 1973.

- [26] Melandso, F.; Aslaken, T. K.; Havnes, O. A kinetic model for dust acoustic waves applied to planetary rings. *J. Geophys. Res.*, 98:13315, 1993.
- [27] Mendis, D. A.; Rosenberg, M. Cosmic dusty plasma. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 32:419-63, 1994.
- [28] Rosenberg, M.; Mendis, D. A.; Sheehan, D. P. Positively charged dust crystals induced by radiative heating. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 27(1):239-242, Feb. 1999.
- [29] <http://rosetta.jpl.nasa.gov/>
- [30] Samarian, A. A.; Vaulina, O. S. UV-induced Coulomb structure in discharge plasma. *Phys. Lett. A*, 278:146-151, Dec. 2000.
- [31] <http://saturn.jpl.nasa.gov/>
- [32] Schneider, R. S.; Ziebell, L. F.; Juli, M. C. de.; Jatenco-Pereira. V. Electrostatic waves in a Maxwellian dusty plasma with variable charge on dust particles. *Braz. J. Phys.* 36(3A):759-771, Sep. 2006.
- [33] Schram, P. P. J. M.; Sitenko, A. G.; Trigger, S. A.; Zagorodny, A. G. Statistical theory of dusty plasmas: Microscopic equations and Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon hierarchy. *Phys. Rev. E*, 63:016403, 2000.
- [34] <http://science.nasa.gov/>
- [35] <http://solarsystem.nasa.gov/>
- [36] Shukla, P. K.; Mamun, A. A. *Introduction to Dusty Plasma Physics*. IOP Publishing Ltd, 2005.
- [37] Sitenko, A. G. *Fluctuations and Non-Linear Wave Interactions in Plasmas*. Pergamon Press Ltd., 1982.
- [38] Sodha, M. S. Thermal and photoelectric ionization of solid particles. *Brit. J. Appl. Phys.*, 14:172-176, 1963.
- [39] Sodha, M. S.; Guha, S. Physics of colloidal plasmas. *Adv. Plasma Phys.*. Wiley, New York, v. 4, 219, 1971.
- [40] Sodha, M. S.; Misra, S.; Mishra, S. K. Charging of dust particles in an illuminated open complex plasma system. *Phys. Plasmas*, 16:123705, 2009.
- [41] Sodha, M. S.; Mishra, S. K.; Misra, S.; Srivastava, S. Hysteresis in photoelectric charging of dust particles in a complex plasma. *Phys. Plasmas*, 17:053706, 2010.

- [42] Sodha, M. S.; Mishra, S. K.; Misra, S. Kinetics of illuminated complex plasmas considering Mie scattering by spherical dust particles with a size distribution *Journal of Applied Physics*, 109:013303, 2011.
- [43] Trigger, S. A.; Schram, P. P. J. M. Kinetic theory of the charging process in dusty plasmas. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 32:234-239, 1999.
- [44] Tsytovich, V. N.; Havnes, O. Charging processes, dispersion properties and anomalous transport in dusty plasma. *Comm. Plasma Phys. Cont, Fusion*, 15(5):267-280, 1993.
- [45] Tsytovich, V. N. Dust plasma crystals, drops, and clouds. *Phys. Uspekhi*, 40(1):53-94, 1997.
- [46] Tsytovich, V. N.; de Angelis, U. Kinetic theory of dusty plasmas. I. General approach. *Phys. Plasmas*, 6(4), 1093-1106, Apr. 1999.
- [47] Tsytovich, V. N.; Morfill, G. E.; Thomas, H. Complex plasmas IV: Theoretical approaches to complex plasmas and their application. *Plasma Phys. Rep.*, 30(10):816-864, 2004.
- [48] Varma, R. K.; Shukla, P. K.; Krishan, V. Electrostatic oscillations in the presence of grain-charge perturbations in dusty plasmas. *Phys. Rev. E*, 47:3612, 1993.
- [49] Vladimirov, S. V. Propagation of waves in dusty plasmas with variable charges on dust particles. *Phys. Plasmas*, 1(8):2762-2767, 1994.
- [50] Vladimirov, S. V.; Ostrikov, K.; Samarian, A. A. *Physics and Applications of Complex Plasmas*. Imperial College Press, 2005.
- [51] Wikramasinghe, N. C. *Light Scattering Functions for Small Particles*. Wiley, New York. 1973.
- [52] Ziebell, L. F.; Schneider, R. S. The effective dielectric tensor for electromagnetic waves in inhomogeneous magnetized plasmas and the proper formulation in the electrostatic limit. *Braz. J. Phys.*, 34(3B):1211-1223, Sep. 2004.
- [53] Ziebell, L. F.; Juli, M. C. de; Schneider, R. S.; Jatenco-Pereira, V. Mode coupling of low frequency electromagnetic waves in magnetized dusty plasmas. *Phys. Plasmas*, 12(8):082102, 2005.
- [54] Ziebell, L. F.; Schneider, R. S.; Juli, M. C. de; Gaelzer, R. A new formulation for the dielectric tensor for magnetized dusty plasmas with variable charge on the dust particles. *Braz. J. Phys.*, 38(3A):297-322, Sep. 2008.