



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Ondas progressivas na Cromodinâmica Quântica de altas densidades aplicadas a processos inclusivos *

por

Eduardo André Flach Basso

Tese de doutorado realizada sob orientação da Prof^ª. Dr^ª. Maria Beatriz Gay Ducati e submetida ao Instituto de Física desta Universidade em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de

Doutor em Ciências

no

INSTITUTO DE FÍSICA

da

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Defesa pública realizada no dia 26 de Março de 2013, na Sala de Videoconferência do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, tendo composta a seguinte banca examinadora

- i Prof^ª. Dr^ª. Maria Beatriz Gay Ducati (Presidente)
- ii Prof. Dr. Carlos Alberto García Canal (Universidade Nacional de La Plata)
- iii Prof^ª. Dr^ª. Débora Peres Menezes (Universidade Federal de Santa Catarina)
- iv Prof. Dr. Emerson Gustavo de Souza Luna (Instituto de Física - UFRGS)
- v Prof. Dr. Leonardo Gregory Brunnet (Instituto de Física - UFRGS)

*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Flach Basso, Eduardo André

Ondas progressivas na Cromodinâmica Quântica de altas densidades aplicadas a processos inclusivos / Eduardo André Flach Basso. -- 2011.

131 f.

Orientadora: Maria Beatriz Gay Ducati.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Porto Alegre, BR-RS, 2013.

1. Cromodinâmica Quântica de altas densidades. 2. Formalismo de dipolos 3. Padrões de escalamento na QCD. 4. Método de Ondas Progressivas da QCD. 5. Produção inclusiva de partículas. I. Gay Ducati, Maria Beatriz, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tese de Doutorado

Ondas progressivas na Cromodinâmica Quântica de altas densidades aplicadas a processos inclusivos [†]

Eduardo André Flach Basso, M.Sc.

Tese realizada sob orientação da Professora
Dr^a. Maria Beatriz Gay Ducati e apresentada
ao Instituto de Física da UFRGS em preenchi-
mento aos requisitos para a obtenção do título
de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

Março, 2013

[†]Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Para Lisiane e David.

“The true delight is in the finding out rather than in the knowing.”

Isaac Asimov

Agradecimentos

É um tanto quanto difícil descrever a sensação de se chegar ao final de uma trajetória de doutoramento. É sempre um caminho muito enriquecedor, mas também de muito trabalho e dedicação. O avanço na compreensão do cosmos do qual fazemos parte, certamente é muito gratificante e empolgante. A orientação de pessoas qualificadas é fundamental nesse sentido, bem como é a dos familiares e amigos.

O convívio com todos os integrantes do Grupo de Fenomenologia de Partículas de Altas Energias foi uma experiência muito positiva. Agradeço a minha orientadora, Prof^a. Maria Beatriz Gay Ducati, pela maneira como conduziu o desenvolvimento deste doutoramento, com as exigências necessárias para o aluno solidificar o conhecimento geral da física de altas energias, bem como possibilitando a interação com alunos mais jovens e assim desenvolvendo o lado tutor. Cito ainda todos os outros ensinamentos prestados, não só a respeito de física mas também de vivência no meio científico. Agradeço também ao Prof. Magno Machado, que me ensinou a dar os primeiros passos na física de partículas, como co-orientador de iniciação científica, além de estar sempre a disposição para sanar dúvidas a respeito de temas correntes na literatura da física de altas energias.

Também os demais colegas de grupo: Carlos André, Emmanuel, Gustavo, Glauber, Mairon, Marcos André, Miriam, João Thiago, Luiz Fernando e Werner merecem agradecimentos, por todas as interações proporcionadas, tanto em nível acadêmico como fora deste, no futebol, cafés, churrascos, festas, etc. Em especial, quero agradecer ao colega Emmanuel Gräve de Oliveira, com quem trabalhei diretamente no decorrer do curso e com quem aprendi muito, tanto no que diz respeito a física presente no trabalho como em métodos numéricos para obtenção de resultados. Agradeço ainda ao aluno de Iniciação científica do GFP AE, Mateus Broilo, com o qual convivi durante o período de seu TCC, por ceder as figuras e resultados nos quais trabalhamos no desenvolvimento de seu trabalho.

Agradeço aos professores do Instituto de Física, que com sua dedicação inspiram os cientistas e professores do futuro. Em particular aqueles com quem mais tive contato: Ruth, Victória, Schneider, Ziebell e Alba; aulas extraordinárias e pessoas muito atenciosas com seus alunos. Também merecem ser lembrados os funcionários do IF-UFRGS pela dedicação em manter a qualidade de ensino da instituição.

Faço menção especial aos membros da banca: Prof. Carlos Alberto García Canal, Prof^a. Débora Peres Menezes, Prof. Emerson Luna e Prof. Leonardo Brunnet; pela disponibilidade de contribuir com a melhoria do trabalho.

I would also like to thank all the people involved in the ECT* 2012 Doctoral Training Program (DTP), specially the organizers: Prof. Mauro Anselmino (INFN-Turin) and Prof. Georges Ripka (CEA-Saclay). Also the lecturers that dedicated special time to all of us in the program. I am specially grateful to Prof. Marco Stratmann (Brookhaven National Laboratory), Marcus Diehl (DESY), Alessandro Bacchetta (Università di Pavia and INFN) and Abhay Deshpande (Stony Brook University

and RIKEN BNL), for the excellent lectures and discussions about specific issues, as well as for the company during the free time celebrations. My fellows in Trento: David, Felix, Frederik, Ilnur, Irina Brodski, Irina Potapova, Jasone, Jiakai, Jonathan, Josh, Mike, Tianbo, Tom and Viacheslav. The time I spent with you guys was really awesome! I mean both the time for science (including the outreach video sessions) and also the time for fun, on diners (and after the Werewolf rounds), travels, hikkings and so on.

Aos colegas e ex-colegas do Instituto de Física da UFRGS, em especial os colegas da sala M205 (*a mais divertida da PG-FIS*): Salete, Nemmem, Tibério, Rogério, Aninha, Mattei, Marla, Cristina, Kelly, Ney, Dinalva, Eliade, Rosana, Samuel, Leandro, Natália, Chiara, Alexandre, os Rafeais: Bordin, Barbosa e Pazim; além de muitos outros que não citei, mas que foram igualmente importantes. Os momentos de descontração e discussões científicas, regadas a café e/ou chimarrão, foram muito aprazíveis e proveitosos.

Por fim, mas não menos importante, devo agradecer ao apoio incondicional depositado em mim por parte de minha família, sem o qual este trabalho se tornaria imensamente mais custoso. Agradeço aos meus pais, David e Lise, aos meus irmãos Bárbara e Bernardo, e demais familiares pelo carinho e compreensão necessárias. Sou eternamente grato à minha esposa Lisiane e meu filho David. Juntos enfrentamos os desafios e alegrias de sermos pais em meio ao processo de pós-graduação. Sem o teu apoio, Lisiane, nada disso teria acontecido. Pela maneira que te postas frente a desafios como este é que vejo o quão especial tu és. Aos dois — Lisiane e David, agradeço pelos momentos agradáveis de convívio que alegraram minha vida e ajudaram a enfrentar as dificuldades dos compromissos profissionais.

Eduardo André Flach Basso

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Março 2013

Resumo

A investigação da física de saturação partônica em colisões de partículas de altas energias será o objetivo principal deste trabalho. Os fenômenos de saturação referem-se a processos de recombinação de pártons (quarks e glúons) que considera-se ocorram no limite de altas energias da Cromodinâmica Quântica (QCD), a fim de controlar o crescimento das densidades de pártons e manter unitárias as amplitudes de espalhamento. A evolução em energia das amplitudes que leva a este comportamento é não linear, sendo essas não linearidades responsáveis pela unitarização das amplitudes. Para realizar este estudo nos baseamos no formalismo de dipolos de cor, onde a evolução das amplitudes considera que glúons emitidos, no limite de grande número de cores, são equivalentes a pares de quark–antiquark. Assim, o que é considerado nos cálculos de amplitudes de espalhamento são as interações de tais dipolos com o alvo, sendo as coordenadas (momentum) transversas (os) dos dipolos e a energia as variáveis de interesse.

A equação mais simples para a evolução de dipolos é a equação de Balitsky e Kovchegov (BK), a qual não possui soluções analíticas conhecidas. Assintoticamente, entretanto, tais soluções podem ser obtidas por meio de uma conexão entre a QCD e processos de reação–difusão, onde se mostra que a equação BK está em classe de equivalência com a equação de Fisher, Kolmogorov, Petrovsky e Piscounov (FKPP), largamente estudada e que é conhecida por admitir soluções de ondas progressivas. Usando as soluções assintóticas da equação BK para o regime de grandes momenta transversos, juntamente com uma expressão que unitarize a amplitude na região não perturbativa é possível construir modelos para a amplitude de dipolos e assim descrever processos no regime de altas energias da QCD. Um exemplo disso é o modelo AGBS para amplitude de dipolos, em ordem dominante na constante de acoplamento forte, α_s , usada como parâmetro perturbativo, o qual será muito útil em nossas análises.

As maiores energias de centro de massa disponíveis atualmente se dão em colisões hadrônicas no LHC. Nesse sentido, buscamos neste trabalho aplicar a física de saturação na produção inclusiva de hádrons em colisões próton–próton e próton–núcleo, sob o ponto de vista de distintas fatorizações para seção de choque de produção: a fatorização híbrida mesclando as físicas colinear da evolução DGLAP e a física de saturação; e a fatorização k_t que considera a distribuição em momentum transverso para ambos os hádrons em colisão. Sob o ponto de vista da fatorização híbrida realizamos um ajuste global com a amplitude AGBS para dados de espalhamento profundamente inelástico (DIS) no colisor HERA em conjunto com os dados de produção de hádrons em colisões de íons pesados (Deutério–Ouro ou próton–próton) no colisor RHIC. Este ajuste teve resultados promissores e aparece como um dos poucos que conseguem uma boa descrição simultânea desses diferentes tipos de processos, podendo ser utilizado para explicar a física de partículas nas maiores energias atingidas em colisores, no caso no LHC.

Com base na fatorização k_t conseguimos uma melhor descrição dos dados de LHC em rapidez centrais, onde pudemos clarificar as distintas regiões cinemáticas onde cada fatorização se aplica. Além disso, conseguimos uma descrição muito boa dos recentes dados de colisões próton–chumbo no LHC. Comparando ambas fatorizações percebe-se que a fatorização k_t é adequada na descrição de dados em rapidez centrais, ao passo que a fatorização híbrida descreve muito bem os dados em rapidez frontais, onde a física de saturação tem relevante papel. Nós também fizemos predições para o fator de modificação nuclear R_{pA} usando seções de choque para a produção direta de fótons, a qual contém informações precisas sobre o estado inicial da colisão, uma vez que fótons não interagem por meio da força forte com o meio hadrônico formado no estado final. Com este observável nós esperamos reduzir os erros associados com correções de mais alta ordem no sentido de que tomamos razões entre seções de choque e os fatores K associados a estas quantidades devem ser cancelados. O modelo AGBS prevê uma forte supressão da razão nuclear em rapidez frontais, ao contrário das previsões baseadas na fatorização colinear.

Abstract

The main subject of this thesis is the investigation of the saturation physics in high energy particle collisions. The saturation phenomena refer to the processes of parton (quarks and gluons) recombination that are expected to happen in the high energy limit of the Quantum Chromodynamics in order to tame the fast growing of the parton density inside the hadrons, and thus keep the scattering amplitudes unitary. The energy evolution for the amplitudes leading to this behavior is nonlinear, being the nonlinearities responsible for the unitarization process. In order to investigate the saturation phenomena in high energy collisions we lay on the color dipole formalism, which is based on the t’Hooft large N_c limit and considers the gluons emitted as the energy increases as a quark-antiquark pair. Thus, a factorization emerges, where the probe is represented by the interaction of such dipole pair, end its energy evolution, with the target; and being the main variables the transverse size – and its conjugate transverse momentum.

The simplest evolution equation for the dipole amplitude is the Balitsky-Kovchegov (BK) equation, for which analytical solutions are not known. Asymptotically, however, it is possible to get information on its solutions, through a “mapping” of QCD into reaction-diffusion processes that put the BK equation equivalence class with the Fisher-Kolmogorov-Piscounov-Petrovsky (FKPP) equation. Such equation was largely studied in statistical physics problems and is known to admit traveling waves solutions. Using such BK asymptotic solutions to describe the large transverse momentum behavior, together with a expression that unitarizes the infrared region, it is possible to build models to the dipole scattering amplitude and thus describe the QCD processes at high energy. An example of such approach is the AGBS model for the dipole amplitude, that will be very useful in our analysis.

The largest center of momentum energies available nowadays in colliders involve hadron collisions at LHC. This way we will use such collisions as laboratory to investigate the saturation physics; particularly, we will focus on inclusive hadron production in proton-proton and proton-nucleus collisions, from the viewpoint of distinct factorizations for the production cross section: the hybrid one, merging the collinear physics of the DGLAP evolution equation for the projectile partons and the saturation physics in the dense targets; and the k_t factorization, treating both colliding hadrons as composite systems of partons with intrinsic transverse momentum. Within the hybrid formalism we performed a global analysis of the AGBS amplitude to the deep inelastic scattering (DIS) data coming from the collider HERA together with the inclusive production of hadrons in heavy ions collisions (proton-gold and proton-proton) at the RHIC. Such fit shows good results and emerges as one of few models that can accommodate simultaneously these distinct processes, and can be used to investigate the saturation physics in higher energies as those attained at the LHC.

Using the k_t factorization we got a better description of the central rapidity data measured at LHC, in comparison with the hybrid formalism, and thus we could map the distinct kinematic regions where each factorization applies. Besides that, under such factorization we could describe quite well the recently measured data in the proton-lead run at LHC. Comparing both factorization we realize that the k_t one is better suited to deal with central rapidity data – if both colliding hadrons can be considered in the small- x region, while the hybrid factorization accommodates very well the small- x physics of the fragmentation region of the hadrons, in the forward rapidities. We also have made predictions to the nuclear modification ratio R_{pA} using prompt photon production cross sections, that contains precise information on the initial state of the collision process once there is no strong interaction between the produced photon and the hadronic media in the final state. With this observable we expect the errors associated with higher order correction could be minimized, once we are taking cross section ratios and the K factors should cancel out. The AGBS predict a strong suppression of the nuclear ratio at forward rapidities, with is in opposite way as the collinear prediction.

Sumário

Agradecimentos	v
Sumário	ix
Lista de Tabelas	xi
Lista de Figuras	xii
Lista de Abreviaturas	xvi
Lista de Publicações	xvii
Introdução	1
1 A Cromodinâmica Quântica e o Espalhamento Profundamente Inelástico	9
1.1 A Cromodinâmica Quântica	9
1.2 Espalhamento Profundamente Inelástico	16
1.2.1 Variáveis cinemáticas	17
1.2.2 Modelo de pártons	19
1.2.3 DIS no referencial de dipolos de cor	22
1.2.4 F_2^p no espaço de momentum	23
1.3 F_2 na QCD e as equações DGLAP	25
2 A evolução no regime de altas energias e a saturação partônica	32
2.1 Colisões de hádrons em altas energias	32
2.1.1 Cinemática da colisão	32
2.2 Dinâmica BFKL	34
2.2.1 Dinâmica BFKL no formalismo de dipolos de cor	37
2.3 As correções de unitariedade	41
2.4 As equações de evolução não lineares	43
2.4.1 A equação de Balitsky e Kovchegov	44
2.4.2 A hierarquia de Balitsky	46
2.4.3 O Condensado de Vidros de Cor e a evolução JIMWLK	49

3 Ondas progressivas nas amplitudes de espalhamento para processos inclusivos	54
3.1 Formação de padrões na física de altas energias: o escalonamento geométrico	55
3.1.1 As Soluções de ondas progressivas da Equação BK	57
3.1.2 O modelo AGBS para a amplitude $\tilde{N}(k, Y)$	61
3.2 Produção inclusiva de hádrons no formalismo de CGC	62
3.3 Descrevendo a distribuição de hádrons com o modelo AGBS	68
3.3.1 Resultados para o ajuste simultâneo	71
3.3.2 Predições para o LHC	76
3.4 Produção de hádrons no formalismo de fatorização k_t	79
3.4.1 Resultados com a fatorização k_t	81
3.5 Produção inclusiva de fótons no formalismo do CGC	87
3.5.1 Resultados para fótons inclusivos no LHC	89
4 Conclusões e perspectivas	93
4.1 Perspectivas futuras	96
4.1.1 Ondas progressivas na presença de acoplamento dinâmico	96
Apêndice A A função de estrutura do próton no espaço de momentum	103
Apêndice B O Método de Ondas Progressivas da QCD e as Soluções Assintóticas da Equação BK	111
Referências Bibliográficas	119

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros extraídos do ajuste aos dados combinados de H1 e ZEUS (Aaron, 2010) para a função de estrutura do próton F_2 em HERA.	72
3.2	Parâmetros extraídos do ajuste simultâneo à função de estrutura do próton F_2^p de HERA (dados de H1 e ZEUS combinados (Aaron, 2010)) e ao campo de hádrons para colisões $d + Au$ em RHIC (dados de BRAHMS e STAR (Adams, 2006, Arsene, 2004)).	74
4.1	Parâmetros extraídos do ajuste dos modelos I e II para a amplitude dipolos com acoplamento dinâmico à função de estrutura do próton F_2^p de HERA (dados de H1 e ZEUS combinados (Aaron, 2010)).	101

Lista de Figuras

1	Constante de acoplamento para a interação forte entre quarks e glúons, tomada da Ref. (Beringer, 2012).	2
2	Diagrama qualitativo para as distintas evoluções partônicas no plano rapidez \times virtualidade ($Y = \ln 1/x \times \ln Q^2$).	5
1.1	Regras de Feynman para a QCD e QED em um calibre covariante (de Feynman). Os fótons são representados por linhas onduladas, glúons por linhas espirais, férmions por linhas sólidas e fantasmas por linhas tracejadas.	13
1.2	Polarização do vácuo do fóton.	15
1.3	Diagramas correspondentes às correções de um laço para a constante de acoplamento da QCD.	16
1.4	Processo de Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS) em ordem mais baixa (LO) em teoria de perturbação.	17
1.5	Visualização do DIS através do modelo de pártons: o fóton virtual interage com um dos objetos pontuais – pártons – que compõem o hádron.	20
1.6	Representação de um processo em DIS no referencial de dipolos de cor.	22
1.7	Contribuições de ordem $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ para o processo $ep \rightarrow eX$ não contidas no modelo de pártons: (a) Emissão de glúons pelos quarks e (b) Glúons no estado inicial.	25
1.8	Diagramas que contribuem ao processo γ^*q em ordem $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$	27
1.9	Distribuição de pártons em um próton em função da variável de Bjorken x (Aaron, 2010). Nota-se que para pequenos valores de x a distribuição de glúons xg domina (está dividida por um fator de 20) sobre as densidades de pártons de valência xu_v e xd_v . xg ainda é muito maior que a densidade de quarks de mar xS sobre uma grande região de valores da variável de Bjorken x , que também está dividida por 20.	30
2.1	Diagrama para a definição das variáveis no cone de luz. Um espalhamento em altas energias é visto como os hádrons seguindo em cada uma das coordenadas do cone de luz, v^- e v^+ respectivamente.	33
2.2	Diagrama para a escada efetiva de glúons BFKL. Cada nova “perna” da escada possui fração de momentum longitudinal muito distinta das demais, enquanto que os momenta transversos são semelhantes.	36

2.3	(a) Dipolo no estado inicial; (b) emissão de um glúon macio pelo quark e (c) pelo antiquark.	37
2.4	Diagramas que contribuem para $ \Psi^{(1)} ^2$	39
2.5	Representação da emissão de um glúon pelo dipolo.	40
2.6	Diagramas planares ($\mathcal{O}(g_s^4 N_c^2)$) e não planares ($\mathcal{O}(g_s^4)$). O últimos são suprimidos por um fator $1/N_c^2$, no limite de grande número de cores.	41
2.7	Emissão de dois glúons em sua interpretação no limite de grande número de cores.	42
2.8	Diagrama “fan” descrevendo as interações multi Pomerons em um processo tipo DIS. Do ponto de vista do alvo, a equação GLR descreve a fusão de duas escadas de glúons BFKL em uma.	43
2.9	Diagramas para a evolução da amplitude de dipolos: (a) contribuição em nível de árvore para o espalhamento com o dipolo “pai”; (b) correção virtual $-\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y$; (c) espalhamento de um dos dipolos “filhos”, $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y$ ou $\langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$; (d) espalhamento simultâneo de ambos os dipolos filhos, $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$; (e,f) um passo na evolução do alvo.	48
3.1	O Escalonamento geométrico observado nos dados de DIS em HERA mostra que a seção de choque de fotoprodução depende somente da razão $\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}$, onde $Q_s(Y)$ denota a escala oriunda de modelos de saturação, delimitando a região cinemática onde tais efeitos se tornam importantes. Nesse caso temos que o escalonamento vale para dados de DIS onde $x \leq 0.01$. Figura tomada da Ref. (Staśto et al., 2001).	56
3.2	O Escalonamento geométrico observado nos dados de colisões pp medidos pela colaboração CMS no LHC (Khachatryan, 2010a,b). Figura tomada de (Praszalowicz, 2011).	57
3.3	Produção de um quark e um glúon incluindo espalhamentos múltiplos no alvo.	63
3.4	Espalhamentos múltiplos de um quark ou glúon com o alvo.	63
3.5	Diagramas representando as amplitudes M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c) e M_4 (d).	65
3.6	Representação gráfica da seção de choque (3.55) para o espalhamento Deutério–Ouro.	68
3.7	Comparação das distintas formas para obtenção das representações fundamental e adjunta da amplitude AGBS no espaço de coordenadas.	70
3.8	Resultados para o campo de hádrons carregados e píons neutros obtidos no RHIC para colisões $d + Au$, advindos do ajuste simultâneo do modelo AGBS aos dados de RHIC (Adams, 2006, Arsene, 2004) e HERA (Aaron, 2010). Em 3.8(a) temos a presença dos dados de rapidez média ($y_h \geq 1.0$), enquanto que em 3.8(b) somente os dados de rapidez frontais são incluídos.	73
3.9	Resultados para o campo de hádrons carregados e píons para colisões $p + p$, advindos do ajuste simultâneo do modelo AGBS aos dados de RHIC e HERA.	74
3.10	Predições realizadas com base no presente ajuste para a distribuição em p_t de hádrons produzidos em colisões $p + p$ and $p + Pb$ no LHC. Foi usado $A_{\text{eff}} = 20$ para alvos de chumbo.	76

3.11	Predições do modelo AGBS aos dados para o campo de hádrons carregados de LHC para colisões $p + p$ nas energias $\sqrt{s} = 0.9, 2.36$ e 7 TeV. Os pontos experimentais são do experimento CMS para o intervalo $ \eta < 2.4$ (Khachatryan, 2010a,b).	77
3.12	Predições do modelo AGBS para a razão nuclear R_{pA}^{ch} no caso produção de hádrons carregados em $\sqrt{s} = 5.02$ TeV no LHC.	78
3.13	Predições do modelo rcBK para a razão nuclear R_{pA}^{ch} no caso produção de hádrons carregados em $\sqrt{s} = 5.02$ TeV no LHC (Rezaeian, 2013).	79
3.14	(a) Amplitude AGBS no espaço de momentum e (b) a respectiva distribuição de glúons não integrada UGD para o próton.	81
3.15	Descrição dos valores obtidos do modelo KMR (pontos) (Ryskin et al., 2011) para a seção de choque não difrativa com a modelagem $\sigma_{\text{nsd}} = \pi b_{\text{max}}^2$, onde $b_{\text{max}} = a + b \log(s)$, com os respectivos valores das constantes a e b para cada parametrização do modelo.	83
3.16	Distribuição de hádrons produzidos em rapidez centrals em diferentes energias. A melhor descrição ocorre para $a \approx 0.15$ e $b \approx 0.2$. Os dados foram tomados de (Aamodt, 2010a,b, Abe, 1990, Khachatryan, 2010a,b, Rossi et al., 1975).	84
3.17	Comportamento esquemático do fator de modificação nuclear $R_{F_2}^A(x, Q)$ em função de x para um dado valor de Q . Figura tomada da Ref. (Eskola et al., 2009).	85
3.18	Distribuições em p_t e η para produção de hádrons carregados no LHC em colisões $p + p$ nas energias de $0.9, 2.36$ and 7 TeV (Khachatryan, 2010a,b). A normalização usada segue πb_{max}^2 , com b_{max} tomado da figura 3.15. Deve-se notar que usando a normalização da figura 3.16 pode-se descrever os dados com valores menores, da ordem da unidade, para os fatores K	86
3.19	Distribuição em pseudorapidez para os hádron carregados medidos em colisões $p + Pb$ no LHC (Abelev, 2013).	87
3.20	Diagramas, com os respectivos momenta da partículas, contribuindo para a produção inclusiva de fótons em ordem dominante. Em (a) temos o diagrama para a fragmentação de um fóton pelo quark no estado final; e em (b) a contribuição da produção do fóton direto pelo quark antes da interação.	89
3.21	Predições do modelo AGBS para o fator de modificação nuclear em processos de produção inclusiva de fótons em colisões próton-chumbo a 5.02 TeV.	90
3.22	Predições do modelo rcBk para o fator de modificação nuclear em processos de produção inclusiva de fótons em colisões próton-chumbo a 5.02 TeV (Rezaeian, 2013).	90
3.23	Razão entre a produção inclusiva de fótons e píons neutros a $\sqrt{s} = 5.02$ TeV de energia de centro de massa em colisões próton-próton e próton-chumbo, para distintos valores de pseudorapidez.	92
4.1	Predições para a produção inclusiva de hádrons na energia de centro de massa de 14 TeV para ambas fatorizações k_t e híbrida.	95
4.2	Modelo I para a amplitude de dipolos com acoplamento dinâmico (Rocha, 2011).	99
4.3	Modelo II para a amplitude de dipolos com acoplamento dinâmico (Rocha, 2011).	100

4.4	Resultado do ajuste do Modelo I para a amplitude de dipolos com acoplamento dinâmico aos de DIS para a função de estrutura do próton medidos em HERA (Aaron, 2010). . .	101
B.1	Evolução de uma frente de onda no tempo (ou rapidez) e a formação de uma onda progressiva.	115

Lista de Abreviaturas

AGBS de Santana Amaral–Gay Ducati–
Betemps–Soyez

AGL Ayala–Gay Ducati–Levin

ALICE A Large Ion Collider Experiment

ATLAS A Toroidal LHC Apparatus

BFKL Balitsky–Fadin–Kuraev–Lipatov

BK Balitsky–Kovchegov

CGC Color Glass Condensate

CMS Compact Muon Solenoid

DESY Deutsches Elektronen-Synchrotron

DGLAP Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–
Parisi

DIS Deep Inelastic Scattering

DLLA Double Leading Logarithm Approxima-
tion

FF Fragmentation Functions

GLR Gribov–Levin–Ryskin

HERA Hadron Elektron Ring Anlage

JIMWLK Jalilian-Marian–Iancu–McLerran–
Weigert–Leonidov–Kovner

KMR Khoze–Martin–Ryskin

LHC Large Hadron Collider

LLA Leading Logarithm Approximation

LO Leading Order

NLO Next to Leading Order

OPE Operator Product Expansion

PDF Parton Distribution Functions

QCD Quantum Chromodynamics

QED Quantum Electrodynamics

RHIC Relativistic Heavy Ion Collider

SLAC Stanford Linear Accelerator Center

TMD Transverse Momentum Distribution

UGD Unintegrated Gluon Distribution

Lista de Publicações

Artigos arbitrados em revistas indexadas:

- E. A. F. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, *Inclusive hadron and photon production at LHC in dipole momentum space*, **Phys. Rev. D** **87**, 074023 (2013).
- E. A. F. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, *Momentum space saturation model for deep inelastic scattering and single inclusive hadron production*, **Phys. Rev. D** **84**, 034024 (2011).
- E. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, and J. T. de Santana Amaral, *DIS and the effects of fluctuations: A Momentum space analysis*, **Eur. Phys. J. C** **58**, 9 (2008).

Proceedings em eventos internacionais:

- E. A. F. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, *Momentum space amplitude for DIS and hadron production*, submetido a **Proceedings of Science** como parte da contribuição à conferência ICHEP2012, Melbourne, Australia.
- E. A. F. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, *Global analysis of HERA and RHIC data with a momentum space dipole model*, **AIP Conf. Proc.** **1523**, pp. 339-342 (2013). Contribuição à conferência DIFFRACTION 2012, Ilhas Canárias, Espanha.
- E. A. F. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, *Momentum space dipole amplitude for DIS and inclusive hadron production*, **AIP Conf. Proc.** **1520**, pp. 148-153 (2012). Contribuição à conferência XII HADRON PHYSICS, Bento Gonçalves, Brasil.
- E. A. F. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, *Hadron production at LHC in dipole momentum space*, **AIP Conf. Proc.** **1520**, pp. 291-293 (2012). Contribuição à conferência XII HADRON PHYSICS, Bento Gonçalves, Brasil.
- E. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, J. T. de Santana Amaral, *Dipole scattering amplitude in momentum space: Investigating fluctuations at HERA*, **Braz. J. Phys.** **38**, 483 (2008). Contribuição à conferência II LAWHEP, São Miguel das Missões, Brasil.

Introdução

Colisões de partículas em altas energias proveram os físicos de informações sobre a estrutura da matéria nas menores escalas já estudadas. A partir do início do século XX, com as experiências de Geiger, Marsden ([Geiger & Marsden, 1909](#)) e Rutherford ([Rutherford, 1911](#)) que colidiam partículas alfa com átomos de ouro, que terminaram por indicar a presença de um núcleo atômico diversas vezes menor que a estrutura atômica, uma sucessão de distintas colisões revelando os detalhes dos constituintes do Universo foi realizada. Nesta evolução temporal, a escala do que é considerado alta energia foi diversas vezes deslocada, acompanhando o próprio desenvolvimento tecnológico envolvido na criação de novos colisores e detectores. Após a descoberta do núcleo atômico, então composto por prótons e depois por nêutrons (descoberta devida a Chadwick ([Chadwick, 1932a,b, 1933](#))), famílias completas de partículas subatômicas foram identificadas nas décadas seguintes.

A proliferação de partículas ditas elementares levou à hipótese de que existiria alguma subestrutura desconhecida até então, assim como os átomos puderam ser organizados na tabela periódica de Mendeleiev. Independentemente, Gell-Mann ([Gell-Mann, 1964](#)) e Zweig ([Zweig, 1964a,b](#)) desenvolveram o modelo de quarks, que reconhece os **léptons** como partículas fundamentais (sem subestrutura) que não interagem com a força nuclear forte, como por exemplo elétron, neutrino do elétron, ...; e os **hádrons** como partículas que interagem por meio da força nuclear forte, sendo estruturados em termos dos quarks fundamentais e divididos em **bárions** compostos por três quarks (como o próton, o nêutron, ...) e **mésons** compostos por um quark e um antiquark (como o pión, káon, ...).

No início, apenas três tipos de quarks foram identificados: *up*, *down* e *strange*; o próton seria composto por dois quarks *up* e um *down*, enquanto que no caso do nêutron seriam dois quarks *down* e um *up*. Posteriormente, e em distintos colisores e períodos de tempo, foram descobertos mais três diferentes *sabores* para os quarks: *charm*, *bottom* e *top*.

Estudando o espalhamento profundamente inelástico (DIS) de um elétron por um hádron (usualmente um próton), Bjorken ([Bjorken, 1969](#)) previu o que é conhecido hoje como escalonamento de Bjorken, segundo o qual a seção de choque para altas energias em colisões hadrônicas seria independente de qualquer escala. Confirmado por experimentos no Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), tal escalonamento seria mais facilmente explicado se os hádrons fossem compostos de partículas pontuais livres, ou seja, que não envolvessem escala alguma, mas que levassem consigo uma fração de momento do hádron que compunham. Feynman ([Feynman, 1969](#)) chamou estes constituintes de *pártons* e logo eles foram identificados com os quarks, já que todos os números quânticos eram compatíveis.

Entretanto, apenas os quarks não conseguiam descrever todo o momentum dos hádrons quando aplicadas as regras de soma de momentum sobre tais pártons. Assim propôs-se a existência de bósons mediadores para a interação entre os quarks, os quais foram denominados glúons.

Em meio aos experimentos posteriores verificou-se que nunca era possível observar um quark livre⁰. Assim o desenvolvimento da teoria de campos para a força forte deveria levar em conta esse confinamento dos pártons no interior dos hádrons, além do escalonamento de Bjorken, que previa para altas escalas de energia (mais precisamente, altas virtualidades da partícula sonda) o quase desaparecimento da interação; ou seja, para altas transferências de momentum entre a sonda e o núcleon, os pártons se comportavam como livres, daí o termo liberdade assintótica.

Atualmente é aceito na comunidade científica que a teoria de campos que descreve de forma satisfatória as interações fortes entre quarks e glúons é a Cromodinâmica Quântica (QCD) (Collins, 2011, Greiner et al., 2007, Halzen & Martin, 2008, Muta, 2009). Esta é uma teoria não abeliana construída com base no grupo de simetria SU(3) para uma nova carga, que foi nomeada carga de cor. Assim os glúons são os portadores da carga de cor entre os quarks fundamentais, sendo que os hádrons observados são *incolores*. Para o desenvolvimento de tal teoria foi fundamental a demonstração de que teorias de calibre não abelianas eram capazes de reproduzir a liberdade assintótica, realizada simultaneamente por Gross e Wilczek (Gross & Wilczek, 1973) e por Politzer (Politzer, 1973). Na figura 1, para a constante de acoplamento da força forte, pode-se ver como a QCD descreve ambas regiões de confinamento e liberdade assintótica para pequenas e grandes escalas de momentum, respectivamente.

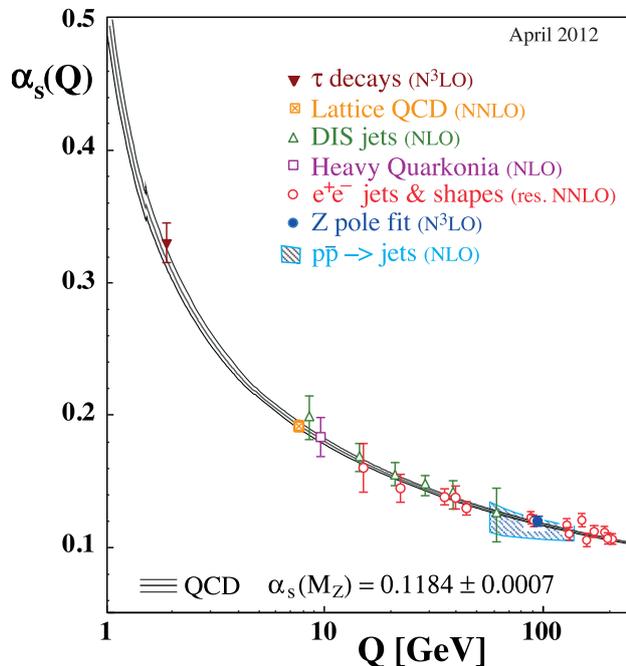


Figura 1: Constante de acoplamento para a interação forte entre quarks e glúons, tomada da Ref. (Beringer, 2012).

Como vimos os hádrons observados não tem cor, resultado do confinamento dos pártons que os compõem. Muito embora se sabia que os hádrons são formados por pártons (quarks e glúons),

⁰Daí o nome glúon para o bóson mediador, pois este seria um espécie de grude que não permitiria que os quarks existissem a longas distâncias.

a distribuição destes no interior hadrônico só pode ser investigada por meio de colisões envolvendo tais hádrons (*e.g.*, colisões ep , νp , ...), já que nunca foram observados pártons livres. Isso, embora corrobore a teoria do confinamento e liberdade assintótica da QCD, faz com que a única maneira de se estudar os pártons seja por meio de esquemas de fatorizações: as seções de choque se separam na seção de choque para o processo caracterizado pela escala dura (grande virtualidade, pertindo uso de QCD perturbativa); convoluida com uma função de distribuição de pártons no interior dos núcleons, a qual é intrinsecamente não perturbativa, porém universal, sendo obtida por análise global de uma gama a de processos. Uma grande parte dos avanços teóricos têm se dado no estudo das equações de evolução, nas escalas relevantes aos processos de interesse, para a determinação das distribuições de pártons no interior dos hádrons.

Na QCD perturbativa, tal evolução pode ser representada pelas equações propostas por Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) (Altarelli & Parisi, 1977, Dokshitzer, 1977, Gribov & Lipatov, 1972), segundo a qual a evolução em termos da variável virtualidade Q^2 , que está relacionada ao momentum trocado entre as partículas durante a interação. Durante a evolução, a emissão de novos pártons é descrita em termos de uma cascata partônica, com um forte ordenamento nos momenta transversos \mathbf{k} dos pártons emitidos no interior da cascata. Devido a este ordenamento, o formalismo DGLAP é válido na região cinemática $\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \approx 1$, $\alpha_s \ll 1$ e $\alpha_s \ln(1/x) \ll 1$, onde x é a variável de Bjorken, que representa a fração de momentum do parton original e Q_0 é uma escala de momentum que permite o uso de QCD perturbativa. Assim, as equações DGLAP são válidas na região de valores de Q^2 não muito baixos ($Q^2 \gtrsim 1 \text{ GeV}^2$, onde a QCD perturbativa é aplicável) e também numa região de x não muito pequena ($x \gtrsim 0.001$). No limite de pequeno x , esta evolução considera os termos dominantes neste regime — $1/x$, na aproximação de duplo logaritmo dominante (DLLA), a qual soma termos da ordem de $[\alpha_s \ln(1/x) \ln Q^2]^n$ com forte ordenamento na variáveis x e \mathbf{k} e faz com que as distribuições cresçam rapidamente quando $x \rightarrow 0$.

A análise da região cinemática de pequeno x , que corresponde a valores muito grandes da energia total s e valores moderados de Q^2 , é considerada na evolução proposta por Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) (Balitsky & Lipatov, 1978, Fadin et al., 1975, Kuraev et al., 1976, 1977). Esta equação soma diagramas que contribuam com termos da ordem $[\alpha_s \ln(1/x)]^n$, com $\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1$ e $\alpha_s \ln(1/x) \approx 1$. Nesta região, a aproximação de duplo logaritmo dominante deixa de ser válida e devemos então considerar termos dominantes em $\ln(1/x)$, com a dependência completa em Q^2 mantida, de forma que o forte ordenamento nos momenta transversos, característico da dinâmica DGLAP, resulta ser atenuado; e uma integração sobre todo o espaço de fase dos momenta transversos deve ser incluída. Como resultado, a evolução das densidades partônicas ocorre em função da variável x , para valores pequenos de x . A evolução acontece agora para valores fixos de virtualidade Q^2 , de forma que na medida em que a energia aumenta, a densidade de pártons aumenta e como a visualização do processo se dá com escala fixa (Q^2 fixo), estes pártons começam a se sobrepor até o ponto onde o chamado limite de disco negro é atingido. Com isto, vemos que tanto a evolução DGLAP quanto a BFKL levam ao crescimento das distribuições de pártons, no limite de altas energias ($s \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow 0$), de forma que devem ser incluídos mecanismos que controlem tal crescimento. Estes mecanismos devem

considerar que, na região de pequeno x , efeitos de múltiplos espalhamentos e recombinação partônica ocorram, levando à saturação das distribuições.

A forma encontrada para incluir os efeitos de saturação partônica — e também de unitariedade — na evolução em altas energias foi incluir termos não lineares nas equações, em adição aos já encontrados nas evoluções lineares DGLAP e BFKL, que considerem justamente os efeitos citados acima e esperados nesta região. Diversas equações foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas, dentre as quais cabe salientar o trabalho de Gribov, Levin e Ryskin de 1983, que deu origem a equação de evolução GLR (Gribov et al., 1983). Esta equação prevê a recombinação de pártons, além da emissão já prevista em DGLAP e BFKL, para sistemas de alta densidade na QCD perturbativa, por meio da inclusão de diagramas multi-escada — conhecidos também como diagramas “fan”, por lembrarem a forma de uma hélice de ventilador. Outra equação que visa a unitarização foi obtida em 1997 através do formalismo desenvolvido por Ayala, Gay Ducati e Levin, resultando na equação de evolução AGL (Ayala et al., 1997, 1998), que ressona a troca de múltiplos diagramas de escadas gluônicas, na aproximação de duplo logaritmo dominante (DLA). Isto é feito com o uso da abordagem de Glauber para a QCD perturbativa, considerando a interação dos pártons mais rápidos da escada com o alvo. Em determinados limites cinemáticos, o formalismo AGL recai nas equações DGLAP e na equação GLR.

Um outro formalismo apropriado para investigar os efeitos de unitariedade das seções de choque em altas energias foi desenvolvido por Mueller (Mueller, 1994) e, independentemente, por Nikolaev e Zakharov (Nikolaev & Zakharov, 1991, 1992), na década de 1990. Tal formalismo baseia-se no referencial de dipolos de cor, no qual o DIS ocorre por meio do desdobramento do fóton virtual — que prova o alvo — em um par quark-antiquark $q\bar{q}$, sendo que este último é que interage com o alvo. Usando este formalismo, Kovchegov (Kovchegov, 1999, 2000) obteve uma equação não linear que generaliza a equação BFKL — em sua representação de dipolos de cor, pela inclusão de um termo que unitariza-a no limite de altas energias. Balitsky obteve em trabalhos anteriores a mesma equação (Balitsky, 1996), com o uso da Expansão do Produto de Operadores (OPE) na QCD, obtendo uma hierarquia para a evolução de operadores de linhas de Wilson. Neste sentido a equação de Kovchegov é obtida na aproximação de campo médio para o operador correspondente à densidade de dipolos. Atualmente a equação obtida nesta aproximação é conhecida como equação de Balitsky e Kovchegov, que considera a interação dipolo-alvo através da evolução do dipolo original, quando ocorre a formação de uma cascata de dipolos pelas sucessivas emissões de glúons — os quais podem ser interpretados como pares de quark-antiquark no limite de grande número de cores. Desta forma obtém-se uma equação não linear que unitariza e regulariza as divergências infravermelhas da equação BFKL na aproximação de logaritmo dominante (LLA) $\ln(1/x)$.

O formalismo desenvolvido para a descrição do regime saturado das amplitudes de espalhamento é o Condensado de Vidros de Cor (CGC), o qual se baseia no formalismo semiclássico de McLerran e Venugopalan MV (McLerran & Venugopalan, 1994a,b), que considera a diferença de escalas entre os pártons rápidos (quarks de valência) e glúons macios no interior do núcleo, permitindo a interpretação dos primeiros como fontes estáticas de cor. A medida que a energia aumenta, mais fontes são geradas e efeitos quânticos se tornam mais importantes. Tais efeitos são introduzidos na evolução por meio da

equação funcional não linear desenvolvida por Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov e Kovner (JIMWLK) (Ferreiro et al., 2002, Iancu et al., 2001a,b, Jalilian-Marian et al., 1997, 1998, Weigert, 2002). Essa equação recai, no limite de grande número de cores, na hierarquia de equações de Balitsky, de forma que é comum o uso do termo equações B-JIMWLK para a evolução das amplitudes de dipolos em altas energias. A figura 2 ilustra qualitativamente como se dá a evolução das densidades partônicas em um hádron no plano definido pelas variáveis rapidez $Y = \ln 1/x$ e virtualidade Q^2 , onde estão sinalizadas as regiões de validade das distintas equações de evolução supra citadas.

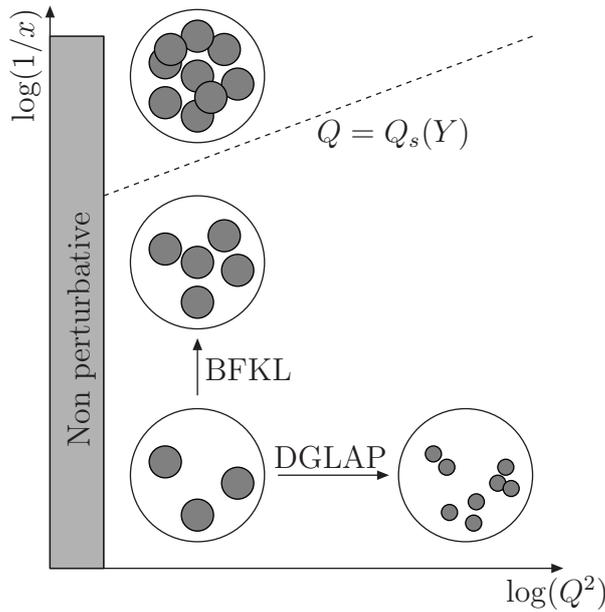


Figura 2: Diagrama qualitativo para as distintas evoluções partônicas no plano rapidez \times virtualidade ($Y = \ln 1/x \times \ln Q^2$).

Enquanto estes desenvolvimentos eram feitos, Golec-Biernat e Wüsthoff (Golec-Biernat & Wüsthoff, 1998) constataram que os efeitos de unitarização poderiam ser realmente vistos nos processos de DIS para o espalhamento elétron–próton no experimento Hadron Electron Ring Accelerator (HERA), do laboratório DESY, em Hamburgo. O modelo proposto por eles — modelo GBW, para a seção de choque de dipolos $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}$, apontou para uma nova forma de escalonamento das seções de choque, o escalonamento geométrico, que foi realmente observada nos experimentos de HERA. Esta forma empírica de escalonamento prediz que em altas energias a seção de choque para o processo elétron–próton $\sigma^{\gamma^*p}(Y, Q^2)$ — a qual está relacionada à $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(Y, Q^2)$, deve depender apenas da variável de escalonamento $\tau = Q^2/Q_s^2(Y)$, e não de forma independente de Q^2 e da variável rapidez $Y = \ln(1/x)$. Desta forma, a escala de saturação Q_s define a região no espaço de fase onde os efeitos de saturação se tornam importantes.

Soluções numéricas para a equação de evolução BK já existem na literatura (Enberg et al., 2005), mas soluções analíticas são difíceis de obter. Uma maneira de contornar este problema é fazer uma correspondência entre a evolução da QCD em altas energias com processos de reação–difusão, muito estudados em física estatística. Neste sentido, Munier e Peschanski (Munier & Peschanski, 2003, 2004a) mostraram que perante uma mudança de variáveis e uma aproximação difusiva para o núcleo

BFKL, a equação BK está em classe de equivalência com a equação desenvolvida por Fisher (Fisher, 1937) e, independentemente, por Kolmogorov, Petrovsky e Piscounov (Kolmogorov et al., 1937), para descrever problemas de genética e conhecida como equação FKPP. Esta equação possui a propriedade de admitir soluções de ondas progressivas, que nas variáveis da QCD, representam o escalonamento geométrico para as amplitudes de espalhamento da equação BK (Munier & Peschanski, 2003).

Tais soluções assintóticas são bastante estudadas e compreendidas a nível teórico, mas pouco utilizadas em fenomenologia. Vamos nos munir do modelo AGBS para a amplitude de dipolos, desenvolvido por Amaral, Gay Ducati, Betemps e Soyez (Santana Amaral et al., 2007) e que foi originalmente ajustado à dados de DIS em HERA, utilizando-o para investigar efeitos de saturação nos dados inclusivos para o campo de hádrons em colisões de íons pesados. O formalismo usado para descrever tais processos é o do Condensado de Vidros de Cor (CGC) que considera o alvo como um sistema denso de fontes de campos de cor, dominados principalmente por glúons.

A importância da física de saturação para as colisões de íons pesados é que, sendo responsável por efeitos de estado inicial, esta fornece as condições iniciais para a descrição dos fenômenos ocorrendo logo após a colisão. Por outro lado, como atualmente este tipo de colisão fornece as maiores energias de centro de momento, é este um bom meio de investigar a física de saturação partônica e suas consequências para os observáveis em colisores como o RHIC e o LHC.

O presente trabalho tem por finalidade estudar a física de saturação partônica nas energias alcançadas em colisores como o RHIC (Relativistic Heavy Ion collider) e o LHC (Large Hadron Collider) – os quais não usam uma sonda livre dos efeitos da força forte, como o elétron, e sim colidem hádrons (próton e núcleos). Testaremos a evolução no formalismo de dipolos contida no modelo AGBS, usando dois esquemas de fatorização:

- Usando a fatorização "híbrida" (Jalilian-Marian & Kovchegov, 2004), que considera a evolução DGLAP para os pártons no interior do projétil por meio das distribuições colineares de pártons PDFs, enquanto o alvo – a interação com este – é tratado segundo o formalismo do Condensado de Vidros de Cor. Primeiramente mostramos como descrever analiticamente o modelo AGBS (e outros modelos derivados da equação BK no espaço de momentum) no mesmo espaço de Fourier da fatorização híbrida, uma vez que a equação BK é escrita num particular espaço de momentum a ser detalhado posteriormente. Na parte de comparação com os dados buscamos manter o modelo AGBS vinculado aos dados de DIS ao mesmo tempo em que descrevíamos as colisões hadrônicas. Assim, neste trabalho realizamos uma análise global dos dados de DIS obtidos do colisor HERA, e dos dados de produção inclusiva de hádrons do colisor RHIC. Os resultados foram promissores, mostrando a robustez do modelo, que agora tem potencial para a descrição da física de LHC no formalismo de dipolos. Durante os últimos anos muitas tentativas de tais ajustes simultâneos foram realizadas, mas estes foram apenas parcialmente satisfatórios. Usando uma fatorização da mesma origem, fizemos previsões para os fatores de modificação nuclear em energias de LHC, usando para isso seções de choque de produção de fótons diretos. Estes são sondas muito boas para estudos de física de estado inicial, uma vez que não interagem por meio da força forte com o meio hadrônico formado após a colisão. Nesta análise, o modelo AGBS prevê, como outros modelos de saturação, uma grande supressão na razão nuclear em

rapidezes frontais. Isto pode ser usado como forma de verificar a presença ou não da física de saturação partônica nas energias atingidas no LHC, na comparação com a física colinear, codificada nas PDFs, que não preveem tal supressão.

- Com o uso da fatorização k_t (Braun, 2000a,b, Kovchegov & Tuchin, 2002), a qual considera a distribuição de glúons não integrada (UGD) – em momentum transversal k_t – em cada hádron em colisão. Tal fatorização permite um estudo mais profundo nas pequenas escalas de momentum transversal dos hádrons produzidos, região onde a maior parte das partículas são produzidas e onde a física de saturação tem papel importante, do ponto de vista teórico. Esse é um fator diferencial em comparação com o formalismo híbrido, onde há a limitação de se trabalhar com escalas de momentum maiores que 1 GeV imposta pelas PDFs. Além disso, as UGDs aparecem naturalmente na evolução de pequeno x – como a BFKL e BK, porém a descrição de observáveis com pequeno momentum transversal implica adentrarmos em regiões onde a QCD perturbativa não é mais válida, mas podemos usar alguns cortes na constante de acoplamento forte que entra nos cálculos de forma que evitemos problemas desta natureza. Usando esta fatorização conseguimos melhorar a descrição dos dados de colisões próton-próton no LHC, em comparação com os resultados obtidos com a fatorização híbrida. Conseguimos ainda uma descrição muito boa das regiões cinemáticas de pequeno x presentes nos dados recentemente divulgados pela colaboração ALICE no LHC para colisões próton-chumbo, o que corrobora ainda mais a importância do uso do modelo AGBS na descrição de observáveis em energias na escala de Tera elétron-Volts (TeV).

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1, apresentamos os aspectos básicos da QCD perturbativa, bem como do espalhamento profundamente inelástico necessários à compreensão dos capítulos seguintes. Em relação ao DIS, apresentamos também a interpretação deste por meio do modelo de pártons, além de sua descrição no referencial de dipolos de cor. Em seguida apresentamos as correções de QCD para os diagramas contribuindo nos cálculos da função de estrutura, terminando por apresentar a dinâmica DGLAP para a evolução das densidades de pártons no interior dos hádrons.

No capítulo 2 veremos como se dá a evolução das densidades em função da variável de Bjorken x , com vistas a descrever o forte crescimento das densidades partônicas para altas energias. A seguir veremos como os efeitos de unitariedade se fazem necessários na descrição dos processos em energias muito altas. Em seguida apresentamos algumas equações de evolução não lineares desenvolvidas para este fim, onde enfatizamos a descrição das equações desenvolvidas com base no formalismo de dipolos de cor, apresentando a equação de Balitsky e Kovchegov (BK) e também a hierarquia de Balitsky. Por último, apresentamos a equação de evolução JIMWLK, baseada na física do Condensado de Vidros de Cor (CGC), a qual recobra, sob os limites apropriados, as equações de Balitsky, a equação BK e também a equação BFKL.

No capítulo 3 apresentamos o modelo AGBS para a amplitude de espalhamento dipolo-próton, discutindo o método de ondas progressivas da QCD para a obtenção das soluções assintóticas da equação BK, fazendo a analogia com os processos de reação-difusão do tipo FKPP. Visualizamos como estas soluções apresentam o escalonamento geométrico para o regime diluto da evolução. Por fim, mostramos como o modelo AGBS é construído com base nestas soluções e em vínculos de unitariedade

para a região não perturbativa. A seguir nos focaremos nas distintas fatorizações a serem empregadas juntamente com o modelo AGBS na descrição de dados dos colisores hadrônicos RHIC e LHC. Neste contexto, nos dedicamos à física presente na aplicação do condensado de vidros de cor em colisões de íons pesados, descrevendo a cinemática e a obtenção de equações para o observável de nosso interesse. O resultado final para a seção de choque assume uma forma híbrida, *i.e.*, considera os pártons do projétil como sendo descritos pela distribuição de pártons lineares (PDFs), que seguem a evolução DGLAP, sendo o alvo (mais especificamente a interação com o alvo) tratado como um condensado de vidros de cor, onde os múltiplos espalhamentos com o alvo obedecem evolução BK. A seguir mostramos como o modelo AGBS pode ser utilizado nesse formalismo e por último o ajuste simultâneo realizado com tal modelo aos dados de DIS em HERA para a função de estrutura do próton e aos dados de produção inclusiva de hádrons em RHIC. Os resultados são apresentados, assim como previsões para o LHC. Em seguida apresentamos uma outra fatorização para descrição de processos em altas energias, a fatorização k_t , onde o conteúdo partônico nos hádrons considera sua distribuição em momento transversal. Nesse sentido as PDFs colineares usadas anteriormente são substituídas pelas distribuições de glúons não integradas (UGDs), também conhecidas como distribuições de pártons em momentum transversal (TMDs). Com essa fatorização consegue-se uma melhor descrição dos dados de LHC para a produção de hádrons carregados em colisões próton-próton, além de uma boa descrição da distribuição em pseudorapidez dos hádrons carregados produzidos em colisões próton-chumbo, recentemente medidas no LHC. Por fim, mostramos as previsões do modelo AGBS para os fatores de modificação nuclear R_{pA} nas energias do LHC. Isso foi feito numa fatorização híbrida para a seção de choque e usando fótons diretos como observáveis e veremos que assim pode-se distinguir muito bem a presença ou não da física de saturação da física colinear presente na evolução DGLAP.

No capítulo 4 são apresentadas as conclusões decorrentes dos trabalhos desenvolvidos neste doutoramento, bem como perspectivas futuras.

Capítulo 1

A Cromodinâmica Quântica e o Espalhamento Profundamente Inelástico

1.1 A Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria de calibre que descreve as interações fortes entre *quarks* e *glúons*, coletivamente chamados *pártons*. Segundo esta teoria, as partículas observáveis, como o próton e o nêutron, são constituídas de partículas fundamentais (sem estrutura interna), denominadas *quarks*, que interagem entre si através de um campo de interação que é mediado por partículas chamadas *glúons*, de forma análoga ao que ocorre para a Eletrodinâmica Quântica (QED) em relação ao fóton, porém com base em um grupo de simetria não abeliano. Sendo uma teoria de calibre, a QCD é descrita através da invariância de propriedades de simetria relacionadas ao grupo de simetria (não abeliano) $SU(3)$, onde $N_c = 3$ define a dimensão do grupo e introduz um novo número quântico à teoria, que por razões históricas chamou-se *cor*. Este novo grau de liberdade da teoria, é definido por três cores: vermelho, verde e azul. Desta forma, *quarks* e *glúons* possuem carga de cor responsável por sua interação mútua, excluindo assim as partículas que não possuem tal carga, como os léptons.

Em termos matemáticos, os *quarks* — por serem férmions — são representados por espiniores q_a , onde $a = 1, \dots, N_c = 3$ é o índice de cor. Os *glúons* são campos vetoriais representados pelas matrizes t^A geradoras dos grupo de simetria $SU(3)$, de tal forma que surgem 8 matrizes geradoras, ou 8 *glúons*, identificadas pelo índice $A = 1, \dots, 8$.

Entretanto, apesar de muitos esforços experimentais para a observação dos *quarks*, estes nunca foram observados livres, mas sim em estados hadrônicos de dois ou três *quarks*, ou seja, o que se observa são mésons ($q_a \bar{q}_b$) e bárions ($q_a q_b q_c$). Este fato evidencia que a força agindo sobre os *quarks* deve aumentar com a distância, ao contrário do que ocorre na QED por exemplo. Por outro lado, pode-se descrever razoavelmente bem as seções de choque para processos em altas energias, como no caso do espalhamento profundamente inelástico que descreveremos a seguir, utilizando um modelo no qual

os quarks interagem simplesmente através de sua carga elétrica. Isto resulta em uma interação entre os quarks cuja a força é relativamente fraca para curtas distâncias, enquanto para grandes separações esta força é muito grande. Estes comportamentos são muito bem descritos pela QCD no que se chama, respectivamente, *liberdade assintótica* e *confinamento*.

A densidade Lagrangiana da QCD é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{clássico}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}. \quad (1.1)$$

A lagrangiana clássica, correspondente à dinâmica dos quarks e glúons, é dada por (Muta, 2009)

$$\mathcal{L}_{\text{clássico}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \sum_{\text{sabores}} \bar{q}_a (\imath\gamma^\mu D_\mu - m)_{ab} q_b, \quad (1.2)$$

onde m é a massa do férmion e

$$(D_\mu)_{ab} = \partial_\mu \delta_{ab} + \imath g_s (t^A A_\mu^A)_{ab} \quad (1.3)$$

é a derivada covariante atuando nos campos de quarks, sendo essa

$$(D_\mu)_{AB} = \partial_\mu \delta_{AB} + \imath g_s (T^C A_\mu^C)_{AB} \quad (1.4)$$

quanto atua no campo dos glúons, com g_s correspondendo à constante de acoplamento forte. t^a e T^a são os geradores do grupo SU(N) nas representações adjunta e fundamental, respectivamente, os quais satisfazem

$$\begin{aligned} [t^A, t^B] &= \imath f^{ABC} t^C, \\ [T^A, T^B] &= \imath f^{ABC} T^C, \quad (T^A)_{BC} = -\imath f^{ABC}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Os geradores t^A são normalizados como

$$\text{Tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB} \quad (1.6)$$

e satisfazem as relações

$$t_{ab}^A t_{cd}^A = \frac{1}{2} \left[\delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{1}{N_c} \delta_{ab} \delta_{cd} \right], \quad (1.7)$$

de onde se obtém

$$t_{ab}^A t_{bc}^A = C_F, \quad \text{onde} \quad C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}. \quad (1.8)$$

Para os geradores T^A tem-se que

$$\text{Tr}(T^A T^B) = f^{ACD} f^{BCD} = C_A \delta^{AB}, \quad \text{onde} \quad C_A = N_c. \quad (1.9)$$

O tensor de campo, que descreve o campo dos glúons, é dado por

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad (1.10)$$

onde f^{ABC} são as constantes de estrutura da QCD, as quais são antissimétricas perante a troca de índices e completamente definidas pelas relações de comutação (1.5) e satisfazendo assim a identidade de Jacobi

$$f_{ABE}f_{ECD} + f_{CBE}f_{AED} + f_{DBE}f_{ACE} = 0. \quad (1.11)$$

Observando o tensor de campo (1.10), notamos que além da presença do índice A , relacionado ao grupo de simetria da teoria, a principal diferença entre a QCD e a QED é que nesta última não existe o termo $g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C$. Em teoria de perturbação, este termo, após a contração do tipo $F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu}$ na Lagrangiana, gera os vértices de três e quatro glúons.

A QCD é uma teoria de calibre local, significando que é invariante frente a transformações da forma

$$q_a(x) \rightarrow q'_a(x) = U(x)q_b(x) = \left[e^{it^A\theta^A(x)} \right]_{ab} q_b(x), \quad (1.12)$$

onde $\theta^A(x)$ denota o conjunto de funções arbitrárias, chamadas ângulo de calibre, das quais as quantidades físicas não dependem. Da mesma forma, o campo vetorial deve ser modificado frente a transformações $A_\mu \rightarrow A'_\mu$, tal que

$$D'_\mu q'(x) = (\partial_\mu + ig_s t^A A'_\mu^A) q'(x) = U(x)D_\mu q(x), \quad (1.13)$$

de onde obtemos que

$$t^A A'_\mu^A = U(x)t^A A_\mu^A U^{-1}(x) + \frac{i}{g_s} [\partial_\mu U(x)] U^{-1}(x). \quad (1.14)$$

Isto implica que o tensor de campo $F_{\mu\nu}^A$ obedece a seguinte transformação

$$t^A F_{\mu\nu}^A = U(x)t^A F_{\mu\nu}^A U^{-1}(x). \quad (1.15)$$

É importante notar que a invariância frente a transformações de calibre local possibilita a utilização de calibres convenientes para os cálculos, uma vez que as amplitudes de espalhamento para quaisquer processos (os distintos observáveis) são independentes da forma como o calibre é fixado.

Para escalas de momentum suficientemente grandes a constante de acoplamento da teoria, g_s , é pequena o suficiente para que técnicas perturbativas possam ser usadas na análise da mesma. Entretanto, a obtenção de propagadores e vértices de interação por métodos perturbativos esbarra no problema da arbitrariedade do campo de glúons A_μ . A fim de evitar esses problemas devemos fixar o calibre da teoria, como expresso no segundo termo da Lagrangiana (1.1). Uma possibilidade é fixar o calibre de forma covariante, que pode ser feito usando o *calibre de Lorentz* $\partial_\mu A_\mu^A = 0$

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu A_\mu^A)^2, \quad (1.16)$$

onde λ é o parâmetro de calibre. Neste calibre o propagador do campo de glúons tem a forma

$$iD^{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} \left[g^{\mu\nu} + (\lambda - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \quad (1.17)$$

onde k^μ corresponde ao quadrimomentum da partícula. Quando $\lambda = 1$ temos o chamado *calibre de Feynman*.

Outra maneira de fixar o calibre é usando os calibres axiais, quando a Lagrangiana de fixação de calibre tem a forma

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\lambda} (n^\mu A_\mu^A)^2, \quad (1.18)$$

que por depender do vetor n^μ é não covariante. O propagador neste calibre é dado por

$$iD_{AB,\mu\nu}(p) = \delta_{AB} \frac{i}{p^2} \left[-g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu}{n \cdot p} - \frac{(n^2 + \lambda p^2) p_\mu p_\nu}{(n \cdot p)^2} \right], \quad (1.19)$$

o qual é muito mais complicado que o propagador para calibres covariantes. Este calibre, porém, tem a vantagem de não introduzir na teoria os chamados campos fantasmas, que veremos adiante. Assumindo $n^2 = 0$ e $\lambda = 0$, denotado como *calibre no cone de luz*, o propagador toma a forma simplificada

$$iD_{AB,\mu\nu}(p) = \delta_{AB} \frac{i}{p^2} d_{\mu\nu}(p, n), \quad (1.20)$$

onde

$$d_{\mu\nu}(p, n) = -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu}{n \cdot p}. \quad (1.21)$$

O calibre de cone de luz também é chamado calibre físico, pois para $p^2 \rightarrow 0$ somente as duas polarizações físicas propagam-se:

$$n^\mu d_{\mu\nu}(p, n) = 0, \quad p^\mu d_{\mu\nu}(p, n) = 0, \quad (1.22)$$

quando podemos expandir $d_{\mu\nu}$ como

$$d_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^2 \epsilon_\mu^{(i)*}(p, n) \epsilon_\nu^{(i)}(p, n), \quad (1.23)$$

onde $p \cdot \epsilon^{(i)} = 0$ e $n \cdot \epsilon^{(i)} = 0$.

A QCD é uma teoria de calibre não-Abeliana, pois os geradores do grupo SU(3) no qual está baseada não comutam entre si, como podemos ver na relação de comutação (1.5). Para teorias com esta propriedade surgem problemas matemáticos, os quais podem ser solucionados com a introdução na Lagrangiana de um termo correspondente aos campos fantasmas, ou campos de Fadeev-Popov, obtidos por meio do método de integrais de caminho (Faddeev & Popov, 1967, Faddeev & Slavnov, 1991). No caso dos calibres covariantes que introduzimos anteriormente, a Lagrangiana para tais campos tem a forma

$$\mathcal{L}_{\text{fantasma}} = \partial_\mu \eta^{A\dagger} (D_{AB}^\mu \eta^B), \quad (1.24)$$

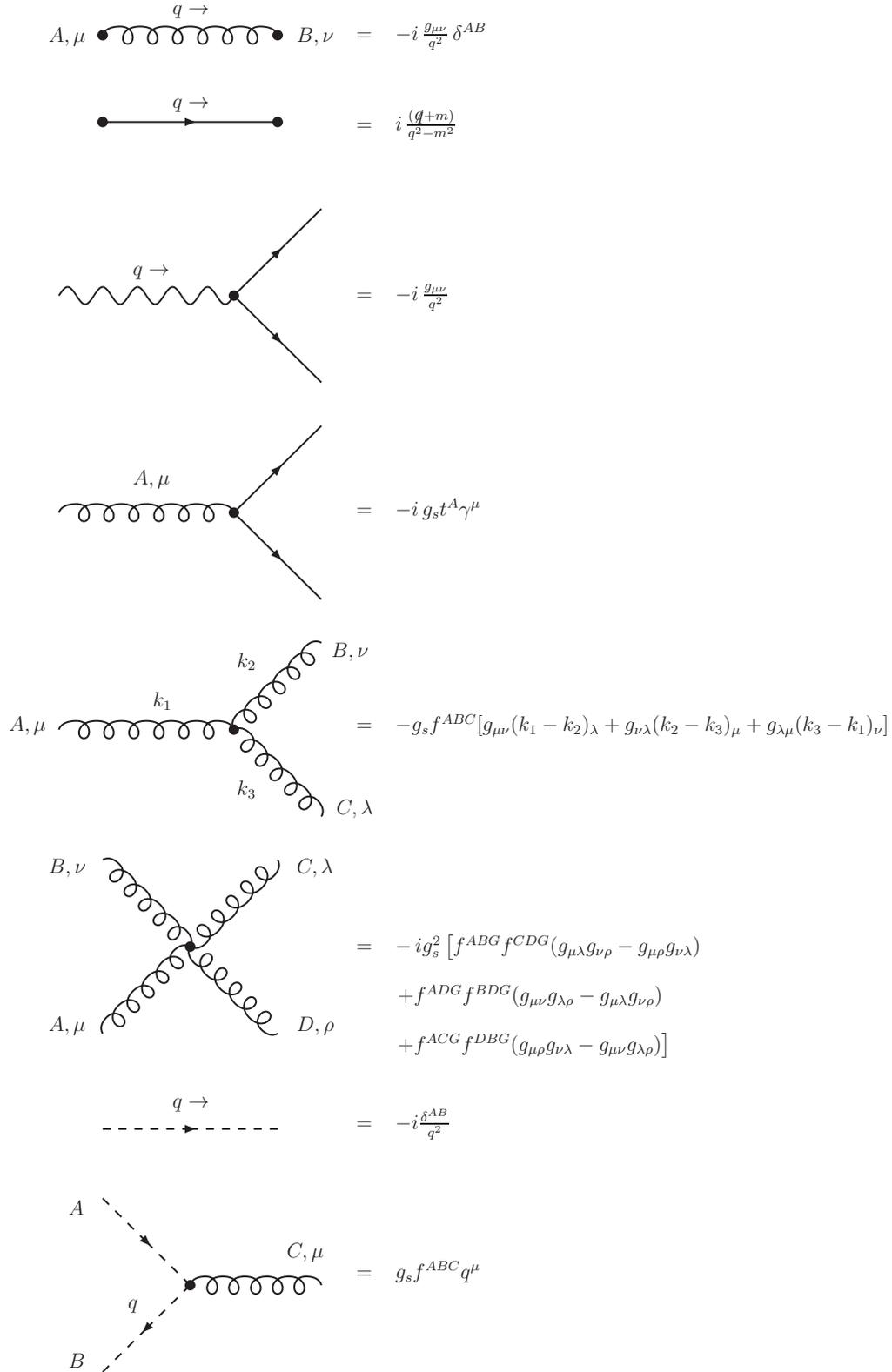


Figura 1.1: Regras de Feynman para a QCD e QED em um calibre covariante (de Feynman). Os fótons são representados por linhas onduladas, glúons por linhas espirais, férmions por linhas sólidas e fantasmas por linhas tracejadas.

com

$$(D_\mu)_{AB} = \partial_\mu \delta_{AB} + ig_s (t^C A_\mu^C)_{AB}. \quad (1.25)$$

O campo η^A é um campo escalar complexo que obedece a estatística fermiônica e não corresponde a uma partícula real, estando presente somente nas linhas internas dos diagramas. Este termo não está presente na QED pois suas constantes de estrutura são efetivamente nulas, de forma que os campos fantasmas não se acoplam com partículas reais. Fisicamente, a adição dos campos fantasmas à teoria corresponde a cancelar graus de liberdade não-físicos que estariam presentes nos calibres covariantes. A forma — e mesmo a presença — do termo $\mathcal{L}_{\text{fantasma}}$ na Lagrangiana depende da condição de calibre. Como mencionamos, o uso do calibre axial, embora torne a forma do propagador muito complicada, evita a introdução dos campos fantasmas.

A partir da Lagrangiana (1.1) é possível obter as regras de Feynman, que simplificam os cálculos das amplitudes associadas a cada diagrama da teoria. Estas regras, no calibre covariante de Feynman, estão representadas na figura 1.1, onde deve-se notar que: cada vértice deve conservar energia e momentum, levando aos fatores mostrados para cada diagrama; em cada diagrama, devem ser incluídos no cálculo das amplitudes termos de estado final e inicial, representados por

$$\text{Inicial} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Quark:} & u^a(p) \\ \text{Antiquark:} & \bar{v}^a(p) \\ \text{Glúon:} & \epsilon_\mu(p) a^\alpha \\ \text{Fóton:} & \epsilon_\mu(k) \end{array} \right. \quad (1.26)$$

$$\text{Final} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Quark:} & \bar{u}^a(p) \\ \text{Antiquark:} & v^a(p) \\ \text{Glúon:} & \epsilon_\mu^*(p) a^{\alpha*} \\ \text{Fóton:} & \epsilon_\mu^*(k) \end{array} \right. \quad (1.27)$$

onde o índice a refere-se ao fator de cor.

As regras de Feynman apresentadas na figura 1.1 são o ponto fundamental na descrição dos processos na QCD. Para cada vértice de interação está presente uma potência da constante de acoplamento da teoria em questão. Por exemplo, para o vértice quark-fóton temos a presença da constante de acoplamento da QED, α_{em} , também chamada constante de estrutura fina. A natureza de tais constantes leva em conta o comportamento da força fundamental que representam, sendo que α_{em} decresce com a distância, enquanto que α_s , como já mencionado, deve envolver ambas as propriedades do confinamento e liberdade assintótica das partículas mediadas pela força forte. Ocorre que existem correções de mais alta ordem aos diagramas simples apresentados, as quais introduzem integrações divergentes. Para sanar essas divergências é necessário que se renormalize os parâmetros da teoria de forma que os valores observados sejam realmente a soma de uma série perturbativa finita, onde os termos de mais altas ordem são apenas correções finitas e nunca maiores que seus predecessores.

Em geral as séries perturbativas convergem para uma dada constante de acoplamento determinada especificamente em uma certa escala de momento (distância). Tal comportamento é facilmente entendido se olharmos para a figura 1 do capítulo , pois a constante de acoplamento renormalizada da

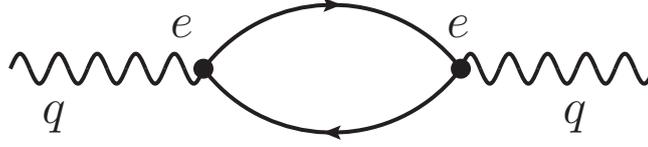


Figura 1.2: Polarização do vácuo do fóton.

força forte é determinada para uma escala de momentum específica. Vamos analisar o caso da QED e depois passar para o caso de interesse da QCD. Se analisarmos o diagrama descrito na figura 1.2, com os fótons entrando e saindo como sendo na camada de massa (fótons reais), temos que para escala de momentum nula vale que

$$e_R = e \left[1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right]^{1/2}, \quad \text{para } q^2 = 0. \quad (1.28)$$

Para valores não nulos da escala de momentum, este diagrama fornece um termo renormalizado com dependência em q^2 , *i.e.*, uma contribuição adicional finita para todo processo eletromagnético. Estas correções são introduzidas através de uma redefinição da carga elétrica, que no caso não massivo da QED é dada por

$$e_R = \frac{e_R^2(q^2 = -\mu^2)}{1 - C e_R^2(q^2 = -\mu^2) \ln(q^2 / -\mu^2)}, \quad (1.29)$$

onde o valor da constante C depende do número de férmions considerado e da carga destes. Desta equação observa-se que $q^2 = 0$ é um valor especial, não oportuno para a renormalização (nesse caso $e_R = 0$), de forma que $q^2 = -\mu^2$ é escolhido como ponto de renormalização. A equação (1.29), a qual denota as contribuições adicionais a todos os diagramas não massivos da QED causados pela polarização do vácuo, é válida somente em certo intervalo de q^2 : se

$$q^2 < 0, \quad C e_R^2(-\mu^2) \ln(q^2 / -\mu^2) < 1, \quad (1.30)$$

onde ela pode ser interpretada como a carga elétrica física. No caso de

$$q^2 > 0, \quad e_R^2(q^2) \quad (1.31)$$

se torna complexa e uma interpretação física da carga não é mais possível.

Uma vez que a QCD é uma teoria livre de escalas, é possível definir uma constante de acoplamento dinâmica que leva em conta as correções finitas devidas aos diagramas da figura 1.3. Assim escreve-se

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(-\mu)}{1 + \beta_0 \alpha_s(-\mu^2) \ln \left(\frac{q^2}{-\mu^2} \right)}, \quad (1.32)$$

onde

$$\beta_0 = \frac{11 - \frac{2}{3} N_f(q^2)}{4\pi}, \quad (1.33)$$

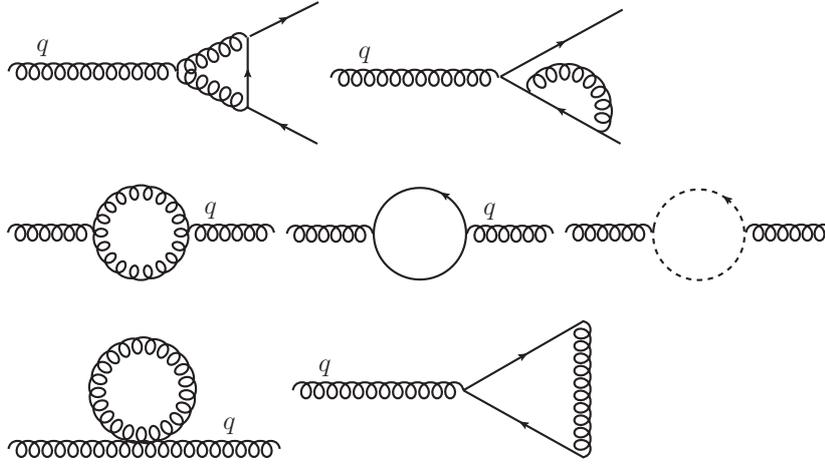


Figura 1.3: Diagramas correspondentes às correções de um laço para a constante de acoplamento da QCD.

sendo N_f o número de sabores de quarks envolvidos que tenham massa muito menor que $\sqrt{-q^2}/2$. Vamos discutir os significados fenomenológicos da equação (1.32): ela possui dois parâmetros, μ^2 e $\alpha_s(\mu^2)$, os quais todavia não são independentes. É possível introduzir um quantidade $\Lambda = \Lambda(\mu)$ tal que

$$\beta_0 \alpha_s(-\mu^2) \ln(\Lambda^2/\mu^2) = -1, \quad (1.34)$$

de forma que

$$\alpha_s(q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln\left(\frac{-q^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (1.35)$$

Aqui, a constante de acoplamento dinâmica é fixada para todas as escalas de momentum através de um parâmetro.

1.2 Espalhamento Profundamente Inelástico

O espalhamento profundamente inelástico (DIS) caracteriza-se pela interação de um lépton ℓ de alta energia com um núcleon N (próton ou nêutron), ou com núcleons dentro do núcleo. Tais interações ocorrem por meio da troca de um bóson de calibre (γ^* , Z^0 para corrente neutra e W^\pm para corrente carregada)¹. No caso de corrente neutra o lépton final é do mesmo tipo que o inicial, enquanto que para corrente carregada os léptons finais e iniciais são diferentes. No estado final são medidos o lépton e um estado hadrônico X , cujo processo é representado por:

$$\ell + N \rightarrow \ell' + X. \quad (1.36)$$

No caso de medirmos, além do estado hadrônico X , somente o lépton no estado final temos um processo dito inclusivo, enquanto que, havendo a seleção de um certo estado final, como por exemplo os mésons

¹A troca de um fóton virtual γ^* contribui muito mais do que troca dos bósons Z^0 e W^\pm para a seção de choque do processo, pois os bósons vetoriais têm massa e são suprimidos se a virtualidade Q^2 não for muito grande, como vemos pela forma $1/(Q^2 + M^2)$ do propagador.

ρ , J/ψ , ..., o processo é dito semi inclusivo; ou ainda exclusivo, sendo que o último é comumente associado a processos onde os núcleons não são completamente destruídos, como no caso de processos difrativos.

1.2.1 Variáveis cinemáticas

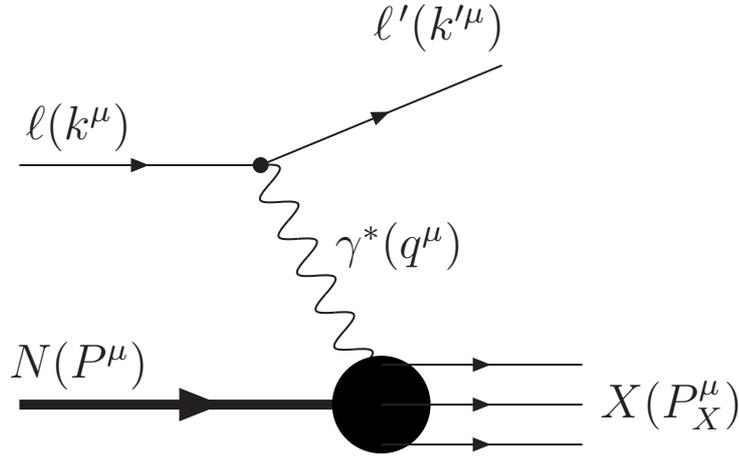


Figura 1.4: Processo de Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS) em ordem mais baixa (LO) em teoria de perturbação.

O processo caracterizado por (1.36) está representado na figura 1.4. Entendemos esta figura através da QED, onde o fóton com quadrimomento q^μ do tipo espaço ($q^2 < 0$) é que define a escala de energia pela qual a estrutura hadrônica será provada. No processo, o lépton possui quadrimomento k^μ no estado inicial e k'^μ no estado final. O núcleon possui quadrimomento P^μ e o estado hadrônico possui quadrimomento P_X^μ . Assim, o processo é descrito pelos seguintes invariantes de Lorentz, as variáveis de Mandelstam

$$s = (k + P)^2 = E_{CM} \quad (1.37)$$

$$t = (k - k')^2 = -Q^2 \quad (1.38)$$

$$u = (k - P_X)^2, \quad (1.39)$$

onde vemos que s é a energia do centro de momentum lépton-núcleon e Q^2 é a chamada virtualidade do fóton, definida por

$$Q^2 \equiv -q^2 = (k - k')^2 > 0. \quad (1.40)$$

Para o sistema γ^* -núcleon tal energia é definida por

$$W^2 = (P + q)^2. \quad (1.41)$$

Em relação ao referencial de laboratório é possível determinar a diferença de energia entre os estados inicial e final do lépton

$$\nu = E - E' = \frac{P \cdot q}{m_N}, \quad (1.42)$$

onde m_N é a massa do núcleon. O DIS é descrito pela introdução da variável adimensional de Bjorken

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2m_N \nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m_N^2}, \quad (1.43)$$

definida no intervalo $0 \leq x \leq 1$, pois $W^2 \geq m_N^2$ e $W^2 = m_N^2 + 2P \cdot q(1 - x)$.

A variável chamada algumas vezes de inelasticidade define a fração de energia perdida pelo lépton no referencial de repouso do núcleon

$$y = \frac{\nu}{E} = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} = \frac{W^2 + Q^2 - m_N^2}{s - m_N^2}, \quad (1.44)$$

e também é válida no intervalo $0 \leq y \leq 1$. A expressão profundamente inelástico refere-se ao regime onde $m_N \nu \gg m_N^2$ e $Q^2 \gg m_N^2$, mantendo-se x fixo. Assim, é possível desprezar a massa do núcleon frente as outras escalas de energia do processo.

Em ordem mais baixa na QED, a seção de choque inclusiva para o processo definido em (1.36), com o lépton sendo um elétron, pode ser escrita no referencial de laboratório como

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} (eN \rightarrow eX) = \frac{\alpha_{em}^2}{2m_N Q^4} \frac{E'}{E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (1.45)$$

onde E' é a energia do elétron no estado final e Ω é o ângulo sólido de espalhamento deste elétron. Na expressão (1.45), $L^{\mu\nu}$ é o tensor de vértice leptônico, calculado através da regras de Feynman da QED, e que tem a forma

$$L^{\mu\nu} = 2(k'^\mu k^\mu + k'^\nu k^\nu - k \cdot k' g^{\mu\nu}), \quad (1.46)$$

e $W_{\mu\nu}$ é o tensor do vértice hadrônico

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi^2} \int d^4z e^{ix \cdot z} \langle N | J^\mu(z) J^\nu(0) | N \rangle, \quad (1.47)$$

onde J^μ é o operador densidade de corrente representando a probabilidade de transição do estado final para o estado inicial. O tensor hadrônico $W_{\mu\nu}$ contém todas as informações sobre a interação entre o fóton virtual γ^* e o núcleon, inclusive sobre a possível estrutura interna que este fóton prova durante a interação.

Apesar do tensor hadrônico não ser conhecido por primeiros princípios é possível parametrizá-lo em termos dos quadrimomenta presentes no vértice que o define. Uma possibilidade de parametrização é (Halzen & Martin, 2008)

$$W_{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1 + \left(P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \frac{1}{m_N^2} W_2, \quad (1.48)$$

de forma que após a contração dos tensores em (1.45), a seção de choque para o DIS não polarizado pode ser escrita como função de duas funções de estrutura $W_1(\nu, Q^2)$ e $W_2(\nu, Q^2)$ (Garcia Canal et al.,

1979, Halzen & Martin, 2008)

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}(eN \rightarrow eX) = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + W_2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (1.49)$$

onde θ é o ângulo de espalhamento do elétron.

Podemos reescrever convenientemente as funções de estrutura de forma adimensional

$$F_1(x, Q^2) \equiv m_N W_1(\nu, Q^2) \quad (1.50)$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2), \quad (1.51)$$

de forma que o tensor hadrônico adquire uma forma adimensional, como função de F_1 e F_2 , fornecendo a seção de choque para o DIS em função de x e y (Garcia Canal et al., 1979)

$$\frac{d\sigma}{dxdy} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 s}{Q^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{xy m_N^2}{s}\right) F_2(x, Q^2) \right]. \quad (1.52)$$

Além disso, também é possível escrever a seção de choque de foto-absorção virtual, um sub-processo do DIS, em termos das funções de estrutura (Barone & Predazzi, 2002)

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_{L,T}(x, Q^2), \quad (1.53)$$

onde os índices L e T referem-se, respectivamente, às componentes longitudinal e transversal da polarização do fóton virtual, e satisfazem as relações

$$F_T = 2xF_1 \quad (1.54)$$

$$F_L = F_2 - 2xF_1. \quad (1.55)$$

Notando que $F_2 = F_L + F_T$, temos que a soma das componentes transversal e longitudinal da seção de choque de foto-absorção é proporcional a F_2

$$\sigma^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \quad (1.56)$$

1.2.2 Modelo de pártons

A verificação experimental obtida na década de 60 com os resultados do Acelerador Linear da Universidade de Stanford (SLAC) (Miller, 1972), de que no limite de Bjorken (Bjorken, 1969) definido por

$$\nu, Q^2 \rightarrow \infty, \quad \text{com } x = \frac{Q^2}{2m_N \nu} \text{ fixo,} \quad (1.57)$$

as funções de estrutura dependem somente da variável adimensional x e não mais de Q^2 e ν , deu origem ao que convencionou-se chamar de modelo de pártons. O limite de Bjorken implica

$$\lim_{\nu, Q^2 \rightarrow \infty} m_N W_1(\nu, Q^2) \approx F_1(x), \quad (1.58)$$

$$\lim_{\nu, Q^2 \rightarrow \infty} \nu W_2(\nu, Q^2) \approx F_2(x). \quad (1.59)$$

Este comportamento é chamado escalonamento das funções de estrutura e foi predito por Bjorken (Bjorken & Paschos, 1969) a partir da álgebra de correntes. Em princípio as funções de estrutura poderiam ter uma forte dependência na virtualidade do fóton Q^2 , já que a estrutura interna do hádron poderia ser excitada de distintas maneiras para diferentes valores de Q^2 . O escalonamento acima citado, observado experimentalmente no SLAC (Miller, 1972), sugere que o fóton sofre um espalhamento elástico com partículas puntuais, os pártons, que constituem o hádron. Isto é o que ilustra a figura 1.5 e o que discutiremos a seguir.

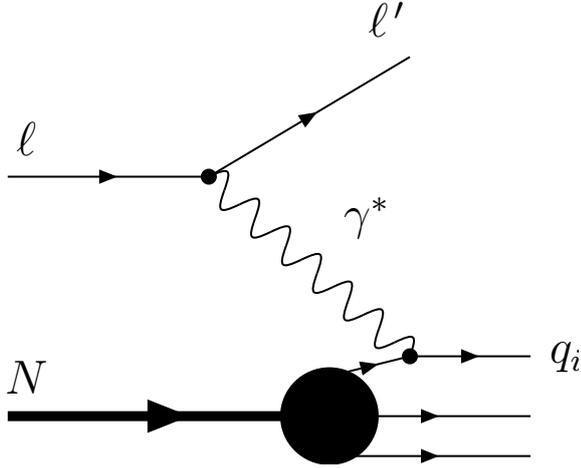


Figura 1.5: Visualização do DIS através do modelo de pártons: o fóton virtual interage com um dos objetos puntuais – pártons – que compõem o hádron.

Num referencial onde o hádron possui momentum $P \rightarrow \infty$, *i.e.*, num limite relativístico, este apresenta efeitos de contração temporal e dilatação espacial, de forma que pode-se desprezar as massas e os momenta transversos dos pártons constituintes, que comportam-se como partículas livres. Desta forma, os pártons movem-se paralelamente em relação ao movimento do hádron, carregando uma fração ξ_i do momentum do hádron, de forma que a soma sobre todos os pártons resulta no momentum do hádron

$$\sum_i \xi_i P = P. \quad (1.60)$$

O modelo de pártons implica ainda que a seção de choque inelástica lépton-hádron $\ell + N \rightarrow \ell' + X$ é a soma incoerente (soma de probabilidades) das seções de choque elásticas individuais $\ell + q_i \rightarrow \ell' + q'_i$. Considerando a conservação de momentum aplicada ao vértice párton-bóson $\xi_i p + q = p'$ obtém-se que

$$\xi_i = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = x, \quad (1.61)$$

ou seja, a variável de Bjorken x pode ser interpretada como a fração de momentum do hádron portada pelo párton espalhado.

Na descrição do hádron segundo o modelo de pártons, torna-se necessária a definição da probabilidade de encontrarmos um destes pártons portando uma fração $\xi_i = x$ do momentum do hádron, a qual é chamada de densidade partônica $f_i(x)$. O número de pártons i no hádron pode ser expresso da seguinte forma:

$$N_i = \int_0^1 f_i(x) dx. \quad (1.62)$$

Por conservação de momentum, resulta que a soma sobre todas as frações de momentum portadas pelos pártons (carregados ou não) é igual ao momentum do hádron, *i.e.*

$$\sum_i \int_0^1 x_i f_i(x) dx_i = 1. \quad (1.63)$$

De posse da densidade partônica $f_i(x)$, é possível encontrar uma relação entre as funções de estrutura F_1 e F_2 , descrita por

$$F_2 = 2xF_1 = x \sum_i e_i^2 f_i(x), \quad (1.64)$$

onde e_i corresponde à carga de i -ésima espécie de párton. A relação (1.64) é um resultado direto do fato de os pártons possuírem spin 1/2 (Greiner et al., 2007, Roberts, 1993) e é chamada Relação de Callan-Gross (Callan & Gross, 1969).

Usando o conhecimento da classificação dos hádrons através de simetrias do grupo SU(3) (Gell-Mann, 1964), estes pártons puderam ser identificados como os quarks constituintes dos hádrons. Desta forma, os hádrons são constituídos de dois tipos de quarks: os quarks de valência, que possuem uma natureza não-perturbativa e definem cada tipo de hádron conhecido, e os quarks de mar, produzidos em pares quark-antiquark pela flutuação dos propagadores da interação forte.

A partir dos resultados do espalhamento elétron-próton, verificou-se que incluindo apenas a contribuição de pártons carregados em (1.63), obtém-se um valor aproximado de 0.5 (Roberts, 1993). Este resultado indica que aproximadamente 50% do momentum total do hádron deve estar associado a pártons que não portam carga elétrica, não sendo diretamente detectados em experimentos de DIS. Estes pártons podem ser associados com as partículas mediadoras da interação forte, os glúons. Experimentalmente, as distribuições de quarks de valência anulam-se para $x = 0$ e $x = 1$, enquanto que os quarks de mar tendem a popular a região de pequeno x . Os glúons, por sua vez, são originados em maior número na região de pequeno x , já que não possuem massa. Na região de x muito pequeno a contribuição dominante às distribuições de pártons é a componente gluônica.

1.2.3 DIS no referencial de dipolos de cor

Apresentaremos aqui a descrição de processos no espalhamento profundamente inelástico (DIS) no referencial de repouso do alvo, mais conhecida como referencial de dipolos de cor². Neste referencial o espalhamento profundamente inelástico pode ser representado como se o fóton virtual (a partícula prova) emitido pelo elétron flutue em um par quark–antiquark, ou seja, em um dipolo, que posteriormente interage com o alvo, que pode ser um próton ou um núcleo por exemplo. Ou seja, no referencial de dipolos a quantidade que está provando o alvo não é mais o fóton virtual e sim o par $q\bar{q}$. O fóton pode ser expandido na base de quarks e glúons como uma superposição de estados de Fock em termos de suas flutuações hadrônicas (Nikolaev & Zakharov, 1991, 1992)

$$|\gamma^*\rangle = \sum |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle + \dots \quad (1.65)$$

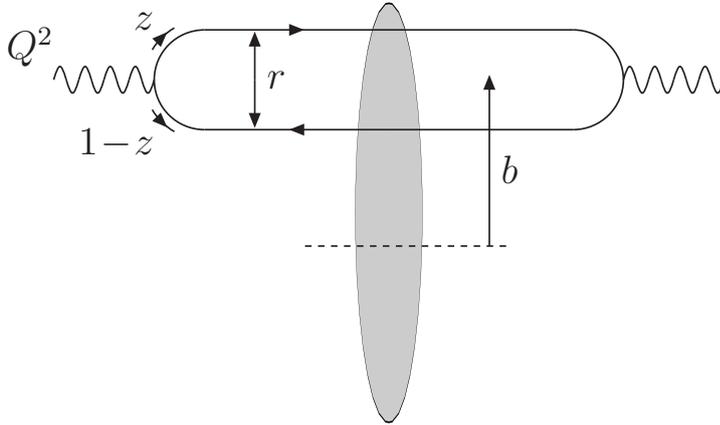


Figura 1.6: Representação de um processo em DIS no referencial de dipolos de cor.

Para pequenas separações transversas do par quark–antiquark, ou seja, pequeno r (veja figura 1.6), a configuração dominante consiste no par $q\bar{q}$. Para grandes separações, podem aparecer contribuições mais complexas, como por exemplo $q\bar{q}g$. Consideraremos, no entanto, somente a contribuição dominante $q\bar{q}$, para a qual o tempo de vida é muito importante, pois se considerarmos que este tempo é muito maior do que o tamanho do alvo, então podemos pensar que o par interage durante um curto intervalo de tempo com o alvo de tal forma que sua separação transversa é constante durante a interação, como vemos na figura 1.6. Este tempo, também chamado de comprimento (ou tempo) de coerência l_c , pode ser estimado com o uso da relação de incerteza. Para isso, consideramos um fóton com virtualidade Q^2 , energia q_0 e momento grande $|\mathbf{q}|$, de forma que o comprimento de coerência é o tempo no qual o fóton virtual existe como uma flutuação $q\bar{q}$ de massa $M_{q\bar{q}}$. Pelo princípio da incerteza, temos que este comprimento é inversamente proporcional à variação de energia entre o fóton e o par

²Não devemos confundir o referencial de dipolos com o formalismo de dipolos, embora eles estejam intimamente relacionados. O primeiro, como o próprio nome diz, é a construção de um referencial conveniente para a descrição do DIS em altas energias. Já o segundo está relacionado com o limite de grande número de cores N_c e dá conta da evolução em energia de um dipolo, descrevendo os possíveis glúons emitidos durante a evolução como pares de quark–antiquark (dipolos).

$q\bar{q}$, logo

$$l_c = \frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{q}|^2 + M_{q\bar{q}}^2} - q_0} \approx \frac{2|\mathbf{q}|}{M_{q\bar{q}}^2 + Q^2} \approx \frac{|\mathbf{q}|}{Q^2}, \quad (1.66)$$

onde usamos $M_{q\bar{q}} = Q^2$ na última passagem, por conservação de momentum. Utilizando a definição da variável de Bjorken $x = Q^2/2p \cdot q$, e notando que no referencial de repouso do alvo vale que $p \cdot q = m_N |\mathbf{q}|$, e então $Q^2 = 2xm_N |\mathbf{q}|$, resulta que

$$l_c = \frac{1}{2m_N x}, \quad (1.67)$$

onde m_N é a massa do alvo. A fim de ilustrar a validade do referencial de dipolos, para o DIS na região cinemática típica do colisor HERA, chegando a valores $x \sim 10^{-5}$, o comprimento de coerência é da ordem de 10 fm, o qual é maior que o raio de qualquer núcleo atômico. Segundo o referencial de dipolos, a seção de choque pode ser escrita como a convolução da probabilidade de o fóton flutuar em um dipolo com a seção de choque do espalhamento deste dipolo com o alvo, o que leva à relação:

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y), \quad (1.68)$$

onde $Y = \ln 1/x$ é a rapidez dos constituintes do alvo que interagem com o dipolo. A formulação acima é válida também no limite não perturbativo da QCD, uma vez que é determinada a partir da estrutura de espaço-tempo do processo. A quantidade $\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)$ refere-se às componentes transversal e longitudinal da função de onda do fóton que descreve a formação do dipolo, onde z e $1 - z$ são as frações de energia do fóton portadas pelo quark e anti-quark, respectivamente. Para contribuições como $q\bar{q}$, as funções de onda são calculadas através da eletrodinâmica quântica (QED) perturbativa e são dadas por (Nikolaev & Zakharov, 1991)

$$|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (1.69)$$

$$|\Psi_L(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (1.70)$$

onde N_c é o número de cores, $\bar{Q}_q^2 = z(1-z)Q^2 + m_q^2$, com m_q^2 como a massa do quark de sabor q e $K_{0,1}$ são as Funções de McDonald de ordem zero e um, respectivamente. Na expressão (1.68), a quantidade $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y)$ é a seção de choque de dipolo, a qual não pode ser calculada perturbativamente como acontece com a função de onda do fóton, sendo assim dependente de modelo.

1.2.4 F_2^p no espaço de momentum

Vamos discutir adiante um modelo para a seção de choque de dipolos, o qual foi desenvolvido no espaço de momentum usando o conhecimento das soluções assintóticas da equação de evolução BK, que chamamos modelo AGBS (Santana Amaral et al., 2007). Tal modelo será usado para descrever a função de estrutura do próton em processos de DIS e de produção inclusiva de hádrons em colisões

de íons pesados. Porém antes disso, temos que expressar as quantidades relevantes no espaço de momentum.

Começamos lembrando a forma da seção de choque de dipolos:

$$\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(\mathbf{r}, Y) = 2 \int d^2\mathbf{b} T(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y), \quad (1.71)$$

onde $T(\mathbf{b}, Y)$ é a amplitude de espalhamento para um dipolo cujo tamanho transverso é definido pelo vetor $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ a um dado parâmetro de impacto $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. Se consideramos o alvo (Consideraremos aqui o alvo como sendo o próton) como um disco homogêneo de raio R_p , ou seja, se considerarmos a dependência parâmetro de impacto como segue

$$T(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y) = T(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)\Theta(b^2 - R_p^2), \quad (1.72)$$

podemos relacionar a seção de choque de dipolo com a amplitude de espalhamento frontal $T(r, Y)$ através da relação

$$\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 T(r, Y). \quad (1.73)$$

A função de estrutura do próton F_2 é obtida a partir da seção de choque γ^*p e dada pela expressão

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} \left[\sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2) \right]. \quad (1.74)$$

Para expressarmos estas quantidades no espaço de momentum, k , usamos a seguinte transformada de Fourier para a amplitude

$$T(k, Y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2r}{r^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y), \quad (1.75)$$

de forma que, para a função de onda do fóton, temos

$$\phi(r, z) = \frac{1}{r^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(k, z) = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{\phi}(k, z), \quad (1.76)$$

com

$$\phi(r, z) = \phi_T(r, z) + \phi_L(r, z) \quad \text{com} \quad \phi_{T,L}(r, z) = |\Psi_{T,L}(r, z)|^2. \quad (1.77)$$

Como pode ser visto em detalhes no apêndice A, obtém-se a seguinte expressão para a função de estrutura do próton no espaço de momentum (Santana Amaral et al., 2007):

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y), \quad (1.78)$$

onde a função de onda do fóton é agora expressa no espaço de momentum

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 = & \sum_q \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \\
& \times \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \right. \\
& \left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{4\bar{Q}_q^4 + 2\bar{Q}_q^2 k^2 + k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\}. \quad (1.79)
\end{aligned}$$

O modelo a ser apresentado posteriormente para a amplitude de espalhamento no espaço de momentum deverá ser incluído nesta expressão para F_2 através de (1.73) para sua correta descrição.

1.3 F_2 na QCD e as equações DGLAP

O modelo de pártons descreve o espalhamento profundamente inelástico como a interação elástica de um fóton virtual com um dos pártons (quarks) constituintes dos hádrons, como mostramos na figura 1.5. Por outro lado, a QCD prevê a existência de uma nuvem de glúons virtuais e pares quark-antiquark ao redor dos quarks de valência que compõem os hádrons, sendo que a virtualidade Q^2 da partícula que prova o hádron determina a quantidade de pártons que serão observados no interior desta nuvem. Cada um destes pártons porta uma fração do momentum do hádron ao qual fazem parte, de forma que, quanto maior o valor de Q^2 , maior é a probabilidade de encontrar um párton no interior no hádron com uma parcela menor do momentum total de tal hádron. Com isto, a função de estrutura do hádron experimentado deve apresentar dependência na virtualidade Q^2 , violando assim o escalonamento previsto pelo modelo de párton para estas quantidades (ver 1.58).

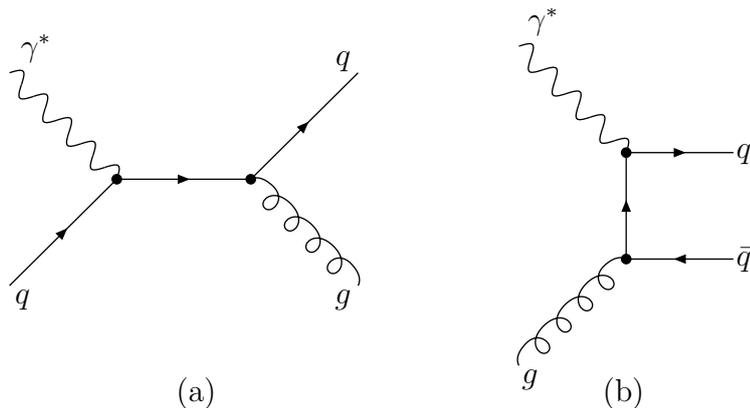


Figura 1.7: Contribuições de ordem $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para o processo $ep \rightarrow eX$ não contidas no modelo de pártons: (a) Emissão de glúons pelos quarks e (b) Glúons no estado inicial.

Este comportamento distinto ocorre porque o modelo de párton descreve o processo DIS desconsiderando a dinâmica do glúon como portador da força forte associada a carga de cor portada pelos quarks, como estabelece a QCD. Desta forma, ignora a possibilidade dos quarks emitirem glúons. Para introduzir tais efeitos no modelo de pártons, vamos considerar que o quark da figura 1.5 possa emitir

glúons (figura 1.7a) e ainda que um glúon que compõe o hádron possa interagir com o quark (figura 1.7b). Considerando a expansão perturbativa em termos das constantes de acoplamento da QED e da QCD, α e α_s , respectivamente, vemos o modelo de pártons como a contribuição de primeira ordem $\mathcal{O}(\alpha)$ para a dinâmica no interior do hádron, enquanto que as correções citadas acima são de ordem $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$.

A inclusão dos diagramas da QCD no processo DIS determina que as funções de estrutura não sejam mais escalonadas pela variável de Bjorken, como ocorria no modelo de pártons. Contudo, a QCD consegue explicar como ocorre a quebra do escalonamento das funções de estrutura do DIS e é isso que abordaremos a seguir. O modelo de pártons permite descrever a função de estrutura F_2 em uma forma fatorizada

$$F_2(x) = \sum_{q\bar{q}} \int_x^1 d\varepsilon f_q(\varepsilon) \hat{F}_2^q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (1.80)$$

onde \hat{F}_2^q representa a função de estrutura elementar dos quarks, que é proporcional à seção de choque de foto absorção para o espalhamento γ^*q . No modelo de pártons tal processo é simplesmente $\gamma^*q(\bar{q}) \rightarrow q(\bar{q})$ e está representado na figura 1.8a, de forma que

$$\hat{F}_2^q(z) = e_q^2 \delta(1-z). \quad (1.81)$$

Esta expressão, juntamente com (1.80) fornece a expressão bem conhecida do modelo de pártons, $F_2 = x \sum_q e_q^2 [f_q(x) + f_{\bar{q}}(x)]$.

Este seria o fim do assunto se os quarks (e antiquarks) fossem considerados livres no interior dos hádrons, mas isso não ocorre. A QCD prevê que os mesmos interagem por meio de emissão e absorção de glúons, de forma que outros diagramas, de ordem $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ devem ser adicionados à teoria para uma descrição correta de F_2 . Estas correções ao processo $\gamma^*q(\bar{q})$ são mostradas na figura 1.8, onde identificamos os diagramas nas figuras 1.8b,c com a emissão de glúons reais nos canais t e s , respectivamente. Temos ainda as radiações de glúons virtuais, que no diagrama da figura 1.8d representa a correção ao vértice γ^*q , enquanto que nas figuras 1.8e,f correspondem às correções de auto-energia. Estes diagramas contribuem para a função de estrutura $\hat{F}_2^q(z)$ com um termo da forma

$$\hat{F}_2^q(z, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} e_q^2 z \left[P(z) \ln\left(\frac{Q^2}{k_0^2}\right) + h(z) \right], \quad (1.82)$$

onde $P(z)$ e $h(z)$ são funções finitas e k_0 é um corte no momentum transversal k_\perp do quark introduzido para regularizar divergências de pequeno momento nos diagramas de emissão de glúon real. Assumindo uma dependência em Q^2 em \hat{F}_2^q na relação (1.80) e renomeando $f_q(x)$ como a densidade de quarks nesta relação, podemos somar as contribuições de ordem $\mathcal{O}(\alpha_s)$, dada por (1.82), e $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$, dada por

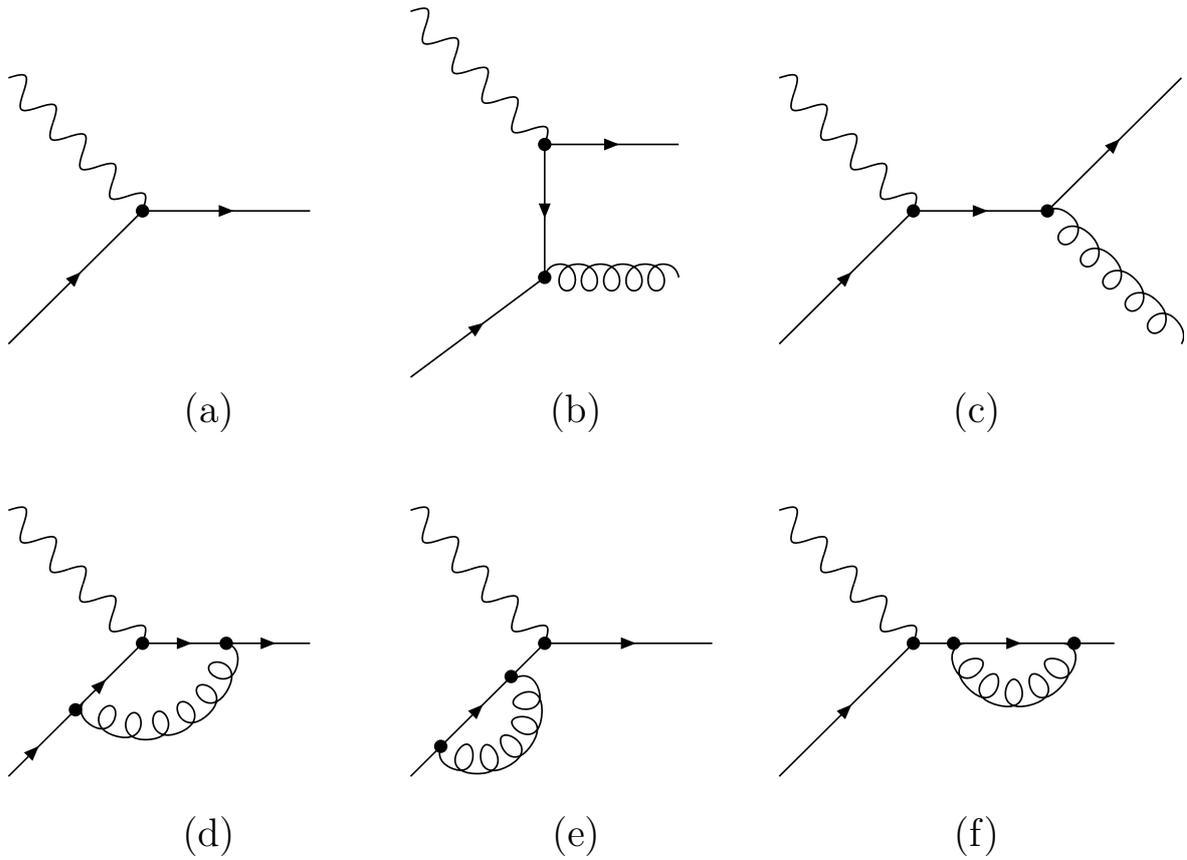


Figura 1.8: Diagramas que contribuem ao processo $\gamma^* q$ em ordem $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$.

(1.81). Desta forma, temos que a função de estrutura para o núcleon é dada por

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x \left\{ f_q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_q(\varepsilon) \right. \\ \left. \times \left[P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{k_0^2}\right) + h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \dots \right\}, \quad (1.83)$$

onde os pontos referem-se às contribuições de ordens mais altas em α_s . Introduzindo a escala de fatorização μ^2 , a fim de separar a física perturbativa (grandes escalas de momentum) da não-perturbativa (pequenas escalas de momentum), pode-se separar o logaritmo divergente em duas partes

$$\ln\left(\frac{Q^2}{k_0^2}\right) = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2}{k_0^2}\right). \quad (1.84)$$

Separando em duas partes a função $h(z)$

$$h(z) = \tilde{h}(z) + h'(z), \quad (1.85)$$

consegue-se absorver a divergência $\ln(\mu^2/k_0^2)$ restante e $h'(z)$ em uma redefinição da distribuição de quarks. Esta função define o esquema de subtração mínima ($\overline{\text{MS}}$) usado e assim escreve-se a função de estrutura F_2 como

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x q(\varepsilon, \mu^2) C(z, Q^2, \mu^2), \quad (1.86)$$

sendo as funções de distribuição renormalizadas são definidas como

$$q(x, \mu^2) = f_q(x) + \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_q(\varepsilon) \left[P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln\left(\frac{\mu^2}{k_0^2}\right) + h'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \dots \quad (1.87)$$

e a função coeficiente, determinada após regularização dimensional,

$$C(z, Q^2, \mu^2) = \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left\{ P(z) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \left[\tilde{h}(z) - \gamma_E + \ln(4\pi)P(z) \right] \right\}, \quad (1.88)$$

onde $\gamma_E = 0.5772\dots$ é a constante de Euler-Mascheroni.

A fim de eliminar as singularidades colineares se introduz a escala de fatorização μ , que faz um papel similar à escala de renormalização. Assim não há uma predição absoluta para a distribuição renormalizada $q(x, \mu^2)$, mas uma previsão teórica de como esta distribuição varia com a escala. Assim, uma vez que $F_2(x, Q^2)$ é um observável físico e não deve depender de nenhuma escala, diferenciando (1.86) em relação a $\ln \mu^2$ obtém-se uma equação integro-diferencial governando a dependência em escala das distribuições de quarks

$$\frac{\partial q(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) q(y, \mu^2). \quad (1.89)$$

Esta é a chamada equação DGLAP, derivada independentemente por Dokshitzer (Dokshitzer, 1977), Gribov, Lipatov (Gribov & Lipatov, 1972), Altarelli e Parisi (Altarelli & Parisi, 1977), que em ordem dominante, *i.e.*, em ordem $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ em relação às funções de desdobramento $P(z)$ e em ordem $\mathcal{O}(\alpha_s)$ para as funções coeficientes, efetivamente ressona sobre as contribuições do tipo $(\alpha_s \ln Q^2)^n$. Interpreta-se a função de desdobramento $P(z)$ como a probabilidade de um quark emitir outro quark com fração de momentum x do quark “pai”. Esta pode ser expandida em série de potências de α_s

$$P(x) = \sum_n \alpha_s^n P^n(x). \quad (1.90)$$

Tudo que mostramos até então refere-se a quarks e antiquarks somente. Levando em conta a contribuição dos glúons, a função de estrutura toma a forma

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[q(\varepsilon, \mu^2) C^q\left(\frac{x}{\varepsilon}, Q^2, \mu^2\right) + g(\varepsilon, \mu^2) C^g\left(\frac{x}{\varepsilon}, Q^2, \mu^2\right) \right]. \quad (1.91)$$

A função coeficiente referente aos glúons, C^g , provém do diagrama de fusão fóton-glúon, representado na figura 1.7b e diz respeito à contribuição de glúons no estado inicial.

A definição da distribuição de quarks com dependência em escala é dada agora por

$$q(x, Q^2) = f_q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_q(\varepsilon) \left[P_{qq} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{k_0^2} \right) + h'_q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \\ + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_g(\varepsilon) \left[P_{qg} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{k_0^2} \right) + h'_g \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] + \dots \quad (1.92)$$

As distribuições partônicas podem ser expressas em termos da natureza do pártons. Assim definem-se as distribuições de quarks não-singlete (NS), referente aos quarks de valência, e singlete (S), em relação aos quarks de mar, além da distribuição de glúons $g(x, Q^2)$, tal que

$$q^{NS}(x, Q^2) = q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2), \quad (1.93)$$

$$q^S(x, Q^2) = \sum_i [q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2)]. \quad (1.94)$$

Utilizando a variável $t = \ln(Q^2/\mu^2)$, as equações DGLAP se tornam

$$\frac{\partial q^{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q^{NS}(y, t), \quad (1.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q^S(x, t) \\ g(x, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) & 2n_f P_{qg} \left(\frac{x}{y} \right) \\ P_{gq} \left(\frac{x}{y} \right) & P_{gg} \left(\frac{x}{y} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^S(y, t) \\ g(y, t) \end{pmatrix}, \quad (1.96)$$

onde n_f designa o número de sabores dos quarks levados em conta (u, d, \dots). em ordem dominante, as funções de desdobramento são dadas por

$$P_{qq}^0(x) = C_F \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] \quad (1.97)$$

$$P_{qg}^0(x) = \frac{1}{2} [x^2 + (1-x)^2] \quad (1.98)$$

$$P_{gq}^0(x) = C_F \left[\frac{1+(1-x)^2}{x} \right] \quad (1.99)$$

$$P_{gg}^0(x) = 2C_A \left[\frac{x}{(1-x)_+} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right] + \frac{11C_A - 2n_f}{6} \delta(1-x) \quad (1.100)$$

onde C_F e C_A são relacionadas ao número de cores N_c pelas relações $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ e $C_A = N_c$, e a prescrição

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \quad (1.101)$$

é usada na regularização da divergência para $x = 1$.

Assim, o formalismo DGLAP descreve a evolução em Q^2 das funções de distribuição partônica considerando que a interação partônica ocorre por meio de uma cascata partônica, com um forte ordenamento nos momenta transversos dos pártons emitidos no interior da cascata. Devido a este

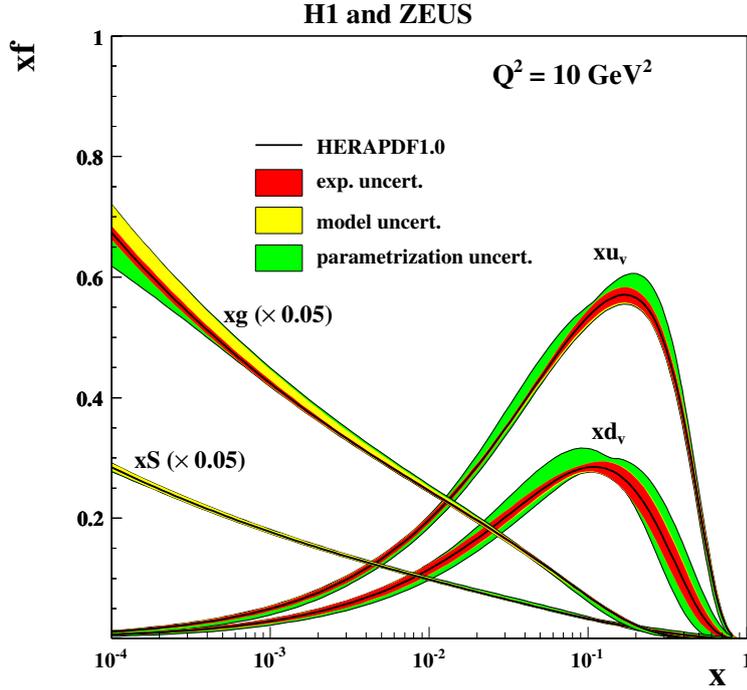


Figura 1.9: Distribuição de pártons em um próton em função da variável de Bjorken x (Aaron, 2010). Nota-se que para pequenos valores de x a distribuição de glúons xg domina (está dividida por um fator de 20) sobre as densidades de pártons de valência xu_v e xd_v . xg ainda é muito maior que a densidade de quarks de mar xS sobre uma grande região de valores da variável de Bjorken x , que também está dividida por 20.

ordenamento, as equações DGLAP são válidas na seguinte região cinemática:

$$\alpha_s \ln Q^2 \approx 1, \quad \alpha_s \ll 1 \quad \text{e} \quad \ln \left(\frac{1}{x} \right) \ll \ln \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right), \quad (1.102)$$

ou seja, elas são válidas na região de valores de Q^2 não muito baixos ($Q^2 \gtrsim 1 \text{ GeV}^2$, onde a QCD perturbativa é aplicável) e também numa região de x não muito pequena ($x \gtrsim 0.001$). Para valores de x menores o ordenamento não é mais válido, o que dá origem às equações de evolução considerando os logaritmos dominantes na variável x . Tais evoluções, que serão discutidas no capítulo a seguir, apresentam ordenamento na fração de momentum x , sendo que os momenta transversos são similares, dando origem ao que denomina-se na literatura como interação por escada de glúons.

A região onde a variável de Bjorken x se torna muito pequena é denominada limite de altas energias, pois como pode-se notar pela equação (1.43), x é inversamente proporcional à energia envolvida no particular processo de colisão. Geralmente se define o limite de altas energias da QCD como a região onde a energia da colisão tende ao infinito, sendo que a transferência de momentum (ou virtualidade Q) se mantém finita. Este momentum pode ser muito maior do que Λ_{QCD} , mas deve permanecer fixo, como pode ser visualizado na seta que indica a equação BFKL na figura 2. Este limite não é o limite de curto alcance usado para garantir a fatorização da seção de choque entre a interação a nível dos pártons constituintes e as distribuições de pártons no interior dos hádrons, sendo que a seção de choque a nível partônico é entendida usando séries perturbativas no acoplamento fraco. O limite de altas energias tangencia a região não perturbativa da QCD, e pode ser estudado por meio da teoria de Regge (uma revisão encontra-se na Ref. (Gribov, 2003)), com Reggeons, Pomerons (No caso da QCD, o chamado Pomeron BFKL é formado por dois glúons trocados no canal t), unitarização,

...; e, como veremos no próximo capítulo, esta região não perturbativa pode ser tratada com técnicas de acoplamento fraco.

A observação, no colisor HERA ([Breitweg, 1999](#)), de que a densidade de glúons cresce rapidamente para valores pequenos de x , de certa forma confirmou as expectativas teóricas contidas na evolução BFKL. Mostramos aqui, na figura [1.9](#), um resultado mais recente ([Aaron, 2010](#)) para tal distribuição, onde se pode comparar com a distribuição de quarks de valência e de mar. Veremos no capítulo a seguir que resultados como esse fomentam o desenvolvimento de teorias que incluam efeitos de recombinação partônica a fim de evitar o crescimento indefinido da distribuição de glúons para energias crescentes.

Capítulo 2

A evolução no regime de altas energias e a saturação partônica

2.1 Colisões de hádrons em altas energias

2.1.1 Cinemática da colisão

Para o estudo de colisões em altas energias é útil a utilização das coordenadas de cone de luz, definidas como uma mudança de variáveis das coordenadas usuais (t, x, y, z) . Assim, dado um quadrivetor arbitrário $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, as variáveis de cone de luz são escritas como

$$v^\mu = (v^+, \mathbf{v}, v^-), \quad \text{onde} \quad v^\pm = \frac{v^0 \pm v^3}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2). \quad (2.1)$$

Para um melhor entendimento da utilidade destas coordenadas, consideremos uma partícula movendo-se com velocidade próxima a da luz na direção positiva de z . Sua trajetória se dá ao longo do cone luz positivo, com $z \simeq t$ e seu quadrimomentum é $P^\mu = (P, 0, 0, P)$. Nas variáveis do cone de luz, a partícula encontra-se em $x^- = 0$ durante o chamado tempo de cone de luz $x^+ \simeq \sqrt{2}t$. No caso de uma partícula movendo-se na direção negativa de z , quando $z \simeq -t$, os papéis de x^+ e x^- são trocados: $x^- \simeq \sqrt{2}t$ é visto como tempo e $x^+ \simeq 0$ como coordenada longitudinal. A partir de agora, nos focaremos em partículas (mais especificamente hádrons) movendo-se para a direita (z positivo), de forma que x^+ refere-se a tempo e x^- a coordenada longitudinal; obviamente, $\mathbf{x} = (x, y)$ é a coordenada transversa ao sentido da propagação. Seguindo o exemplo do DIS no referencial de Breit, denotaremos o alvo como movendo-se para a direita, enquanto o projétil se moverá no sentido negativo do eixo de colisão.

O produto escalar é invariante de Lorentz e tem a forma

$$v \cdot w = v^+ w^- + v^- w^+ - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad (2.2)$$

de forma que, se usarmos $v = k$ e $w = x$, a variável k^- (conjugada ao tempo no cone de luz x^+) é interpretada como energia no cone de luz, e k^+ como momentum longitudinal no cone de luz. As principais motivações para o uso das variáveis de cone de luz são, primeiramente, que elas se

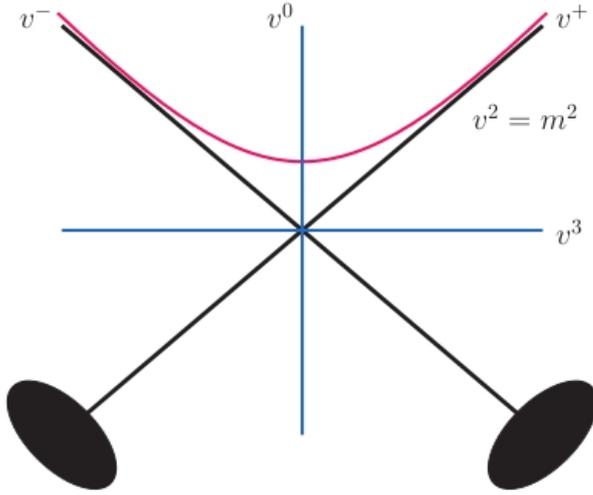


Figura 2.1: Diagrama para a definição das variáveis no cone de luz. Um espalhamento em altas energias é visto como os hádrons seguindo em cada uma das coordenadas do cone de luz, v^- e v^+ respectivamente.

transformam de maneira simples sob transformações (*boosts*) de Lorentz ao longo de z . Para o vetor v' , obtido por meio de tais transformações, as componentes no cone de luz, são

$$v'^+ = v^+ e^\psi, \quad v'^- = v^- e^{-\psi}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}, \quad (2.3)$$

onde temos, para o ângulo hiperbólico, $\psi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+l}{1-l}$, tal que $l = \tanh \psi$. Em particular, para partículas na camada de massa, temos que

$$k^\pm = \frac{E \pm k_z}{\sqrt{2}}, \quad \text{com} \quad E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}, \quad (2.4)$$

de onde segue que:

$$k^+ k^- = \frac{1}{2} (E^2 - k_z^2) = \frac{1}{2} (m^2 + |\mathbf{k}|^2 - k_z^2) = \frac{1}{2} (k_\perp^2 + m^2) \equiv \frac{1}{2} m_\perp^2, \quad (2.5)$$

onde m_\perp é a massa transversa das partículas produzidas e $k_\perp \equiv |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Uma variável muito importante na descrição de processos no regime de altas energias é a rapidez, que pode ser definida para uma partícula na camada de massa como

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{k^+}{k^-} = \frac{1}{2} \ln \frac{2(k^+)^2}{m_\perp^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{E + k_z}{E - k_z}. \quad (2.6)$$

Para explorarmos mais as propriedades destas variáveis, vamos nos concentrar no processo de um hádron (como momentum P^+ e massa M) movendo-se para a direita, para o qual um parton de momentum k^+ possui a fração de momentum

$$x \equiv \frac{k^+}{P^+}, \quad \text{para um hádron movendo-se para a direita.} \quad (2.7)$$

Caso o movimento fosse para a esquerda, teríamos $x \equiv \frac{k^-}{p^-}$. Assim, caso o parton esteja aproximadamente na camada de massa, sua rapidez é

$$y_{\text{parton}} = \frac{1}{2} \ln \frac{k^+}{k^-} = \frac{1}{2} \ln \frac{2(k^+)^2}{m_{\perp}^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{2(xP^+)^2}{m_{\perp}^2} = \ln \frac{\sqrt{2}xP^+}{m_{\perp}}. \quad (2.8)$$

Introduzindo a identidade M/M , temos

$$y_{\text{parton}} = \ln \frac{M\sqrt{2}xP^+}{Mm_{\perp}} = \ln \frac{\sqrt{2}P^+}{M} - \ln \frac{1}{x} + \ln \frac{M}{m_{\perp}}. \quad (2.9)$$

Identificamos o termo $y_{\text{had}} = \ln(\sqrt{2}P^+/M)$ como a rapidez do hádron, de forma que o chamamos anteriormente de rapidez no contexto do DIS, $Y = \ln(1/x)$, é na verdade a diferença entre a rapidez do hádron e do parton:

$$Y \simeq y_{\text{had}} - y_{\text{parton}}. \quad (2.10)$$

2.2 Dinâmica BFKL

O formalismo associado à dinâmica DGLAP discutido anteriormente não permite fazer nenhuma predição sobre a evolução das distribuições partônicas na variável de Bjorken x , que entra apenas nas condições iniciais destas distribuições. Na evolução DGLAP, contribuições em $1/x$, dominantes para pequeno x , são consideradas no limite de duplo logaritmo dominante (DLLA), a qual soma termos da ordem de $[\alpha_s \ln(1/x) \ln Q^2]^n$ com forte ordenamento na variáveis x e \mathbf{k} e faz com que as distribuições cresçam rapidamente quando $x \rightarrow 0$. Os termos dependentes de $1/x$ aparecem sempre acompanhados de $\ln Q^2$, de forma que tal descrição é válida somente para grandes valores de x e Q^2 .

A análise da região cinemática de pequeno x e valores moderados de Q^2 implica somar diagramas que contribuam com termos da ordem $[\alpha_s \ln(1/x)]^n$, com $\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1$ e $\alpha_s \ln(1/x) \approx 1$. Logo, devemos considerar termos dominantes em $\ln(1/x)$, com a dependência completa em Q^2 mantida, significando que o forte ordenamento nos momenta transversos que aparece na dinâmica DGLAP deve ser atenuado e uma integração sobre todo o espaço de fase dos momenta transversos deve ser incluída. Isto implica que nesta região cinemática as equações de evolução DGLAP não são mais válidas.

Visando descrever os processos em altas energias (pequeno x), nos limites cinemáticos descritos acima, Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (Balitsky & Lipatov, 1978, Fadin et al., 1975, Kuraev et al., 1976, 1977) propuseram, na década de 70, uma equação para a evolução na variável de Bjorken x . Como o espaço de fase não está mais restrito ao ordenamento nos momenta transversos (agora os momenta longitudinais se tornam fortemente ordenados), a equação BFKL deve ser escrita em termos da função de glúons não-integrada $\phi(x, \mathbf{k}^2)$, que está relacionada à distribuição de glúons usual por

$$xg(x, Q^2) = \int_0^{Q^2} d\mathbf{k}^2 \frac{\phi(x, \mathbf{k}^2)}{\mathbf{k}^2}, \quad (2.11)$$

onde $\phi(x, \mathbf{k}^2)$ fornece a probabilidade de encontrar um párton (glúon) com fração de momento x e momentum transverso \mathbf{k} .

A forma diferencial da equação BFKL é dada, em ordem dominante (LO), por

$$\frac{\partial \phi(x, \mathbf{k}^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \mathbf{k}^2 \int_0^\infty \frac{d\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'} \left\{ \frac{\phi(x, \mathbf{k}'^2) - \phi(x, \mathbf{k}^2)}{|\mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}^2|} + \frac{\phi(x, \mathbf{k}^2)}{\sqrt{4\mathbf{k}'^4 - \mathbf{k}^4}} \right\}. \quad (2.12)$$

A condição inicial para esta equação deve ser tomada para um valor suficientemente pequeno de x , tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\alpha_s \ll 1, \quad \alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1, \quad \alpha_s \ln(1/x) \approx 1, \quad (2.13)$$

de forma que a equação BFKL é apropriada para descrição de processos no limite de altas energias, já que descreve o limite $x \rightarrow 0$, onde a distribuição de glúons domina a dinâmica. Neste limite, a equação BFKL pode ser representada por um diagrama escada efetivo, com os momenta longitudinais fortemente ordenados, e sem ordenamento nos momenta transversos, ou seja,

$$\frac{Q^2}{s} \ll x_{i+1} \ll \dots \ll x_1 \ll 1, \quad (2.14)$$

$$Q^2 \simeq \mathbf{k}_{i+1}^2 \simeq \dots \simeq \mathbf{k}_1^2 \simeq Q_0^2, \quad (2.15)$$

como esquematizado na figura 2.2. Uma propriedade importante desta escada de glúons é sua coerência no tempo: o tempo de vida dos pártons formadores da escada é proporcional ao seu valor de x , $\Delta t \simeq 2k_z/k_t \propto x$ (uma vez que $k_z = xP$), os glúons “lentos” na parte inferior da escada têm um tempo de vida muito menor do que seus precedentes mais “rápidos”. Assim, para finalidades de dinâmica em pequeno x , os glúons rápidos com $x' \gg x$ agem como fontes congeladas de campo de cor emitindo glúons na escala x . Uma vez que tais fontes podem se sobrepor no plano transversal, suas cargas de cor se adicionam coerentemente, originando uma grande densidade de cargas de cor. Como será visto posteriormente, esta separação de escalas é fundamental na definição de uma teoria efetiva de campo para a dinâmica de pequeno x , o condensado de Vidros de Cor (CGC), que será discutido na seção 2.4.3.

Visando obter uma solução analítica para a equação BFKL, toma-se a transformada de Mellin de $\phi(x, \mathbf{k}^2)$ em relação a \mathbf{k}^2 ,

$$\phi(x, \gamma) = \int_0^1 d \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2} \right) \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2} \right)^{-\gamma-1} \phi(x, \mathbf{k}^2), \quad (2.16)$$

onde introduz-se uma escala \mathbf{k}_0^2 no momentum transversal por razões dimensionais. A transformada inversa fornece

$$\phi(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\gamma \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2} \right)^\gamma \phi(x, \gamma). \quad (2.17)$$

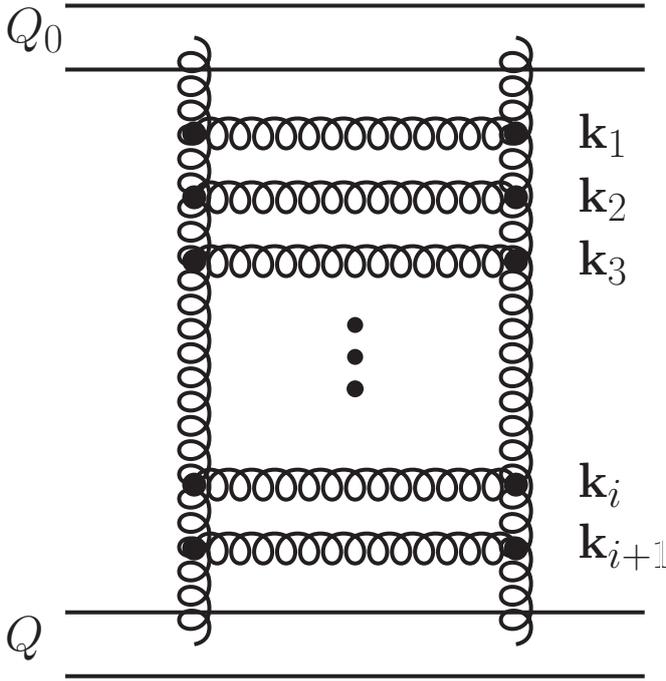


Figura 2.2: Diagrama para a escada efetiva de glúons BFKL. Cada nova “perna” da escada possui fração de momentum longitudinal muito distinta das demais, enquanto que os momenta transversos são semelhantes.

Em termos de $\phi(x, \gamma)$ a equação BFKL tem a forma

$$\frac{\partial \phi(x, \gamma)}{\partial \ln(1/x)} = \bar{\alpha} \chi(\gamma) \phi(x, \gamma), \quad (2.18)$$

onde usamos $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c / \pi$ e

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma) \quad (2.19)$$

é o chamado núcleo da equação BFKL, o qual está definido em termos das funções digama $\psi(\gamma) = \Gamma'(\gamma)/\Gamma(\gamma)$.

A solução de (2.18) é

$$\phi(x, \gamma) = \phi(x_0, \gamma) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\chi(\gamma)}, \quad (2.20)$$

a qual, quando inserida na transformada inversa de Mellin (2.17), fornece

$$\phi(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\gamma \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2} \right)^\gamma \phi(x_0, \gamma) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\chi(\gamma)}. \quad (2.21)$$

Após realizar a integração em γ , temos como solução

$$\phi(x, \mathbf{k}^2) \sim \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\lambda} \left[\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2 \ln(x_0/x)} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\ln^2(\mathbf{k}/\tilde{\mathbf{k}}^2)}{2\lambda' \ln(x_0/x)} \right], \quad (2.22)$$

onde $\lambda = 4\bar{\alpha} \ln 2$ e $\lambda' = 28\bar{\alpha} \zeta(3)$, com ζ sendo a função zeta de Riemann. O termo que domina esta expressão é $\phi(x, \mathbf{k}^2) \sim x^{-\lambda}$, com $\lambda \approx 0.5$ para $\alpha_s = 0.2$. Este comportamento é característico na

dinâmica BFKL e representa um crescimento na distribuição de glúons em altas energias, correspondendo a um rápido crescimento na seção de choque σ^{γ^*N} . Na próxima seção veremos equações de evolução desenvolvidas a fim de evitar esse crescimento, as quais incluem efeitos de recombinação de glúons.

2.2.1 Dinâmica BFKL no formalismo de dipolos de cor

Uma maneira alternativa de se estudar a física na região de pequeno x é através do formalismo de dipolos de cor, para o qual pode-se escrever uma equação semelhante à equação BFKL, porém agora para uma densidade de dipolos de cor. Aqui, vamos seguir o método usado por Mueller em (Mueller, 1994), que considera o espalhamento onium-onium, onde um onium representa um estado ligado quark-antiquark ($q\bar{q}$) pesado além dos glúons que estes podem emitir após a evolução em energia. Estes onia são supostos pesados o suficiente para que $\alpha_s(R^2) \ll 1$, onde R é o raio do onium. Esta análise tem a vantagem de eliminar as contribuições não perturbativas relevantes ao processo.

A ideia essencial é que a emissão dos glúons — chamados macios, pois devem ter energia menor do que o par que os gera — pelo dipolo inicial cresce no decorrer da evolução em rapidez, dando origem à cascata partônica característica da dinâmica BFKL. Todo este processo é incorporado na evolução da função de onda do estado inicial formado pelo par $q\bar{q}$ mais os possíveis glúons macios. Consideremos então a função de onda $\Psi^{(0)}(k_1)$ do estado inicial $q\bar{q}$, ilustrada na figura 2.3a, onde k_1 e k_0 são os momenta do quark e do antiquark, respectivamente e o momentum do onium $q\bar{q}$ é $p = k_0 + k_1$. Usando variáveis do cone de luz, podemos identificar os momenta k_i , com

$$k_i = x_i p + \frac{\mathbf{k}_i^2}{x_i} n + k_{i\perp}, \quad \epsilon_i = \frac{\mathbf{k}_i \cdot \epsilon_i}{x_i} n + \epsilon_{i\perp}, \quad (2.23)$$

onde usamos as condições de camada de massa e de transversalidade. Nesta expressão, $p = (P, 0, 0, P)$, $n = (1/2P, 0, 0, -1/2P)$ e $k_\perp \equiv \mathbf{k} = (0, k_x, k_y, 0)$, de forma que a massa do onium se torna desprezível quando P é muito grande.

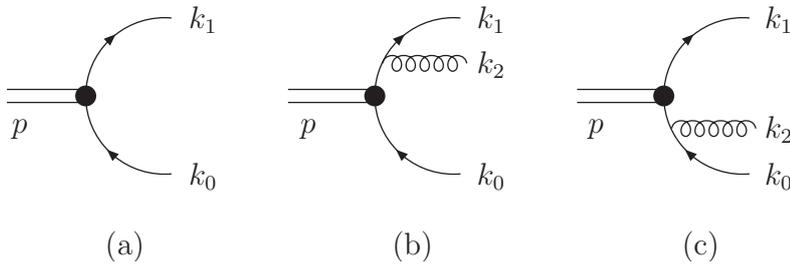


Figura 2.3: (a) Dipolo no estado inicial; (b) emissão de um glúon macio pelo quark e (c) pelo antiquark.

A função de onda $\Psi^{(1)}(k_1, k_2)$ para o estado $q\bar{q}g$, computada pelos diagramas das figuras 2.3b,c com uso de acoplamentos eikonais, é dada por

$$\Psi^{(1)}(k_1, k_2) = -ig_s t^A \left[\Psi^{(0)}(k_1 + k_2) \frac{k_1 \cdot \epsilon_2}{k_1 \cdot k_2} - \Psi^{(0)}(k_1) \frac{k_0 \cdot \epsilon_2}{k_0 \cdot k_2} \right], \quad (2.24)$$

onde A é o índice de cor e o vetor de polarização do glúon é, de acordo com 2.23, dado por

$$\epsilon_2 = \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2}{x_2} n + \epsilon_{2\perp}. \quad (2.25)$$

Contudo, a emissão do glúon macio das figuras 2.3b,c implica em $x_2 \ll x_1, (1 - x_1)$, de forma que neste limite

$$k_i \cdot \epsilon_j \stackrel{i \neq j}{\simeq} \frac{x_i}{x_j} (\epsilon_j \cdot \mathbf{k}_j), \quad k_i \cdot k_j \stackrel{i \neq j}{\simeq} \frac{x_i \mathbf{k}_j^2}{2x_j}. \quad (2.26)$$

Desta forma, a função de onda para o estado $q\bar{q}g$ se torna

$$\Psi^{(1)}(x_1, \mathbf{k}_1, x_2, \mathbf{k}_2) = -2i g_s t^A \left[\Psi^{(0)}(x_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) - \Psi^{(0)}(x_1, \mathbf{k}_1) \right] \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \epsilon_2}{\mathbf{k}_2^2}. \quad (2.27)$$

Para simplificar este tipo de equação faz-se a transformada de Fourier do espaço de momenta transverso \mathbf{k}_i para o espaço de coordenadas transversas (parâmetros de impacto) \mathbf{b}_i :

$$\Psi^{(n-1)}(x_1, \mathbf{b}_1 \dots x_n, \mathbf{b}_n) = \prod_{i=1}^n \int \frac{d^2 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} e^{i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{b}_i} \Psi^{(n-1)}(x_1, \mathbf{k}_1, \dots, x_n, \mathbf{k}_n). \quad (2.28)$$

Com isto, temos que

$$\Psi^{(1)}(x_1, \mathbf{b}_1, x_2, \mathbf{b}_2) = \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{b}_2)} \Psi^{(1)}(x_1, \mathbf{k}_1, x_2, \mathbf{k}_2). \quad (2.29)$$

Inserindo (2.27) em (2.29) e usando a relação

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{b}} \frac{k_i}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{b_i}{\mathbf{b}^2} \quad (2.30)$$

resulta que

$$\Psi^{(1)}(x_1, \mathbf{b}_1, x_2, \mathbf{b}_2) = \frac{g_s}{\pi} t^A \left(\frac{\mathbf{b}_{21} \cdot \epsilon_2}{\mathbf{b}_{21}^2} - \frac{\mathbf{b}_{20} \cdot \epsilon_2}{\mathbf{b}_{20}^2} \right) \Psi^{(0)}(x_1, \mathbf{b}_1), \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$, com $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$. Ao tomarmos o módulo quadrado e somando sobre cores e polarizações obtemos

$$|\Psi^{(1)}|^2 = 4C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} |\Psi^{(0)}|^2, \quad (2.32)$$

onde usamos o fato de que

$$\frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} = \frac{1}{\mathbf{b}_{21}^2} + \frac{1}{\mathbf{b}_{20}^2} - 2 \frac{\mathbf{b}_{21} \cdot \mathbf{b}_{20}}{\mathbf{b}_{21}^2 \mathbf{b}_{20}^2}. \quad (2.33)$$

Os dois primeiros termos à direita desta expressão correspondem aos diagramas (a) e (b) da figura 2.4, enquanto que o termo cruzado à direita de (2.33) corresponde aos diagramas de interferência (c) e (d) ilustrados na figura 2.4. A expressão (2.33) pode ser representada simbolicamente pelo diagrama à direita da figura 2.5, o qual não é um diagrama de Feynman, mas simplesmente uma representação do fato que o glúon é emitido coerentemente pelo quark ou antiquark.

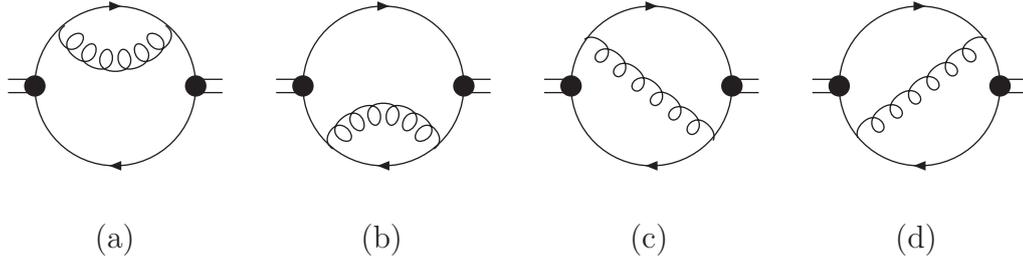


Figura 2.4: Diagramas que contribuem para $|\Psi^{(1)}|^2$.

O próximo passo na evolução em energia é obtido considerando a emissão de dois glúons pelo par $q\bar{q}$. Para construir a função de onda do onium, assumimos um forte ordenamento nas frações de momentum dos seus constituintes, tal que

$$x_3 \ll x_2 \ll x_1, (1 - x_1). \quad (2.34)$$

Esta é a configuração relevante pois dá origem ao maior número de fatores de $\ln x$ na distribuição inclusiva de glúons. A emissão do segundo glúon pode ocorrer de diversas formas nos diagramas da figura 2.4: pelo quark, pelo antiquark, pelo primeiro glúon, antes ou depois da emissão deste glúon, etc. Nesta ordem o cálculo ainda é possível, mas em ordens mais altas — mais emissões de glúons — isto se torna complexo. A fim de simplificar o desenvolvimento usa-se o limite de grande número de cores, introduzido por 't Hooft ('t Hooft, 1974) como uma aproximação para auxiliar na descrição das interações fortes.

A ideia é considerar o limite $N_c \rightarrow \infty$, com $\alpha_s \rightarrow 0$ tal que $\alpha_s N_c$ é mantido fixo. O pequeno parâmetro usado para a expansão perturbativa é então $1/N_c$. Neste limite, os glúons são representados por pares quark-antiquark e 't Hooft demonstrou que uma considerável simplificação ocorre nos diagramas que contribuem: somente os diagramas planares sobrevivem à aproximação. Diagramas planares são aqueles onde é possível representar (*desenhar*) todos os glúons dentro do par $q\bar{q}$ original sem que haja sobreposição destes, enquanto para os não planares ocorre o contrário. Estes últimos são suprimidos por potências de $1/N_c$.

Na figura 2.6 temos exemplos destes dois tipos de contribuições, onde os glúons (pares $q\bar{q}$) são representados por linhas duplas indicando o fluxo de cor e anti-cor. Os dois diagramas são de mesma ordem no acoplamento g_s , mas o planar tem três laços de cor fechados enquanto que o não planar tem apenas um. Cada vértice dos onia introduz um fator de normalização $1/\sqrt{N_c}$, já que o estado deve ser um singleto de cor. Desta forma, o diagrama planar é de ordem $\mathcal{O}(g_s^4 N_c^2)$, enquanto que o não planar é $\mathcal{O}(g_s^4)$, sem dependência em N_c . No limite de grande número de cores exposto acima, o diagrama não planar é suprimido por um fator $1/N_c^2$ e temos N_c^2 glúons ao invés de $N_c^2 - 1$, de forma que $C_A = 2C_F = N_c$.

O uso da aproximação planar vista acima reduz consideravelmente o número de diagramas contribuindo aos processos durante a evolução do onium. Para o caso da emissão de 2 glúons em questão, esta aproximação implica na colocação do último glúon emitido entre o quark e o primeiro glúon (primeiro par $q\bar{q}$) ou entre o glúon e o antiquark. Assim, este último glúon (dipolo) é emitido ou

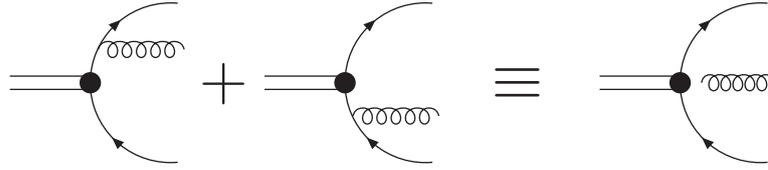


Figura 2.5: Representação da emissão de um glúon pelo dipolo.

pelo dipolo 21, como ilustra a figura 2.7a, ou pelo dipolo 20, como mostra a figura 2.7b. Vejamos como estes diagramas contribuem para a função de onda do onium. Quando o glúon (dipolo) identificado por 3 é emitido pelo quark original 1 ou pelo antiquark de 2, este deve ser reabsorvido somente pelo quark original 1 ou pelo antiquark de 2. A contribuição deste processo — que está ilustrada na figura 2.7a — para o módulo quadrado da função de onda do estado $q\bar{q}gg$ é então

$$2 \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \frac{\mathbf{b}_{21}^2}{\mathbf{b}_{31}^2 \mathbf{b}_{32}^2}, \quad (2.35)$$

onde usamos $C_F = N_c/2$. De forma análoga, quando o glúon 3 é emitido pelo antiquark original 0 ou pelo quark presente em 2, este deve ser reabsorvido somente pelo antiquark original ou pelo quark em 2, de forma que a este processo (visto na figura 2.7) contribuem com

$$2 \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \frac{\mathbf{b}_{20}^2}{\mathbf{b}_{30}^2 \mathbf{b}_{32}^2}. \quad (2.36)$$

Somando os dois termos, a função de onda do estado $q\bar{q}gg$ toma a forma

$$|\Psi^{(2)}|^2 = 2 \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \left(\frac{\mathbf{b}_{21}^2}{\mathbf{b}_{31}^2 \mathbf{b}_{32}^2} - \frac{\mathbf{b}_{20}^2}{\mathbf{b}_{30}^2 \mathbf{b}_{32}^2} \right) |\Psi^{(1)}|^2. \quad (2.37)$$

Contribuições de mais alta ordem são obtidas de maneira similar, pois qualquer glúon adicional é emitido por um dos dipolos correspondente aos pares de pártons, os quais são adjacentes nos diagramas planares. Os diagramas não planares, desprezados no limite de grande N_c , correspondem a processo de interferência entre diferentes dipolos.

A probabilidade diferencial $d\Pi(x_2, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{20})$ para a emissão de um glúon com fração de momentum longitudinal x_2 e separação transversa \mathbf{b}_{20} pelo dipolo original (10) é definida como

$$d\Pi(x_2, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{20}) = \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} \frac{dx_2}{x_2} d^2 \mathbf{b}_{20}. \quad (2.38)$$

Introduzimos ainda a densidade inclusiva de glúons $f(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1)$ para a função de onda do onium com tamanho transverso \mathbf{b}_{10} e fração de momentum longitudinal x_1 . Esta densidade é dita inclusiva pois devemos somar sobre todas as contribuições com qualquer número de glúons. A variação de $f(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1)$ com x_1 é determinada pela emissão de um glúon 2 que origina dois novos dipolos (20) e

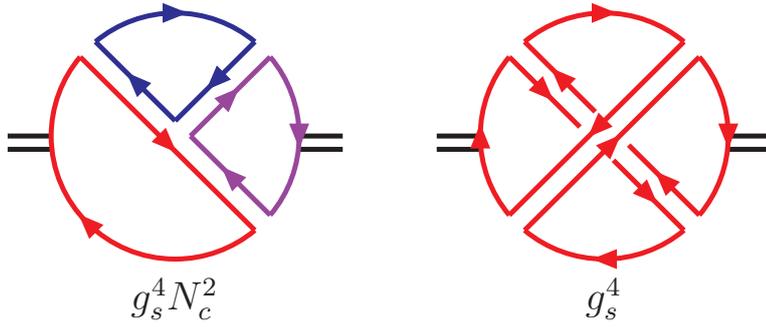


Figura 2.6: Diagramas planares ($\mathcal{O}(g_s^4 N_c^2)$) e não planares ($\mathcal{O}(g_s^4)$). O últimos são suprimidos por um fator $1/N_c^2$, no limite de grande número de cores.

(21) em adição ao dipolo original (10). Usando (2.38) temos

$$df(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \frac{dx_1}{x_1} \int d^2 \mathbf{b}_{20} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} [f(x, \mathbf{b}_{21}^2, x_1) + f(x, \mathbf{b}_{20}^2, x_1) - f(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1)], \quad (2.39)$$

onde usamos $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c / \pi$. A invariância sob translações longitudinais implica que f deve ter somente dependência funcional em x/x_1 . Assim

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad (2.40)$$

tal que

$$\frac{df(x, \mathbf{b}_{10}^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 \mathbf{b}_{20} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} [f(x, \mathbf{b}_{21}^2) + f(x, \mathbf{b}_{20}^2) - f(x, \mathbf{b}_{10}^2)]. \quad (2.41)$$

Esta é a equação BFKL para a distribuição de glúons não integrada, escrita no espaço de parâmetro de impacto, obtida por Mueller. Ela será útil no decorrer do trabalho para fim de comparações entre as dinâmicas BFKL da evolução dos dipolos e as dinâmicas não lineares para tal evolução.

2.3 As correções de unitariedade

Como visto nas seções anteriores, a aproximação de logaritmo dominante em x usada na derivação da equação BFKL prevê que as amplitudes de espalhamento cresçam com o aumento da energia s , ou com o decréscimo de x — lembrando que em altas energias $x \approx Q^2/s$. Isto significa que a seção de choque, calculada com o uso do teorema ótico, também cresce segundo

$$\sigma_{\text{tot}} \sim s^\lambda, \quad (2.42)$$

com $\lambda = 4\bar{\alpha} \ln 2$. Este comportamento exige cuidados, pois espera-se que as seções de choque sejam limitadas quando $s \rightarrow \infty$, de forma que o limite de Froissart-Martin (Froissart, 1961, Martin, 1963)

$$\sigma_{\text{tot}} < A \ln^2 s \quad \text{para } s \rightarrow \infty, \quad (2.43)$$

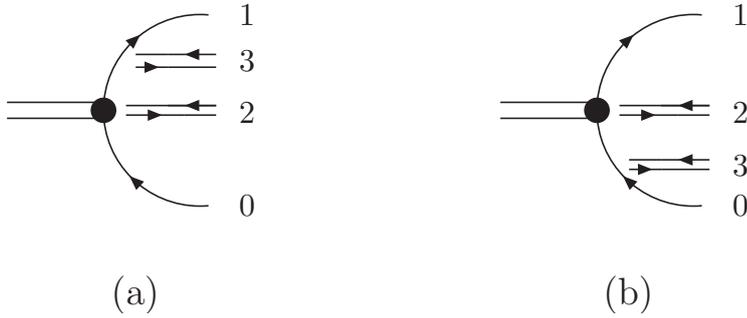


Figura 2.7: Emissão de dois glúons em sua interpretação no limite de grande número de cores.

onde A é uma constante, seja satisfeito. O comportamento das soluções da equação BFKL não satisfaz esse limite, de tal forma que correções de unitariedade devem ser feitas para uma descrição correta dos processos em energias muito altas.

Começamos apresentando um argumento físico, devido originalmente a Feynman, que torna plausível o limite de Froissart-Martin. Vamos supor que a partícula alvo tenha uma distribuição de densidade que reflete o comportamento de curto alcance da força forte, dada por exemplo por

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/R), \quad (2.44)$$

onde r é a distância em relação ao centro do alvo e R é o tamanho deste. Toma-se como uma propriedade fundamental da interação forte que esta distribuição decresça mais rápido do que qualquer lei de potência para grandes distâncias. Se a probabilidade de interação entre o projétil e o alvo é limitada, quando $s \rightarrow \infty$, ela deve satisfazer

$$P(s, r) < P_0 \left(\frac{s}{s_0} \right)^N \exp\left(-\frac{r}{R}\right). \quad (2.45)$$

Logo, a interação deve ser desprezível para colisões com parâmetros de impacto

$$r \gg NR \ln(s/s_0), \quad (2.46)$$

implicando que a seção de choque total para o processo deve satisfazer

$$\sigma_{tot} < \pi R^2 N^2 \ln^2(s/s_0). \quad (2.47)$$

Assim, vemos claramente que os cálculos feitos com base na aproximação de logaritmo dominante da QCD (BFKL) falham conforme a energia total s tende a valores assintóticos. No referencial de centro de massa do processo de colisão, o aumento da seção de choque total com s é devido a proliferação da emissão de glúons macios durante a evolução. Na linguagem de dipolos introduzida no capítulo anterior é a proliferação de dipolos que produz este crescimento. Podemos imaginar como será a física que eventualmente existirá na evolução quando a densidade de dipolos (glúons) continuar a crescer. Em altas energias a densidade deverá ser grande o bastante para que mais de um par de dipolos no projétil sofra espalhamento com o alvo para cada dipolo “pai” do projétil, ou seja, existe

a possibilidade de múltiplos espalhamentos. Como veremos, correções como esta devem levar à saturação da densidade de pártons (glúons ou dipolos) no alvo e assim ao controle do crescimento da seção de choque total, como demanda a unitariedade. No restante deste capítulo vamos apresentar as equações de evolução não lineares que introduzem efeitos de saturação às amplitudes de espalhamento.

2.4 As equações de evolução não lineares

Como vimos acima, as correções de unitariedade são imprescindíveis na descrição de processos para QCD de altas energias. Com vistas a incluir os chamados efeitos de saturação partônica na evolução em altas energias, muitos esforços foram despendidos ao longo das últimas décadas e como resultado surgiram diversas equações de evolução não lineares, onde os termos não lineares dão conta, justamente, das devidas correções de unitariedade. Não vamos descrever todos os trabalhos desenvolvidos neste sentido, mas apenas citar alguns e então partir para a descrição das equações de evolução que são realmente relevantes a este trabalho.

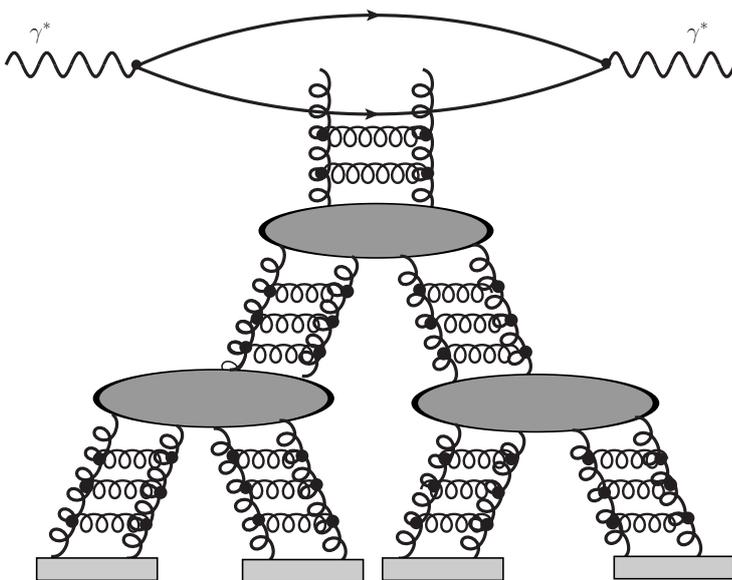


Figura 2.8: Diagrama “fan” descrevendo as interações multi-Pomeron em um processo tipo DIS. Do ponto de vista do alvo, a equação GLR descreve a fusão de duas escadas de glúons BFKL em uma.

Um dos primeiros trabalhos que buscaram introduzir correções de unitariedade à evolução culminou no desenvolvimento da equação de evolução GLR, devida a Gribov, Levin e Ryskin (Gribov et al., 1983). Esta equação considera efeitos de recombinação partônica na QCD perturbativa por meio da inclusão de diagramas não-escada, ou gráficos de multi-escada que também são conhecidos como diagramas “fan” (por lembrarem a forma de uma hélice de ventilador), ilustrados na figura 2.8. A evolução QCD padrão é representada então por uma cascata de decaimentos partônicos no núcleon, com a possibilidade de fusão de duas escadas de glúons em uma, o que está representado na figura 2.8. Este modelo de interações em altas energias foi posteriormente provado no limite de duplo logaritmo dominante (DLA) por Mueller e Qiu (Mueller & Qiu, 1986), numa equação que ressona todos os diagramas “fan” do tipo mostrado na figura 2.8. Outra equação que visa a unitarização é a obtida pelo formalismo desenvolvido por Ayala, Gay Ducati e Levin (AGL) (Ayala et al., 1997, 1998) com o uso da abordagem de Glauber (Glauber, 1955) para a QCD perturbativa, considerando a interação

dos pártons mais rápidos da escada com o alvo. Como resultado obtém-se uma equação de evolução não linear que ressona a troca de múltiplos diagramas de escadas gluônicas, na aproximação DLA.

A seguir mostraremos os principais aspectos de duas equações de evolução não lineares baseadas no formalismo de dipolos de cor: A equação de Balitsky e Kovchegov (BK) (Balitsky, 1996, Kovchegov, 1999, 2000) e a hierarquia de Balitsky (Balitsky, 1996), além da evolução baseada no Condensado de Vidros de Cor (CGC) por meio da equação JIMWLK (Ferreiro et al., 2002, Iancu et al., 2001a,b, Jalilian-Marian et al., 1997, 1998, Weigert, 2002).

2.4.1 A equação de Balitsky e Kovchegov

O problema das correções de unitariedade da QCD foi abordado por Kovchegov (Kovchegov, 1999, 2000) como uma extensão da equação BFKL na representação de dipolos, com termos não lineares que unitarizam a equação BFKL. Esta equação foi investigada também por Balitsky (Balitsky, 1996) com o uso da Expansão do Produto de Operadores (OPE) na QCD, obtendo uma hierarquia para a evolução de operadores de linhas de Wilson. Kovchegov partiu do espalhamento de um dipolo (onium $q\bar{q}$) com um grande alvo (núcleo na derivação original) considerando que tal processo é descrito pela evolução da cascata partônica associada à multiplicação de dipolos na função de onda do dipolo gerador da cascata. Cada dipolo nesta cascata sofre múltiplos espalhamentos com os núcleons do alvo, implicando a ressona das múltiplas trocas do tipo escada a fim de obter a seção de choque para a interação do par de dipolos com o alvo. Deste processo de reespalhamento dos dipolos resulta a unitarização do Pomeron BFKL na aproximação de logaritmo dominante LL($1/x$).

O espalhamento de um dipolo com o alvo é considerado no referencial de repouso do alvo e ocorre através da interação de uma cascata de glúons macios na função de onda do onium $q\bar{q}$ com o alvo. A utilização do limite de grande número de cores N_c , vista anteriormente, é usada a fim de suprimir diagramas não planares do formalismo. Com isto, os glúons emitidos podem ser tratados como pares $q\bar{q}$ e a função de onda do onium e sua evolução pode ser descrita com uso do formalismo de dipolos desenvolvido por Mueller (Mueller, 1994) usando QCD perturbativa, considerando que cada dipolo da cascata interage independentemente com os constituintes do alvo e de forma que não haja correlações entre estes dipolos.

A equação de Balitsky-Kovchegov (BK), para a amplitude de espalhamento frontal do processo onium-alvo, $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y)$, é dada por (Kovchegov, 1999, 2000)

$$\begin{aligned}
N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y) = & -\gamma(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0) \exp \left[-\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \ln \left(\frac{x_{01}}{\rho} \right) Y \right] \\
& + \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int_0^\infty dy \exp \left[-\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \ln \left(\frac{x_{01}}{\rho} \right) (Y - y) \right] \int_\rho d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} \\
& \times \left[2N \left(\mathbf{x}_{02}, \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{12}, y \right) - N \left(\mathbf{x}_{02}, \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{12}, y \right) N \left(\mathbf{x}_{12}, \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{02}, y \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.48}$$

com $\gamma(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0)$ definindo o propagador de um dipolo de tamanho transversal $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ e com parâmetro de impacto \mathbf{b}_0 quando este atravessa o alvo (hádron). Em (2.48), $Y = \ln(1/x)$ é variável

rapidez, ρ é um corte para regularizar divergências infravermelhas e $C_F = N_c/2$, pois o limite de grande número de cores foi tomado.

Se considerarmos apenas o termo linear em N , a equação BK é reduzida à equação BFKL (Pomeron BFKL), enquanto que o termo quadrático em N é responsável pelas correções de unitariedade na amplitude, de forma que o Pomeron BFKL é unitarizado pela equação BK. No que segue, devemos mostrar que a equação BK pode ser vista como uma aproximação de campo médio de uma hierarquia de equações, onde fica clara sua conexão com a dinâmica BFKL na representação de dipolos.

No capítulo 3 vamos apresentar um método para estudar as soluções assintóticas da equação BK. Tais soluções, obtidas por meio de uma analogia com processos de reação-difusão, foram originalmente desenvolvidas no espaço de momentum, como veremos adiante. Portanto, é importante mostrar aqui como é expressa a evolução da amplitude (2.48) neste espaço, ou seja, qual é forma da equação BK quando expressa no espaço de momentum. Para tanto, devemos assumir independência no parâmetro de impacto \mathbf{b} , o que é feito considerando o alvo suficientemente grande tal que a amplitude de espalhamento frontal do dipolo original com o alvo, $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y)$, é uma função suave em relação ao parâmetro de impacto \mathbf{b}_0 do fóton virtual que gera o dipolo. Isto é equivalente a supor que o tamanho transversal da função de onda do dipolo é muito menor que o tamanho do alvo, de forma que o parâmetro de impacto entre o fóton virtual e o alvo é menor do que o raio R deste último. Formalmente, assumimos $x_\perp \ll R$, onde x_\perp é o tamanho transversal típico do dipolo, e ainda que $b_0 < R$ — b_0 é zero no centro do alvo. Com isso, podemos desprezar \mathbf{x}_{12} e \mathbf{x}_{02} em relação a \mathbf{b}_0 no lado direito de (2.48), o que significa dizer que as variações em $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y)$, quando \mathbf{b}_0 é variado de uma quantidade x_\perp , são muito pequenas e desprezíveis. Desta forma, fazendo $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y) = N(\mathbf{x}_{01}, Y)$ temos que a derivada em relação a Y de (2.48) tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\mathbf{x}_{01}, Y)}{\partial Y} &= \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_\rho d^2 x_2 \left[\frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} - 2\pi \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02}) \ln \left(\frac{x_{01}}{\rho} \right) \right] N(\mathbf{x}_{02}, Y) \\ &\quad - \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} N(\mathbf{x}_{02}, Y) N(\mathbf{x}_{12}, Y). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nesta expressão, a condição inicial é $N(\mathbf{x}_{01}, 0) = -\gamma(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0)$, a única que ainda depende do parâmetro de impacto \mathbf{b}_0 . Contudo, γ é uma função suave em relação a \mathbf{b}_0 , de forma que a suposição de fraca dependência de N em \mathbf{b}_0 ainda é válida. Fisicamente, isto implica em que antes da colisão, quando o fóton virtual desenvolve sua função de onda de dipolo, este não possui qualquer informação a respeito do alvo, já que a interação com este último se dá através do dipolo e portanto a informação sobre a espessura (tamanho) do alvo como uma função do parâmetro de impacto se dá através de γ quando o dipolo interage com o alvo.

A fim de transformar para o espaço de momentum, define-se a transformada bidimensional de Fourier como

$$N(x_\perp) = x_\perp^2 \int \frac{d^2 k}{2\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{N}(k, Y) = x_\perp^2 \int_0^\infty dk k J_0(kx_\perp) \tilde{N}(k, Y). \quad (2.50)$$

A transformada inversa é dada por

$$\tilde{N}(k, Y) = \int \frac{d^2 x_\perp}{2\pi x_\perp^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} N(x_\perp, Y) = \int_0^\infty \frac{dx_\perp}{x_\perp} J_0(kx_\perp) N(x_\perp). \quad (2.51)$$

Com isso, (2.49) se torna, no espaço de momentum ($\partial_Y \equiv \partial/\partial Y$)

$$\partial_Y \tilde{N}(k, Y) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \left[\tilde{N}(k', Y) - \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \tilde{N}(k, Y) \right] - \bar{\alpha} \tilde{N}^2(k, Y), \quad (2.52)$$

a qual pode ser escrita de maneira compacta como (Kovchegov, 2000),

$$\partial_Y \tilde{N}(k, Y) = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \tilde{N}(k, Y) - \bar{\alpha} \tilde{N}^2(k, Y), \quad (2.53)$$

onde

$$\chi(\lambda) = 2\psi(1) - \psi(1 - \lambda) - \psi(\lambda) \quad (2.54)$$

é o autovalor do núcleo da equação BFKL, visto no capítulo anterior e interpretado como um operador diferencial, com $\lambda \equiv -\partial_L = -\partial/\partial \ln k$, agindo sobre $\tilde{N}(k, Y)$. Agora, vemos explicitamente que o primeiro termo no lado direito de (2.53) refere-se à evolução BFKL usual, enquanto que o termo quadrático corresponde à unitarização do crescimento do Pomeron BFKL. Na apresentação do modelo para amplitude de espalhamento dipolo-próton, a ser vista no capítulo 3, a forma (2.53) da equação BK será muito útil.

2.4.2 A hierarquia de Balitsky

Como comentado na seção anterior, Balitsky deduziu uma equação semelhante àquela de Kovchegov usando a expansão do produto de operadores (OPE) da QCD. Vamos mostrar aqui uma forma intuitiva de visualizar a hierarquia de equações de Balitsky, e como ela se reduz à equação BK. Vamos partir da probabilidade de um dipolo emitir um glúon de pequeno x

$$dP = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) d^2 z dY, \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2}, \quad (2.55)$$

onde \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} são as coordenadas transversas do quark, do antiquark e do glúon, respectivamente. Esta probabilidade é nula para $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow 0$, o que é esperado — pois um dipolo de tamanho nulo é não interagente, e se torna singular quando o glúon for emitido colinearmente ao quark ou ao anti-quark. Segundo o formalismo de dipolos, para grande N_c o glúon pode ser substituído por um par $q\bar{q}$, de forma que a emissão do glúon pode ser vista como o desdobramento do dipolo original (\mathbf{x}, \mathbf{y}) em dois novos dipolos: (\mathbf{x}, \mathbf{z}) e (\mathbf{z}, \mathbf{y}) , chamados dipolos filhos.

O que acontece é semelhante ao já mencionado na seção anterior em termos da cascata partônica, de forma que se o glúon emitido estiver presente na função de onda do dipolo no decorrer do espalhamento com o alvo, então o que espalha como este alvo é o sistema de dois dipolos. Caso o glúon não esteja presente na função de onda do projétil durante o espalhamento, ele pode ser visto como um termo “virtual” que diminui a probabilidade para que o par $q\bar{q}$ original permaneça como um dipolo

simples, compensando assim a probabilidade para o estado de dois dipolos. O processo todo pode ser descrito pela seguinte equação de evolução para a matriz S de espalhamento, derivada por Balitsky em (Balitsky, 1996):

$$\frac{\partial}{\partial Y} \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 \mathbf{z} \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \left\{ - \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}, \quad (2.56)$$

onde $\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ descreve o espalhamento do sistema de dois dipolos com o alvo. A suposição feita por Kovchegov de que os dipolos da cascata partônica interagem independentemente com o alvo é vista agora como possível somente se o campo de cor do alvo for fixo, tal que o operador de espalhamento do sistema de dois dipolos é dado simplesmente pelo produto dos operadores dos dipolos individuais: $S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}, \mathbf{y}) \equiv S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Entretanto, geralmente existem correlações entre os campos de cor de diferentes configurações que devem ser consideradas — em particular no decorrer da evolução, quando a densidade do campo de cor no alvo deve aumentar. Desta forma, a média sobre a função de onda do alvo deve introduzir correlações entre o espalhamento do sistema de dois dipolos, tal que $\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \neq \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y \langle S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$. Logo, a equação (2.56) não é uma equação fechada, mas sim a primeira de uma hierarquia infinita de equações que acopla operadores de espalhamento expressos em termos de linhas de Wilson, de forma que a cada iteração — a cada nova equação, ou a cada passo na evolução — a estrutura de cor se torna mais complicada.

A identificação de (2.56) com as equações BK e BFKL na representação de dipolos se dá mais facilmente quando a escrevemos em termos da amplitude de espalhamento $T = 1 - S$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y &= \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 \mathbf{z} \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &\times \left\{ - \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

cujos termos contribuem com os diagramas expressos na figura 2.9. Por simplicidade, nesta figura estão representados o espalhamento entre um dipolo elementar e o alvo na aproximação da troca de dois glúons, embora no regime de altas energias o número de glúons trocados pode ser arbitrário. O espalhamento do dipolo com o alvo começa com a troca de dois glúons, como visto na figura 2.9a. Após um passo na evolução do projétil, *i.e.*, após a emissão de um glúon ou dipolo filho, surgem os diagramas das figuras 2.9b,c,d: (b) é o termo virtual — o dipolo original interage com o alvo antes de emitir o glúon, (c) mostra o espalhamento de um dos dipolos (existe um diagrama similar para o outro dipolo) e (d) mostra o espalhamento simultâneo dos dois dipolos filhos com o alvo. Na equação (2.57) o espalhamento múltiplo do sistema de dois dipolos com o alvo é descrito pelo último termo, que descreve o espalhamento simultâneo dos dipolos filhos com o alvo (figura 2.9d).

Podemos notar que embora a dedução das equações de Balitsky tenha sido realizada através da evolução do *projétil*, sua interpretação em termos da evolução do *alvo* também é possível. A evolução do alvo no regime de altas energias é descrita pelo formalismo do condensado de vidro de cor (CGC), usando as equações de evolução JIMWLK (Ferreiro et al., 2002, Iancu et al., 2001a,b, Jalilian-Marian et al., 1997, 1998, Weigert, 2002), as quais são baseadas nas equações do grupo de renormalização (RGE) e que serão apresentadas na próxima seção. Essa correspondência entre a evolução do alvo

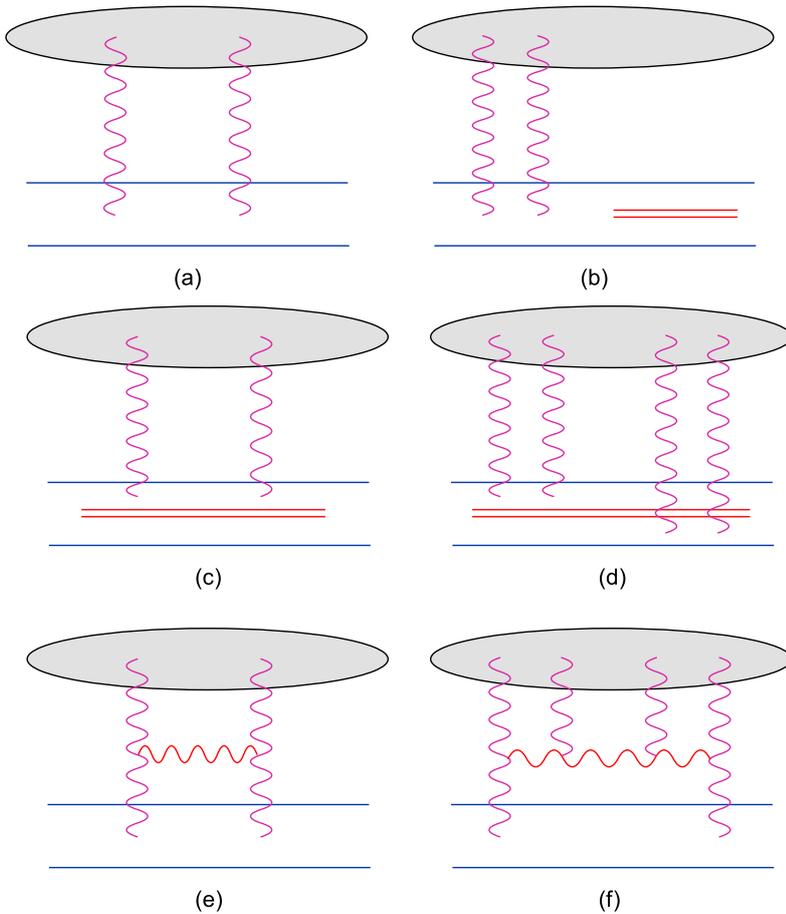


Figura 2.9: Diagramas para a evolução da amplitude de dipolos: (a) contribuição em nível de árvore para o espalhamento com o dipolo “pai”; (b) correção virtual $-\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y$; (c) espalhamento de um dos dipolos “filhos”, $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y$ ou $\langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$; (d) espalhamento simultâneo de ambos os dipolos filhos, $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$; (e,f) um passo na evolução do alvo.

ou do projétil é possível pois a estrutura do Hamiltoniano das equações do grupo de renormalização permitem uma interpretação dual — como as representações de Schrödinger e Heisenberg na mecânica quântica, o que permite que os efeitos não lineares na evolução possam ser interpretados ou como múltiplos espalhamentos ou como saturação gluônica, dependendo do ponto de vista.

Assim, os diagramas que descrevem um passo na evolução do projétil, mostrados nas figuras 2.9b,c,d, correspondem, na evolução do alvo, às figuras 2.9e,f, sendo que a primeira, figura 2.9e, corresponde um passo na evolução BFKL do alvo, que fornece a amplitude de espalhamento em mais baixa ordem. Em termos do projétil, ela corresponde aos diagramas das figuras 2.9b,c. O segundo diagrama, figura 2.9f, representa a fusão de quatro glúons em dois e corresponde ao espalhamento duplo da figura 2.9d. Isto posto, fica claro que os efeitos de saturação gluônica no alvo podem ser vistos como efeitos de espalhamentos múltiplos na função de onda do projétil.

A equação BFKL surge de (2.57) como o limite de espalhamento fraco da seguinte forma: para energias suficientemente pequenas, tal que o alvo é diluto, a amplitude de espalhamento é pequena, $T \ll 1$, de forma que o termo descrevendo o espalhamento simultâneo dos dois dipolos é menor ainda, $\langle TT \rangle \ll \langle T \rangle \ll 1$. Logo, pode-se desprezar este termo e como resultado obtém-se uma equação linear

para a amplitude de espalhamento

$$\frac{\partial}{\partial Y} \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \times \left\{ -\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, z) \rangle_Y + \langle T(z, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}, \quad (2.58)$$

reconhecida como a representação de dipolos da equação BFKL mostrada no capítulo 1.

A equação BK também pode ser obtida como uma aproximação de (2.57). Assumindo que os campos de cor do alvo não são fortemente correlacionados, o que equivale a tomar uma aproximação de campo médio para tal campo, pode-se fatorizar a correlação dos das amplitudes $T(\mathbf{x}, z)$ e $T(z, \mathbf{y})$ como segue:

$$\langle T(\mathbf{x}, z) T(\mathbf{y}, z) \rangle_Y \approx \langle T(\mathbf{x}, z) \rangle_Y \langle T(\mathbf{y}, z) \rangle_Y. \quad (2.59)$$

Desta forma uma equação não linear fechada — as equações de Balitsky formam uma hierarquia de equações acopladas — é obtida

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = & \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \\ & \times \left\{ -\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, z) \rangle_Y + \langle T(z, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, z) \rangle_Y \langle T(z, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esta equação é a equação de Balitsky–Kovchegov, que preserva o vínculo de unitariedade $T \leq 1$ no decorrer da evolução e prevê um limite superior $T = 1$ a ser alcançado no limite de energias muito altas. No capítulo 3 mostraremos como são as soluções assintóticas da amplitude de espalhamento descrita pela equação BK, bem como um modelo para tal amplitude.

2.4.3 O Condensado de Vidros de Cor e a evolução JIMWLK

As ideias originais para o desenvolvimento da teoria do Condensado de Vidros de Cor foram motivadas pelos resultados de HERA (Breitweg, 1999) apresentados no final do capítulo 1, os quais mostram (conforme figura 1.9) um forte crescimento na distribuição de glúons para valores cada vez menores da fração de momentum longitudinal x . Essa observação era esperada em uma série de trabalhos teóricos, descritos pelas equações de evolução lineares descritas acima. A maneira intuitiva de se entender este fenômeno é perceber que a seção de choque cresce lentamente em altas energias, ao passo que a densidade de glúons cresce rapidamente. Tendo em mente que os glúons devem ocupar um espaço finito no interior dos hádrons, resulta na conjectura de que a densidade de pártons deve ser limitada, ou seja, de que existe saturação na densidade de pártons.

De fato, o argumento usado é de que ao se aumentar a energia, um hádrons se torna um sistema denso de glúons para uma determinada escala. Ainda assim, existem buracos não preenchidos pelos glúons. A medida que se aumenta ainda mais a energia, adiciona-se mais glúons aos sistema, sendo que esses são pequenos o suficiente para se ajustar aos buracos. Uma vez que em Mecânica Quântica os comprimentos de onda são interpretados como inversamente proporcional ao momentum ($\lambda \sim 1/Q$), em altas energias, os glúons são densamente empacotados abaixo de uma determinada escala de momentum. Existe portanto um momentum crítico, o momentum de saturação (ou escala

de saturação), $Q_s \equiv Q_s(x)$, que caracteriza o adensamento de glúons. Este momentum de saturação aumenta com a energia, de maneira que o número total de glúons possa crescer sem limite.

Os glúons em pequeno x são então muito próximos uns aos outros, formando um sistema muito denso, que se torna ainda mais denso a medida que a energia aumenta e novos glúons são criados. Sendo assim, o acoplamento entre tais pártons deve ser fraco, $\alpha_s \ll 1$, em decorrência por exemplo da propriedade do confinamento da QCD, que diz que o acoplamento deve crescer com a distância. E sistemas fracamente acoplados são passíveis de entendimento em termos de QCD perturbativa de primeiros princípios.

Este sistema fracamente acoplado é chamado Condensado de Vidros de Cor (CGC), uma teoria de campo efetiva cujo nome resulta das propriedades físicas do sistema:

- *Condensado*: uma vez que os números de ocupação na região de saturação são da ordem $\mathcal{O}(1/\alpha_s) \gg 1$, correspondendo ao maior valor permitido pelas interações gluônicas. E mais, suas cargas de cor se adicionam coerentemente (com relação aos tempos de vida), como consequência do não ordenamento em momentum transversal da escada de glúons BFKL. Um estado quântico coerente com alto número de ocupação pode ser descrito, em uma primeira aproximação, como um campo clássico (aqui no caso, o campo de cor), o que define um exemplo genérico de um condensado.
- *Vidros*: Os glúons em pequeno x são gerados a partir de fontes de glúons em maiores escalas de x . No referencial de momentum infinito, estes glúons de grande fração de momentum viajam muito rapidamente e suas escalas de tempo naturais sofrem dilatação de Lorentz, *i.e.*, as fontes de glúons parecem "congeladas" para as escalas de tempo características da dinâmica em pequeno x , mas elas podem variar sobre escalas de tempo muito maiores, em decorrência de suas escalas de momentum longitudinal comparativamente maiores. Um sistema que se comporta como sólido em escalas curtas de tempo e como um fluido em escalas muito maiores, é um vidro;
- *Cor*: Os glúons são portadores da carga de cor, caracterizada pelo grupo não abeliano SU(3).

O fato de o sistema (um núcleo, por exemplo) ter um grande número de ocupação permite o uso de técnicas semiclássicas para o seu estudo, o que foi feito primeiramente por McLerran e Venugopalan (McLerran & Venugopalan, 1994a,b), considerando um núcleo no referencial de momentum infinito, onde $P^+ \rightarrow \infty$. Nesse formalismo MV, ocorre uma separação clara nas escalas entre as partículas envolvidas na evolução: os chamados pártons rápidos, quarks de valência com grande fração de momentum x do núcleo e quadrimomentum p^μ emitem (ou absorvem) os glúons macios com $x \ll 1$ e quadrimomentum k^μ . No cone de luz, onde a direção de colisão é z , temos que $k^+ \ll p^+$, implicando também a separação análoga nas energias, pois $k^- = \mathbf{k}/2k^+ \gg p^-$. Deste modo, obtém-se ainda uma separação nos tempos de vida dos pártons interagentes: pelo princípio de incerteza no cone luz, $\Delta x^- \sim 1/k^-$, o tempo de vida dos glúons macios é muito menor do que o dos pártons de valência, sendo que na escala característica dos primeiros os últimos parecem viver para sempre. Os pártons de valência são, então, vistos como fontes estáticas de carga de cor, pois possuindo grande momento eles não são afetados pela emissão e/ou absorção de pártons macios. Em outras palavras, são na realidade

fontes de cor que não sofrem recuo durante as interações (são independentes de x^+) e a estas fontes está associada uma densidade de cor $\rho_a(x^-, \mathbf{x})$ localizada próxima ao cone de luz em $x^- \simeq 0$. Nesta *aproximação eikonal*, a nuvem de glúons macios acopla somente à componente + da corrente associada à densidade de cargas ρ , que pode ser escrita como

$$J_a^\mu(x^-, \mathbf{x}) = \delta^{\mu+} \rho_a(x^-, \mathbf{x}). \quad (2.61)$$

O cálculo de observáveis envolvendo a densidade de glúons do alvo é feito a partir da solução das equações de campo clássico (equações de Yang-Mills) para essa corrente,

$$(D_\nu F^{\mu\nu})_a(x) = \delta^{\mu+} \rho_a(x^-, \mathbf{x}). \quad (2.62)$$

Para determinados calibres, a solução pode ser escrita na forma $\mathcal{A}[\rho]$, a qual representa o valor do observável — tipicamente representado por um operador $\mathcal{O}[\mathcal{A}^\mu]$ — para uma dada configuração das fontes de cor no núcleo. Observáveis físicos são obtidos tomando-se a média sobre todas as configurações da fonte randômica ρ , o que é feito com ajuda da função peso $W_{\Lambda^+}[\rho]$, dependendo da escala Λ^+ que separa os pártons rápidos ($p^+ > \Lambda^+$) dos glúons macios ($p^+ < \Lambda^+$), através de

$$\langle \mathcal{O}[\rho] \rangle_{\Lambda^+} = \int \mathcal{D}[\rho] W_{\Lambda^+}[\rho] \mathcal{O}[\rho], \quad (2.63)$$

onde

$$\mathcal{D}[\rho] \equiv \prod_a \prod_{x^-} \prod_{\mathbf{x}} d\rho_a(x^-, \mathbf{x}). \quad (2.64)$$

As correções quânticas são introduzidas na teoria efetiva semi clássica do modelo MV por meio da evolução da função peso sobre valores decrescentes da escala Λ^+ . Essa função peso inclui os efeitos de todas as fontes de cor com momentum $k^+ \gg \Lambda^+ = xP^+$. Para valores cada vez menores de x , novas fontes são geradas através da evolução quântica, e para $x \ll 1$ elas são predominantemente glúons. Desta forma, a evolução quântica consiste em adicionar novas correlações às fontes, sendo que alguns modos que antes eram suaves tornam-se rápidos e esses devem ser integrados a fim de incluí-los na fonte, alterando assim a função peso. Claramente, a variável cinemática que controla a escala de tal evolução é o intervalo de rapidez Y , sendo que a evolução quântica de $W_Y[\rho]$ dá origem a equação de evolução JIMWLK (Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov, Kovner) (Ferreiro et al., 2002, Iancu et al., 2001a,b, Jalilian-Marian et al., 1997, 1998, Weigert, 2002), que pode ser escrita na forma Hamiltoniana, não mais em função de ρ mas do campo de cor $\alpha_Y(x^-, \mathbf{x}) = A^+(x^-, \mathbf{x})$, por meio das seguintes relações:

$$\frac{\partial}{\partial Y} w_Y[\alpha] = -H W_Y[\alpha] \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \frac{\delta}{\delta \alpha_Y^a(\mathbf{x})} \chi^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \alpha_Y^b(\mathbf{y})} W_Y[\alpha], \quad (2.65)$$

onde

$$\chi^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{(2\pi)^2} \mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \left(1 + V_{\mathbf{x}}^\dagger V_{\mathbf{y}} - V_{\mathbf{x}}^\dagger V_{\mathbf{z}} - V_{\mathbf{z}}^\dagger V_{\mathbf{y}} \right)^{ab}, \quad (2.66)$$

com

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv \frac{(x^i - z^i)(y^i - z^i)}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2}. \quad (2.67)$$

As equações acima envolvem as integrais de caminho

$$V_{\mathbf{x}}^\dagger = P \exp \left[ig \int dx^- \alpha^a(x^-, \mathbf{x}) T^a \right], \quad (2.68)$$

expressa aqui na representação adjunta das matrizes de cor. O símbolo P denota o ordenamento das matrizes de cor $\alpha^a(x^-, \mathbf{x}) T^a$ no expoente, da esquerda para a direita, em ordem crescente de valores de seus argumentos x^- . Integrais como essa são matrizes de cor (aqui na representação adjunta¹) também conhecidas como linhas de Wilson (revisão em (Makeenko, 2002)), introduzidas originalmente no tratamento da QCD não perturbativa como forma de manter a invariância de calibre o operador que liga dois pártons em pontos distintos do espaço-tempo. Estas mostram que o único efeito do espalhamento no limite de altas energias é a “rotação de calibre” do campo de cor do párton em consideração quando este transpassa o alvo.

A equação de evolução JIMWLK generaliza a evolução BK no sentido de que não considera a aproximação de grande número de cores necessárias na interpretação de glúons como pares de quark-antiquark, e, nesse sentido representa a evolução para uma distribuição de glúons. Mais do que isso, a equação JIMWLK considera correlações de mais alta ordem, com funções de n pontos das linhas de Wilson (2.68) para os campos $\alpha^a(x^-, \mathbf{x})$, com $n \geq 2$. Veremos mais tarde que existem processos, mais especificamente os processos inclusivos, que dependem somente de funções de 2 pontos dos campos de cor, ou dipolos de cor, que também provam a região de onde efeitos de saturação são importantes.

O que vimos neste capítulo serve de base para os estudos que seguirão. O formalismo envolvido no desenvolvimento da equação BFKL permite, por exemplo, o desenvolvimento de fatorização para as seções de choque de produção de determinados observáveis nas quais aparece uma dependência explícita no momentum transversal dos pártons envolvidos. Isso fica mais claro se olharmos para a distribuição de glúons não integrada que mostramos na equação (2.22), as quais dependem também no momentum transversal \mathbf{k} , em adição à fração de momentum longitudinal x que já aparecia na evolução colinear (onde os pártons não possuem destruição sobre o plano transversal) DGLAP. No próximo capítulo veremos que a seção de choque para a produção de um glúon em colisões hadrônicas assume tal forma fatorizada em momentum transversal, mas onde as UGDs envolvem ainda a física de saturação partônica.

Uma outra fatorização a ser explorada usa ambos os conhecimentos da evolução DGLAP e do formalismo do Condensado de Vidros de Cor. Assim, o espalhamento no limite de altas energias é descrito como a evolução DGLAP para as PDFs no interior dos projéteis; enquanto que o alvo é tratado com a física do CGC. Tal fatorização, por se valer de dois formalismos distintos, é algumas vezes denominada fatorização híbrida, e tem a vantagem de se trabalhar na região de produção frontal, onde a física de pequeno- x tem papel importante.

¹Para o caso de espalhamento com quarks, as linhas de Wilson são praticamente as mesmas, com a mudança na representação das matrizes de cor, $T^a \rightarrow t^a$.

Por fim, a evolução de dipolos de cor, seja por meio da equação linear BFKL como por meio da equação BK, será explorada no desenvolvimento e uso de amplitudes de espalhamentos que descrevem a interação de tais dipolos por meio da escada de glúons BFKL.

Capítulo 3

Ondas progressivas nas amplitudes de espalhamento para processos inclusivos

Neste capítulo apresentamos as contribuições originais desta tese, contidas em (Basso et al., 2011) e (Basso et al., 2012), as quais se baseiam no estudo de processos inclusivos em colisores de partículas usando dois formalismos distintos para a fatorização da seção de choque de produção: o formalismo híbrido e a fatorização em momentum transverso. Com isso poderemos avaliar de distintas maneiras os efeitos de saturação partônica, os quais são introduzidos com o modelo AGBS para a amplitude de espalhamento dipolo-alvo no espaço de momentum (Santana Amaral et al., 2007). Tal modelo é baseado na QCD perturbativa e foi desenvolvido usando o conhecimento das soluções assintóticas da equação de evolução de Balitsky-Kovchegov (BK) (Balitsky, 1996, Kovchegov, 1999, 2000), as quais são obtidas por meio do método das ondas progressivas da QCD (Munier & Peschanski, 2004a,b), que descrevemos brevemente antes de introduzir a parametrização para o modelo AGBS. Este último ajusta bem os dados para a função de estrutura do próton, obtidos em espalhamentos elétron-próton no acelerador HERA.

Primeiramente, apresentamos considerações sobre a formação de padrões em observáveis físicos, com foco principal na propriedade de escalonamento geométrico observada nos dados de DIS em HERA, e em sua relação com a física de saturação partônica. Em seguida, exploramos o fato de que as amplitudes de espalhamento baseadas no formalismo de dipolos, mais especificamente as soluções da equação BK no espaço de momentum, apresentam naturalmente uma forma de padrão de ondas progressivas, e que este padrão está relacionado ao escalonamento geométrico de tais amplitudes. Com isso, apresentamos a modelagem AGBS para a amplitude de dipolos, bem como o estudo da física ali codificada por meio de observáveis inclusivos em colisões hadrônicas.

3.1 Formação de padrões na física de altas energias: o escalonamento geométrico

A formação de padrões em sistemas físicos é muito importante para o entendimento dos eventos que os originam e os governam. No que diz respeito a física de altas energias, propriedades de escalonamento em observáveis têm sido importantes desde os experimentos primordiais. O já comentado, no capítulo 1, escalonamento de Bjorken das funções de estrutura do DIS (Bjorken, 1969, Bjorken & Paschos, 1969), é atualmente bem entendido, seja em relação a sua formação como sua violação, em termos da QCD perturbativa codificada na evolução DGLAP (Altarelli & Parisi, 1977, Dokshitzer, 1977, Gribov & Lipatov, 1972).

Aqui, estamos particularmente interessados no chamado escalonamento geométrico, observado mais recentemente nos observáveis de DIS em HERA, para pequenos valores de momentum longitudinal x (Stašto et al., 2001). Esta é uma propriedade empírica verificada pelos dados das seções de choque do espalhamento profundamente inelástico (DIS) em altas energias, como mostra a figura 3.1. Neste sentido, mostrou-se válida a representação da seção de choque pela fórmula

$$\sigma^{\gamma^*p}(Y, Q) = \sigma^{\gamma^*p} \left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \right), \quad (3.1)$$

onde Q é a virtualidade do fóton, Y é o intervalo de rapidez no referencial γ^* – próton e $Q_s \propto e^{\lambda Y}$ é uma função crescente de Y . Em outras palavras, sob tal escalonamento todas as diferentes curvas para os dados das seções de choque, medidas para diferentes virtualidades Q^2 e frações de momentum x , recaem sobre uma mesma curva, como evidenciado na figura 3.1.

O escalonamento geométrico foi originalmente observado no contexto do modelo de Golec-Biernat e Wüsthoff (GBW) (Golec-Biernat & Wüsthoff, 1998), onde a seção de choque de foto produção, que a princípio deveria depender de ambas virtualidade Q e fração de momentum longitudinal x (ou rapidez $Y \sim \ln 1/x$), apresenta dependência na variável escalonada $\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}$. A variável $Q_s^2(Y)$ é a escala de saturação, definida no capítulo 2, a qual assume que a densidade de glúons cresce como lei de potência na região de pequeno x , de forma que

$$Q_s^2(x) = Q_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\lambda}, \quad (3.2)$$

onde o valor $\lambda \sim 0.2 - 0.3$ foi determinado pelos dados de HERA.

A propriedade do escalonamento geométrico é intrínseca aos modelos de saturação, uma vez que em tais modelos a presença da escala de saturação emerge naturalmente, como forma de delimitar a região onde os efeitos de recombinação partônica começam a se tornar relevantes. Ainda que a presença da escala de saturação nas interações fortes é ligeiramente bem entendida no contexto da física de saturação, o escalonamento geométrico por si só é uma propriedade mais geral, *i.e.*, a densidade de glúons pode crescer como lei de potência para valores arbitrariamente pequenos de x sem que a seção de choque de dipolos tenha de se tornar constante para grandes separações entre os quarks compondo os dipolos de cor. Pode-se citar, por exemplo, os recentes estudos de (Praszalowicz & Stebel, 2012) e (Caola et al., 2011) mostrando que tal escalonamento funciona no DIS para valores relativamente altos

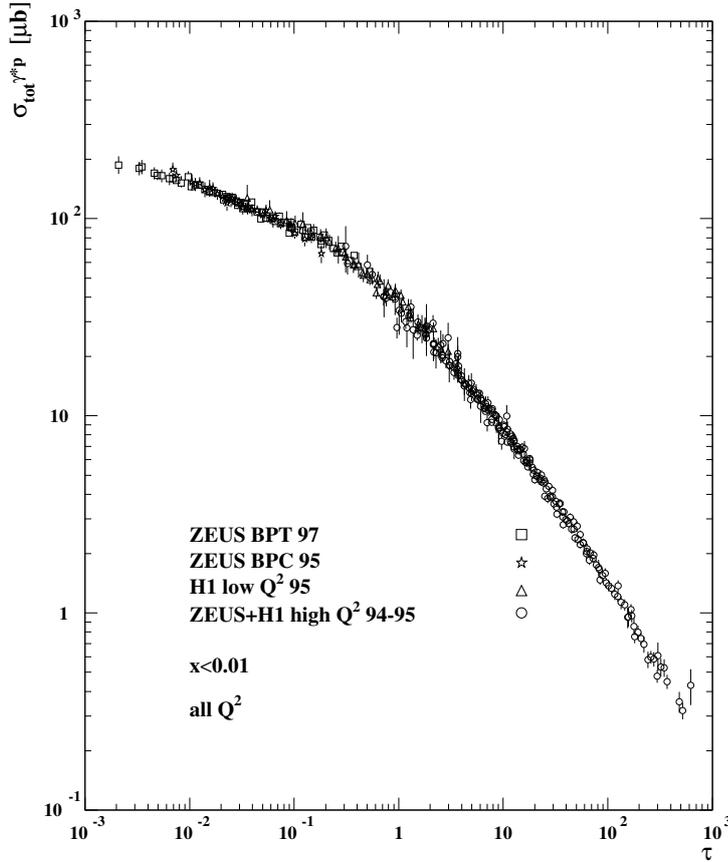


Figura 3.1: O Escalonamento geométrico observado nos dados de DIS em HERA mostra que a seção de choque de fotoprodução depende somente da razão $\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}$, onde $Q_s(Y)$ denota a escala oriunda de modelos de saturação, delimitando a região cinemática onde tais efeitos se tornam importantes. Nesse caso temos que o escalonamento vale para dados de DIS onde $x \leq 0.01$. Figura tomada da Ref. (Stasto et al., 2001).

de fração de momentum longitudinal, para $x \sim 0.1$. Nesta região, o escalonamento geométrico não pode ser atribuído somente a física de saturação. De fato, é de conhecimento da comunidade de física de altas energias que este escalonamento estende-se bem abaixo da escala de saturação, na região de validade de ambas as evoluções DGLAP (Kwiecinski & Stasto, 2002a,b) e BFKL (Iancu et al., 2002), desde que as condições de contorno preveem a ocorrência de tal propriedade. Foi mostrado também que, no esquema DGLAP, o escalonamento geométrico aparece durante a evolução para condições de contorno genéricas (Caola & Forte, 2008).

Após sua descoberta inicial (Stasto et al., 2001), vários outros observáveis foram estudados e se mostraram compatíveis com o escalonamento geométrico, dentre os quais cabe citar o DIS difrativo (Marquet & Schoeffel, 2006) e o DIS nuclear $eA \rightarrow eX$ (Armesto et al., 2005, Freund et al., 2003). É ainda notável o fato de que recentemente mostrou-se que o espectro em momentum transversal medido pela colaboração CMS (Khachatryan, 2010a,b), no LHC, exibe a propriedade do escalonamento geométrico (McLerran & Praszalowicz, 2010, 2011, Praszalowicz, 2011). A figura 3.2 mostra esses resultados mais recentes para o escalonamento geométrico no LHC, onde foi usada a hipótese simples, baseada em argumentos de análise dimensional, para a escala de saturação

$$Q_s^2 = Q_0^2 \left(\frac{pt}{W} \right)^{-\lambda}, \quad (3.3)$$

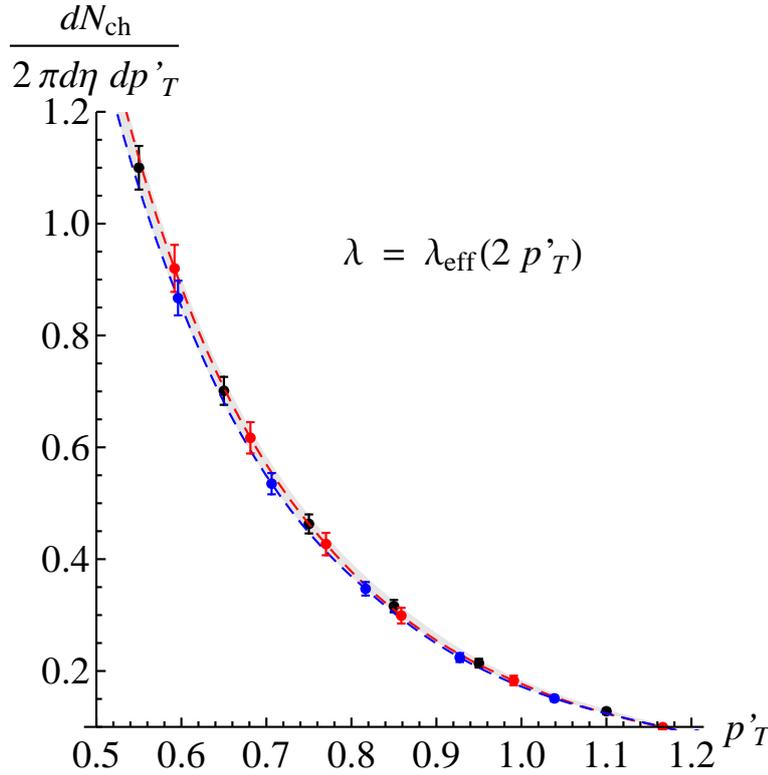


Figura 3.2: O Escalonamento geométrico observado nos dados de colisões pp medidos pela colaboração CMS no LHC (Khachatryan, 2010a,b). Figura tomada de (Praszalowicz, 2011).

onde $W \sim \sqrt{s}$ e $Q_0 \sim 1$ GeV. Com isso, verificou-se que os dados de CMS medidos nas distintas energias de centro de massa de 0.9, 2.36 e 7 TeV caem na mesma curva $F(\tau)$

$$\frac{dN_{\text{ch}}}{dy dp_t^2} = \frac{1}{Q_0^2} F(\tau), \quad (3.4)$$

com a variável de escalonamento definida por

$$\tau = \frac{p_t^2}{Q_s^2}. \quad (3.5)$$

Os resultados mostrados na figura 3.2 consideram ainda que $\lambda \equiv \lambda(Q^2)$, de forma a introduzir na escala de saturação, a dependência na escala de momentum na qual esta é verificada. O valor usado foi $\lambda_{\text{eff}} = \lambda(2p_t)$.

A seguir, veremos ainda que as soluções assintóticas da equação BK admitem ondas progressivas como soluções, as quais se traduzem explicitamente na propriedade do escalonamento geométrico acima comentada. Desta forma, temos mais um exemplo de como a física de saturação partônica intrinsecamente codifica, por meio da presença da escala de saturação dinamicamente gerada, a propriedade do escalonamento geométrico.

3.1.1 As Soluções de ondas progressivas da Equação BK

Vamos trabalhar na representação de dipolos da QCD para o espalhamento profundamente inelástico (DIS). Nesta representação, a seção de choque γ^*p assume a forma fatorizada na qual é

uma função da probabilidade do fóton virtual flutuar no par quark-antiquark convoluída com a seção de choque dipolo-próton. Esta última é uma função da amplitude de espalhamento dipolo-próton, $T(r, Y)$, que pode ser escrita no espaço de momentum através da transformada de Fourier

$$\tilde{T}(k, Y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2r}{r^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y), \quad (3.6)$$

onde assumiu-se independência sobre o parâmetro de impacto $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. Desta forma, na representação de dipolos da QCD, a propriedade do escalonamento geométrico toma a forma

$$\tilde{T}(k, Y) = \tilde{T}\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right). \quad (3.7)$$

Assim, uma vez que descrevem a evolução em energia da amplitude de dipolos, as soluções da equação BK devem satisfazer a propriedade do escalonamento geométrico vista em (3.7). Tais soluções podem ser obtidas analiticamente pelo método de ondas progressivas da QCD, cujo ponto de partida é a equação BK no espaço de momentum, dada por

$$\partial_Y \tilde{N}(k, Y) = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \tilde{N}(k, Y) - \bar{\alpha} \tilde{N}^2(k, Y), \quad (3.8)$$

onde $\chi(-\partial_L)$ é o núcleo da equação BFKL, com $L \equiv \partial/\partial \ln k$.

O que Munier e Peschanski mostraram (Munier & Peschanski, 2004a,b) foi que, na aproximação difusiva para o núcleo BFKL e após uma mudança de variáveis $t \sim \bar{\alpha} Y$ e $x \sim L$ e $u \sim \tilde{N}$, a equação BK recai na conhecida equação de Fisher, Kolmogorov, Petrovsky e Piscounov (Fisher, 1937, Kolmogorov et al., 1937) (uma revisão do método de ondas progressivas da QCD está exposta no apêndice B.)

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t) - u^2(x, t). \quad (3.9)$$

Esta é uma equação de reação-difusão, na qual identificamos um termo responsável pelo aumento na densidade u (ou pela criação de partículas) na posição x , um termo responsável pelo decréscimo nesta densidade (ou pela recombinação de partículas) na posição x , além de um termo responsável pela difusão da densidade u para posições vizinhas.

A equação FKPP admite dois pontos fixos: um instável em $u = 0$ e outro estável em $u = 1$, o qual corresponde ao número máximo de ocupação de partículas em determinada região do espaço. Uma propriedade importante desta equação que já foi rigorosamente estabelecida (uma boa revisão encontra-se na Ref. (Saarloos, 2003)) é que para condições iniciais $u(x, 0)$ tais que $u(x, 0) \rightarrow 1$ para $x \rightarrow -\infty$ e $u(x, 0) \sim e^{-\gamma x}$ para $x \rightarrow \infty$, existe uma família de soluções dependentes de um parâmetro apenas, F_v , que se comportam como ondas progressivas

$$u(x, t) \simeq F_v(x - vt), \quad (3.10)$$

com $F_v(z) \rightarrow 1$ para $x \rightarrow -\infty$ e decrescendo exponencialmente para grande z . Esta última equação não é exata no sentido de que estamos considerando o limite de grandes tempos t para $z \equiv x - vt$ fixo. É importante notar que a formação das frentes de ondas assintóticas dependem somente da parte

linear de (3.9), sendo o termo não linear responsável pelo ponto fixo $u \rightarrow 1$ — traduzido em saturação partônica na linguagem da QCD. No limite de grande t é conveniente trabalharmos no referencial da frente de onda $x_{\text{fo}} + vt$ e na vizinhança dessa $x_{\text{fo}} \ll vt$, sendo que a velocidade v da frente de onda é definida consistentemente como a velocidade da onda parcial mais lenta presente no pacote de ondas inicial.

A solução da parte linear de (3.9) é escrita como uma superposição de ondas no espaço de Mellin

$$u(x, t) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) e^{-\gamma(x_{\text{f.o.}} + vt) + \omega(\gamma)t}, \quad (3.11)$$

onde $\omega(\gamma)$ é a transformada de Mellin do núcleo linear — $\partial_x^2 + \mathbf{1}$ para a equação FKPP — e define a relação de dispersão para (3.11). A velocidade de fase de cada onda parcial, com número de onda γ , é definida por

$$v_\phi(\gamma) = \frac{\omega(\gamma)}{\gamma}. \quad (3.12)$$

Por outro lado, a velocidade de grupo do pacote de ondas é obtida pelo ponto de sela γ_c do fator exponencial em (3.11)

$$v \equiv v_g = \left. \frac{d\omega(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma_c}. \quad (3.13)$$

Como pode ser visto em detalhes no apêndice B, para condições iniciais tais que $\gamma_0 > \gamma_c$ a integral em (3.11) é dominada pelo ponto de sela, sendo a solução assintótica da forma

$$u(x, t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma_c x_{\text{f.o.}}}, \quad (3.14)$$

sendo que o expoente (número de onda) crítico γ_c corresponde a uma onda parcial com velocidade de fase igual a velocidade de grupo

$$v_c = \frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c} = \left. \frac{d\omega(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma_c}. \quad (3.15)$$

Este conhecimento pode ser aplicado a equação BK, pois sabe-se que a parte linear da mesma, equivalente a equação BFKL no formalismo de dipolos, admite superposição de ondas de suas soluções. Isto pode ser visto na representação de Mellin das amplitudes BFKL

$$N(k, Y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\gamma}{2i\pi} N_0(\gamma) e^{-\gamma L + \bar{\alpha}\chi(\gamma)Y}. \quad (3.16)$$

Comparando (3.11) e (3.16) vemos que a relação de dispersão tem a forma

$$\omega(\gamma) = \bar{\alpha}\chi(\gamma), \quad (3.17)$$

a qual, juntamente com (3.15) define a velocidade crítica para a onda progressiva, assim como o expoente crítico γ_c dessa onda, correspondendo ao mínimo da velocidade de fase,

$$\gamma_c \chi'(\gamma_c) = \chi(\gamma_c), \quad (3.18)$$

implicando em $\gamma_c = 0.6275\dots$ para o núcleo BFKL em ordem dominante. A velocidade crítica é então

$$v_c = \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c}, \quad (3.19)$$

de onde temos $v_c = 4.99\bar{\alpha}$ no caso de ordem dominante para $\chi(\gamma)$.

Após algumas suposições e aproximações, vistas com mais detalhes no apêndice B, pode-se mostrar que as soluções assintóticas da equação BK tem a forma

$$N(k, Y) \stackrel{k \gg Q_s}{\sim} \log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c} \exp \left(-\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right), \quad (3.20)$$

onde a escala de saturação é dada por

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp \left(v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log Y \right). \quad (3.21)$$

A correspondência entre as equações BK e FKPP pode ser resumida em uma descrição intuitiva para a amplitude BK: para grandes rapidezes Y , a função $N(k, Y)$ é uma frente de onda que interpola entre o estado estável $N = 1$ atrás da frente de onda e o estado instável $N(k, Y) \rightarrow 0$ à frente dessa, onde a forma da solução ainda é dominada pelas condições iniciais. Conforme aumenta ainda mais a rapidez, a posição da frente

$$L_s(Y) \equiv \log(Q_s^2(Y)/k_0^2) \sim v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \ln Y + \text{const.} \quad (3.22)$$

define como essa move-se em direção a valores maiores de L , até o ponto onde sua velocidade se torna igual a velocidade crítica v_c , quando toma a forma de onda progressiva e perde a informação sobre as condições iniciais. Dentro dessa análise, a propriedade do escalonamento geométrico das amplitudes de espalhamento (3.7) é simplesmente a propriedade (3.10) da frente se propagando como onda progressiva, *i.e.*, experimentando uma translação uniforme (em $\ln k$) sem distorção.

O escalonamento geométrico tem importantes consequências, como por exemplo o fato de que o movimento, no espaço $(\log(Q^2), Y)$, ao longo da linha da saturação onde $Q = Q_s(Y)$, não muda o comportamento das amplitudes de espalhamento. Analisando a expressão (3.20) vemos que ela possui um termo subdominante que depende explicitamente da rapidez Y , o que viola o escalonamento geométrico. Entretanto, este termo pode ser desprezado quando

$$\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} < 1,$$

implicando que o escalonamento geométrico é ainda obtido na região que satisfaz a condição:

$$\log(k^2/Q_s^2(Y)) \lesssim \sqrt{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y}, \quad (3.23)$$

ou seja, em uma janela que se estende por um fator proporcional a \sqrt{Y} acima da escala de saturação. Esta é uma propriedade importante das amplitudes de espalhamento em altas energias: as

consequências da saturação partônica são observadas em regiões distantes da região de saturação, inclusive na cauda das amplitudes, onde essas são muito menores que a unidade.

3.1.2 O modelo AGBS para a amplitude $\tilde{N}(k, Y)$

Vamos expor agora um modelo para a amplitude de espalhamento dipolo-próton no espaço de momentum. O modelo AGBS (Santana Amaral et al., 2007) usa as soluções assintóticas da equação de evolução BK para descrever a amplitude tanto na região de saturação como na região onde os pártons estão diluídos no interior dos hádrons. A expressão (B.34) é válida somente para este regime diluto, onde $k \gg Q_s$ e portanto $\tilde{T}(k, Y) \ll 1$. Para o modelo se tornar completo precisamos de uma expressão que descreva a evolução partônica na vizinhança da escala de saturação Q_s e na região de saturação. Como nesta última é esperado que a densidade de pártons (ou dipolos) tenha um limite superior, devido a unitariedade, escrevemos a amplitude nesta região com uma função de Heaviside

$$\mathcal{N}(r, Y) = \Theta(rQ_s(Y) - 1). \quad (3.24)$$

Usando a Transformada de Fourier (3.6) podemos mostrar que

$$\tilde{N}\left(\frac{k}{Q_s(Y)}, Y\right) \stackrel{k \ll Q_s}{\approx} c - \log\left(\frac{k}{Q_s(Y)}\right), \quad (3.25)$$

onde c é uma constante ainda não fixada.

Agora temos todos os ingredientes para descrever a amplitude $\tilde{N}(k, Y)$, visto que as expressões (3.20) e (3.25) descrevem completamente o comportamento assintótico de tal amplitude. Além disto, elas representam um comportamento universal, visto que independem de condições iniciais e (3.20) depende somente do núcleo da equação BFKL. Esta é uma propriedade marcante, pois significa que contribuições de correções de próxima ordem dominante (NLO da sigla em inglês) à equação BFKL levarão à equações com mesma estrutura analítica, somente com parâmetros diferentes.

Vamos, então, tentar unir as expressões para os regimes diluto e saturado em torno da escala de saturação. Uma maneira de fazer isto é usar (3.20) para $k > Q_s$ e (3.25) para $k < Q_s$ e obter, impondo continuidade em $k = Q_s$, a constante c . No entanto, esta definição por partes da amplitude em toda a região cinemática poderia introduzir oscilações na amplitude, quando transformada, através de (3.6), para o espaço de coordenadas, podendo inclusive torná-la negativa. A maneira que o modelo AGBS contorna esse problema é fazendo uma interpolação analítica suave entre os comportamentos diluto e saturado da amplitude de espalhamento. A fim de modelar tal interpolação, parte-se do regime diluto para o regime saturado, construindo uma expressão que se torne saturada a uma constante quando $k \ll Q_s$, na qual posteriormente inclui-se os fatores logarítmicos. Tal expressão é uma função decrescente de $L = \log(k^2/k_0^2)$ e que reproduz (3.20), a menos de constantes e de um fator logarítmico

$$T_{dil} = \exp\left[-\gamma_c \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right) - \frac{L_{red}^2 - \log^2(2)}{2\alpha\chi''(\gamma_c)Y}\right], \quad (3.26)$$

com

$$L_{red} = \log \left[1 + \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right] \quad \text{e} \quad Q_s^2(Y) = k_0^2 e^{\bar{\alpha} v_c Y}, \quad (3.27)$$

onde considera-se somente o termo dominante da expressão (B.33) para a escala de saturação. A expressão (3.26) é unitarizada por uma eikonal, ou seja, $T_{unit} = 1 - e^{-T_{dil}}$ e nos resta então reinserir os fatores logarítmicos nos regimes diluto e saturado. A expressão usada no modelo é

$$\tilde{N}(k, Y) = \left[\log \left(\frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k} \right) + 1 \right] (1 - e^{-T_{dil}}). \quad (3.28)$$

As expressões (3.26), (3.27) e (3.28) determinam o modelo AGBS para a amplitude de espalhamento no espaço de momentum, o qual foi usado para descrever a função de estrutura do próton, F_2 , dada por

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y), \quad (3.29)$$

a qual foi ajustada aos dados de DIS em HERA disponíveis para esta quantidade.

3.2 Produção inclusiva de hádrons no formalismo de CGC

Nesta seção mostraremos o formalismo envolvido no cálculo das seções de choque para a produção inclusiva de hádrons baseado no Condensado de Vidros de Cor (CGC). Em particular, estamos interessados na seção de choque para a produção de um quark de valência e um glúon em colisões próton-núcleo de altas energias. Assume-se que ambos quark e glúon possuam rapidezzes similares e estejam na região de fragmentação do próton (ou dêuteron, para aplicações no RHIC). Desta forma, o próton (dêuteron) pode ser tratado como um sistema diluído de pártons, enquanto o núcleo alvo é tratado como um condensado de vidros de cor (CGC). O processo de interesse é o seguinte:

$$q(p)A \rightarrow q(q)g(k)X, \quad (3.30)$$

para o qual temos a amplitude (Gelis & Jalilian-Marian, 2002)

$$\mathcal{M}(q, k; p) \equiv \langle q(q)g(k)_{out} | q(p)_{in} \rangle = \langle 0_{out} | a_{out}(k) b_{out}(q) b_{in}^\dagger(p) | 0_{in} \rangle, \quad (3.31)$$

sobre a qual pode ser aplicado o formalismo de redução de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (Peskin & Schroeder, 1995), de forma que pode-se escrevê-la, no espaço de momentum, como (Jalilian-Marian & Kovchegov, 2004)

$$\mathcal{M} = g \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \bar{u}(q) \vec{q} S_F(q, k_1) \gamma^\nu t^c S_F(k_2, p) \overleftarrow{p} u(p) G_{\nu\rho}^{cb}(k_2 - k_1, k_3) D_{ba}^{\rho\mu}(k_3, k) \epsilon_\mu(k). \quad (3.32)$$

S_F e $G_{\mu\nu}$ são os propagadores dos quarks e glúons, respectivamente, no sinal de fundo de campo clássico, os quais podem ser separados nas partes livres e interagentes. A equação (3.32) está ilustrada

onde $\epsilon_\mu^{(\lambda(k))}$ é o vetor de polarização do glúon produzido, chega-se, após alguma álgebra, a (Jalilian-Marian & Kovchegov, 2004)

$$\begin{aligned}
M_1 &= -ig \frac{1}{2q \cdot k} \bar{u}(q) \not{\epsilon}(q + k) \gamma^- u(p) t^a [V(q_t + k_t) - (2\pi)^2 \delta^2(q_t + k_t)], \\
M_2 &= ig \frac{1}{2p \cdot k} \bar{u}(q) \gamma^- (\not{p} - \not{k}) \not{\epsilon} u(p) [V(q_t + k_t) - (2\pi)^2 \delta^2(q_t + k_t)] t^a, \\
M_3 &= ig \frac{k^-}{p \cdot q} \bar{u}(q) \gamma_\nu u(p) d^{\nu\mu}(p - q) \epsilon_\mu(k) t^b [U^{ba}(q_t + k_t) - \delta^{ba} (2\pi)^2 \delta^2(q_t + k_t)], \\
M_4 &= ig \frac{k^-}{p^-} \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \bar{u}(q) \gamma^- (\not{p} - \not{l}) \gamma_\nu u(p) \frac{d^{\nu\mu}(l)}{l_t^2} \epsilon_\mu(k) [V(q_t + l_t) - (2\pi)^2 \delta^2(q_t + l_t)] \\
&\quad \times t^b [U^{ba}(k_t - l_t) - \delta^{ba} (2\pi)^2 \delta^2(k_t - l_t)],
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde $p(q)$ é o momenta do quark incidente (produzido) e k o momenta do glúon. $d^{\mu\nu}(l)$ está relacionado ao propagador livre do glúon por meio de $d^{\mu\nu}(l) \equiv -l^2 G_0^{\mu\nu}(l)$ e $l^- = k^-$, $l^+ = -(l_t^2/2q^-)$. Os diferentes diagramas contribuindo para a amplitude são mostrados na figura 3.5. As figuras 3.5(a) e 3.5(b) ilustram, respectivamente, as contribuições do quark espalhando multiplamente com o alvo antes e depois de emitir o glúon, enquanto que a figura 3.5(c) representa o espalhamento múltiplo do glúon com o alvo. Já na figura 3.5(d), temos ambos o glúon e o quark emitido espalhando multiplamente com o alvo. Diagramas contendo espalhamentos múltiplos de ambos os quarks incidentes e produzidos, assim como quando ambos os quarks mais o glúon produzido espalham multiplamente com o alvo são suprimidos por potências da energia de centro de massa e não contribuem significativamente para a amplitude.

As linhas de Wilson

$$V(x_t) \equiv \hat{P} e^{ig \int dz^- A_a^+(x_t, z^-) t_a}, \tag{3.38}$$

$$U(x_t) \equiv \hat{P} e^{ig \int dz^- A_a^+(x_t, z^-) T_a}, \tag{3.39}$$

percorrem o cone de luz, somando as fases não Abelianas das partículas coloridas que se propagam sobre o campo de cor do alvo. t_a e T_a são as matrizes geradoras nas representações fundamental e adjunta do grupo SU(N), respectivamente, e $z^- = q^-/p^-$ é o fração de momentum do cone de luz portada pelo quark no estado final, tal que $\xi \equiv 1 - z = k^-/p^-$ é a fração portada pelo glúon.

Para o cálculo da seção de choque, é necessária a obtenção do módulo quadrático da amplitude (3.35), além de somar sobre o momentum transversal q_t do quark no estado final. Este módulo mostra-se dependente apenas de funções de dois pontos das linhas de Wilson (3.38), ou seja, apenas amplitudes para a interação de dipolos de cor com o alvo são consideradas em ordem dominante (LO). Desta forma somente M_1 e M_3 contribuem para o processo e seus módulos quadráticos são

$$\begin{aligned}
|M_1|^2 &= 16(p^-)^2 \frac{z(1+z^2)}{[(1-z)q_t - zq_t]^2} \int d^2 r_t e^{i(q_t+k_t) \cdot r_t} H_F(r_t), \\
|M_3|^2 &= 16(p^-)^2 \frac{z(1+z^2)}{q_t^2} \int d^2 r_t e^{i(q_t+k_t) \cdot r_t} H_A(r_t),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

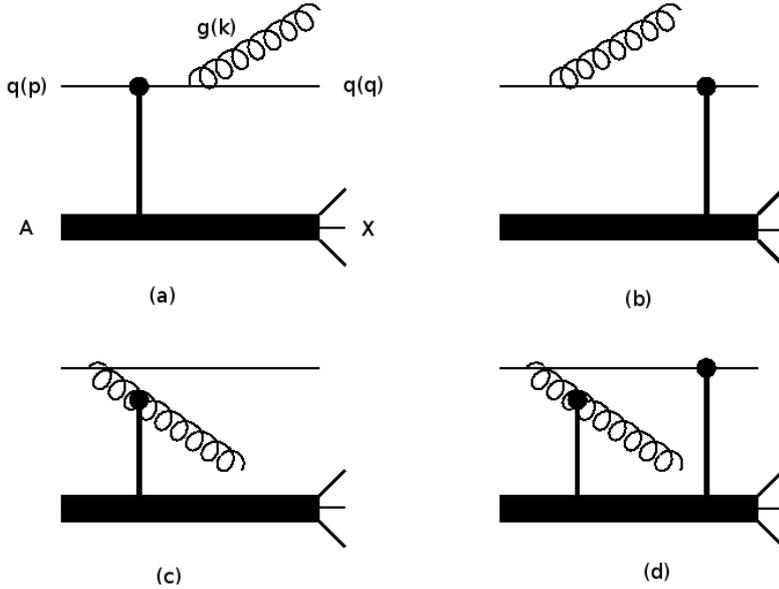


Figura 3.5: Diagramas representando as amplitudes M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c) e M_4 (d).

com

$$\begin{aligned} H_F(r_t) &\equiv C_F \int d^2b \text{Tr}_c \left\langle [V^\dagger(b - r_t/2) - 1][V(b + r_t/2) - 1] \right\rangle, \\ H_A(r_t) &\equiv \frac{1}{2} \int d^2b \text{Tr}_c \left\langle [U^\dagger(b - r_t/2) - 1][U(b + r_t/2) - 1] \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde Tr_c denota o traço sobre as matrizes de cor.

Integrando sobre o momentum transversal q_t do quark no estado final, além de incluir o espaço de fases e tomar a média (soma) sobre os graus de liberdade iniciais (finais), chega-se a expressão para a seção de choque invariante

$$\xi \frac{d\sigma^{qA \rightarrow gX}}{d\xi d^2k_t} = \frac{\alpha_s}{(2\pi)^3} \xi P_{g/q}(\xi) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \int d^2r_t e^{ik_t \cdot r_t} [H_F(\xi r_t) + H_A(r_t)], \quad (3.42)$$

na qual Q^2 estabelece a escala de fatorização e

$$\xi P_{g/q}(\xi) \equiv C_F [1 + (1 - \xi)^2] \quad (3.43)$$

são as funções de desdobramento em ordem dominante.

O primeiro termo na soma em (3.42), representado na figura 3.5(a), corresponde à radiação de freamento típica da QED, onde um glúon livre é emitido colinearmente após o espalhamento múltiplo do quark com o alvo e pode ser visto como parte da correção de um laço na função de fragmentação do quark espalhado. Já o segundo termo em (3.42), visto na figura 3.5(c), equivale ao caso quando o quark incidente irradia um glúon colinear que então espalha multiplamente com o alvo, sendo então interpretado como parte da correção de um laço na função de distribuição de glúons.

Devemos notar ainda que a equação (3.42) contém partes que somente contribuem quando o glúon produzido tem momento transversal nulo. Uma vez que estamos interessados apenas em glúons com momento transversal finito, estas partes são descartadas por meio da definição das amplitudes de dipolos fundamentais e adjuntas (Dumitru et al., 2006b)

$$\begin{aligned} N_F(r_t) &\equiv \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c \left\langle V^\dagger(b - r_t/2) V(b + r_t/2) - 1 \right\rangle, \\ N_A(r_t) &\equiv \frac{1}{N_c^2 - 1} \text{Tr}_c \left\langle U^\dagger(b - r_t/2) U(b + r_t/2) - 1 \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde b denota o parâmetro de impacto. Com isso a seção de choque (3.42) toma a forma

$$\xi \frac{d\sigma^{qA \rightarrow gX}}{d\xi d^2 k_t d^2 b} = \frac{\alpha_s}{(2\pi)^3} \xi P_{g/q}(\xi) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \left[\frac{1}{\xi^2} \tilde{N}_F(k_t/\xi, b) + \tilde{N}_A(k_t, b) \right]. \quad (3.45)$$

Além desta expressão para a produção de glúons, precisamos incluir outros processos que contribuem para a produção de hádrons na mesma ordem de perturbação em α_s . Podemos citar por exemplo a produção elástica e inelástica de quarks, além da produção de glúons pelo espalhamento de glúons com o alvo. Como resultado temos

$$\xi \frac{d\sigma^{qA \rightarrow qX}}{d\xi d^2 k_t d^2 b} = \frac{\alpha_s}{(2\pi)^3} \xi P_{q/q}(\xi) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \left[\frac{1}{\xi^2} N_F(k_t/\xi, b) + \tilde{N}_F(k_t, b) \right], \quad (3.46)$$

$$\xi \frac{d\sigma^{gA \rightarrow qX}}{d\xi d^2 k_t d^2 b} = \frac{\alpha_s}{(2\pi)^3} \xi P_{q/g}(\xi) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \left[\frac{1}{\xi^2} N_A(k_t/\xi, b) + \tilde{N}_F(k_t, b) \right], \quad (3.47)$$

$$\xi \frac{d\sigma^{gA \rightarrow gX}}{d\xi d^2 k_t d^2 b} = \frac{\alpha_s}{(2\pi)^3} \xi P_{g/g}(\xi) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} \left[\frac{1}{\xi^2} N_A(k_t/\xi, b) + \tilde{N}_A(k_t, b) \right], \quad (3.48)$$

sendo que as funções de desdobramento em ordem dominante podem ser encontradas em (Ellis et al., 2003). Nestas equações, ξ é a fração de momentum do pártion filho produzido — da mesma forma que em (3.48) — e k_t seu momentum transversal. Ainda, pode-se incluir as contribuições para produção de pártions devido à espalhamentos elásticos (Dumitru & Jalilian-Marian, 2002)

$$\xi \frac{d\sigma^{qA \rightarrow qX}}{d\xi d^2 k_t d^2 b} = \frac{2}{(2\pi)^2} \xi \delta(1 - \xi) \tilde{N}_F(k_t, b), \quad (3.49)$$

$$\xi \frac{d\sigma^{gA \rightarrow gX}}{d\xi d^2 k_t d^2 b} = \frac{2}{(2\pi)^2} \xi \delta(1 - \xi) \tilde{N}_A(k_t, b). \quad (3.50)$$

Dumitru, Hayashigaki e Jalilian-Marian mostraram (Dumitru et al., 2006b) que as expressões (3.48 – 3.50) podem ser reescritas de tal forma que pode-se identificar nelas a evolução DGLAP das funções de distribuição de pártions e funções de fragmentação. Consideremos, inicialmente, os diagramas para a evolução DGLAP da função de distribuição de quarks, identificados matematicamente pela metade da equação (3.49) e pelos segundos termos de (3.46) e (3.47). Após a multiplicação destas com as distribuições de quarks e glúons nuas, advindas do modelo de pártions, chega-se a

$$\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[q_0(x/\xi) \left(\delta(1-\xi) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{q/q}(\xi) \right) + g_0(x/\xi) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{g/q}(\xi) \right] \tilde{N}_F(\xi, k_t, b) \rightarrow f_{q/p}(x/\xi, Q^2) \otimes \tilde{N}_F(\xi, k_t, b), \quad (3.51)$$

onde $f_{q/p}(x/\xi, Q^2)$ é a distribuição de quarks dentro de um próton. Para a evolução da função de distribuição de glúons, o mesmo procedimento leva a

$$\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[g_0(x/\xi) \left(\delta(1-\xi) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{g/g}(\xi) \right) + q_0(x/\xi) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{g/q}(\xi) \right] \tilde{N}_A(\xi, k_t, b) \rightarrow f_{g/p}(x/\xi, Q^2) \otimes \tilde{N}_A(\xi, k_t, b). \quad (3.52)$$

Os diagramas restantes levam a evolução DGLAP das funções de fragmentação. Para o quark no estado final essa evolução é descrita pela metade da equação (3.49) e pelos primeiros termos de (3.48) e (3.46)

$$\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[D_q^0(x/\xi) \left(\delta(1-\xi) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{q/q}(\xi) \right) + D_g^0(x/\xi) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{g/q}(\xi) \right] \frac{\tilde{N}_F(\xi, k_t, b)}{\xi^2} \rightarrow D_q(x/\xi, Q^2) \otimes \frac{\tilde{N}_F(\xi, k_t, b)}{\xi^2}, \quad (3.53)$$

onde $D_q(x/\xi, Q^2)$ descreve a evolução DGLAP da função de fragmentação. Para os glúons, tem-se que

$$\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[D_g^0(x/\xi) \left(\delta(1-\xi) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{g/g}(\xi) \right) + D_q^0(x/\xi) \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\Lambda^2} P_{q/g}(\xi) \right] \frac{\tilde{N}_A(\xi, k_t, b)}{\xi^2} \rightarrow D_g(x/\xi, Q^2) \otimes \frac{\tilde{N}_A(\xi, k_t, b)}{\xi^2}. \quad (3.54)$$

Juntando as equações (3.51–3.54), tem-se que a seção de choque invariante para a produção de hádrons depende das PDF $f_{q,g}(Q^2)$ e das FF $D_{q,g}(Q^2)$, além das PDF f_0 e FF D_0 nuas, que não evoluem segundo a equação DGLAP. A obtenção da expressão final para a seção de choque se dá após a inclusão de emissões adicionais de pártons nos diagramas da figura 3.5, que contribuem para a evolução DGLAP das PDF e FF nuas. Assumindo independência no parâmetro de impacto b — a amplitude depende então do valor de $x \equiv x_2$ do alvo provado, a expressão final tem a forma

$$\frac{d\sigma^{pA \rightarrow hX}}{dy_h d^2p_t} \equiv \frac{dN}{dy_h d^2p_t} = \frac{K}{(2\pi)^2} \int_{x_F}^1 \frac{dz}{z} \left[x_1 f_{q/p}(x_1, p_t^2) \tilde{N}_F\left(\frac{p_t}{z}, x_2\right) D_{h/q}(z, p_t^2) + x_1 f_{g/p}(x_1, p_t^2) \tilde{N}_A\left(\frac{p_t}{z}, x_2\right) D_{h/g}(z, p_t^2) \right], \quad (3.55)$$

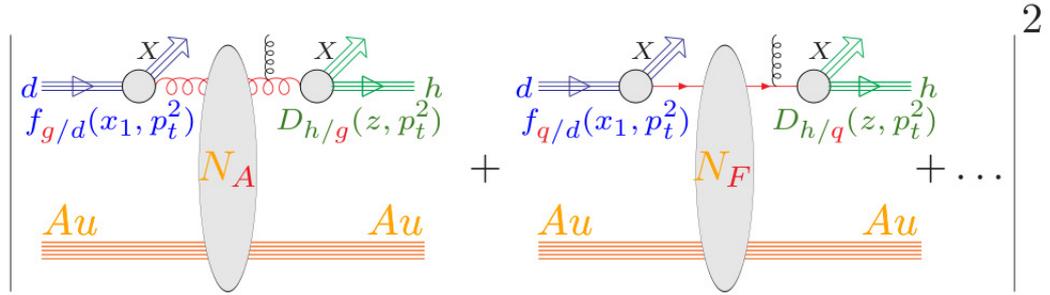


Figura 3.6: Representação gráfica da seção de choque (3.55) para o espalhamento Deutério–Ouro.

onde y_h e p_t são a rapidez e o momento transversal do hádron produzido, enquanto que $K \equiv K(y_h)$ efetivamente conta os efeitos de mais altas ordens, desprezados nessa descrição em ordem dominante. N_A e N_F são as amplitudes nas representações fundamentais e adjunta, respectivamente, as quais descrevem os espalhamentos múltiplos de um glúon e de um quark com o alvo, como esquematizado na figura 3.6. Em relação a cinemática, temos que o x de Feynman do hádron produzido é $x_F \approx p_t e^{y_h} / \sqrt{s}$. Já a fração de momentum de um párton do alvo é $x_2 = x_1 e^{-2y_h}$, enquanto que para um párton do projétil $x_1 = x_F/z$. A expressão (3.55) é algumas vezes descrita como uma fatorização híbrida na literatura, uma vez que se vale da evolução colinear das equações DGLAP para as PDFs e FFs, convoluída com a evolução não linear advinda do formalismo do CGC, com dependência explícita no momentum transversal dos pártons, para os espalhamentos múltiplos do projétil com o alvo. Esse formalismo será comparado posteriormente com um outro, baseado somente nas evoluções do tipo BFKL e BK e comumente chamado fatorização k_t , que considera a distribuição de pártons nos hádrons incidentes com momentum transversal intrínseco.

3.3 Descrevendo a distribuição de hádrons com o modelo AGBS

Na seção anterior vimos como descrever o campo de hádrons produzidos em colisões de íons pesados através do formalismo do CGC. Agora utilizaremos o modelo AGBS para a amplitude de dipolos para tal descrição. Inspeccionando rapidamente a expressão (3.55), vemos que a amplitude já está escrita no espaço de momentum e então poderíamos simplesmente aplicar o modelo AGBS — também escrito no espaço de momentum — para as amplitudes nas representações adjunta e fundamental. Devemos notar, contudo, que tais espaços de momentum são distintos: no formalismo do CGC descrito acima as amplitudes são obtidas pela transformada bidimensional de Fourier (ou transformada de Hankel) cuja forma é

$$\tilde{N}_{F(A)}(k, Y) = \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{N}(r, Y) = 2\pi \int dr r J_0(kr) \mathcal{N}(r, Y). \quad (3.56)$$

O modelo AGBS — assim como a equação BK no espaço de momentum, como visto anteriormente, usa outra forma para tal transformada

$$N(k, Y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2r}{r^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{N}(r, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) \mathcal{N}(r, Y), \quad (3.57)$$

a qual possui uma diferente dependência sobre o tamanho do dipolo r em relação a (3.56). Este problema pode ser enfrentado numericamente após a realização de duas transformadas, da inversa de (3.57) para o espaço de coordenadas, seguida de (3.56) para o espaço de momentum desejado. Este procedimento é um tanto quanto complicado devido a presença das funções de Bessel no integrando.

A solução mais simples encontrada foi rescrever a amplitude AGBS na forma

$$\tilde{N}(k) = \frac{1}{2\pi} H_0 [r^2 \mathcal{N}(r)], \quad (3.58)$$

onde $H_0 = 2\pi \int dr r J_0(kr)$ denota o operador de Hankel de ordem zero. Usando então a propriedade da transformada de Hankel (veja, por exemplo (Sneddon, 1951)) para uma função T genérica:

$$H_0 [r^2 T(r)] = -\frac{d^2 T(k)}{d^2 k} - \frac{1}{k} \frac{dT(k)}{dk}, \quad (3.59)$$

temos que a amplitude AGBS é escrita no espaço de Fourier originalmente usado na obtenção de (3.55) é dada por (Basso et al., 2011)

$$\tilde{N}(k) = 2\pi \left[-\frac{d^2 N^{\text{AGBS}}(k)}{d^2 k} - \frac{1}{k} \frac{dN^{\text{AGBS}}(k)}{dk} \right]. \quad (3.60)$$

Desta forma, por meio das duas primeiras derivadas da amplitude AGBS em relação ao momento transversal k é possível obter, analiticamente, uma amplitude para uso com o formalismo do CGC aplicado a produção de hádrons, matematicamente escrito em termos de (3.55).

Com isso em mente, podemos partir para a descrição do processo de ajuste aos dados. Antes, devemos mencionar que a ideia principal aqui é realizar um ajuste simultâneo aos dados de produção de hádron em colisões de íons pesados em conjunto com os dados de DIS. Este último, sendo um processo mais limpo — sem a presença das PDF e FF, serve para calibrar o modelo AGBS na aplicação à produção de hádrons.

Vamos relembrar aqui o formalismo usado para o ajuste ao DIS no colisor HERA. O observável em questão é a função de estrutura do próton, que é escrita no espaço de momentum como (Santana Amaral et al., 2007)

$$F_2^p = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}_{T,L}(k^2, z; Q^2)|^2 N(k, Y), \quad (3.61)$$

onde $N(k, Y)$ refere-se à amplitude de dipolos — no caso, a amplitude AGBS, enquanto que $\tilde{\Psi}_{T,L} = \tilde{\Psi}_T + \tilde{\Psi}_L$ denota a função de onda do fóton, a qual é escrita no espaço de momentum através da

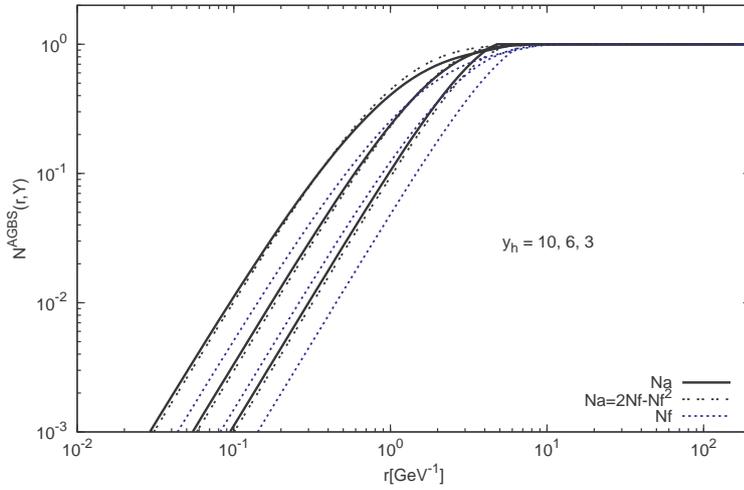


Figura 3.7: Comparação das distintas formas para obtenção das representações fundamental e adjunta da amplitude AGBS no espaço de coordenadas.

transformada

$$\tilde{\Psi}_{T,L}(k, z) = \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} r^2 \Psi_{T,L}(r, z) = \int_0^\infty \frac{dr}{2\pi} r^3 J_0(kr) \Psi_{T,L}(r, z). \quad (3.62)$$

Esta, quando em conjunto com a transformada para a amplitude de dipolos (3.57), mostra que a transformada para a função de estrutura do próton (3.61) é da mesma forma daquela usada para a descrição do campo de hádrons no formalismo do CGC, dada por (3.56).

Alguns comentários a respeito das amplitudes nas representações fundamentais e adjunta são importantes. Sabe-se que as amplitudes de dipolo que entram nos cálculos de observáveis em processos de DIS são amplitudes para quarks e desta forma devem ser expressas na representação fundamental. Contudo, nos modelos de dipolos aplicados ao DIS, como o modelo AGBS, a amplitude é do tipo N_F , mas não leva em conta o fator C_F/C_A acima mencionado. Em ajustes realizados separadamente para processos de DIS e em colisões de hádrons não existe problema quanto a isso. Contudo, no ajuste simultâneo que vamos realizar deve-se levar em conta essa discrepância entre as amplitudes descrevendo ambos os processos, o que pode ser feito usando-se (3.60) como modelo para N_F e escalando $Q_s^2 \rightarrow (C_A/C_F)Q_s^2 = (9/4)Q_s^2$ para obter a amplitude N_A na representação adjunta. Cabe salientar que esse procedimento de reescalar Q_s^2 para obter as amplitudes nas diferentes representações não é válido para amplitudes genéricas, mas sim para amplitudes na forma de Glauber $N_F = 1 - e^{-\Omega(Q_s^2)}$. A forma correta de se obter a amplitude na representação adjunta, por meio dessa na representação fundamental, no limite de grande número de cores N_c é dada por (Kovchegov & Tuchin, 2002)

$$N_A(r) = 2N_F(r) - N_F^2(r), \quad (3.63)$$

de forma que o momento de saturação dos glúons é equivalente ao de dois quarks, o que é esperado no limite de grande N_c onde um glúon é visto como um par quark-antiquark.

Ainda assim, percebe-se que a mudança conceitual feita para tratar simultaneamente as amplitudes para DIS e colisões de hádrons implica em uma escala de saturação aproximadamente duas

vezes maior para os glúons em relação aos quarks. Isso é também evidenciado no caso das amplitudes, como ilustrado na figura 3.7, a qual mostra a transformada de Fourier da amplitude AGBS para o espaço de coordenadas r . Vê-se que as duas formas para a amplitude na representação fundamental N_A são praticamente iguais, o que deve ocorrer também no espaço de momentum. A comparação é feita no espaço de coordenadas porque a princípio não se conhece a forma analítica de (3.63) no espaço de momentum, uma vez que a transformada de Hankel não obedece ao teorema da convolução e o tratamento do termo quadrático não é simples. Com isso, vemos que aproximação usada é válida e evita a realização de duas transformadas de Hankel numéricas, de difícil implementação devido a natureza oscilante das funções de Bessel.

3.3.1 Resultados para o ajuste simultâneo

Os observáveis usados no ajuste foram a função de estrutura do próton, dada por (3.61) e usando a amplitude (3.28), além do campo de hádrons descrito sob o formalismo do CGC por (3.55) com a amplitude dada por (3.60).

Nesta análise, os dados combinados de DIS do colisor HERA para os experimentos H1 e ZEUS foram usados (Aaron, 2010), dentro do regime cinemático:

$$\begin{aligned} x &\leq 0.01, \\ 0.1 &\leq Q^2 \leq 150\text{GeV}^2, \end{aligned} \tag{3.64}$$

o que corresponde a um total de 244 pontos de dados. Eles correspondem a valores de x suficientemente pequenos para que a análise em altas energias possa ser considerada, e valores de Q^2 tais que a inclusão da evolução DGLAP para as amplitudes não é necessária, embora valores maiores de virtualidade não alterem muito os resultados. Cabe salientar que esse conjunto de dados mudou um pouco em relação ao usado no ajuste original do modelo AGBS (Santana Amaral et al., 2007). O novo conjunto contém uma limitação maior no intervalo de virtualidade, para a qual alguns valores de F_2^p não foram liberados devido a sensibilidade desses na medida da função de estrutura longitudinal do próton F_L^p . Além disso, este novo conjunto já leva em conta o erro de normalização de 5% na relação dos dados de H1 com ZEUS, não sendo necessária a inclusão destes nos erros (estatísticos e sistemáticos) a cada iteração no processo de ajuste.

Os dados de RHIC para a produção inclusiva de hádrons foram tomados das colaborações BRAHMS (Arsene, 2004) e STAR (Adams, 2006). Estes foram tomados para hádrons produzidos no intervalo

$$\begin{aligned} p_t &\geq 1.0\text{ GeV}, \\ y_h &\geq 2.0, \end{aligned} \tag{3.65}$$

que inclui valores de momento transverso que garantem a validade de cálculos perturbativos, e valores de rapidez suficientes para uso de QCD de altas energias. Um ajuste incluindo dados de rapidezes médias ($y_h \geq 1.0$) foi realizado para investigar os limites do modelo AGBS neste tipo de processo. Com isso, temos 22 pontos de dados (38 no caso de rapidezes médias inclusas). Para garantir contribuições semelhantes dos dados de HERA e de RHIC, foi usado um peso na contribuição dos últimos no processo de ajuste, dependendo do número de dados usados (22 ou 38).

Em relação aos parâmetros, foram mantidos fixos $\bar{\alpha} = 0.2$ e $\gamma_c = 0.6275$, valor para o núcleo BFKL em ordem dominante. Foram deixados livres os parâmetros λ , k_0^2 e χ'' da amplitude AGBS, além do raio do próton R_p , que fixa a normalização da seção de choque dipolo-próton para o DIS em HERA, bem como os fatores K dependentes da rapidez do hádron. Um destes fatores teve de ser determinado inicialmente para fixar a normalização geral destes parâmetros, evitando assim processos de *overfitting* com resultados não físicos. Desta forma, tomou-se o valor $K_{y_h=4} = 0.7$, o qual foi obtido por dois modelos para a amplitude de dipolos aplicados aos dados de RHIC (Boer et al., 2008, Dumitru et al., 2006a). Somente quarks leves foram considerados, com valores de massas $m_{u,d,s} = 140$ MeV. Deve-se notar que pelo fato de essas massas serem menores do que $1 - 2$ GeV — escala geralmente usada como limite para a QCD perturbativa, elas não exercem um papel fundamental no ajuste, podendo ser inclusive consideradas nulas. A não utilização de quarks pesados em DIS deve-se ao fato de não considerarmos esses quarks em colisões de íons pesados, uma vez que estamos usando hádrons leves como observáveis em RHIC.

Antes de partir para o ajuste simultâneo, o modelo AGBS foi ajustado ao novo conjunto de dados de HERA, com dados combinados de H1 e ZEUS. Os valores dos parâmetros obtidos estão listados na tabela 3.1 e estão muito próximos dos valores obtidos no ajuste original, embora agora não está inclusa a contribuição do quark charm. Este ajuste servirá de guia para o ajuste simultâneo, visto que em processos de DIS não entram contribuições dependentes de modelo para as PDF e FF.

$\chi^2/\text{d.o.f.}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	λ	$\chi''(\gamma_c)$	$R(\text{GeV}^{-1})$
0.903	1.13 ± 0.024	0.165 ± 0.002	7.488 ± 0.081	5.490 ± 0.039

Tabela 3.1: Parâmetros extraídos do ajuste aos dados combinados de H1 e ZEUS (Aaron, 2010) para a função de estrutura do próton F_2 em HERA.

A tabela 3.2 mostra os valores para os parâmetros obtidos com o ajuste simultâneo a DIS e produção de hádrons em colisões deutério–Ouro ($d + Au$). Vê-se que o modelo AGBS tem boa concordância com o conjunto de dados de RHIC, sendo ainda consistente com o ajuste a dados de DIS somente, na comparação com a tabela 3.1. As figuras 3.8(a) e 3.8(b) mostram a descrição do campo de hádrons de RHIC segundo os ajustes feitos com o modelo AGBS. O expoente de saturação λ é um pouco maior do que o obtido no ajuste a HERA somente, se aproximando do valor $\lambda = 0.2 \div 0.3$ esperado para o DIS em ordem seguinte a dominante (Triantafyllopoulos, 2003).

A escala de saturação obtida é apenas um pouco maior do que a extraída dos dados de DIS somente, o que leva a um valor inesperadamente pequeno para a escala de saturação nuclear. Deve-se notar, contudo, que nosso modelo não inclui dependência no parâmetro de impacto b da colisão, sendo que a escala de saturação nuclear $Q_{s,A}^2$ é obtida da escala de saturação de um próton por meio de uma média sobre o tamanho transversal do núcleo. Isso é feito notando-se que o raio nuclear escala com o número atômico através de

$$R_A = r_0 A^{1/3}, \quad (3.66)$$

onde r_0 é uma constante mimetizando o raio de um próton. Uma vez que os hádrons sofrem contração de Lorentz, somente a coordenada transversal é que define essa distribuição de pártons, e assim a escala

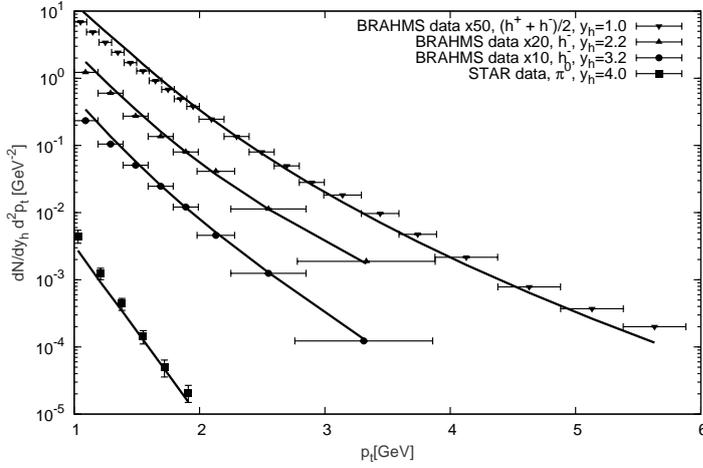
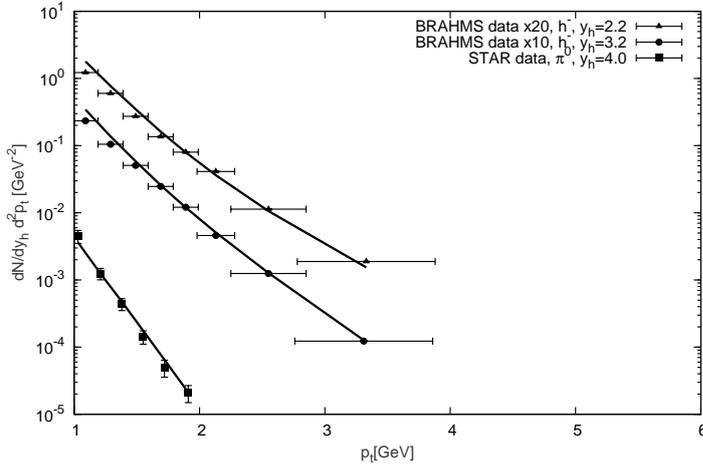
(a) Colisões $d + Au$ no RHIC para $y_h \geq 1.0$ (b) Colisões $d + Au$ no RHIC para $y_h \geq 2.2$

Figura 3.8: Resultados para o campo de hádrons carregados e píons neutros obtidos no RHIC para colisões $d + Au$, advindos do ajuste simultâneo do modelo AGBS aos dados de RHIC (Adams, 2006, Arsene, 2004) e HERA (Aaron, 2010). Em 3.8(a) temos a presença dos dados de rapidez média ($y_h \geq 1.0$), enquanto que em 3.8(b) somente os dados de rapidez frontal são incluídos.

de saturação é escrita como

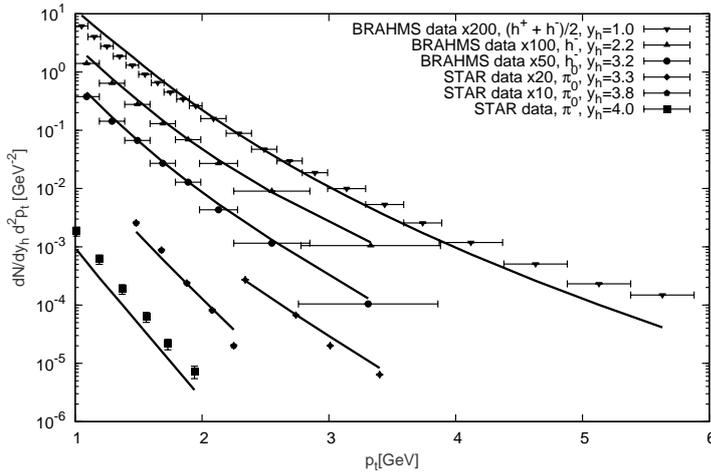
$$Q_{s,A}^2 = cA^{1/3}Q_{s,p}^2, \quad (3.67)$$

sendo que a constante c varia de acordo com a centralidade do processo, podendo variar de $c \approx 0.4$ para colisões periféricas, $c \approx 0.5$ para colisões de *minimum bias*, e $c \approx 0.9$ para colisões centrais (Stašto et al., 2012a,b). Uma vez que os dados usados são de *minimum bias* — incluindo processos difrativos e não difrativos, i.e., são como que uma média sobre processos periféricos e centrais, o valor obtido para $Q_{s,A}^2$ deve ser visto como uma média sobre o parâmetro de impacto. O valor no centro do núcleo deve ser maior, evidenciando a importância da investigação dos efeitos da adição de dependência em parâmetro de impacto sobre o modelo AGBS, com vistas a uma descrição mais completa da distribuição de pártons de pequeno x sobre todo o plano transversal. Notemos ainda que no caso de um núcleo de ouro, $A = 197$, de forma que para *minimum bias* $cA^{1/3} \approx 3$. Isso equivale a tomar valores efetivos para o número atômico, como é feito comumente na literatura, de forma que $Q_{s,A}^2 \rightarrow A_{\text{eff}}^{1/3}Q_{s,p}^2$. No caso do presente ajuste foi usado $A_{\text{eff}} = 18.5$ para dados de colisões deutério–Ouro em *minimum bias*. Um

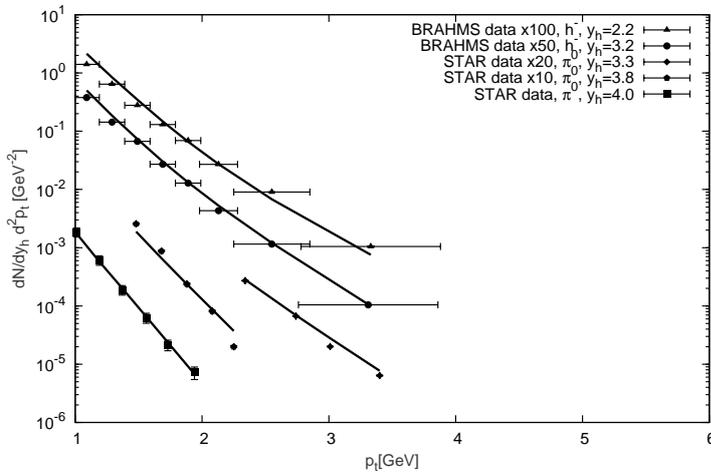
simples cálculo mostra que para o mesmo tipo de colisão com alvos de chumbo, um valor de $A_{\text{eff}} = 20$ se aproxima do esperado, sendo esse o valor a ser usado nas previsões para LHC.

	$y_h \geq 2.2$	$y_h \geq 1.0$
$\chi^2/\text{d.o.f.}$	0.799	1.056
$k_0^2 (\times 10^{-3})$	2.760 ± 0.130	1.660 ± 0.137
λ	0.190 ± 0.003	0.186 ± 0.003
$\chi''(\gamma_c)$	5.285 ± 0.123	6.698 ± 0.223
$R(\text{GeV}^{-1})$	4.174 ± 0.053	4.695 ± 0.112
$K(y_h = 1.0)$	–	6.172 ± 0.379
$K(y_h = 2.2)$	2.816 ± 0.110	3.783 ± 0.259
$K(y_h = 3.2)$	2.390 ± 0.098	3.256 ± 0.226
$K(y_h = 4.0)$	0.7	0.7

Tabela 3.2: Parâmetros extraídos do ajuste simultâneo à função de estrutura do próton F_2^p de HERA (dados de H1 e ZEUS combinados (Aaron, 2010)) e ao campo de hádrons para colisões $d + Au$ em RHIC (dados de BRAHMS e STAR (Adams, 2006, Arsene, 2004)).



(a) Colisões $p + p$ no RHIC para $y_h \geq 1.0$



(b) Colisões $p + p$ no RHIC para $y_h \geq 2.2$

Figura 3.9: Resultados para o campo de hádrons carregados e píons para colisões $p + p$, advindos do ajuste simultâneo do modelo AGBS aos dados de RHIC e HERA.

Em relação ao ajuste com dados de rapidez média inclusos cabem alguns comentários. A descrição mediana (em relação ao ajuste com dados de rapidez frontais) dos dados vista na figura 3.8(a) é resultado de o alvo (o núcleo de ouro, neste caso) ainda não ter atingido seu estado de condensado de glúons, para o qual nem a amplitude AGBS, nem tampouco o formalismo de CGC presente em (3.55) são válidos. Isso fica mais claro quando analisamos a região cinemática atingida nos processos de colisões hadrônicas. De acordo com a definição da fatorização híbrida descrita anteriormente, a fração de momentum longitudinal do alvo provada (que entra na amplitude AGBS na equação (3.55)) é dada por

$$x_2 = x_1 e^{-2y_h}. \quad (3.68)$$

Sabendo que x_1 varia de $x_F = P_t e^{y_h} / \sqrt{s}$ à 1, resulta que

$$x_2 = \frac{p_t e^{y_h}}{\sqrt{s}}, \quad (3.69)$$

o que, considerando que usamos $p_t > 1$ — como demandam as PDFs — e que $\sqrt{s} = 200$ GeV para colisões no RHIC, resulta nos valores

$$\begin{cases} y_h = 1, p_t = 1 \rightarrow x_2 \simeq 0.014, \\ y_h = 1, p_t = 10 \rightarrow x_2 \simeq 0.14, \\ y_h = 2, p_t = 1 \rightarrow x_2 \simeq 0.00068, \\ y_h = 2, p_t = 10 \rightarrow x_2 \simeq 0.0068. \end{cases} \quad (3.70)$$

Com isso vemos que a região de rapidez médias ($y_h = 1$) está no limite de onde é comumente considerado região de pequeno x , mas apenas no caso do menor valor de p_t utilizado. Para valores maiores de momentum transversal já estamos em regiões onde o formalismo de dipolos, bem como do CGC, não valem mais; ou no mínimo carecem de correções advindas de evoluções do tipo DGLAP. Ainda assim, pelo fato de ser um ajuste simultâneo, os parâmetros são vinculados ao DIS de forma que os parâmetros concordam com os obtidos no ajuste ao DIS somente (que considera somente valores $x \leq 0.01$), como visto na tabela 3.2. Desta forma, ainda que o valor de $\chi/d.o.f$ seja bom, os valores dos fatores K no ajuste com $y_h \geq 1$ fazem este ser descartado, uma vez que todos os erros (do modelo AGBS e do CGC na região de $x > 0.01$) do formalismo usado são codificados nesses parâmetros.

Deve-se lembrar ainda que tais fatores K são definidos teoricamente como a razão entre as seções de choque em ordem seguinte a dominante e em ordem dominante — σ_{NLO}/σ_{LO} — para um dado processo. Assim, vemos que o ajuste para regiões de rapidez frontais ($y_h \geq 2$) reproduz aproximadamente o que se espera de um modelo em ordem dominante, que seria um fator de 2 para tais parâmetros. É preciso notar que estes fatores entram em nosso cálculo como normalizações sobre todas as incertezas do modelo aos dados de RHIC, vinculadas ainda aos erros de DIS.

Os resultados para o ajuste simultâneo de DIS com produção de hádrons em colisões próton-próton ($p + p$) em RHIC são apresentados nas figuras 3.9(a) e 3.9(b). Podemos ver uma descrição bem mais fraca dos dados, a qual é explicada analogamente o caso $d + Au$. Porém, sendo uma colisão próton-próton, o tratamento em termos de colisão entre um projétil diluído e um alvo denso é mais

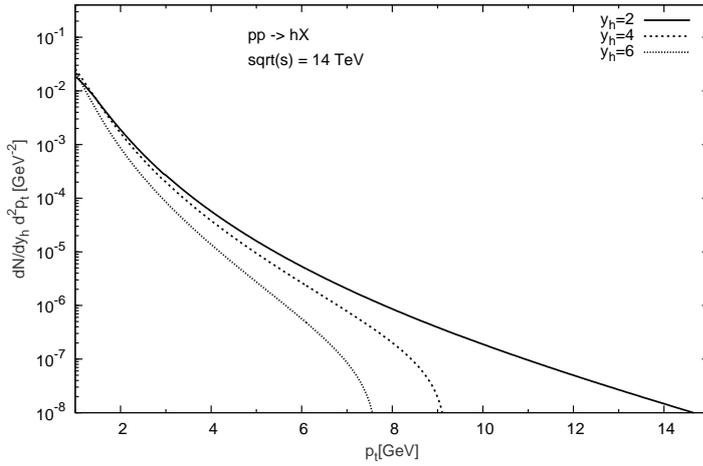
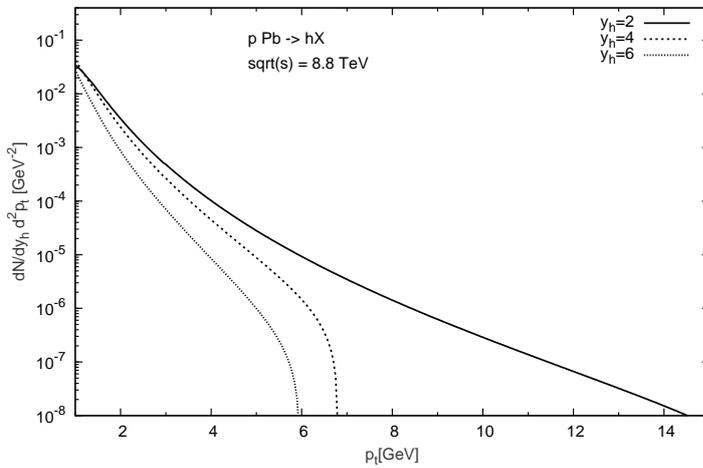
(a) Colisões $p + p$ no LHC(b) Colisões $p + Pb$ no LHC

Figura 3.10: Predições realizadas com base no presente ajuste para a distribuição em p_t de hádrons produzidos em colisões $p + p$ and $p + Pb$ no LHC. Foi usado $A_{\text{eff}} = 20$ para alvos de chumbo.

difícil de ser obtido, principalmente no caso da região de rapidez médias ($y_h = 1$). Já na região de rapidez frontais, o alvo já pode ser tratado como um CGC de forma que o uso do modelo AGBS e do formalismo de CGC é válido. Assim, pode-se afirmar que o melhor ajuste do modelo AGBS na descrição da produção de hádrons em altas energias é o encontrado na primeira linha da tabela 3.2 para os dados de rapidez frontais apenas.

3.3.2 Predições para o LHC

O melhor resultado do ajuste simultâneo — para $y_h \geq 2$, foi também usado para investigar a distribuição em momento transversal dos hádrons produzidos em colisões próton–próton ($p + p$) e próton–Chumbo ($p + Pb$) nas energias de LHC, 14 TeV e 8.8 TeV, respectivamente. Os resultados são ilustrados nas figuras 3.10(a) e 3.10(b), nas quais vemos a característica supressão na distribuição em p_t para o campo de hádrons no caso de colisões $p + Pb$ em rapidez frontais. Tal fenômeno pode ser visto, no contexto em que o modelo AGBS está inserido, como efeitos de recombinação partônica — ou de saturação — entre os glúons de pequeno- x muito comuns nessa região de rapidez, visto que os hádrons produzidos são produto da colisão de tais glúons de pequeno- x neste caso.

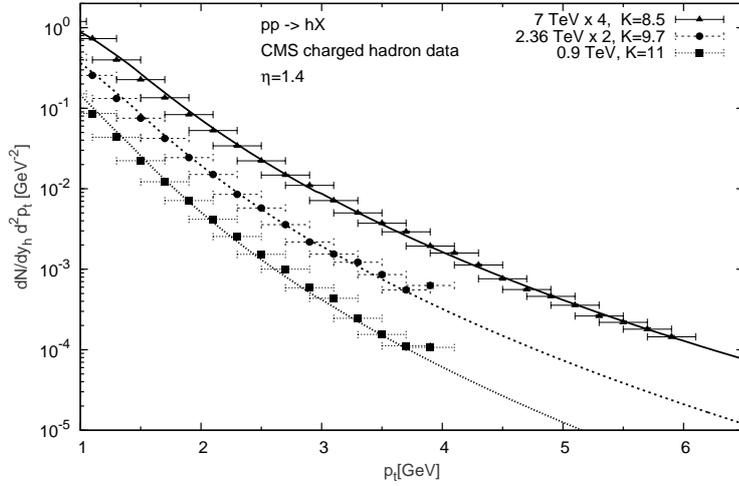


Figura 3.11: Predições do modelo AGBS aos dados para o campo de hádrons carregados de LHC para colisões $p + p$ nas energias $\sqrt{s} = 0.9, 2.36$ e 7 TeV. Os pontos experimentais são do experimento CMS para o intervalo $|\eta| < 2.4$ (Khachatryan, 2010a,b).

Mesmo que ainda não existam dados de LHC exclusivos para rapidezzes frontais e com um considerável intervalo de momento transversal dos hádrons produzidos, o mesmo resultado do ajuste simultâneo à HERA e RHIC foi usado para a descrição dos dados da colaboração CMS no LHC para a distribuição em momento transversal p_t em colisões $p + p$ (Khachatryan, 2010a,b). Tais dados foram publicados como uma média sobre todo o intervalo de pseudorapidez usado na detecção, $|\eta| < 2.4$. Para tal descrição, usamos a seguinte expressão relacionando a rapidez do hádron produzido y_h em função da pseudorapidez η medida no detector:

$$y(\eta, p_t, m) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{m^2 + p_t^2 \cosh^2 \eta} + p_t \sinh \eta}{\sqrt{m^2 + p_t^2 \cosh^2 \eta} - p_t \sinh \eta} \right], \quad (3.71)$$

onde m é a massa de um hádron leve, como por exemplo pión ou káon, os quais são os principais produtos medidos em tais colisões. Observamos contudo, como no caso observado nos ajustes a dados de RHIC por diferentes modelos com uso do formalismo CGC (Boer et al., 2008, Dumitru et al., 2006a), que para o caso de hádrons leves (com massas até 0.4 GeV) a aproximação $\eta \approx y_h$ não afeta consideravelmente os resultados.

De maneira surpreendente, uma descrição muito boa foi obtida, embora com valores altos para os fatores K . Tais valores são explicados como incertezas do modelo AGBS, bem como do formalismo de CGC presente em (3.55), na comparação com os dados mediados sobre o intervalo de rapidez de CMS. Uma vez que o modelo AGBS não deve descrever a região central dos dados, já que é um modelo para interações com pártons de pequeno- x do alvo, foi usado um valor médio $\eta = 1.4$ que deve implicar em discordâncias para todo o intervalo $|\eta| < 2.4$, as quais estão expressas nos fatores K .

Como incorporam correções de ordem seguinte a dominante, tais fatores incluem os processos com quarks no alvo — como qq e gq , enquanto o formalismo de CGC presente em (3.55) considera somente glúons (em estado condensado) no alvo. Desta forma, vemos o motivo pelo qual o fator K decresce conforme a energia aumenta: a função de onda do alvo, descrevendo um condensado de

glúons, receberá menores contribuições de processos com quarks no alvo para energias maiores, visto que para altas energias os glúons de pequeno- x devem dominar.

A fim de contornar o efeitos dos erros introduzidos nos fatores K , é comum fazer uso de razões entre observáveis. Assim, espera-se que os erros de diferentes observáveis podem de alguma forma se cancelar. Recentemente fizemos previsões (Basso et al., 2012) com o modelo AGBS para o fator de modificação nuclear, definido por

$$R_{pA}^h = \frac{dN^{pA \rightarrow hX}}{d^2p_t d\eta} \bigg/ \frac{dN^{pp \rightarrow hX}}{d^2p_t d\eta} \bigg/ N_{\text{coll}}. \quad (3.72)$$

O número de colisões binárias, N_{coll} , vem de métodos de Monte Carlo baseados em modelos de Glauber para o perfil nuclear, sendo o valor usado aqui $N_{\text{coll}} = 6.9$ para dados em *minimum bias* de colisões próton-chumbo a $\sqrt{s} = 5.02$ TeV (d'Enterria, 2003). Os resultados, ilustrados na figura 3.3.2, mostram uma forte supressão em rapidez frontal, a qual é típica de modelos de saturação e que se mantém mesmo a grandes valores de momentum transverso. Para hádrons produzidos em regiões mais centrais, contudo, evidencia-se um crescimento da razão para grande p_t . Isto pode ser relacionado ao fato de estarmos empregando um cálculo em LO, sendo que em grande p_t correções em NLO são importantes como pode ser observado nos resultados da figura 3.3.2 (gráfico superior, com $\alpha_s^{\text{in}} = 0$), tomado de (Rezaeian, 2013) e que usa o modelo *running coupling* BK (rcBK) que inclui efeitos de acoplamento dinâmico à equação BK.

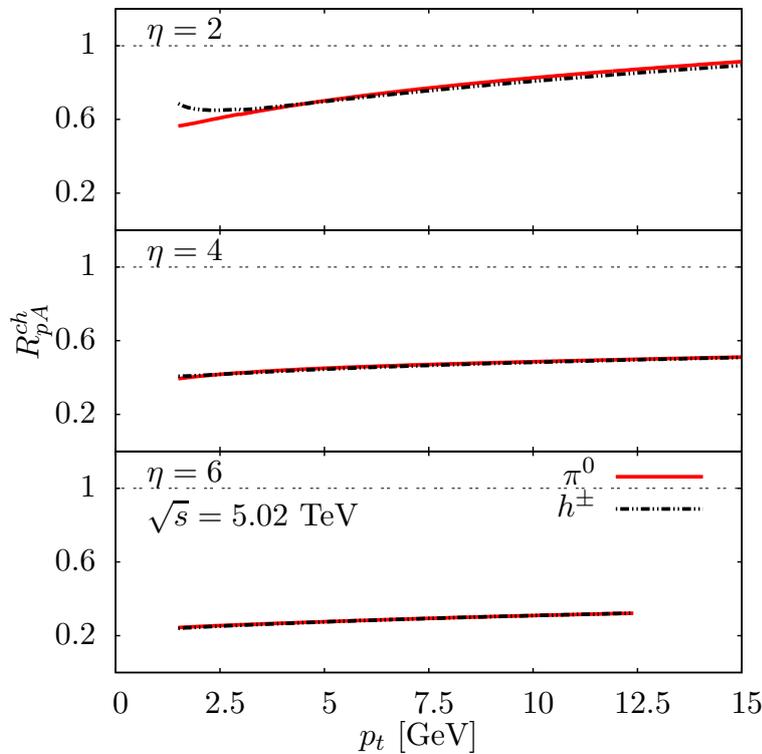


Figura 3.12: Previsões do modelo AGBS para a razão nuclear R_{pA}^{ch} no caso produção de hádrons carregados em $\sqrt{s} = 5.02$ TeV no LHC.

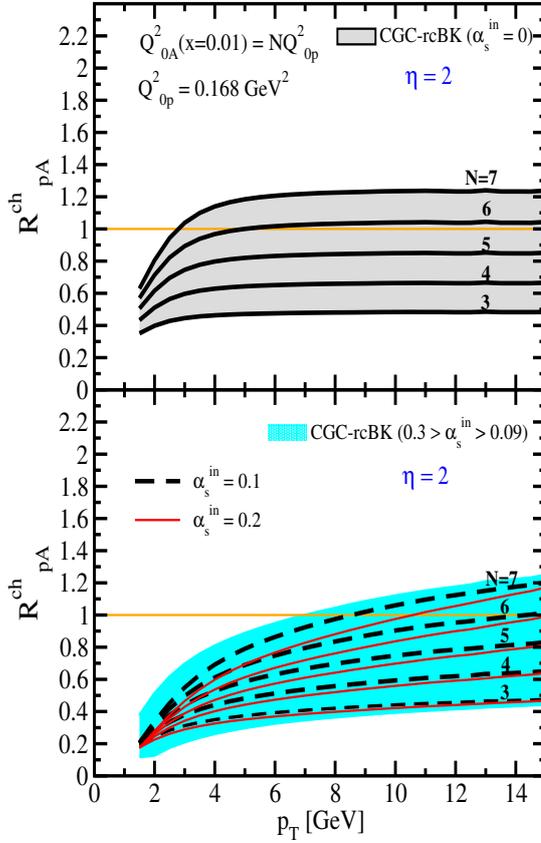


Figura 3.13: Predições do modelo rcBK para a razão nuclear R_{pA}^{ch} no caso produção de hádrons carregados em $\sqrt{s} = 5.02$ TeV no LHC (Rezaeian, 2013).

3.4 Produção de hádrons no formalismo de fatorização k_t

Quando ambos os pártons interagentes possuem pequenas frações de momentum do hádron que fazem parte, o processo de colisão pode ser descrito por meio da fatorização k_t , a qual aparece naturalmente em formalismo baseados na evolução na variável de Bjorken x . Os primeiros passos no desenvolvimento de tal fatorização foram dados juntamente ao desenvolvimento da evolução GLR (Gribov et al., 1983), na década de 1980. Posteriormente, Catani, Ciafaloni e Hautmann também atacaram o problema e aprimoraram uma fatorização em momentum transversal baseada na evolução BFKL (Catani et al., 1991). Aqui usaremos o formalismo desenvolvido independentemente por Braun (Braun, 2000a,b), baseado na evolução BFKL com vínculos de unitariedade, e por Kovchegov e Tuchin (Kovchegov & Tuchin, 2002) usando a mesma física contida no desenvolvimento da evolução BK.

No regime de energias muito altas, onde $\sqrt{s} \gg Q_s \geq p_t$, o processo dominante para a seção de choque é a produção de glúon por meio da fusão de glúons, com subsequente fragmentação deste glúon produzido nos hádrons observados. Quando o processo de espalhamento se dá entre um projetil diluído e um alvo denso, com grande número de ocupação de pártons, a seção de choque para produção de um jato de glúons pode ser descrita em termos das distribuições de pártons não integradas (UGDs) dos hádrons em colisão

$$\frac{d\sigma^{A+B \rightarrow g}}{dyd^2q_t} = K \frac{2}{C_F q_t^2} \int^{q_t} \frac{d^2k_t}{4} \alpha_s(Q) \varphi\left(x_1, \frac{|q_t + k_t|}{2}\right) \varphi\left(x_2, \frac{|q_t - k_t|}{2}\right), \quad (3.73)$$

onde $x_{1,2} = (p_t/\sqrt{s})e^{\pm y}$ são as frações de momentum (longitudinal) dos pártons (glúons) em colisão, $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ é o operador de Casimir para a representação fundamental do grupo SU(3) e K denota as correções devido a efeitos de mais altas ordens no presente cálculo. Nesta fórmula, fica claro que estamos lidando com uma representação com fatorização em momentum transverso k_t , visto que os pártons intrinsecamente possuem uma distribuição de momentum transverso do hádron que compõem. Isto é uma das diferenças entre o formalismo híbrido usado anteriormente, no qual os pártons incidentes são descritos pelas PDFs colineares que dependem apenas na fração de momentum longitudinal x .

Ainda que o modelo AGBS seja baseado nas soluções da Equação BK em ordem dominante, ele incorpora algumas propriedades esperadas em modelos em ordem seguinte a dominante (NLO), como por exemplo o expoente de saturação, que deve ser reduzido de $\lambda = 0.9$ em modelos LO para $\lambda \approx 0.2 - 0.3$ do que é observado dos dados e é obtida em modelos em NLO. Desta forma, em relação ao argumento da constante de acoplamento $\alpha_s(Q)$ em (3.73), ao invés de usar um valor fixo deixamos que este varie dentro da prescrição de ordem dominante

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{27 \log \frac{Q^2 + \mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}} \quad (3.74)$$

usando o valor máximo de momentum entrando na UGD como escala, *i. e.*, $Q = \max\{|p_t + k_t|/2, |p_t - k_t|/2\}$, sendo que fixamos o valor de $\Lambda_{\text{QCD}}^2 = 0.05 \text{ GeV}^2$. A escala μ foi introduzida por razões puramente fenomenológicas a fim de evitar efeitos da região não perturbativa na constante de acoplamento. Usando a massa do hádron como escala, como valores entre $m_h = 0.2 - 0.4 \text{ GeV}$, conseguimos bons resultados, embora um valor de corte $\mu \sim 1 \text{ GeV}$ possa parecer mais apropriado para evitar a região não perturbativa.

No Limite de grande número de cores N_c , a distribuição de glúons (dipolos) não integrada em cada um dos hádrons em colisão é escrita em termos da amplitude de espalhamento de dipolos através de

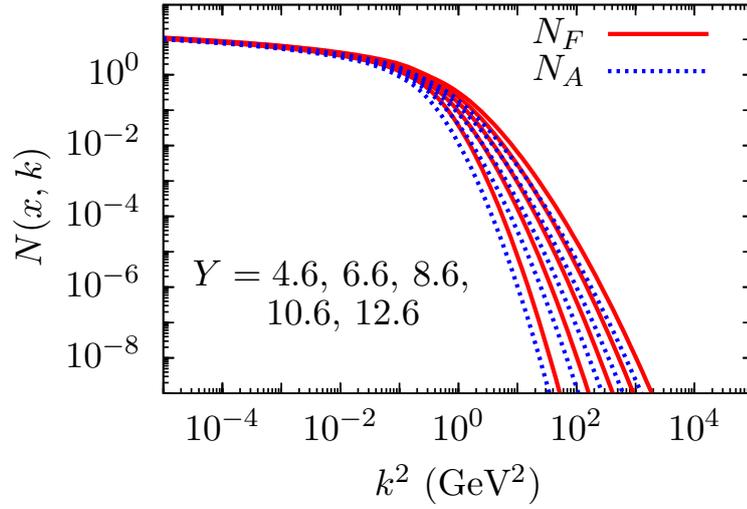
$$\varphi(k, x; b) = \frac{N_c S_t}{2\pi^2 \alpha_s(k)} k^2 F_g(x, k), \quad (3.75)$$

onde S_t é a área transversa dos núcleos, sendo que $F_g(x, k)$ denota a amplitude de espalhamento na representação adjunta.

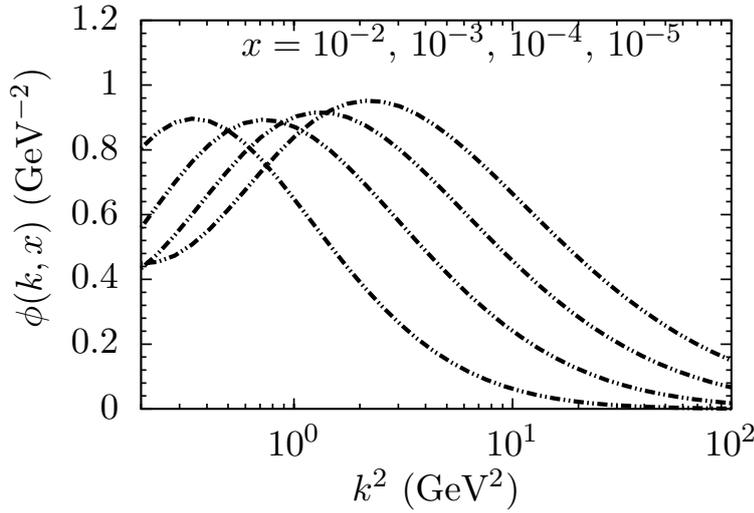
Como descrito anteriormente, precisamos escrever $F_g(x, k)$ no espaço de Fourier usual (sem o fator r que aparece em (3.57)). De maneira análoga ao que fizemos no ajuste simultâneo da seção 3.3, Braun (Braun, 2000a) mostrou que (veja também a referência (Dominguez et al., 2011))

$$F_g(x, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} (\nabla_{\mathbf{k}}^2 N_G(x, \mathbf{k}) + \delta^2(\mathbf{k})), \quad (3.76)$$

onde a função delta pode ser desconsiderada, um vez que a distribuição não integrada de glúons é nula para $k = 0$. O Laplaciano operando sobre a amplitude no espaço de momentum em (3.75) implica



(a)



(b)

em complicações na forma da UGD para pequenos valores de k , na região não perturbativa da QCD. Esses efeitos podem ser minimizados usando a massa do hádron como uma espécie de corte (fazendo $\mu = m_h$ na equação (3.75)) na escala para o acoplamento forte, como discutido acima. A UGD obtida com o modelo AGBS está ilustrada na figura 3.14(b), onde foram considerados hádrons com massa de 300 MeV.

3.4.1 Resultados com a fatorização k_t

A distribuição em momentum transverso dos hádrons carregados produzidos é dada por

$$\frac{dN_{ch}}{d\eta d^2p_t} = \frac{J[\eta]}{\sigma_{nsd}} \int d^2R \int \frac{dz}{z^2} \frac{d\sigma^{A+B \rightarrow g}}{dy d^2q_t d^2R} D_h(z = p_t/q_t, \mu) \quad (3.77)$$

Figura 3.14: (a) Amplitude AGBS no espaço de momentum e (b) a respectiva distribuição de glúons não integrada UGD para o próton.

onde $J[\eta]$ é o Jacobiano para a transformação da rapidez envolvida nas definições de $x_{1,2}$ e a pseudo-rapidez medida nos experimentos, para qual usamos

$$y(\eta, p_t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + p_t^2 \cosh^2 \eta} + p_t \sinh \eta}{\sqrt{m^2 + p_t^2 \cosh^2 \eta} - p_t \sinh \eta} \right), \quad (3.78)$$

com m denotando a massa do hádron, resultando na seguinte forma para o Jacobiano:

$$J[\eta] = \frac{p_t \cosh(\eta)}{\sqrt{m^2 + p_t^2 \cosh^2 \eta}}. \quad (3.79)$$

Em (3.77), $D_h(z = p_t/q_t, \mu)$ representa a função de fragmentação do glúon produzido com momentum transversal q_t no hádron medido com momentum transversal p_t . O processo de fragmentação envolve grandes distancias, que implicam em valores grandes para o acoplamento forte, e consequentemente denotam a presença de física não perturbativa. Tais funções são geralmente parametrizações fitadas globalmente a uma grande variedade de dados, de forma que sejam universais e assim independente da particularidade de cada processo. Como exemplo, um processo ideal para extração de FFs é a aniquilação elétron-pósitron $e^+ e^-$, uma vez que esse traz informações somente da interação forte, já que léptons não sentem a força forte e assim não interagem com os hádrons produzidos. Mesmo que a FF seja extraída com base neste (e em outros) processo(s), ela é universal e pode ser usada para a descrição de da fragmentação de pártons em hádrons em qualquer natureza de processos, mesmo aqueles que estão além do modelo padrão. Neste trabalho (Basso et al., 2012), bem como no ajuste simultâneo discutido anteriormente, usamos o modelo KKP (Kniehl et al., 2000) com escala de fatorização $\mu = p_t$ do hádron produzido e com $z_{\min} = 0.05$, como exigem as regras de soma de momentum da QCD.

A quantidade σ_{nsd} em (3.77) denota a seção de choque não difrativa, definida como a diferença entre a seção de choque total e as contribuições não inclusivas através da relação $\sigma_{\text{nsd}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{sd}} - \sigma_{\text{dd}} - \sigma_{\text{el}}$, onde os índices sd , dd , el marcam as contribuições de difração simples, dupla e espalhamento elástico, respectivamente. Tal quantidade obviamente serve para garantir que sejam considerados apenas espalhamentos inclusivos na tomada de dados, mas é de difícil determinação experimental e depende muito de modelos teóricos, como os apresentados nas referências (Gotsman et al., 2012a,b, 2008, Ryskin et al., 2011, 2012). Neste trabalho damos ênfase ao modelo KMR (Ryskin et al., 2011), que incorpora ambas contribuições de espalhamentos macios e duros baseados em teoria de campos de Regge, ou seja, na evolução BFKL. Sendo uma seção de choque, tal quantidade representa uma área efetiva de interação que pode ser modelada, a exemplo dos trabalhos publicados em (Levin & Rezaeian, 2010, Tribedy & Venugopalan, 2012). Analogamente ao trabalho de Tribedy e Venugopalan (Tribedy & Venugopalan, 2012), introduzimos um raio de interação efetivo com dependência em energia, $b_{\max} = a + b \log(s)$, de forma que a seção de choque não difrativa pode ser modelada por $\sigma_{\text{nsd}} = \pi b_{\max}^2$. Usamos duas maneiras para fixar os parâmetros a e b :

- de forma a reproduzir o modelo KMR (Ryskin et al., 2011), que dispõe de dados para valores específicos de energia. Assim temos a liberdade de poder descrever uma gama maior de processos

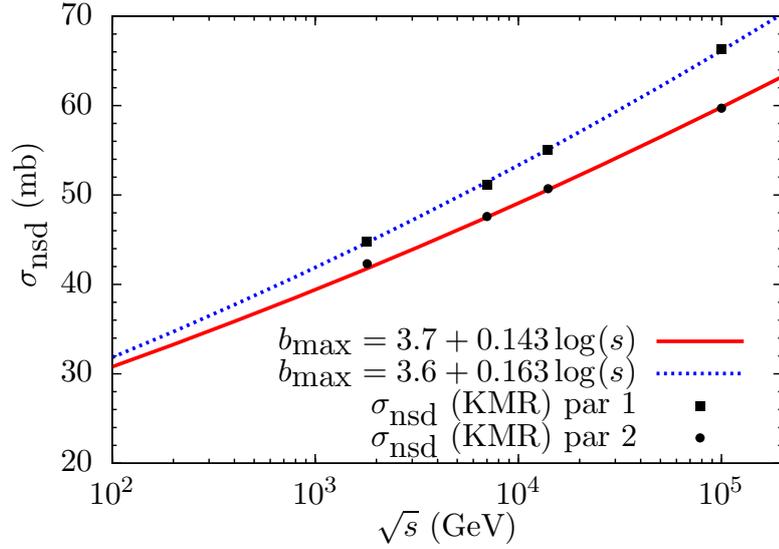


Figura 3.15: Descrição dos valores obtidos do modelo KMR (pontos) (Ryskin et al., 2011) para a seção de choque não difrativa com a modelagem $\sigma_{nsd} = \pi b_{\max}^2$, onde $b_{\max} = a + b \log(s)$, com os respectivos valores das constantes a e b para cada parametrização do modelo.

em diferentes energias. Os resultados para tais modelagens são mostrados na figura 3.15 para duas parametrizações (os pontos na figura) do modelo KMR;

- de forma a reproduzir os dados de produção de hádrons carregados em rapidez central $dN/d\eta|_{\eta=0}$ para diferentes valores de energia de centro de massa \sqrt{s} . Os melhores resultados indicam que $a \approx 0.15$ e $b \approx 0.2$ para massas dos hádrons entre 0.25 e 0.3 GeV. A figura 3.16 ilustra como o modelo AGBS descreve a produção de hádrons para diferentes energias, onde se percebe que para as energias de LHC é possível obter uma boa descrição com valores de K próximos da unidade. A região de energias de RHIC, entretanto, fica subestimada pelo modelo.

Para os resultados que descreveremos a seguir usaremos a parametrização da figura 3.15, visto que o modelo KMR inclui efeitos de emissões macias de pártons, que geralmente não são incluídas em modelos de saturação.

As divergências para pequenos valores de p_t na fórmula da fatorização k_t (3.73) são evitadas com a troca $p_t \rightarrow \sqrt{m^2 + p_t^2}$, sendo que a massa é a mesma massa do hádron que entra na definição do Jacobiano relacionando rapidez e pseudorapidez, bem como na escala de momentum que entra no acoplamento forte.

Uma vez que o modelo AGBS foi ajustado aos dados de DIS em HERA na região de pequeno x ($x < 0.01$ onde os efeitos de saturação são importantes), correções das contribuições de quarks puderam ser ignoradas. Em colisões próton-núcleo ou próton-próton essas correções devem ser consideradas visto que valores grandes de $x_{1,2}$ devem ser atingidos, principalmente na fatorização k_t onde existe uma distribuição simétrica de momentum entre o projétil e o alvo. Nos resultados apresentados nesta seção introduzimos tais correções por meio da relação (Gelis et al., 2006)

$$\varphi(k, x; b) = \left(\frac{1-x}{1-x_0} \right)^\beta \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\lambda_0} \varphi(k, x_0; b) \quad (3.80)$$

onde $\beta = 4$ and λ_0 pode variar entre 0.1 a 0.3.

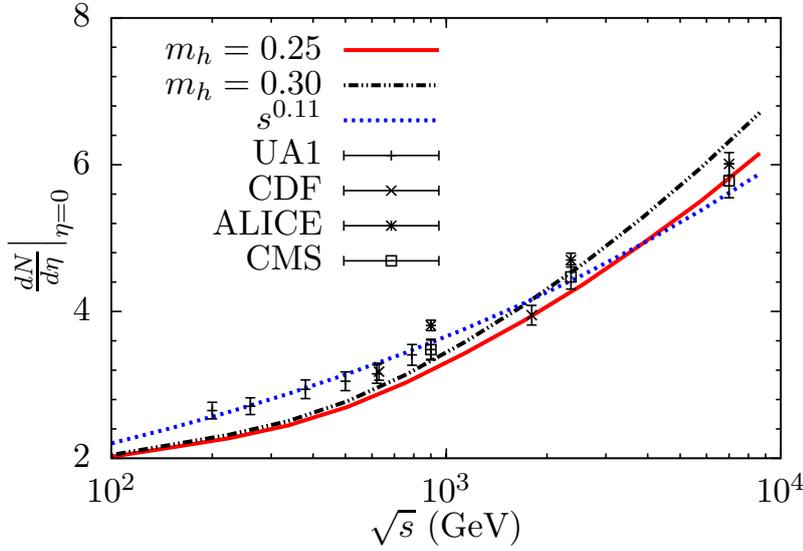


Figura 3.16: Distribuição de hádrons produzidos em rapidezes centrais em diferentes energias. A melhor descrição ocorre para $a \approx 0.15$ e $b \approx 0.2$. Os dados foram tomados de (Aamodt, 2010a,b, Abe, 1990, Khachatryan, 2010a,b, Rossi et al., 1975).

Nas figuras 3.18(a) e 3.18(b) mostramos os resultados para as distribuições em momentum transversal e em rapidez dos hádrons carregados em colisões próton-próton nas energias de 0.9, 2.36 e 7 TeV, onde se vê uma boa descrição dos dados. Pode-se notar ainda que os valores dos fatores K diminuem consideravelmente em relação aos obtidos com o uso da formalismo híbrido para a seção de choque (Basso et al., 2011), que foi descrito na seção anterior. Este resultado era realmente esperado, visto que a fatorização k_t , por exibir uma simetria entre alvo e projétil que permite atingir regiões de momentum longitudinal e transversal maior, deve mesmo descrever melhor regiões de rapidezes centrais, ao passo que o formalismo híbrido descreve melhor as regiões de rapidezes frontais. É importante salientar que o formalismo usado na seção anterior carece de correção devido a espalhamentos inelásticos dos pártons do projétil com o alvo, que foram recentemente calculadas (Altinoluk & Kovner, 2011) e devem contribuir consideravelmente em rapidezes médias e para grande p_t do hádron medido, ao passo que em regiões de rapidezes frontais tais contribuições são pequenas, como evidenciado em (Jalilian-Marian & Rezaeian, 2012a). Notemos ainda que tais correções estão incluídas nas correções de um laço calculadas para a produção inclusiva em (Beuf, 2012, Chirilli et al., 2012a,b).

Os resultados para colisões próton-chumbo no LHC estão ilustrados na figura 3.4.1. A escala de saturação é modelada segundo a mesma prescrição usada no ajuste simultâneo, $Q_{s,A}^2 = A_{\text{eff}}^{1/3} Q_s^2$, p , com $A_{\text{eff}} = 20$ para colisões próton-ouro no LHC. Nós testamos também a prescrição da referência (Armesto et al., 2005), para qual $Q_{s,A}^2 = (A R_A^2 / R_p^2) Q_s^2$ (com $R_A = 1.12 A^{1/3} - 0.86 A^{-1/3} \text{ fm}$), e a descrição é similar. Esta última já foi usada com o modelo AGBS na descrição das razões nucleares $R(A/B) = B F_2^A / A F_2^B$ (Betemps & Machado, 2009), com bons resultados na região de sombreamento e também antisombreamento nuclear, válidas para valores pequenos e moderados de x .

Analisando a figura 3.4.1 se pode notar que a região de fragmentação do próton, em rapidezes negativas, é bem descrita pelo modelo. Isto era realmente esperado, uma vez que os efeitos de pequeno x do núcleo estão ali codificados (note que $x_2 \ll 1$ nesta região). Em relação a região de rapidezes positivas, na região de fragmentação do núcleo, seria importante implementar de maneira mais realística a geometria nuclear. A inclusão de dependência no parâmetro de impacto poderia melhorar a descrição

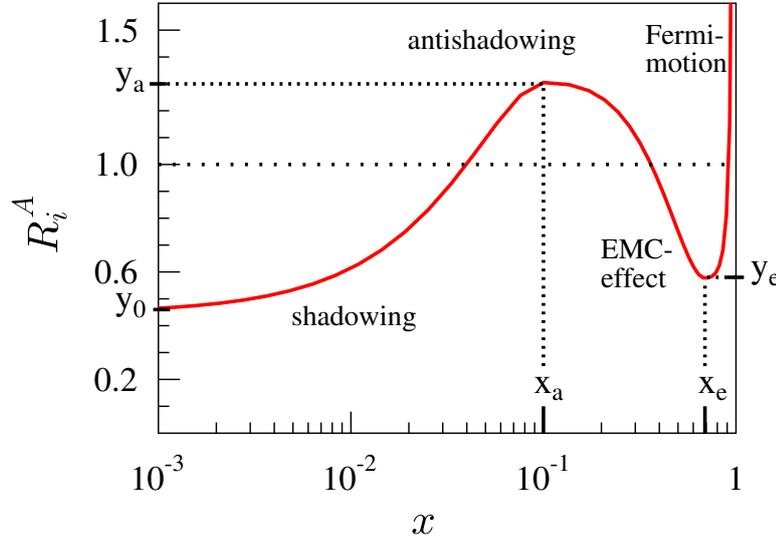


Figura 3.17: Comportamento esquemático do fator de modificação nuclear $R_{F_2}^A(x, Q)$ em função de x para um dado valor de Q . Figura tomada da Ref. (Eskola et al., 2009).

de alvos nucleares, se for possível descrever com isso efeitos nucleares de grande x , como por exemplo os efeitos EMC e movimento de Fermi, além da já comentada região de sombreamento.

Antes de prosseguir, faremos algumas considerações sobre os efeitos nucleares descritos ou não neste trabalho. A maneira mais simples de introduzir tais efeitos é considerar que espalhamento lépton-núcleo possa ser descrito como a soma dos espalhamentos entre os léptons e os núcleons que compõem este núcleo. Desta forma, as parametrizações para as distribuições de párton nucleares consideram a distribuição de pártons em um próton livre multiplicada por um fator (Ayala et al., 1994, 1999a,b, Epele et al., 1989, Eskola et al., 2009),

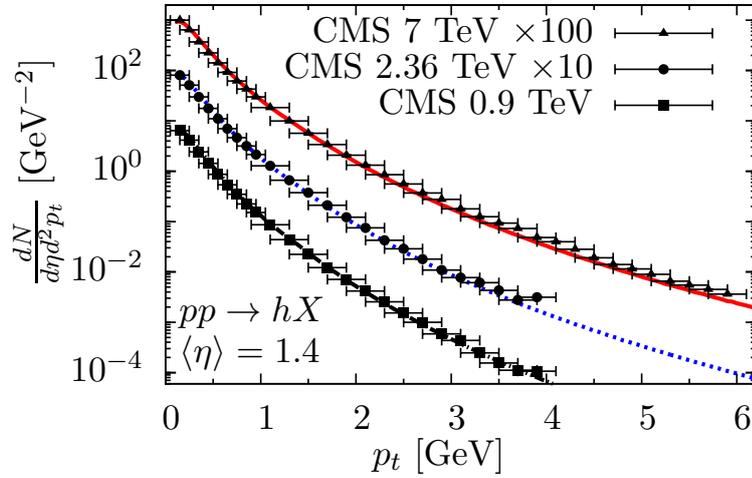
$$f_i^A(x, Q) = R_i^A(x, Q) f_i^p(x, Q), \quad (3.81)$$

onde i denota o tipo de párton. O fator de modificação nuclear, R^A , pode ser definido em termos das funções de estrutura F_2 através da razão

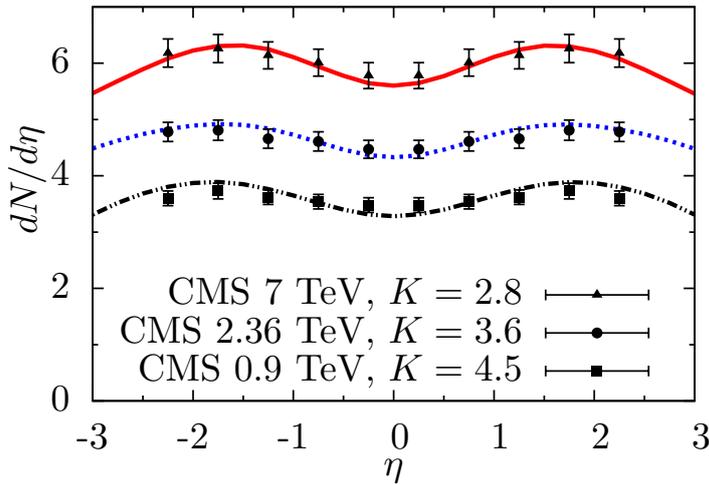
$$R_{F_2}^A(x, Q) = \frac{F_2^A(x, Q)}{A F_2^{\text{núcleo}}(x, Q)}, \quad (3.82)$$

com A definindo o número de massa nuclear (número de núcleons no núcleo). O comportamento de $R_{F_2}^A(x, Q)$ em função de x para um dado valor de Q está ilustrado na figura 3.17, a qual identifica quatro regiões:

- $R_{F_2}^A > 1$ para $x \gtrsim 0.8$: região do movimento de Fermi;
- $R_{F_2}^A < 1$ para $0.3 \lesssim x \lesssim 0.8$: região do efeito EMC (European Muon Collaboration);
- $R_{F_2}^A > 1$ para $0.01 \lesssim x \lesssim 0.3$: região de antisombreamento;
- $R_{F_2}^A < 1$ para $x \lesssim 0.01$: região de sombreamento.



(a)



(b)

Assim, fica claro que o modelo AGBS cobre somente a região de sombreamento, com possível extrapolação para a região de antisombreamento, uma vez que foi ajustado a dados de DIS considerando a região cinemática onde $x \leq 0.01$. Notemos ainda que a descrição da região de grande- x deve-se certamente considerar uma evolução do tipo DGLAP, pois em tal região as evoluções em $\log(1/x)$ devem receber correções.

O resultado apresentado aqui para colisões próton-chumbo é bastante similar ao que foi obtido com o modelo de saturação IP-Sat (Tribedy & Venugopalan, 2012, 2013), principalmente no que tange os dados de LHC, ainda que não tenhamos usado nenhum termo que inclua dependência no parâmetro de impacto na definição da escala de saturação como é feito em tal modelo. Comparando nossas previsões com os dados de ALICE (Abelev, 2013) pode-se notar que a razão

$$\frac{dN/d\eta|_{\eta=-2}}{dN/d\eta|_{\eta=2}} \quad (3.83)$$

apresenta praticamente os mesmos resultados obtidos com o modelo IP-Sat, para o qual a razão é 1.32 contra 1.33 no caso do modelo AGBS (os modelos KLN (Dumitru et al., 2012) e rcBK (Albacete et al.,

Figura 3.18: Distribuições em p_t e η para produção de hádrons carregados no LHC em colisões $p + p$ nas energias de 0.9, 2.36 and 7 TeV (Khachatryan, 2010a,b). A normalização usada segue πb_{\max}^2 , com b_{\max} tomado da figura 3.15. Deve-se notar que usando a normalização da figura 3.16 pode-se descrever os dados com valores menores, da ordem da unidade, para os fatores K .

2013) resultam em razões com valores de 1.38 e 1.42, respectivamente.). Assim vemos que, no que diz respeito à evolução em (pseudo)rapidez, mesmo um modelo em LO (que inclui alguns efeitos esperados em NLO, como por exemplo o expoente de saturação $\lambda \sim 0.2 - 0.3$) descreve consideravelmente bem os dados atualmente disponíveis, desconsiderando os efeitos nucleares de grande x já comentados. O mesmo não pode ser dito em relação à distribuição em momentum transversal, onde o modelo AGBS certamente falha ao descrever os dados para grandes valores de p_t , uma vez que nesta região os efeitos de mais altas ordens (ou mesmo ressonâncias) na evolução de dipolos são fundamentais, se não for o caso de incluir uma evolução em virtualidade semelhante a evolução DGLAP. Deve-se ainda reforçar que todos os modelos de saturação acima mencionados não se aproximam muito do valor 1.19 medido no experimento (Abelev, 2013) para a razão (3.83), talvez sinalizando que para os dados de produção inclusiva de hádrons nas energias de LHC uma evolução em virtualidade Q^2 é tão importante quanto a evolução em rapidez contida nos modelos de dipolos.

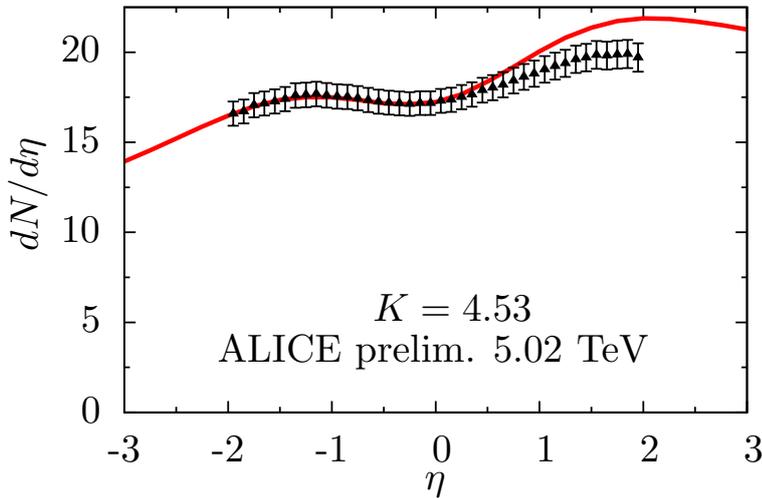


Figura 3.19: Distribuição em pseudorapidez para os hádrons carregados medidos em colisões $p + Pb$ no LHC (Abelev, 2013).

3.5 Produção inclusiva de fótons no formalismo do CGC

De forma análoga ao caso de produção de hádrons, já evidenciado na seção 3.2, pode-se definir a seção de choque para a produção inclusiva de fótons na região de fragmentação dos hádrons em colisão. Este formalismo considera os quarks do projétil interagindo com um sistema denso – na forma de um CGC – do alvo, uma vez que nas regiões frontais os quarks possuem frações de momentum próximas da unidade ao passo que o alvo é provido com frações de momentum muito pequenas. Ademais, uma vez que os fótons produzidos interagem apenas eletromagneticamente com o meio hadrônico formado após a colisão, estes se tornam sondas ideais para o estudo de efeitos de estado inicial, como os efeitos de saturação contidos no formalismo do CGC.

O ponto de partida para a formulação em que estamos interessados é a produção semi inclusiva de quarks e fótons, ilustrada na figura 3.20 e representada por

$$q(p)A(p_A) \rightarrow \gamma(k)q(l)X, \quad (3.84)$$

onde A define um estado multigluônico para as interações múltiplas do quark com o alvo. Na cinemática padrão da QCD perturbativa, em *twists* dominantes, somente um párton do alvo interage. Este não é o caso considerado aqui, uma vez que o alvo é tratado como um campo clássico de glúons representando um estado multigluônico com momentum transversal intrínseco, em oposição ao caso de um glúon individual com uma fração de momentum x_g bem definida e momentum transversal nulo.

A seção de choque para a produção de um fóton direto (na camada de massa) com 4-momentum k , respectivamente, a partir do espalhamento e um quark na camada de massa com 4-momentum p com um alvo (um próton ou um núcleo), foi calculada em (Gelis & Jalilian-Marian, 2002, Jalilian-Marian, 2005) no formalismo do CGC e é escrita como

$$\frac{d\sigma^{q(p)T \rightarrow \gamma(k)X}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma} = \frac{e_q^2 \alpha_{\text{em}}}{\pi(2\pi)^3} z^2 [1 + (1-z)^2] \frac{1}{k_t^2} \int d^2\mathbf{r}_t d^2\mathbf{l}_t \frac{l_t^2}{[z\mathbf{l}_t - \mathbf{k}_t]^2} e^{i\mathbf{l}_t \cdot \mathbf{r}_t} N_F(b_t, r_t, x_g), \quad (3.85)$$

onde T designa o alvo que estamos tratando (próton ou núcleo), $z \equiv k^-/p^-$ é a fração de momentum do quark portada pelo fóton e $d\eta_\gamma \equiv dz/z$.

A análise de alguns limites da expressão acima foi feita em (Gelis & Jalilian-Marian, 2002), onde foi mostrado que no limite onde o fóton tem grande momentum transversal, $k_t \gg z l_t$, tal que a singularidade colinear é suprimida, o resultado da QCD perturbativa para a produção de fóton direto no processo $qg \rightarrow q\gamma$ é recuperado, convoluído com a distribuição de glúons não integrada do alvo. Por outro lado, ao realizar-se a integração em l_t sem qualquer restrição, recupera-se a expressão da QCD perturbativa em LO para a função de fragmentação quark-fóton convoluída com amplitude de espalhamento de dipolos. Considerando a cinemática de *twists* dominantes, quando ignora-se os espalhamento múltiplos do quark com o alvo, esta expressão reduz-se a predição de QCD perturbativa para a produção de fótons de fragmentação. Desta forma torna-se útil a separação explícita das contribuições de fótons de fragmentação daquelas devidas a fótons diretos. Isto foi feito em (Jalilian-Marian & Rezaeian, 2012b) e a seção de choque toma a forma

$$\frac{d\sigma^{q(p)T \rightarrow \gamma(k)X}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma} = \frac{d\sigma^{\text{Fragmentação}}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma} + \frac{d\sigma^{\text{Direto}}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma}, \quad (3.86)$$

onde

$$\frac{d\sigma^{\text{Direto}}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma} = \frac{e_q^2 \alpha_{\text{em}}}{\pi(2\pi)^3} z^2 [1 + (1-z)^2] \frac{1}{k_t^4} \int^{k_t^2} d^2\mathbf{l}_t l_t^2 N_F(\bar{x}_g, b_t, l_t) \quad (3.87)$$

e

$$\frac{d\sigma^{\text{Fragmentação}}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{z} D_{\gamma/q}(z, Q^2) N_F(x_g, b_t, k_t/z), \quad (3.88)$$

sendo a função de fragmentação quark-fóton em LO dada por (Owens, 1987)

$$D_{\gamma/q}(z, Q^2) = \frac{e_q^2 \alpha_{\text{em}}}{2\pi} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right). \quad (3.89)$$

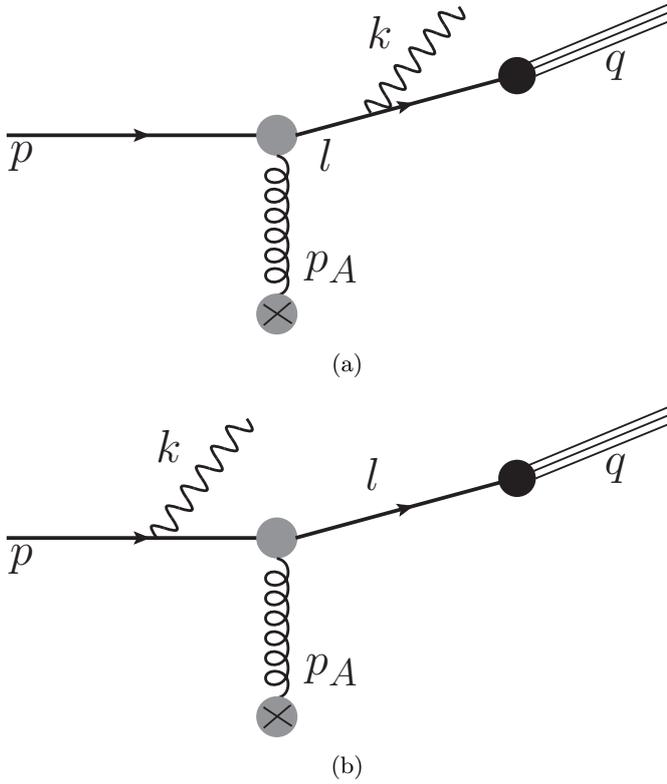


Figura 3.20: Diagramas, com os respectivos momenta da partículas, contribuindo para a produção inclusiva de fótons em ordem dominante. Em (a) temos o diagrama para a fragmentação de um fóton pelo quark no estado final; e em (b) a contribuição da produção do fóton direto pelo quark antes da interação.

Para relacionar a seção de choque partônica, representada por (3.86-3.88), com a produção de fótons em colisões próton-próton e próton-núcleo é necessário fazer a convolução destes elementos partônicos com a distribuição de quarks e antiquarks (PDF) no projétil, após a qual resulta que

$$\frac{d\sigma^{pT \rightarrow \gamma(k)X}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma} = \int_{x_q^{\min}}^1 dx_q [f_q(x_q, Q^2) + f_{\bar{q}}(X_Q, q^2)] \frac{d\sigma^{q(p)T \rightarrow \gamma(k)X}}{d^2\mathbf{b}d^2k_t d\eta_\gamma}, \quad (3.90)$$

onde fica subentendido a soma sobre diferentes sabores de quarks e antiquarks. A escolha mais natural para a escala dura que entra nas definições das PDFs e FFs em (3.90) e (3.89), respectivamente, é o momentum transversal do fóton. No que segue usaremos esta escala nas CTEQ6 LO PDFs (Pumplin, 2002) e na FF LO definida em (3.89). As frações de momentum no cone de luz para o processo de interesse são dadas por

$$\begin{aligned} z &\equiv \frac{k^-}{p^-} = \frac{k_t}{x_q \sqrt{s}} e^{\eta_\gamma} = \frac{x_q^{\min}}{x_q} \text{ com } x_q^{\min} = z_{\min} = \frac{k_t}{\sqrt{s}} e^{\eta_\gamma}, \\ x_g &= \frac{k_t^2}{z^2 x_q s} = x_q e^{-2\eta_\gamma}, \\ \bar{x}_g &= \frac{1}{x_q s} \left[\frac{k_t^2}{z} + \frac{(\mathbf{l}_t - \mathbf{k}_t)^2}{1-z} \right]. \end{aligned} \quad (3.91)$$

3.5.1 Resultados para fótons inclusivos no LHC

A fim de evitar os erros que entram nos fatores K , anteriormente discutidos, usaremos aqui somente razões de observáveis a serem medidos. Acreditamos que assim poderemos minimizar os

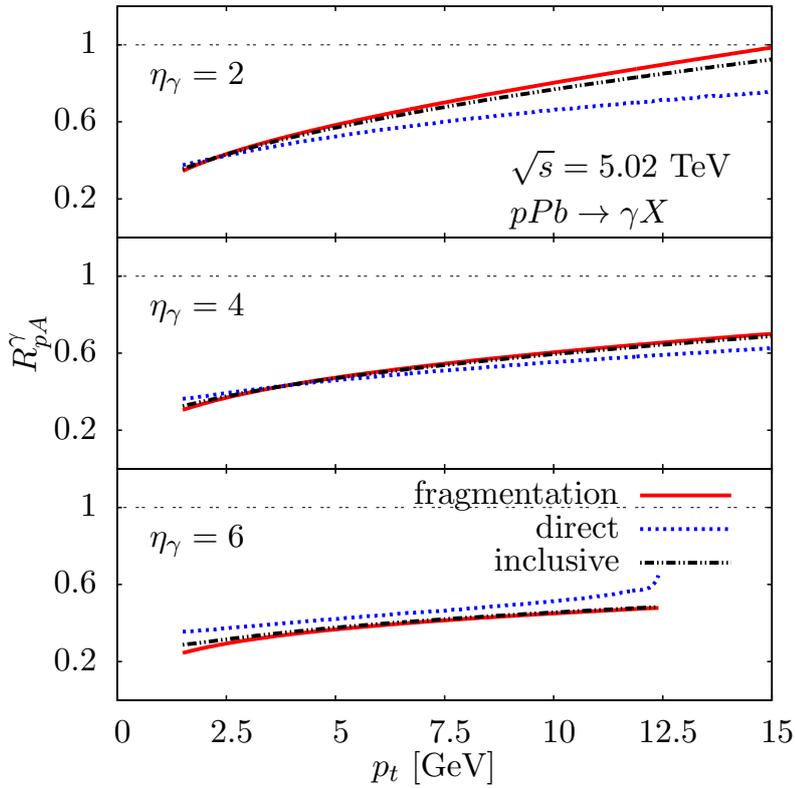


Figura 3.21: Predições do modelo AGBS para o fator de modificação nuclear em processos de produção inclusiva de fótons em colisões próton-chumbo a 5.02 TeV.

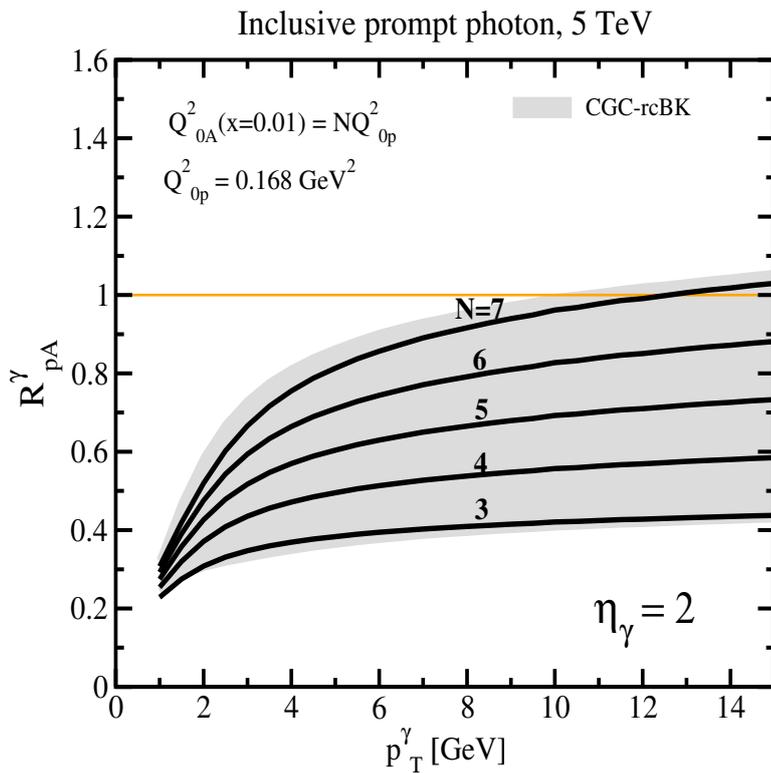


Figura 3.22: Predições do modelo rcBK para o fator de modificação nuclear em processos de produção inclusiva de fótons em colisões próton-chumbo a 5.02 TeV (Rezaeian, 2013).

efeitos de erros associados com correções de ordens superiores, e dessa forma fixamos $K = 1$ no que segue. Primeiramente mostramos as predições do modelo AGBS para o fator de modificação nuclear

$$R_{pA}^\gamma = \frac{d\sigma^{pA \rightarrow \gamma X}}{d^2p_t d\eta} \bigg/ \frac{d\sigma^{pp \rightarrow hX}}{d^2p_t d\eta} \bigg/ N_{\text{coll}}, \quad (3.92)$$

onde N_{coll} define o número de colisões binárias em colisões próton-núcleo, o que geralmente é tomado do modelo de Glauber para o perfil nuclear. Aqui, usamos o valor $N_{\text{coll}} = 6.9$ para colisões próton-chumbo em energia de 5.02 TeV (d'Enterria, 2003).

Na figura 3.21 mostramos os resultados para a razão R_{pA}^γ com o modelo AGBS para a amplitude de dipolos (Basso et al., 2012). Aqui, usamos a seguinte expressão para a escala de saturação nuclear:

$$Q_{s,A}^2 = cA^{1/3}Q_{s,p}^2, \quad (3.93)$$

onde $A = 208$ para alvos de chumbo e c diferencia colisões centrais das periféricas. Para dados de *minimum bias* usamos o valor $c = 0.56$ de (Stašto et al., 2012a,b), que resulta num fator de multiplicação aproximado de 3.3 para se obter a escala de saturação nuclear a partir da escala para um próton.

Pode-se notar que, no referencial do modelo AGBS, a produção de fótons diretos domina sobre os fóton produzidos via fragmentação na região de rapidezas frontais, ao passo que em rapidezas médias ocorre o inverso. Deve-se notar, todavia, que não definimos nenhum corte de isolamento que separe os fótons de fragmentação – produzidos a partir do quark no estado final, daqueles que são resultado de decaimentos de outras partículas que fazem parte do estado hadrônico X .

A fim de comparação, mostramos na figura 3.22 as predições do modelo rcBK para o fator de modificação nuclear usando a produção inclusiva de fótons (3.86) como observável (Rezaeian, 2013). Nota-se um descrição similar, com exceção à região de pequeno p_t entre os modelos AGBS e rcBK, muito embora no primeiro não estão inclusos os efeitos de acoplamento dinâmico na evolução. Ainda assim, a curva predita pelo modelo rcBK se aproxima muito mais dos dados da colaboração ALICE para o fator de modificação nuclear medido para produção de hádrons carregados (Abelev, 2012), indicando que a inclusão de correções de NLO à evolução de dipolos parece ser preferencial nas energias atingidas no LHC.

Também investigamos as predições do modelo AGBS para a razão entre os fótons e píons neutros produzidos inclusivamente, a qual é definida como

$$\frac{\gamma^{\text{inclusivo}}}{\pi^0} = \frac{d\sigma^{pT \rightarrow \gamma X}}{d^2p_t d\eta} \bigg/ \frac{d\sigma^{pT \rightarrow \pi^0 X}}{d^2p_t d\eta}. \quad (3.94)$$

Tal razão foi gerada para colisões próton-próton e próton-chumbo à $\sqrt{s} = 5.02$ TeV, para valores iguais de momentum transversal e rapidezas, *i.e.*, $k_t^{\pi^0} = k_t^\gamma$ e $\eta_{\pi^0} = \eta_\gamma$.

Os resultados para colisões próton-próton e próton-chumbo no LHC são ilustrados na figura 3.5.1, onde pode-se notar que a razão é menor que a unidade na maior parte do intervalo de rapidezas investigado aqui. Isto significa que a produção de píons neutros domina sobre a produção de

fótons, o que por sua vez está relacionado ao fato de que, no formalismo do CGC empregado, os fótons são irradiados pelo quark antes e depois da interação com o alvo. Os píons, por outro lado, podem ser gerados também pelos glúons, os quais são dominantes na região de rapidez medianas nas energias de LHC. Na região de rapidez muito grandes, contudo, para $\eta \sim 7$, as frações de momentum beira a unidade, de forma que a contribuição de quarks à seção de choque aumenta. Isso só enfatiza a importância da medida de observáveis em intervalos de rapidez frontais, para que se possa investigar profundamente a fatorização do CGC aqui empregada, bem como os diferentes modelos de saturação disponíveis na literatura.

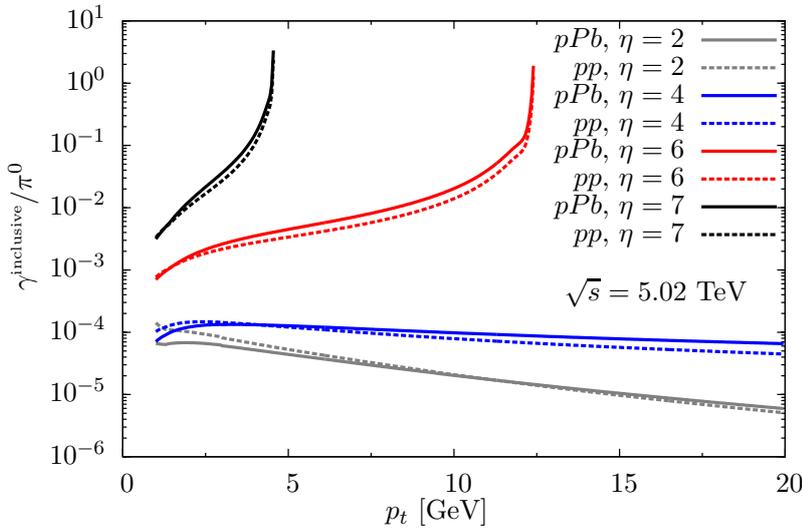


Figura 3.23: Razão entre a produção inclusiva de fótons e píons neutros a $\sqrt{s} = 5.02$ TeV de energia de centro de massa em colisões próton-próton e próton-chumbo, para distintos valores de pseudorapidez.

Além disso, analisando os presentes resultados com outros trabalhos envolvendo a física de CGC, *e.g.* (Jalilian-Marian & Rezaeian, 2012b, Rezaeian, 2013), e confrontando com previsões para as razões nucleares com base em PDFs nucleares (nPDFs) (Quiroga-Arias et al., 2010), nota-se que a física de saturação presente no formalismo do CGC prevê uma supressão maior da razão nuclear em rapidez frontais em comparação com a fatorização colinear presente nas nPDFs. Assim, observáveis medidos na região frontal podem ajudar a distinguir se realmente a física do CGC é necessária na descrição dos dados, em comparação com a física colinear empregada nas PDFs.

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Nesta tese estudamos os efeitos de saturação partônica em observáveis inclusivos medidos em experimentos de DIS e em colisões hadrônicas. Como usual na descrição de processos que envolvem a QCD, nos baseamos em teoremas de fatorização que separam as regiões de curto alcance (grandes escalas de momentum), onde técnicas perturbativas se aplicam, das regiões de longo alcance (pequenas escalas de momentum), na região não perturbativa, onde parametrizações ajustadas globalmente a dados de diversos processos se fazem necessárias. Mais especificamente, fizemos uso de duas fatorizações distintas para a seção de choque de produção inclusiva de hádrons, descritas no capítulo 3: a fatorização híbrida, combinando as evoluções DGLAP para os projéteis e BK-JIMWLK para a interação com o alvo; e a fatorização k_t , onde ambos os hádrons são tratados simetricamente e possuem uma distribuição não integrada (sobre o momentum transversal k_t) de pártons. Os efeitos de saturação são codificados na amplitude de espalhamento AGBS, apresentada no capítulo 3, a qual é oriunda das soluções assintóticas da equação de evolução BK por meio do método das ondas progressivas da QCD. Em particular, mostramos como tal modelo pode ser aplicado na descrição de dados de hádrons produzidos inclusivamente em colisores, com resultados satisfatórios. O modelo, assim como a equação BK no espaço de momentum, foi originalmente escrito em um espaço de Fourier ligeiramente diferente do usual, de forma que a descrição segundo o formalismo do CGC da equação (3.55) demandaria grande esforço numérico na realização das duas transformadas de Hankel envolvidas. Sendo assim, vemos que nosso método introduzido pela equação (3.60) poupa tempo considerável pois a amplitude é analítica em seu espaço de Fourier.

No estudo baseado na fatorização híbrida para a seção de choque (Basso et al., 2011), realizamos um ajuste global do modelo AGBS na descrição de dados para a função de estrutura do próton medidos em DIS no colisor HERA, além de dados da distribuição de momentum transversal para produção inclusiva de hádrons medidos no colisor RHIC. Esse ajuste simultâneo mostra que a maneira como escrevemos a amplitude AGBS para tratar ambos processos é válida, visto que tal ajuste concorda em muito com o também realizado para os dados de DIS somente. Como resultado do ajuste simultâneo, vemos que o modelo AGBS descreve bem a região de rapidez fronteiras ($y_h \geq 2$) para o campo de hádrons para ambas colisões $d+Au$ e $p+p$. Por outro lado, o ajuste com rapidez médias ($y_h \geq 1$) não é bom, o que se justifica pelo fato de que tanto o modelo AGBS quanto o formalismo de CGC utilizados são válidos para a região de altas energias onde os glúons de pequeno- x dominam e que é mapeada

nas regiões de rapidez fronteais dos detectores. Desta forma conclui-se que o ajuste simultâneo para tais rapidez é o melhor a ser usado para uso futuro do modelo na descrição de colisões hadrônicas.

O resultado para o melhor ajuste foi ainda usado para previsões de colisões a serem realizadas futuramente no programa do colisor LHC, $p + p$ e $p + Pb$ em energias de centro de massa de 14 e 8.8 TeV, respectivamente. O mesmo foi feito para a descrição dos recentes dados de LHC para a produção de hádrons em colisões $p + p$ à 7 TeV. Essa descrição foi surpreendentemente satisfatória, visto que tais dados do experimento CMS foram disponibilizados na forma de média sobre todo intervalo de rapidez $|\eta| < 2.4$ que o detector cobre. Assim sendo, os altos valores usados para os fatores K são consequência de incertezas do modelo aos dados referentes a rapidez mais centrais que estão sendo descritos, já que o mesmo considera espalhamentos envolvendo partículas com pequeno- x e portanto hádrons produzidos (detectados) em regiões de rapidez fronteais.

É importante notar ainda que, sendo responsáveis pela incorporação de efeitos de ordem seguinte a dominante não incluídos nos cálculos, os fatores K devem incluir efeitos de quarks no alvo. Tais efeitos não são considerados no formalismo de CGC, que trata o alvo como um condensado de glúons, basicamente. Assim, correções como espalhamentos qq e gq , advindas do modelo de pártons, devem ser adicionadas à equação (3.55) para a descrição de processos em rapidez mais centrais sob a ótica do modelo AGBS. Tais efeitos são menos importantes nas energias de LHC, como visto pelo decréscimo no valor do fator K na figura 3.3.1 conforme a energia aumenta. Isto porque em energias muito altas, mesmo em rapidez centrais, as correções de processos com quarks no alvo tem menor importância frente à crescente distribuição de glúons no mesmo. É importante notar que já existem na literatura correções inelásticas à fatorização híbrida (Alinoluk & Kovner, 2011), que de fato contribuem consideravelmente em rapidez médias e para grande p_t do hádron medido, ao passo que em regiões de rapidez fronteais tais contribuições são pequenas, como evidenciado em (Jalilian-Marian & Rezaeian, 2012a). Notemos ainda que tais correções estão incluídas nas correções de um laço calculadas para a produção inclusiva em (Beuf, 2012, Chirilli et al., 2012a,b), as quais ainda carecem de estudos fenomenológicos, muito embora sejam imprescindíveis na descrição de dados de LHC, principalmente na região de grande momentum transversal.

Embora consiga-se uma boa descrição dos dados para o campo de hádrons em colisões hadrônicas, um estudo da dependência no parâmetro de impacto sobre o modelo AGBS é importante para investigar os efeitos de possíveis correlações no plano transversal ao processo de espalhamento e aos dados de colisores. Um melhor entendimento dos parâmetros, que até o momento são médias sobre o parâmetro de impacto, pode melhorar o modelo, assim como sua aplicabilidade à processos exclusivos, tanto em DIS quanto em colisões hadrônicas com alta multiplicidade de eventos, como feito em (Tribedy & Venugopalan, 2011) para diferentes amplitudes de dipolos com base na fatorização k_T para a descrição das seções de choque.

Mais recentemente, estudamos fenomenologicamente a evolução de dipolos na descrição de dados para a produção inclusiva de hádrons nas energias de LHC (Basso et al., 2012). Neste caso, entretanto, fizemos uso de uma fatorização em momentum transversal para os hádrons em colisão. De novo a saturação partônica foi modelada por meio do modelo AGBS para a amplitude de dipolos,

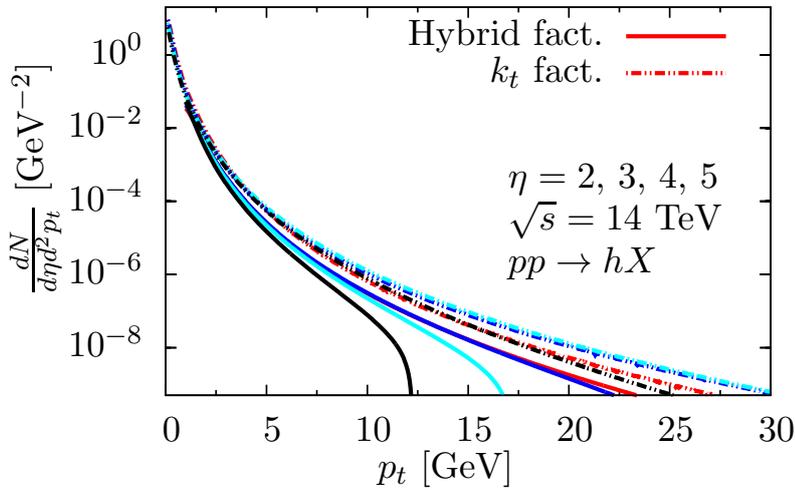


Figura 4.1: Predições para a produção inclusiva de hádrons na energia de centro de massa de 14 TeV para ambas fatorizações k_t e híbrida.

mas agora essa amplitude descreve simetricamente ambos os hádrons: quando a fração de momentum longitudinal é pequena em um párton do hádron A — de forma que este possa ser tratado no formalismo de dipolos, o párton do hádron B possui grande fração de momentum. Ainda assim, na região de rapidezes centrais onde os valores de $x_{1,2}$ são similares, consegue-se bons resultados, uma vez que a energia de centro de momentum é grande e os valores de $x_{1,2}$ são pequenos o bastante para justificar o uso da fatorização k_t . Isso foi realmente o que encontramos, pois vemos que na descrição do mesmo observável (a multiplicidade de hádrons produzidos em colisões próton-próton no LHC) encontramos valores distintos para os fatores K em ambas as fatorizações, como pode ser visto nas figuras 3.3.1 e 3.18(a). Isso deve-se em muito pela inclusão, nesta última análise, da região de pequeno momentum transversal ($p_t < 1$ GeV) dos hádrons produzidos, nas quais a maioria dos hádrons são produzidos. Ainda assim, cabe salientar que ambas as fatorizações são escritas para tratar distintas regiões cinemáticas de colisões: o formalismo híbrido para regiões de colisões frontais, para valores grandes de $|\eta|$ onde os alvos podem ser tratados com o CGC; e a fatorização k_t para valores de pseudorapidez $|\eta|$ mais centrais. A figura 4 ilustra bem as diferenças: enquanto a fatorização híbrida prevê a supressão de pártons em rapidezes frontais, propriedade essa ligada ao sombreamento em pequeno x , a fatorização k_t ignora esses efeitos de grandes rapidezes. Desta forma, uma análise detalhada da região de validade de cada fatorização se faz necessária no sentido de discriminar a presença ou não de efeitos de saturação no LHC, uma vez que tais fenômenos podem ser acessados experimentalmente em várias regiões dos detectores, dependendo muito dos cortes cinemáticos e observáveis utilizados.

Um fator a ser destacado nesta análise foi a boa descrição conseguida para os recentes dados de colisões próton-chumbo no LHC. Por se tratar claramente de um processo entre um projétil diluído e um alvo denso, é o observável ideal para se estudar os efeitos de altas densidades e saturação partônica. De fato foi para este tipo de processo que o formalismo de CGC foi desenvolvido, onde um sistema muito denso de pártons é sondado por um sistema de mais baixa densidade. Com respeito a esse processo, nota-se na figura 3.4.1 que o modelo AGBS juntamente com a fatorização k_t descreve muito bem a região de rapidez negativa contendo os efeitos de pequeno x do núcleo (e grande x do próton). A região de rapidez positiva, no entanto, ainda carece da inclusão de termos que descrevam os efeitos de

grande x do núcleo, dentre os quais cabe citar os efeitos EMC e movimento de Fermi. Cabe salientar que tais efeitos, destacados na figura 3.17, não estão presentes nas evoluções de pequeno x — ao menos não em LO, devendo ser introduzidos fenomenologicamente nos modelos. Talvez uma descrição em NLO, com possível entrelaçamento com evolução em virtualidade — do tipo DGLAP, possa melhor descrever essa região, sendo que para a distribuição em p_t e para grandes valores de p_t tal evolução em mais altas ordens se tornam imprescindíveis. Por outro lado, a região de pequeno x do núcleo é muito bem descrita por um modelo de saturação em LO, sinalizando que, no que diz respeito à evolução em η — para qual a evolução de dipolos é designada, a física de saturação é bem descrita em ordem dominante em teoria de perturbação.

Por fim, usamos o modelo AGBS para fazer previsões para as razões nucleares em energias de LHC. Para isto usamos ambos observáveis de produção de hádrons e de produção de fótons, sendo que o último possui como característica a não interação por meio da força forte com o meio hadrônico formado após a colisão, sendo assim uma fonte de informações direta da física contida imediatamente antes da colisão e desta forma é uma sonda muito importante para testes de física de saturação partônica em colisões de hádrons. Como resultado pudemos ver que a medida de tais razões em rapidez frontais será importante no que diz respeito à busca por evidências do CGC nas energias de LHC, pois nesta região cinemática as previsões da física colinear — que segue a evolução DGLAP — são muito distintas das previsões que fizemos baseadas no formalismo de CGC.

No que diz respeito ao modelo AGBS e suas limitações, notamos que o mesmo descreve bem os dados de produção inclusiva de dados em colisões próton-próton, mas não incorpora os efeitos de grande x presentes na região de fragmentação do núcleo, quando aplicado aos dados de colisões $p+A$. Uma maneira de tentar contornar esse problema seria o estudo de sua completa distribuição em momentum transversal. Assim, sendo AGBS um modelo para a distribuição de pártons em momentum transversal, pode ser interessante confrontar o modelo com dados de observáveis semi inclusivos. Neste caso pelo menos uma parte dos momenta transversal é medida no detector, de forma que se consegue uma informação maior sobre a distribuição em momentum transversal dos pártons que originaram tal medida. Ainda, é notório que as soluções da equação BK não incorporam ambas as dependências na fração de momentum x e no parâmetro de impacto da colisão, uma vez que a última é intimamente ligada a efeitos não perturbativos. Assim, seria interessante modelar tais dependências de forma que se pudesse descrever de forma mais realística o plano transversal das reações nucleares.

4.1 Perspectivas futuras

4.1.1 Ondas progressivas na presença de acoplamento dinâmico

A ideia principal deste trabalho foi a tentativa da modelagem de uma amplitude de dipolos baseada nas soluções assintóticas da equação BK com acoplamento dinâmico, com base na propriedade das ondas progressivas da QCD de altas densidades. Este trabalho foi desenvolvido em conjunto com um aluno de iniciação do GFP AE e os resultados preliminares estão contidos em seu trabalho de conclusão de curso de graduação (Rocha, 2011).

As ondas progressivas em NLO são obtidas de forma análoga ao que já foi mostrado no caso de acoplamento fixo. Agora, entretanto, o acoplamento depende das coordenadas transversais do dipolo em evolução. No espaço de momentum, e com $L \equiv \partial/\partial \ln k$, escreve-se

$$\bar{\alpha}(L) = \frac{\alpha_s(L)N_c}{\pi} = \frac{1}{bL}, \quad \text{com } b = \frac{11N_c - 2N_f}{12N_c}, \quad (4.1)$$

onde N_c e N_f denotam o número de cores e de sabores, respectivamente. Com isso reescreve-se a equação BK no espaço de momentum como

$$bL\partial_Y \tilde{N}(k, Y) = \chi(-\partial_L) \tilde{N}(k, Y) - \tilde{N}^2(k, Y). \quad (4.2)$$

A solução da parte linear de (4.2) pode ser escrita como uma superposição de ondas no espaço de Mellin, agora sobre o kernel bidimensional, (Ciafaloni et al., 1999)

$$N(L, Y) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \int \frac{d\omega}{2i\pi} N_0(\gamma, \omega) e^{-\gamma L + \omega Y + \frac{1}{b\omega} X(\gamma)}, \quad (4.3)$$

com a dependência no kernel escrita por meio de

$$X(\gamma) = \int_{\hat{\gamma}}^{\gamma} d\gamma' \chi(\gamma'), \quad (4.4)$$

sendo $\hat{\gamma}$ uma constante. A condição inicial $N_0(\gamma, \omega)$ depende agora em ambas as variáveis ω e γ , mas deve satisfazer as mesmas condições impostas ao caso de acoplamento fixo, a saber as propriedades de transparência de cor para grande k e saturação para pequenos valores de k .

Ao realizar-se a integração sobre ω em (4.3), nota-se o domínio de um ponto de sela em

$$\omega_s = \sqrt{\frac{X(\gamma)}{bY}}. \quad (4.5)$$

Com isso, a solução tem a forma

$$N(L, Y) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} N_0(\gamma) e^{-\gamma L + \sqrt{Y}\Omega(\gamma)}, \quad (4.6)$$

onde

$$\Omega(\gamma) = \sqrt{\frac{4X(\gamma)}{b}}. \quad (4.7)$$

A velocidade de grupo crítica – definida como o mínimo da velocidade de fase, é obtida como

$$v_g = \Omega(\gamma_c) / \Omega'(\gamma_c). \quad (4.8)$$

Entretanto, γ_c é determinado de uma forma que ainda depende na constante $\hat{\gamma}$. Assim, para obtermos uma velocidade de grupo que seja independente da escolha particular de $\hat{\gamma}$, fazemos $dv_g(\hat{\gamma})/d\hat{\gamma} = 0$. o que por sua vez implica $dv_g(\gamma_c)/d\gamma_c$, uma vez que a dependência da velocidade em $\hat{\gamma}$ se dá através de

γ_c . aplicando essa condição em (4.7), resulta

$$\frac{dv_g(\hat{\gamma})}{d\hat{\gamma}} = \frac{d(\Omega(\gamma_c)/\gamma_c)}{d\gamma_c} = 0 \Rightarrow v_g = \sqrt{\frac{2\chi(\gamma_c)}{b\gamma_c}}. \quad (4.9)$$

Desta forma a equação para o expoente crítico toma a forma

$$\gamma_c = \frac{\chi(\gamma_c)}{\chi'(\gamma_c)}, \quad (4.10)$$

ou seja, a mesma do caso com acoplamento fixo, que reduz-se ao valor $\gamma_c = 0.6275$ associado às soluções de saturação com base no kernel BFKL em ordem dominante. A técnica para selecionar as frentes de onda no regime assintótico $L \rightarrow \infty$ é semelhante a já mencionada no capítulo anterior, onde faz-se a expansão em série do kernel, usa-se o ansatz já mencionado (mais detalhes são encontrados no apêndice B) anteriormente, tomando-se os termos que contribuem igualmente na expressão para a solução. Feito isso pode-se mostrar as soluções da equação BK com acoplamento dinâmico, no espaço de momentum, são dadas por

$$N(k, Y) \stackrel{k \gg Q_s}{\sim} Y^{1/6} \text{Ai} \left[\left(\frac{\sqrt{2\gamma_c b \chi(\gamma_c)}}{\chi''(\gamma_c)} \right)^{1/3} \frac{\log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)}{Y^{1/6}} + \xi_1 \right] \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c}, \quad (4.11)$$

onde $\xi_1 = -2.338$ é o primeiro zero da função de Airi $\text{Ai}(\xi)$, e a escala de saturação tem a forma

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp \left(\sqrt{\frac{2\chi(\gamma_c)}{b\gamma_c}} \sqrt{Y} - \frac{3}{4} \left(\frac{\chi''(\gamma_c)}{\sqrt{2\gamma_c b \chi(\gamma_c)}} \right)^{1/3} \xi_1 Y^{1/6} \right). \quad (4.12)$$

Com a definição da forma funcional para a amplitude de dipolos na região assintótica de L , precisamos somente determinar sua interpolação com a forma

$$\tilde{N} \left(\frac{k}{Q_s(Y)}, Y \right) \stackrel{k \ll Q_s}{\sim} \log \left(\frac{Q_s(Y)}{k} \right), \quad (4.13)$$

esperada na região infravermelha, por argumentos de saturação da amplitude de espalhamento.

Testamos algumas maneiras de fazer uma interpolação analítica entre os dois comportamentos, evitando a definição por partes da amplitude de dipolos, as quais foram ajustadas aos dados de DIS em HERA.

Modelagem da amplitude de dipolos com acoplamento dinâmico

Abordamos duas modelagens distintas para a amplitude de dipolos: o que chamamos de modelo I usa a interpolação analítica por meio de uma eikonal, como já usado no modelo AGBS; enquanto que o modelo II usa apenas a parte diluída da amplitude.

Modelo I

Nesta modelagem usamos a mesma interpolação implementada pelo modelo AGBS, onde a amplitude assume a forma

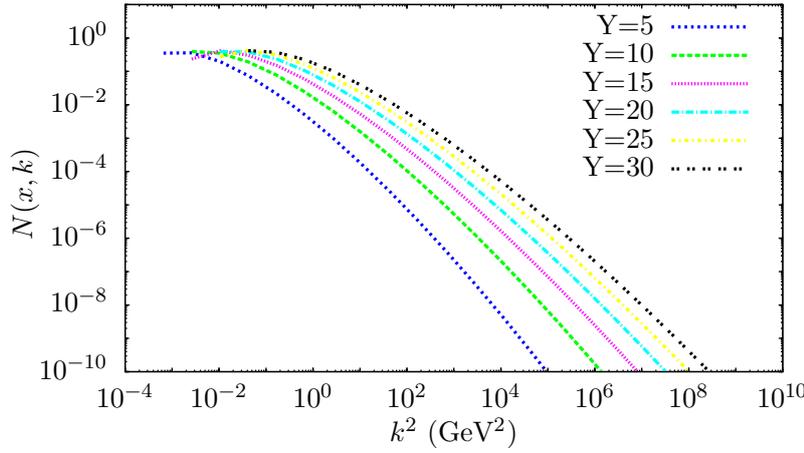


Figura 4.2: Modelo I para a amplitude de dipolos com acoplamento dinâmico (Rocha, 2011).

$$N(k, Y) = L_F(1 - e^{-T_{\text{dil}}}), \quad (4.14)$$

onde

$$T_{\text{dil}}(k, Y) = AY^{1/6} \text{Ai} \left[\left(\frac{\sqrt{2\gamma_c b \chi(\gamma_c)}}{\chi''(\gamma_c)} \right)^{1/3} \frac{\log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)}{Y^{1/6}} + \xi_1 \right] \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c}, \quad (4.15)$$

onde A é uma constante a ser ajustada,

$$L_F = \ln \left[\frac{k}{Q_s(Y)} + \frac{Q_s(Y)}{k} \right] + 1 \quad (4.16)$$

introduz a dependência em $\ln k/Q_s$ esperada na região infravermelha. A escala de saturação foi estabelecida como a parte dominante de (4.12), ou seja,

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 e^{\lambda\sqrt{Y}}, \quad (4.17)$$

onde

$$\lambda \equiv v_c = \sqrt{\frac{2\chi(\gamma_c)}{b\gamma_c}}. \quad (4.18)$$

A forma funcional de tal modelagem é mostrada na figura 4.2. Nesse caso a amplitude é bem definida por uma região de momentum grande, com exceção para valores menores que $k \sim 10^{-3} - 10^{-4}$.

Modelo II

Como uma alternativa ao modelo I, testamos também o uso somente da parte diluída da amplitude, advinda da equação (4.11). Assim, fizemos

$$N(k, Y) = T_{\text{dil}}, \quad (4.19)$$

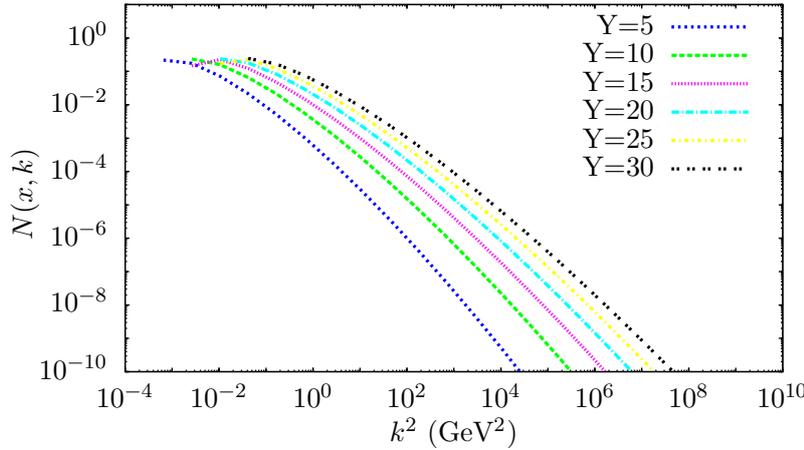


Figura 4.3: Modelo II para a amplitude de dipolos com acoplamento dinâmico (Rocha, 2011).

com

$$T_{\text{dil}}(k, Y) = AY^{1/6} \text{Ai} \left[\left(\frac{\sqrt{2\gamma_c b \chi(\gamma_c)}}{\chi''(\gamma_c)} \right)^{1/3} \frac{\log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)}{Y^{1/6}} + \xi_1 \right] \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c}. \quad (4.20)$$

Uma vez que os dados combinados de HERA (das colaborações ZEUS e H1) para a função de estrutura do próton F_2^p são distribuídos em um intervalo que começa em valores moderados de virtualidade ($Q^2 \geq 0.1$), as escalas de momentum provadas não estão em uma região profundamente dominada pela região infravermelha, de forma que a análise de tal amplitude ainda parece é válida. Deve-se notar, entretanto, que isso só serve como forma de comparação, e que para uso fenomenológico em colisões hadrônicas a parte não perturbativa deve ser introduzida no modelo.

Na figura 4.3 ilustramos este modelo para a amplitude de dipolos, onde fica claro que na região de pequenas escalas de momentum ($k \lesssim 10^{-2}$), a amplitude não é bem comportada. Contudo, para escalas de momentum maiores que 0.1 GeV, as quais são provadas nos dados de HERA testados, o modelo é aceitável.

Resultados do ajuste

Para o teste contra os dados de DIS em HERA (Aaron, 2010) usamos como observável a função de estrutura do próton no espaço de momentum

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y), \quad (4.21)$$

na seguinte região cinemática:

$$\begin{aligned} x &\leq 0.01, \\ 0.1 &\leq Q^2 \leq 150 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Como no ajuste do modelo AGBS, mantivemos fixo $\gamma_c = 0.6275$, enquanto que os parâmetros R_p , λ , $\chi''(\gamma_c)$, k_0^2 , e A foram deixados livres. Os resultados do ajuste estão ilustrados na figura 4.4 (usando o modelo I), enquanto que na tabela 4.1 são mostrados os melhores valores para os parâmetros nas duas modelagens. Percebe-se que, ainda que os ajustes sejam razoáveis, com bom χ^2 , nenhum dos dois modelos resulta em parâmetros desejáveis para a amplitude em NLO. Assim fica claro que uma análise de termos subdominantes na formação do padrão de ondas progressivas deve ser explorado

	Modelo I	Modelo II
$\chi^2/\text{d.o.f.}$	1.107	1.369
$k_0^2 (\times 10^{-3})$	0.021 ± 0.004	0.127 ± 0.003
λ	1.123 ± 0.007	1.305 ± 0.007
$\chi''(\gamma_c)$	2.427 ± 0.032	1.501 ± 0.003
$R_p(\text{GeV}^{-1})$	10.00 ± 0.992	8.423 ± 0.062
A	1.077 ± 0.015	1.229 ± 0.018

Tabela 4.1: Parâmetros extraídos do ajuste dos modelos I e II para a amplitude dipolos com acoplamento dinâmico à função de estrutura do próton F_2^p de HERA (dados de H1 e ZEUS combinados (Aaron, 2010)).

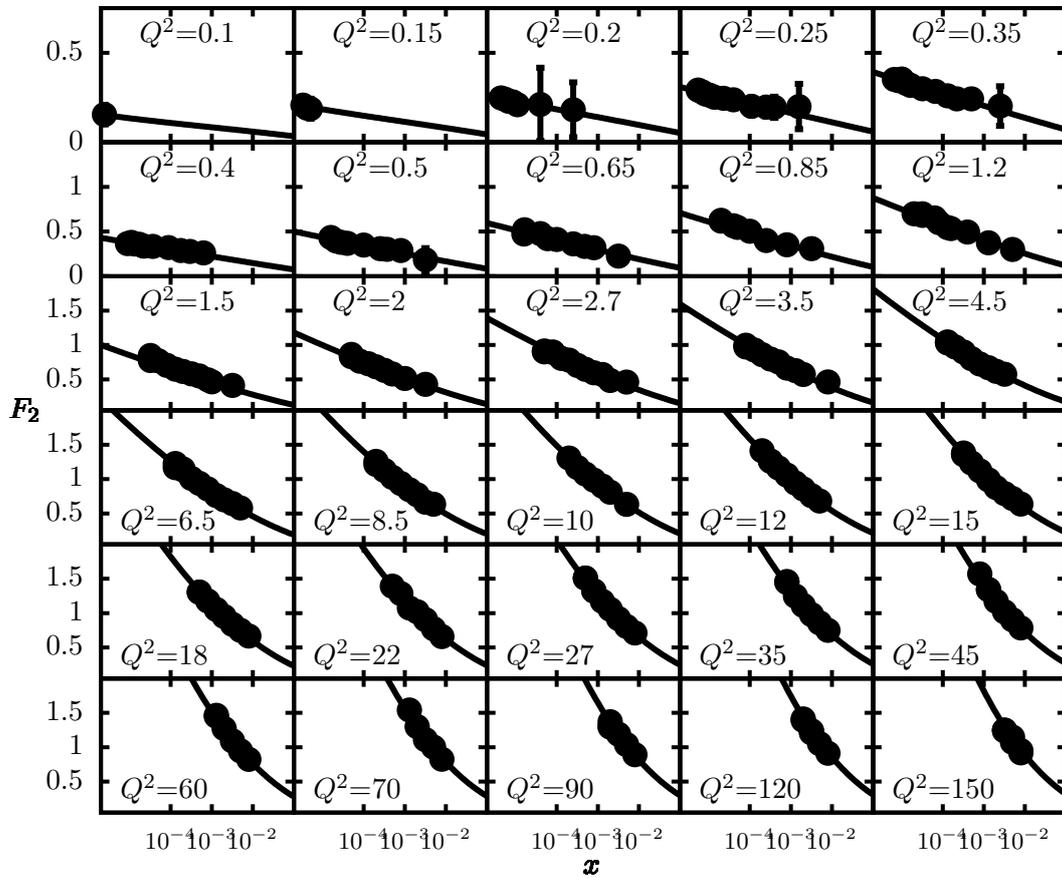


Figura 4.4: Resultado do ajuste do Modelo I para a amplitude de dipolos com acoplamento dinâmico aos de DIS para a função de estrutura do próton medidos em HERA (Aaron, 2010).

a fim de se obter uma modelagem consistente com os observáveis. Cabe salientar que foi provado recentemente (Beuf & Peschanski, 2007) a independência na definição das escalas de fatorização e renormalização — que entram na definição do acoplamento dinâmico na evolução de dipolos — na

formação do padrão de ondas progressivas. Contudo, o comportamento assintótico de ondas progressivas não deve ser atingido em energias de colisores atuais e futuros, de forma que um estudo detalhado da formação do padrão, como por exemplo a estrutura do interior da frente de onda progressiva e sua dependência em escalas de renormalização e fatorização, deve ser realizado a fim de se explorar fenomenologicamente o padrão de ondas progressivas da QCD com acoplamento dinâmico.

Apêndice A

A função de estrutura do próton no espaço de momentum

Vamos mostrar aqui que a função de estrutura do próton é dada, no espaço de momentum, por

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y), \quad (\text{A.1})$$

onde a função de onda do fóton é agora expressa no espaço de momentum

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 &= \sum_q \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \\ &\times \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \right. \\ &\left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{4\bar{Q}_q^4 + 2\bar{Q}_q^2 k^2 + k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

com $\bar{Q}_q^2 = z(1-z)Q^2 + m_q^2$.

A função de estrutura do próton pode ser escrita, em termos das seções de choque longitudinal e transversal, como

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \left[\sigma_T^{\gamma^* p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^* p}(x, Q^2) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde os índices T, L indicam as componentes transversais e longitudinais, respectivamente, da seção de choque fóton-próton. Trabalhando no formalismo de dipolos estas seções de choque assumem formas fatorizadas

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(Q^2, Y) = \int d^2 r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{\text{dip}}^{\gamma^* p}(r, Y), \quad (\text{A.4})$$

onde r é a separação transversal do par $q\bar{q}$, z é a fração de momento do fóton portada pelo quark e $\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)$ são as componentes transversais e longitudinais, respectivamente, da função de onda do fóton. A quantidade $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^* p}(r, Y)$ é a seção de choque dipolo-próton, a qual pode ser escrita em função

da amplitude de espalhamento dipolo-próton através de

$$\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 T(r, Y), \quad (\text{A.5})$$

com R_p designando o raio do próton, assumido como homogêneo.

As funções de onda do fóton $\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)$, que descrevem a configuração do par $q\bar{q}$, são dadas por (Nikolaev & Zakharov, 1991)

$$|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (\text{A.6})$$

$$|\Psi_L(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \}, \quad (\text{A.7})$$

onde m_q é a massa dos quarks e $K_{0,1}$ são as funções de McDonald de ordem zero e um, respectivamente. Com tudo isto escrevemos:

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi \alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz [|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 + |\Psi_L(r, z; Q^2)|^2] T(r, Y). \quad (\text{A.8})$$

Definindo

$$\phi(r, z) = \phi_T(r, z) + \phi_L(r, z) \quad \text{com} \quad \phi_{T,L}(r, z) = |\Psi_{T,L}(r, z)|^2 \quad (\text{A.9})$$

para facilitar a notação, temos

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi \alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz \phi(r, z) T(r, Y), \quad (\text{A.10})$$

onde não explicitamos a dependência em Q^2 nas funções de onda do fóton, embora ela esteja presente.

Seja agora a seguinte Transformada de Fourier

$$T(r, Y) = r^2 \int \frac{d^2k}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{T}(k, Y) = r^2 \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{T}(k, Y), \quad (\text{A.11})$$

a qual tem por inversa

$$\tilde{T}(k, Y) = \int \frac{d^2r}{2\pi r^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) = \int \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y). \quad (\text{A.12})$$

Da mesma forma, para $\phi(r, z)$ definimos a Transformada de Fourier

$$\phi(r, z) = \frac{1}{r^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(k, z) = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{\phi}(k, z), \quad (\text{A.13})$$

para a qual vale

$$\tilde{\phi}(k, z) = \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} r^2 \phi(r, z) = \int_0^\infty \frac{dr}{2\pi} r^3 J_0(kr) \phi(r, z). \quad (\text{A.14})$$

Com estas transformadas, F_2 se torna

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz \frac{1}{r^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(k, z) r^2 \int \frac{d^2k'}{2\pi} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \tilde{T}(k', Y) \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{(2\pi)^2\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2k \int d^2k' \tilde{\phi}(k, z) \tilde{T}(k', Y) \int d^2r e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{(2\pi)^2\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2k \int d^2k' \tilde{\phi}(k, z) \tilde{T}(k', Y) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2k \tilde{\phi}(k, z) \tilde{T}(k, Y).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Mas de (A.14) resulta que

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \phi(r, z) \tilde{T}(k, Y) \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \phi(r, z).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

substituindo (A.6) e (A.7) nesta relação, temos uma expressão para F_2 no espaço de momentum. Assim,

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c \alpha_{em}}{\alpha_{em} 2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \\
&\quad \times \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) + 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \\
&= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_1^2(\bar{Q}_q r) \right. \\
&\quad \left. + [Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_0^2(\bar{Q}_q r) \right\}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

As integrais em r acima são tabeladas e temos como resultado

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \frac{2}{3\bar{Q}_q^2} {}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + [Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \left[\frac{1}{3\bar{Q}_q^4} {}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) - \frac{2k^2}{15\bar{Q}_q^6} {}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{A.18}$$

onde ${}_2F_1$ são as funções hipergeométricas. Estas funções podem ser simplificadas se expressas em termos de funções elementares, fornecendo as relações

$${}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{4z(1-z)} \left[1 - \frac{1-2z}{\sqrt{z(1-z)}} \arcsin(\sqrt{z}) \right] \quad (\text{A.19})$$

$${}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{16z(1-z)^2} \left[1 + 2z - \frac{1-4z}{\sqrt{z(1-z)}} \arcsin(\sqrt{z}) \right] \quad (\text{A.20})$$

$${}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; z\right) = \frac{15}{64z^2(1-z)^2} \left[\frac{3-8z+8z^2}{\sqrt{z(1-z)}} \arcsin(\sqrt{z}) - 3(1-2z) \right]. \quad (\text{A.21})$$

No caso, $z = -k^2/4\bar{Q}_q^2$. Vamos resolver termo a termo as expressões acima, quando será útil a relação $\arcsin ix = i \operatorname{arcsinh} x$.

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{3}{16\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[1 + 2\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) - \frac{1-4\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} \right. \\ &\quad \left. \times \arcsin\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}}\right) \right] \\ &= \frac{-3\bar{Q}_q^2}{4k^2\left(\frac{k^2+4\bar{Q}_q^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[1 - \frac{k^2}{2\bar{Q}_q^2} - \frac{\frac{k^2+\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2}}{\frac{i}{4\bar{Q}_q^2}\sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} i \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \\ &= \frac{48\bar{Q}_q^6}{4k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{4(k^2+\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2-2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right]. \end{aligned}$$

Isto implica em

$$\frac{2}{3\bar{Q}_q^2} {}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) = \frac{16\bar{Q}_q^4}{2k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{4(k^2+\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2-2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right], \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{3}{4\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)} \left[1 - \frac{1-2\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} \arcsin\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}}\right) \right] \\ &= \frac{-3\bar{Q}_q^2}{k^2\left(\frac{4\bar{Q}_q^2+k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)} \left[1 - \frac{1+\frac{k^2}{2\bar{Q}_q^2}}{i\sqrt{\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\left(\frac{4\bar{Q}_q^2+k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} i \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \\ &= \frac{12\bar{Q}_q^4}{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)} \left[\frac{2(k^2+2\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3\bar{Q}_q^4} {}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{4\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^4 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{2(k^2 + 2\bar{Q}_q^2)(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - (k^2 + 4\bar{Q}_q^2) \right] \\
&= \frac{8\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{k^4 + 6\bar{Q}_q^2 k^2 + 8\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2 + 4\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \tag{A.23} \\
&= \frac{8\bar{Q}_q^4}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{2k^4 + 12\bar{Q}_q^2 k^2 + 16\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2 + 4\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{15}{64 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2 \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[\frac{3 + 8 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) + 8 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} \operatorname{arcsin}\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(1 - 2 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)\right) \right] \\
&= \frac{15\bar{Q}_q^4}{4k^4 \left(\frac{k^2 + 4\bar{Q}_q^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[\frac{\frac{3 \cdot 16\bar{Q}_q^4 + 8 \cdot 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 8k^4}{16\bar{Q}_q^4}}{\frac{1}{4\bar{Q}_q^2} \sqrt{k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsin}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(1 + \left(\frac{k^2}{2\bar{Q}_q^2}\right)\right) \right] \\
&= \frac{15\bar{Q}_q^8}{\frac{k^4}{4} (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{12\bar{Q}_q^4 + 8\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(\frac{k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2}\right) \right].
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{2k^2}{15\bar{Q}_q^6} {}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{8\bar{Q}_q^2}{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{12\bar{Q}_q^4 + 8\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3\left(\frac{k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2}\right) \right] \\
&= \frac{8\bar{Q}_q^4}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{24\bar{Q}_q^4 + 16\bar{Q}_q^2 k^2 + 4k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3k^2 + 6\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} \right].
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Subtraindo (A.23) e (A.24) obtemos como resultado

$$\begin{aligned}
&\frac{8\bar{Q}_q^4}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \\
&\frac{16\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[\frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right].
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Substituindo este resultado, juntamente com (A.22) na expressão (A.18) para a função de estrutura do próton, esta se torna

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q \frac{16\bar{Q}_q^4}{2k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
&\quad \times \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \\
&\quad \left. + \frac{Q^2 z^2(1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \right\} \\
&= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \sum_q \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{dk}{k} \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
&\quad \times \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \\
&\quad \left. + \frac{Q^2 z^2(1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Comparando esta última com (A.1), vemos que são idênticas e visualizamos a função de onda do fóton no espaço de momentum como

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 = & \sum_q \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
 & \times \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \\
 & \left. + \frac{Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

a qual é igual a expressão (A.2), o que completa a prova.

Apêndice B

O Método de Ondas Progressivas da QCD e as Soluções Assintóticas da Equação BK

Buscamos aqui mostrar que, assintoticamente, a equação de evolução BK possui soluções que obedecem a propriedade do escalamento geométrico. Faremos isto usando o método das ondas progressivas, devido à Munier e Peschanski (Munier & Peschanski, 2004a,b), no qual as soluções assintóticas de equações não-lineares em $u(x, t)$ adquirem a forma $u(x, t) \rightarrow u(x - vt)$, quando t é grande. Para tanto, devemos trabalhar com a equação BK no espaço de momentum, que pode ser obtida de sua versão no espaço de coordenadas via transformada de Fourier (3.6). Assim, pode-se mostrar que (Kovchegov, 2000, Mueller, 1994)

$$\partial_Y \tilde{T} = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) - \bar{\alpha} \tilde{T}^2, \quad (\text{B.1})$$

onde $L = \log(k^2/k_0^2)$, com k_0 sendo uma escala de referência de baixo momentum, e

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma) \quad (\text{B.2})$$

sendo o autovalor do núcleo da equação BFKL (Balitsky & Lipatov, 1978, Fadin et al., 1975, Kuraev et al., 1976, 1977), com $\psi(\gamma) = \Gamma'(\gamma)/\Gamma(\gamma)$. Trabalhando com uma aproximação de ponto de sela, frequentemente chamada de aproximação difusiva, expandimos (B.2) até segunda ordem em torno de $\gamma = 1/2$ transformando o complicado operador diferencial em (B.1) em um operador de segunda ordem

$$\begin{aligned} \chi(-\partial_L) &= \chi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\chi''\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \left(\partial_L + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde $\omega = \chi(\frac{1}{2})$ e $D = \chi''(\frac{1}{2})$. Definindo $\bar{\gamma} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8\omega}{D}}$ e fazendo a troca de variáveis

$$t = \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 Y, \quad x = (1 - \bar{\gamma}) \left(L + \frac{\bar{\alpha}D}{2} Y \right) \quad (\text{B.4})$$

podem-se mostrar que a equação BK na aproximação difusiva recai na equação F-KPP, devida a Fisher, Kolmogorov, Petrovsky e Piscounov (Fisher, 1937, Kolmogorov et al., 1937) e muito estudada na física estatística. Vejamos como isso se dá, atacando termo a termo a equação

$$\partial_Y \tilde{T} = \bar{\alpha} \left[\omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4} \right) \right] \tilde{T} - \bar{\alpha} \tilde{T}^2, \quad (\text{B.5})$$

tendo em vista a transformação (B.4). Para o termo a esquerda, temos:

$$\begin{aligned} \partial_Y \tilde{T} &\equiv \frac{\partial}{\partial Y} \tilde{T} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} \\ &= \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_t \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Para o primeiro termo à direita devemos levar em conta que

$$\begin{aligned} \partial_L \tilde{T} &\equiv \frac{\partial}{\partial L} \tilde{T} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial L} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L} = (1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T}, \\ \partial_L^2 \tilde{T} &= \partial_L (\partial_L \tilde{T}) = (1 - \bar{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{T} = (1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T}, \end{aligned}$$

de forma que, para tal termo, temos

$$\bar{\alpha} \left[\omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4} \right) \right] \tilde{T} = \bar{\alpha} \left\{ \omega \tilde{T} + \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T} + \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T} + \frac{D}{8} \tilde{T} \right\}. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (B.6) e (B.7) em (B.5), resulta

$$\frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_t \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T} = \bar{\alpha} \left(\omega + \frac{D}{8} \right) \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T} - \bar{\alpha} \tilde{T}^2.$$

Da expressão para $\bar{\gamma}$ vista anteriormente, temos que $\omega + D/8 = D(1 - \bar{\gamma})^2/2$. Logo, esta última toma a forma

$$\frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_t \tilde{T} = \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T} + \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \tilde{T} - \tilde{T}^2,$$

a qual, se multiplicada por $4/D^2(1 - \bar{\gamma})^4$, se torna

$$\partial_t \left(\frac{2}{D(1 - \bar{\gamma})^2} \tilde{T} \right) = \partial_x^2 \left(\frac{2}{D(1 - \bar{\gamma})^2} \tilde{T} \right) + \frac{2}{D(1 - \bar{\gamma})^2} \tilde{T} - \frac{4}{D^2(1 - \bar{\gamma})^4} \tilde{T}^2, \quad (\text{B.8})$$

ou

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t) - u^2(x, t), \quad (\text{B.9})$$

onde

$$u(x, t) = \frac{2}{D(1-\bar{\gamma})^2} \tilde{T}(L, Y) = \frac{2}{D(1-\bar{\gamma})^2} \tilde{T} \left(\frac{x}{1-\bar{\gamma}} - \frac{t}{(1-\bar{\gamma})^2}, \frac{2t}{\bar{\alpha}D(1-\bar{\gamma})^2} \right). \quad (\text{B.10})$$

A equação (B.9) não é nada mais do que a equação F-KPP, a qual descreve processos de reação e difusão na aproximação de campo médio, sendo governada por três termos: um termo de difusão ($\partial_x^2 u$), responsável pela disseminação de partículas no espaço, um termo de crescimento (u), que descreve a criação de partículas e um termo não-linear de amortecimento ($-u^2$), cuja função é descrever a destruição de partículas, ou melhor, a saturação da solução da equação, $u(x, t)$. Em particular, na ausência deste termo a equação é restrita a sua parte linear e leva a um crescimento exponencial da solução com o tempo aliado a sua difusão no espaço. Esta é justamente a característica do núcleo da equação BFKL que governa a parte linear da equação BK.

Equações do tipo F-KPP são conhecidas por admitirem as chamadas soluções de ondas progressivas, cuja existência é devida ao termo de amortecimento não-linear, enquanto que algumas de suas propriedades assintóticas, como por exemplo a velocidade e a forma da frente de onda, são determinadas pela equação linearizada sobre o estado instável $u = 0$, como veremos. Se escolhermos uma condição inicial no tempo $t = t_0$ tal que $u(x, t_0)$ decresce suavemente de 1 a 0 quando x vai de $-\infty$ a $+\infty$ e tem o comportamento assintótico

$$u(x, t_0) \stackrel{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\beta x}, \quad (\text{B.11})$$

pode-se provar, como fez Bramson em (Bramson, 1983), que a equação F-KPP admite as soluções de ondas progressivas para grandes tempos. Isto significa que existe uma função de uma variável f tal que

$$u(x, t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} f(x - m_\beta(t)) \quad (\text{B.12})$$

tem um comportamento uniforme em x . A função $m_\beta(t)$ depende da condição inicial:

$$\begin{aligned} m_\beta(t) &= c(\beta) + \mathcal{O}(1) && \text{para } \beta < \beta_c, \\ m_\beta(t) &= 2t - \frac{1}{2} \log t + \mathcal{O}(1) && \text{para } \beta = \beta_c, \\ m_\beta(t) &= 2t - \frac{3}{2} \log t + \mathcal{O}(1) && \text{para } \beta > \beta_c, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

onde $c(\beta) = \beta + 1/\beta$, sendo que o valor crítico $\beta_c = 1$ corresponde ao mínimo de $c(\beta)$. Podemos notar que para $\beta \geq \beta_c$ a velocidade da frente de onda progressiva $dm(\beta)/dt$ independe do valor de β .

Podemos mostrar ainda que as condições iniciais da QCD são da forma da equação (B.11). Para um valor inicial $Y = Y_0$, ao qual corresponde $t_0 = \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1-\bar{\gamma})^2 Y_0$ de acordo com (B.4), e para L grande, que implica x grande, o comportamento de \tilde{T} é dado pela QCD perturbativa. Assim, tomando o limite assintótico em x com t fixo, temos, de acordo com (B.11):

$$\tilde{T}(L, Y_0) \propto e^{-\beta(1-\bar{\gamma})L}. \quad (\text{B.14})$$

Comparando (B.4) e (B.11), tomamos $\beta = \gamma_0/(1 - \bar{\gamma})$ de forma que, como $L = \log(k^2/k_0^2)$ esta última se torna

$$\tilde{T}(L, Y_0) \propto e^{-\gamma_0 \log k^2} = k^{-2\gamma_0}. \quad (\text{B.15})$$

Tomando $\gamma_0 = 1$ nesta relação obtemos a conhecida propriedade da transparência de cor da QCD. Particularmente, $u(+\infty, t_0) \propto \tilde{T}(L \rightarrow +\infty, Y_0) = 0$. Já a condição $u(-\infty, t_0) = 1$, imposta à solução para a ocorrência das ondas progressivas, implica em $\tilde{T}(L \rightarrow -\infty, Y_0) = D(1 - \bar{\gamma})^2/2$, quando $k/k_0 \rightarrow 0$. Este limite infravermelho não permite o uso de QCD perturbativa e portanto a dinâmica é desconhecida em tal região. No entanto, podemos esperar um limite superior em \tilde{T} como forma de impor unitariedade à esta.

Como visto nas referências (Munier & Peschanski, 2004a,b), a formação de ondas progressivas nas soluções de equações não lineares é uma propriedade muito mais geral, podendo ocorrer inclusive para equações não lineares com núcleos mais complicados do que $\partial_x^2 + 1$. Desta forma, o surgimento de ondas progressivas depende somente de que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- $u = 0$ seja um ponto fixo instável da equação e $u = 1$ um ponto fixo estável;
- a condição inicial deve decrescer mais rapidamente que $e^{-\gamma_c x}$, *i.e.*, se $u_0(x) \sim e^{-\gamma_0 x}$, queremos $\gamma_0 > \gamma_c$;
- a equação de evolução linearizada admita superposição de ondas como solução:

$$u(x, t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) e^{-\gamma x + \omega(\gamma)t} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) e^{-\gamma(x_{wf} + vt) + \omega(\gamma)t}, \quad (\text{B.16})$$

onde $\omega(\gamma)$ é a transformada de Mellin do núcleo linear da equação e $x_{wf} = x - vt$ é a posição da frente de onda.

Ocorre então que o termo não linear força a solução a atingir um comportamento crítico correspondente as ondas progressivas após um longo tempo

$$u(x, t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma_c x_{wf}}. \quad (\text{B.17})$$

O expoente crítico γ_c corresponde a uma onda parcial que tenha a velocidade de fase mínima igual à velocidade de grupo do pacote de ondas

$$v_c = \frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c} = \partial_\gamma \omega(\gamma)|_{\gamma_c}. \quad (\text{B.18})$$

Podemos entender qualitativamente como ocorre a seleção desta velocidade v_c analisando a figura B e observando as condições expostas acima para a formação das ondas progressivas. A frente de onda em um tempo inicial (à esquerda na figura) captura as principais propriedades da dependência espacial: saturação (primeira condição) seguida de uma queda com declividade dada pelo expoente crítico γ_c e logo após uma queda mais abrupta com declividade dada por γ_0 (segunda condição). Após um

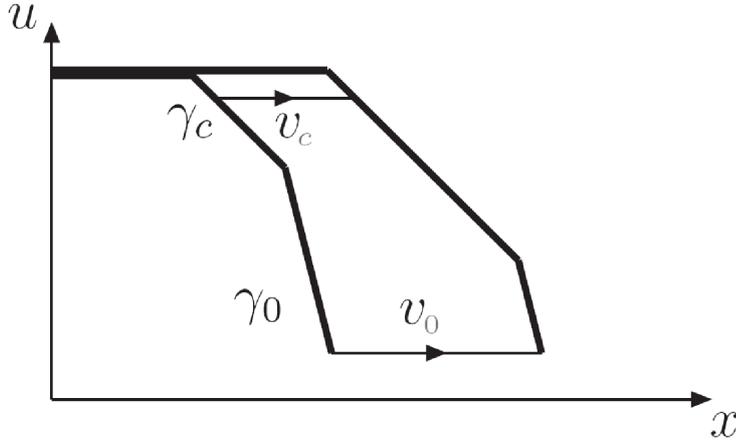


Figura B.1: Evolução de uma frente de onda no tempo (ou rapidez) e a formação de uma onda progressiva.

passo na evolução, no tempo ou em rapidez, cada uma das frentes decrescentes deverá evoluir com sua própria velocidade (tais frentes estão no regime diluto de forma que podemos usar a terceira condição). Como resultado, vemos que a região alcançada, nas frentes, pelo expoente crítico é cada vez maior, o que corresponde que estas frentes viajam com velocidade v_c .

É importante analisar também o comportamento subassintótico das soluções, para saber como a frente de onda atinge o seu comportamento assintótico como função do tempo. Para tanto usamos o seguinte ansatz para a solução na vizinhança da frente de onda, o qual se mostrou relevante no caso de equações do tipo F-KPP (Brunet & Derrida, 1997)

$$u(x, t) \stackrel{t \text{ grande}}{\approx} t^\alpha G\left(\frac{x_{wf} + c(t)}{t^\alpha}\right) e^{-\gamma c(x_{wf} + c(t))}, \quad (\text{B.19})$$

onde $c(t)$ é uma função subdominante do tempo e o fator t^α descreve uma evolução do tipo difusiva. O fator $t^\alpha G$ representa uma correção subassintótica à forma da frente dada por (B.17) em grandes tempos, tendo como propriedade chave o fato de ser, também, uma solução da equação linearizada para algum α e $c(t)$ a serem determinados. Podemos notar ainda que quando $u(x, t)$ atinge o comportamento assintótico de onda progressiva pura ela depende somente de $x_{wf} + c(t)$, de forma que $G(z)$ deve ser nulo para $z \rightarrow 0$.

Vamos então aplicar o formalismo exposto acima à equação de evolução BK com acoplamento fixo. A parte linear de (B.1) é solucionada pela superposição de ondas (B.16),

$$\tilde{T}(k, Y) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \tilde{T}_0(\gamma) e^{-\gamma L + \bar{\alpha}\chi(\gamma)Y}, \quad (\text{B.20})$$

onde a rapidez Y é a variável de evolução a faz assim o papel do tempo t , enquanto que $L = \log(k^2/k_0^2)$ faz o papel da coordenada espacial x . Comparando as equações (B.20) e (B.17), vemos que a relação de dispersão toma a forma

$$\omega(\gamma) = \bar{\alpha}\chi(\gamma), \quad (\text{B.21})$$

a qual, quando substituída em (B.18) fornece uma equação implícita para γ_c ,

$$\gamma_c \chi'(\gamma) = \chi(\gamma). \quad (\text{B.22})$$

Em aproximação de ordem dominante para o núcleo da equação BFKL, temos que $\gamma_c = 0.6275\dots$. Vimos anteriormente que a condição inicial para amplitude $\tilde{T}(L, Y_0)$ implica em $\gamma_0 = 1$ de forma que estamos na região $\gamma_c < \gamma_0$, justamente a região necessária para a formação das ondas progressivas.

Para estudar a formação da frente de onda usaremos a aproximação difusiva da equação BK, para a qual mostramos a equivalência com a equação F-KPP. Entretanto, agora usaremos a expansão em séries para $\chi(-\partial_L)$ em torno de γ_c até segunda ordem, *i.e.*,

$$\chi(-\partial_L) = \chi(\gamma_c) + (-\partial_L - \gamma_c 1) \chi'(\gamma_c) + \frac{1}{2} (-\partial_L - \gamma_c 1)^2 \chi''(\gamma_c). \quad (\text{B.23})$$

Com esta aproximação, a equação BK toma a forma

$$\partial_Y \tilde{T} = -v_c \partial_L \tilde{T} + \frac{1}{2} \bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) (-\partial_L - \gamma_c 1)^2 \tilde{T} - \bar{\alpha} \tilde{T}^2, \quad (\text{B.24})$$

a qual é equivalente, como mostramos anteriormente, a equação F-KPP.

Usaremos agora o ansatz (B.19) como solução da parte linear da equação acima nas proximidades da frente de onda. Para tanto, faremos a troca de variáveis: $u = \tilde{T}$, $x = L$ e $t = Y$ de forma que,

$$z = \frac{x_{wf} + c(t)}{t^\alpha} = \frac{(L - v_c Y) + c(Y)}{Y^\alpha}. \quad (\text{B.25})$$

Assim o termo à esquerda de (B.24) é dado por

$$\begin{aligned} \partial_Y \tilde{T} &= \partial_L \left[G(z) Y^\alpha e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))} \right] \\ &= \left\{ G'(z) \frac{\partial z}{\partial Y} Y^\alpha + G(z) \alpha Y^{\alpha-1} + G(z) Y^\alpha [-\gamma_c(\dot{c}(Y) - v_c)] \right\} e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\partial z}{\partial Y} = \partial_Y [(L - v_c Y + c(Y)) Y^{-\alpha}] = -\alpha z Y^{-1} + \dot{c}(Y) Y^{-\alpha} - v_c Y^{-\alpha},$$

tal que

$$\begin{aligned} \partial_Y \tilde{T} &= \left\{ G'(z) [-\alpha z Y^{\alpha-1} + \dot{c}(Y) - v_c] + G(z) Y^\alpha [\alpha Y^{-1} - \gamma_c(\dot{c}(Y) - v_c)] \right\} \\ &\quad \times e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Para o lado direito de (B.24), precisamos de:

$$\begin{aligned} \partial_L \tilde{T} &= [G'(z) - \gamma_c Y^\alpha G(z)] e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))} \\ \partial_L^2 \tilde{T} &= [G''(z) Y^{-\alpha} - 2\gamma_c G'(z) + \gamma_c^2 Y^\alpha G(z)] e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))}. \end{aligned}$$

Logo, (B.24) se torna

$$G'(z) [-\alpha z Y^{\alpha-1} + \dot{c}(Y) - v_c] + G(z) Y^\alpha [\alpha Y^{-1} - \gamma_c (\dot{c}(Y) - v_c)] = -v_c [G'(z) - \gamma_c Y^\alpha G(z)] \\ + \frac{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}{2} [G''(z) Y^{-\alpha} - 2\gamma_c G'(z) + \gamma_c^2 Y^\alpha G(z) + 2\gamma_c (G'(z) - \gamma_c Y^\alpha G(z)) + \gamma_c^2 Y^\alpha G(z)] ,$$

ou

$$\frac{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}{2} G''(z) Y^{-\alpha} + (\alpha z Y^{\alpha-1} - \dot{c}(Y)) G'(z) + Y^{\alpha-1} (\gamma_c \dot{c}(Y) - \alpha) G(z) = 0 . \quad (\text{B.27})$$

Ou seja, a parte linear da equação BK, na aproximação difusiva, se transforma numa equação diferencial ordinária de segunda ordem para $G(z)$. Podemos ver ainda que, negligenciando o termo $\dot{c}(Y)G'(z)$, os diferentes termos nesta última equação contribuem igualmente se $\alpha = 1/2$ e $\dot{c}(Y) = \beta/Y$ onde β é uma constante. Este valor de α permite a retirada da dependência explícita em Y da equação, restando apenas a dependência em z . Assim,

$$\frac{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}{2} G''(z) + \frac{z}{2} G'(z) + \left(\beta \gamma_c - \frac{1}{2} \right) G(z) = 0 . \quad (\text{B.28})$$

Esperamos que a frente de onda adquira o comportamento de onda progressiva pura para $Y \rightarrow \infty$, que implica em $z \rightarrow 0$. Portanto, escolhemos a solução $G_{\beta'}(z)$, com $\beta' = \beta \gamma_c$, que é linear em $z = 0$ e que pode ser escrita como uma série infinita, que não é válida quando β' é um inteiro não positivo (Brunet & Derrida, 1997)

$$G_{\beta'}(z) = A \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{2n+1} , \quad (\text{B.29})$$

onde A é uma constante.

Para determinar β' notemos que a forma escalonada do ansatz (B.19) deve ter um comportamento semelhante ao da condição inicial para a formação das ondas progressivas (B.11) quando L é grande e Y é de ordem 1. Devemos calcular então o comportamento assintótico de $G(z)$ quando z é grande. Para $\beta' = 3/2$ ou $\beta = 3/2\gamma_c$ a expressão (B.29) fornece (Brunet & Derrida, 1997)

$$G_{3/2}(z) = A \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}} z \exp\left(-\frac{z^2}{2\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}\right) . \quad (\text{B.30})$$

Em termos das variáveis físicas $L = \log(k^2/k_0^2)$ e Y esta última fica da forma

$$G\left(\frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{\sqrt{Y}}\right) = A \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}} \frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{\sqrt{Y}} \exp\left(-\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) Y}\right) , \quad (\text{B.31})$$

onde usamos, com $c(Y) = \int dt \dot{c}(Y) = 3 \log Y / 2\gamma_c$,

$$z = \frac{L - v_c Y + 3 \log Y / 2\gamma_c}{\sqrt{Y}} = \frac{\log k^2 - \log k_0^2 (\exp(v_c Y - 3 \log Y / 2\gamma_c))}{\sqrt{Y}} = \frac{\log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)}{\sqrt{Y}} , \quad (\text{B.32})$$

onde definimos a escala de saturação como

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp\left(v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log Y\right). \quad (\text{B.33})$$

Substituindo estes resultados na equação (B.19) em termos das variáveis físicas \tilde{T} , $L = \log(k^2/k_0^2)$ e Y , temos,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(k, Y) &\stackrel{Y \rightarrow \infty}{\cong} \tilde{T}\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right) \stackrel{k \gg Q_s}{\cong} \sqrt{Y} G\left(\frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{\sqrt{Y}}\right) e^{-\gamma_c \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)} \\ &= A \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}} \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right) \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)^{-\gamma_c} \exp\left(-\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Desta forma, mostramos que a solução para a amplitude de espalhamento em termos de ondas progressivas apresenta uma estrutura escalonada, o que concorda com o escalonamento geométrico das seções de choque da QCD, como visto no início desta seção.

Referências Bibliográficas

- [1] AAMODT, K. *ET AL.* [ALICE COLLABORATION]. Charged-particle multiplicity measurement in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ and 2.36 TeV with ALICE at LHC. **The European Physical Journal C**, v. 68, n. 1-2, p. 89–108, Jun. 2010a. [xiv](#), [84](#)
- [2] AAMODT, K. *ET AL.* [ALICE COLLABORATION]. Charged-particle multiplicity measurement in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with ALICE at LHC. **The European Physical Journal C**, v. 68, n. 3-4, p. 345–354, Jun. 2010b. [xiv](#), [84](#)
- [3] AARON, F. D. *ET AL.* [H1 + ZEUS COLLABORATIONS]. Combined measurement and QCD analysis of the inclusive $e^\pm p$ scattering cross sections at HERA. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, n. 1, p. 1–63, Jan. 2010. [xi](#), [xii](#), [xiii](#), [xv](#), [30](#), [31](#), [71](#), [72](#), [73](#), [74](#), [100](#), [101](#)
- [4] ABE, F. *ET AL.* [CDF COLLABORATION]. Pseudorapidity distributions of charged particles produced in $\bar{p}p$ interactions as $\sqrt{s} = 630$ and 1800 GeV. **Physical Review D**, v. 41, n. 7, p. 2330–2333, Apr. 1990. [xiv](#), [84](#)
- [5] ABELEV, B. *ET AL.* [ALICE COLLABORATION]. Transverse Momentum Distribution and Nuclear Modification Factor of Charged Particles in p-Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. p. 16, Oct. 2012. [91](#)
- [6] ABELEV, B. *ET AL.* [ALICE COLLABORATION]. Pseudorapidity density of charged particles p-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. **Physical Review Letters**, v. 110, p. 032301, 2013. [xiv](#), [86](#), [87](#)
- [7] ADAMS, J. *ET AL.* [STAR COLLABORATION]. Forward Neutral Pion Production in $p + p$ and $d + Au$ Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. **Physical Review Letters**, v. 97, n. 15, p. 152302, Oct. 2006. [xi](#), [xiii](#), [71](#), [73](#), [74](#)
- [8] ALBACETE, J. L.; DUMITRU, A.; FUJII, H. ; NARA, Y. CGC predictions for p+Pb collisions at the LHC. **Nuclear Physics A**, v. 897, p. 1–27, 2013. [86](#)
- [9] ALTARELLI, G. ; PARISI, G. Asymptotic freedom in parton language. **Nuclear Physics B**, v. 126, n. 2, p. 298–318, Aug. 1977. [3](#), [28](#), [55](#)
- [10] ALTINOLUK, T. ; KOVNER, A. Particle production at high energy and large transverse momentum: “The hybrid formalism” revisited. **Physical Review D**, v. 83, n. 10, p. 105004, May. 2011. [84](#), [94](#)

- [11] ARMESTO, N.; SALGADO, C. ; WIEDEMANN, U. Relating High-Energy Lepton-Hadron, Proton-Nucleus, and Nucleus-Nucleus Collisions through Geometric Scaling. **Physical Review Letters**, v. 94, n. 2, p. 022002, Jan. 2005. [56](#), [84](#)
- [12] ARSENE, I. *ET AL.* [BRAHMS COLLABORATION]. Evolution of the Nuclear Modification Factors with Rapidity and Centrality in $d+Au$ Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 24, p. 3–6, Dec. 2004. [xi](#), [xiii](#), [71](#), [73](#), [74](#)
- [13] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B.; EPELE, L. N. ; GARCIA CANAL, C. A. A dependence of hadron-nucleus massive lepton pair production. **Physical Review C**, v. 49, p. 489–493, Jan 1994. [85](#)
- [14] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B. ; GONÇALVES, V. P. Determination of small x shadowing corrections at desy hera. **Phys. Rev. D**, v. 59, p. 054010, Feb 1999a. [85](#)
- [15] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B. ; LEVIN, E. M. QCD evolution of the gluon density in a nucleus. **Nuclear Physics B**, v. 493, n. 1-2, p. 305–353, May. 1997. [4](#), [43](#)
- [16] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B. ; LEVIN, E. M. Parton densities in a nucleon. **Nuclear Physics B**, v. 511, n. 1-2, p. 355–395, Feb. 1998. [4](#), [43](#)
- [17] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B. ; LEVIN, E. M. Scaling violation and shadowing corrections at hera. **The European Physical Journal C - Particles and Fields**, v. 8, p. 115–120, 1999b. [85](#)
- [18] BALITSKY, I. Operator expansion for high-energy scattering. **Nuclear Physics B**, v. 463, n. 1, p. 99–157, Mar. 1996. [4](#), [44](#), [47](#), [54](#)
- [19] BALITSKY, I. I. ; LIPATOV, L. N. Pomeranchuk singularity in quantum chromodynamics. **Sov. J. Nucl. Phys. (Engl. Transl.) (United States)**, v. 28:6, Dec. 1978. [3](#), [34](#), [111](#)
- [20] BARONE, V. ; PREDAZZI, E. **High-energy particle diffraction**. Berlin: Springer, 2002. 407 p. [19](#)
- [21] BASSO, E.; GAY DUCATI, M. ; DE OLIVEIRA, E. G. Momentum space saturation model for deep inelastic scattering and single inclusive hadron production. **Physical Review D**, v. 84, n. 3, p. 034024, Aug. 2011. [54](#), [69](#), [84](#), [93](#)
- [22] BASSO, E. A. F.; GAY DUCATI, M. B. ; DE OLIVEIRA, E. G. Inclusive particle production at LHC in dipole momentum space. [[arXiv:hep-ph/1212.5549](#)], Dec. 2012. [54](#), [78](#), [82](#), [91](#), [94](#)
- [23] BERINGER, J. *ET AL.* (Particle Data Group). **Physical Review D**, v. 86, p. 010001, 2012. [xii](#), [2](#)
- [24] BETEMPS, M. A. ; MACHADO, M. V. T. A simple model for the nuclear unintegrated gluon distribution. **The European Physical Journal C**, v. 65, n. 3-4, p. 427–431, Nov. 2009. [84](#)
- [25] BEUF, G. Next-to-leading order corrections for the dipole factorization of deep inelastic scattering structure functions at low x . **Physical Review D**, v. 85, n. 3, p. 034039, Feb. 2012. [84](#), [94](#)

- [26] BEUF, G. ; PESCHANSKI, R. B. Universality of QCD traveling-waves with running coupling. **Physical Review D**, v. 75, p. 114001, 2007. [101](#)
- [27] BJORKEN, J. D. Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum. **Physical Review**, v. 179, n. 5, p. 1547–1553, Mar. 1969. [1](#), [19](#), [55](#)
- [28] BJORKEN, J. D. ; PASCHOS, E. A. Inelastic Electron-Proton and γ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon. **Physical Review**, v. 185, n. 5, p. 1975–1982, Sep. 1969. [20](#), [55](#)
- [29] BOER, D.; UTERMANN, A. ; WESSELS, E. Geometric scaling at BNL RHIC and CERN LHC. **Physical Review D**, v. 77, n. 5, p. 1–8, Mar. 2008. [72](#), [77](#)
- [30] BRAMSON, M. **Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves**. v. 44, n. 285.ed. Rhode Island: Memoirs Am. Math. Soc., 1983. 190 p. [113](#)
- [31] BRAUN, M. Inclusive jet production off the nucleus in the perturbative QCD with $N_c \rightarrow \infty$. **Physics Letters B**, v. 483, n. 1-3, p. 105–114, Jun. 2000a. [7](#), [79](#), [80](#)
- [32] BRAUN, M. Structure function of the nucleus in the perturbative QCD with $N_c \rightarrow \infty$ (BFKL pomeron fan diagrams). **The European Physical Journal C - Particles and Fields**, v. 16, n. 2, p. 337–347, Aug. 2000b. [7](#), [79](#)
- [33] BREITWEG, J. *ET AL.* [ZEUS COLLABORATION]. Zeus results on the measurement and phenomenology of f_2 at low x and low q^2 . **The European Physical Journal C - Particles and Fields**, v. 7, p. 609–630, 1999. [31](#), [49](#)
- [34] BRUNET, E. ; DERRIDA, B. Shift in the velocity of a front due to a cutoff. **Physical Review E**, v. 56, n. 3, p. 2597–2604, Sep. 1997. [115](#), [117](#)
- [35] CALLAN, C. G. ; GROSS, D. J. High-Energy Electroproduction and the Constitution of the Electric Current. **Physical Review Letters**, v. 22, n. 4, p. 156–159, Jan. 1969. [21](#)
- [36] CAOLA, F. ; FORTE, S. Geometric Scaling from GLAP evolution. **Physical Review Letters**, v. 101, p. 022001, 2008. [56](#)
- [37] CAOLA, F.; FORTE, S. ; ROJO, J. HERA data and DGLAP evolution: Theory and phenomenology. **Nuclear Physics A**, v. 854, p. 32–44, 2011. [55](#)
- [38] CATANI, S.; CIAFALONI, M. ; HAUTMANN, F. High energy factorization and small-x heavy flavour production. **Nuclear Physics B**, v. 366, n. 1, p. 135 – 188, 1991. [79](#)
- [39] CHADWICK, J. The existence of a neutron. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A**, v. 136, n. 830, p. 692–708, 1932a. [1](#)
- [40] CHADWICK, J. Possible Existence of a Neutron. **Nature**, v. 129, n. 3252, p. 312–312, Feb. 1932b. [1](#)
- [41] CHADWICK, J. Bakerian lecture. the neutron. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A**, v. 142, n. 846, p. 1–25, 1933. [1](#)

- [42] CHIRILLI, G.; XIAO, B. ; YUAN, F. Inclusive hadron productions in pA collisions. **Physical Review D**, v. 86, n. 5, p. 054005, Sep. 2012a. [84](#), [94](#)
- [43] CHIRILLI, G.; XIAO, B. ; YUAN, F. One-Loop Factorization for Inclusive Hadron Production in p-A Collisions in the Saturation Formalism. **Physical Review Letters**, v. 108, n. 12, p. 122301, Mar. 2012b. [84](#), [94](#)
- [44] CIAFALONI, M.; COLFERAI, D. ; SALAM, G. P. Renormalization group improved small-x equation. **Physical Review D**, v. 60, n. 11, Nov. 1999. [97](#)
- [45] COLLINS, J. **Foundations of Perturbative QCD**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. [2](#)
- [46] D'ENTERRIA, D. G. Hard scattering cross-sections at LHC in the Glauber approach: From pp to pA and AA collisions. [[nucl-ex/0302016](#)], 2003. [78](#), [91](#)
- [47] DOKSHITZER, Y. L. Calculation of structure functions of deep inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in Quantum Chromodynamics. **Sov. Phys. - JETP (Engl. Transl.) (United States)**, v. 46, n. 4, p. 641 – 653, 1977. [3](#), [28](#), [55](#)
- [48] DOMINGUEZ, F.; MARQUET, C.; XIAO, B. ; YUAN, F. Universality of unintegrated gluon distributions at small x . **Physical Review D**, v. 83, n. 10, p. 105005, May. 2011. [80](#)
- [49] DUMITRU, A.; HAYASHIGAKI, A. ; JALILIAN-MARIAN, J. Geometric scaling violations in the central rapidity region of d+Au+Au collisions at RHIC. **Nuclear Physics A**, v. 770, n. 1-2, p. 57–70, May. 2006a. [72](#), [77](#)
- [50] DUMITRU, A.; HAYASHIGAKI, A. ; JALILIAN-MARIAN, J. The color glass condensate and hadron production in the forward region. **Nuclear Physics A**, v. 765, n. 3-4, p. 464–482, Feb. 2006b. [66](#)
- [51] DUMITRU, A. ; JALILIAN-MARIAN, J. Forward Quark Jets from Protons Shattering the Color Glass Condensate. **Physical Review Letters**, v. 89, n. 2, p. 9, Jun. 2002. [66](#)
- [52] DUMITRU, A.; KHARZEEV, D.; LEVIN, E. ; NARA, Y. Gluon saturation in pA collisions at energies available at the CERN Large Hadron Collider: Predictions for hadron multiplicities. **Physical Review C**, v. 85, n. 4, p. 044920, Apr. 2012. [86](#)
- [53] ELLIS, R. K.; STIRLING, W. J. ; WEBBER, B. R. **QCD and collider physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. [66](#)
- [54] ENBERG, R.; GOLEC-BIERNAT, K. ; MUNIER, S. High energy asymptotics of scattering processes in QCD. **Physical Review D**, v. 72, n. 7, p. 1–20, Oct. 2005. [5](#)
- [55] EPELE, L. N.; GARCIA CANAL, C. A. ; GAY DUCATI, M. B. Nuclear effects in j/ψ hadroproduction. **Physics Letters B**, v. 226, p. 167 – 170, 1989. [85](#)

- [56] ESKOLA, K.J.; PAUKKUNEN, H. ; SALGADO, C.A. EPS09: A New Generation of NLO and LO Nuclear Parton Distribution Functions. **Journal of High Energy Physics**, v. 0904, p. 065, 2009. [xiv](#), [85](#)
- [57] FADDEEV, L. D. ; POPOV, V. N. Feynman diagrams for Yang-Mills field. **Physics Letters B**, v. B 25, n. 1, p. 29–30, 1967. [12](#)
- [58] FADDEEV, L. D. ; SLAVNOV, A. A. **Gauge fields: introduction to quantum theory**. 2.ed. Redwood City: Addison-Wesley, 1991. 217 p. [12](#)
- [59] FADIN, V. S.; KURAEV, E. A. ; LIPATOV, L. N. On the pomeron singularity in asymptotically free theories. **Physics Letters B**, v. 60, n. 1, p. 50–52, Dec. 1975. [3](#), [34](#), [111](#)
- [60] FERREIRO, E.; IANCU, E.; LEONIDOV, A. ; MCLERRAN, D. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate: II. **Nuclear Physics A**, v. 703, n. 1-2, p. 489–538, May. 2002. [5](#), [44](#), [47](#), [51](#)
- [61] FEYNMAN, R. Very High-Energy Collisions of Hadrons. **Physical Review Letters**, v. 23, n. 24, p. 1415–1417, Dec. 1969. [1](#)
- [62] FISHER, R. A. The wave advance of advantageous genes. **Annals of Eugenics**, v. 7, p. 355 – 369, 1937. [6](#), [58](#), [112](#)
- [63] FREUND, A.; RUMMUKAINEN, K.; WEIGERT, H. ; SCHAFER, A. Geometric scaling in inclusive eA reactions and nonlinear perturbative QCD. **Physical Review Letters**, v. 90, p. 222002, 2003. [56](#)
- [64] FROISSART, M. Asymptotic behavior and subtractions in the mandelstam representation. **Physical Review**, v. 123, p. 1053–1057, Aug 1961. [41](#)
- [65] GARCIA CANAL, C. A.; GAY DUCATI, M. B. ; SIMÕES, J. A. M. **Notes in deep inelastic scattering**. Strasbourg: Centre de Recherches Nucléaires, Université Louis Pasteur, 1979. (Séries des cours et conférences sur la physique des hautes énergies, 15). [18](#), [19](#)
- [66] GEIGER, H. ; MARSDEN, E. On a diffuse reflection of the α -particles. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A**, v. 82, n. 557, p. 495–500, 1909. [1](#)
- [67] GELIS, F. ; JALILIAN-MARIAN, J. Photon production in high energy proton-nucleus collisions. **Physical Review D**, v. 66, p. 014021, Jul 2002. [62](#), [88](#)
- [68] GELIS, F.; STAŚTO, A.M. ; VENUGOPALAN, R. Limiting fragmentation in hadron–hadron collisions at high energies. **The European Physical Journal C**, v. 48, n. 2, p. 489–500, Oct. 2006. [83](#)
- [69] GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. **Physics Letters**, v. 8, p. 214–215, Feb. 1964. [1](#), [21](#)
- [70] GLAUBER, R. Cross Sections in Deuterium at High Energies. **Physical Review**, v. 100, n. 1, p. 242–248, Oct. 1955. [43](#)

- [71] GOLEC-BIERNAT, K. ; WÜSTHOFF, M. Saturation effects in deep inelastic scattering at low Q^2 and its implications on diffraction. **Physical Review D**, v. 59, n. 1, p. 24, Nov. 1998. [5](#), [55](#)
- [72] GOTSMAN, E.; LEVIN, E. ; MAOR, U. Description of LHC data in a soft interaction model. **Physics Letters B**, v. 716, n. 3-5, p. 425–429, Oct. 2012a. [82](#)
- [73] GOTSMAN, E.; LEVIN, E. ; MAOR, U. Soft interaction model and the LHC data. **Physical Review D**, v. 85, n. 9, p. 094007, May. 2012b. [82](#)
- [74] GOTSMAN, E.; LEVIN, E.; MAOR, U. ; MILLER, J. S. A QCD motivated model for soft interactions at high energies. **The European Physical Journal C**, v. 57, n. 4, p. 689–709, Sep. 2008. [82](#)
- [75] GREINER, W.; SCHÄFER, A. ; STEIN, E. **Quantum Chromodynamics**. Berlin: Springer, 2007. 553 p. [2](#), [21](#)
- [76] GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M. ; RYSKIN, M. G. Semihard processes in QCD. **Physics Reports**, v. 100, n. 1-2, p. 1–150, Nov. 1983. [4](#), [43](#), [79](#)
- [77] GRIBOV, V. N. **The Theory of Complex Angular Momenta**. Cambridge: Cambridge University Press, Dec. 2003. [30](#)
- [78] GRIBOV, V. N. ; LIPATOV, L. N. Deep inelastic ep scattering in perturbation-theory. **Soviet Journal of Nuclear Physics-USSR**, v. 15, n. 4, p. 438–450, 1972. [3](#), [28](#), [55](#)
- [79] GROSS, D. ; WILCZEK, F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1343–1346, Jun. 1973. [2](#)
- [80] HALZEN, F. ; MARTIN, A. D. **Quark and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics**. New York: Wiley, 2008. 416 p. [2](#), [18](#), [19](#)
- [81] IANCU, E.; ITAKURA, K. ; MCLERRAN, L. Geometric scaling above the saturation scale. **Nuclear Physics A**, v. 708, p. 327–352, 2002. [56](#)
- [82] IANCU, E.; LEONIDOV, A. ; MCLERRAN, D. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate: I. **Nuclear Physics A**, v. 692, n. 3-4, p. 583–645, Sep. 2001a. [5](#), [44](#), [47](#), [51](#)
- [83] IANCU, E.; LEONIDOV, A. ; MCLERRAN, D. The renormalization group equation for the color glass condensate. **Physics Letters B**, v. 510, n. 1-4, p. 133–144, Jun. 2001b. [5](#), [44](#), [47](#), [51](#)
- [84] JALILIAN-MARIAN, J. Production of forward rapidity photons in high energy heavy ion collisions. **Nuclear Physics A**, v. 753, n. 3-4, p. 307–315, May. 2005. [88](#)
- [85] JALILIAN-MARIAN, J. ; KOVCHegov, Y. Inclusive two-gluon and valence-quark-gluon production in DIS and pA collisions. **Physical Review D**, v. 70, n. 11, p. 1–24, Dec. 2004. [6](#), [62](#), [63](#), [64](#)
- [86] JALILIAN-MARIAN, J.; KOVNER, A.; LEONIDOV, A. ; WEIGERT, H. The BFKL equation from the Wilson renormalization group. **Nuclear Physics B**, v. 504, n. 1-2, p. 415–431, Oct. 1997. [5](#), [44](#), [47](#), [51](#)

- [87] JALILIAN-MARIAN, J.; KOVNER, A.; LEONIDOV, A. ; WEIGERT, H. Wilson renormalization group for low x physics: Towards the high density regime. **Physical Review D**, v. 59, n. 1, p. 14, Nov. 1998. [5](#), [44](#), [47](#), [51](#)
- [88] JALILIAN-MARIAN, J. ; REZAEIAN, A. Hadron production in pA collisions at the LHC from the color glass condensate. **Physical Review D**, v. 85, n. 1, p. 014017, Jan. 2012a. [84](#), [94](#)
- [89] JALILIAN-MARIAN, J. ; REZAEIAN, A. H. Prompt photon production and photon-hadron correlations at RHIC and the LHC from the Color Glass Condensate. **Physical Review D**, v. 86, p. 034016, 2012b. [88](#), [92](#)
- [90] KHACHATRYAN, V. *ET AL.* [CMS COLLABORATION]. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ and 2.36 TeV. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, n. 2, p. 1–35, Feb. 2010a. [xiii](#), [xiv](#), [56](#), [57](#), [77](#), [84](#), [86](#)
- [91] KHACHATRYAN, V. *ET AL.* [CMS COLLABORATION]. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 2, p. 022002, Jul. 2010b. [xiii](#), [xiv](#), [56](#), [57](#), [77](#), [84](#), [86](#)
- [92] KNIEHL, B. A.; KRAMMER, G. ; PÖTTER, B. Fragmentation functions for pions, kaons, and protons at next-to-leading order. **Nuclear Physics B**, v. 582, n. 1-3, p. 514–536, Aug. 2000. [82](#)
- [93] KOLMOGOROV, A.; PETROVSKY, I. ; PISCOUNOV, N. Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem. **Moscow Univ. Bull. Math.**, v. v. A1, p. 1 – 25, 1937. [6](#), [58](#), [112](#)
- [94] KOVCHEGOV, Y. Small-x F_2 structure function of a nucleus including multiple Pomeron exchanges. **Physical Review D**, v. 60, n. 3, p. 11, Jun. 1999. [4](#), [44](#), [54](#)
- [95] KOVCHEGOV, Y. Unitarization of the BFKL Pomeron on a nucleus. **Physical Review D**, v. 61, n. 7, p. 20, Mar. 2000. [4](#), [44](#), [46](#), [54](#), [111](#)
- [96] KOVCHEGOV, Y. ; TUCHIN, K. Inclusive gluon production in deep inelastic scattering at high parton density. **Physical Review D**, v. 65, n. 7, p. 074026, Mar. 2002. [7](#), [70](#), [79](#)
- [97] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N. ; FADIN, V. S. Multiregge processes in the Yang-Mills theory. **Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 44, p. 443, Sep. 1976. [3](#), [34](#), [111](#)
- [98] KURAEV, E.A.; LIPATOV, L.N. ; FADIN, V.S. Pomeranchuk singularity in nonabelian gauge theories. **Sov. Phys. - JETP (Engl. Transl.) (United States)**, v. 45:2, Feb. 1977. [3](#), [34](#), [111](#)
- [99] KWIECINSKI, J. ; STAŚTO, A. M. Geometric scaling and QCD evolution. **Physical Review D**, v. 66, p. 014013, 2002a. [56](#)
- [100] KWIECINSKI, J. ; STAŚTO, A. M. Large geometric scaling and QCD evolution. **Acta Physica Polonica B**, v. 33, p. 3439–3443, 2002b. [56](#)

- [101] LEVIN, E. M. ; REZAEIAN, A. Gluon saturation and inclusive hadron production at LHC. **Physical Review D**, v. 82, n. 1, p. 1–12, Jul. 2010. [82](#)
- [102] MAKEENKO, Y. **Methods of Contemporary Gauge Theory**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. [52](#)
- [103] MARQUET, C. ; SCHOEFFEL, L. Geometric scaling in diffractive deep inelastic scattering. **Physics Letters B**, v. 639, p. 471–477, 2006. [56](#)
- [104] MARTIN, A. Unitarity and high-energy behavior of scattering amplitudes. **Physical Review**, v. 129, p. 1432–1436, Feb 1963. [41](#)
- [105] MCLERRAN, L. ; PRASZALOWICZ, M. Saturation and Scaling of Multiplicity, Mean p_T and p_T Distributions from $200 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 7 \text{ TeV}$. **Acta Physica Polonica B**, v. 41, p. 1917–1926, 2010. [56](#)
- [106] MCLERRAN, L. ; PRASZALOWICZ, M. Saturation and Scaling of Multiplicity, Mean p_T and p_T Distributions from $200 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 7 \text{ TeV}$ - Addendum. **Acta Physica Polonica B**, v. 42, p. 99–103, 2011. [56](#)
- [107] MCLERRAN, L. ; VENUGOPALAN, R. Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei. **Physical Review D**, v. 49, n. 5, p. 2233–2241, Mar. 1994a. [4](#), [50](#)
- [108] MCLERRAN, L. ; VENUGOPALAN, R. Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum. **Physical Review D**, v. 49, n. 7, p. 3352–3355, Apr. 1994b. [4](#), [50](#)
- [109] MILLER, G. *ET AL*. Inelastic Electron-Proton Scattering at Large Momentum Transfers and the Inelastic Structure Functions of the Proton. **Physical Review D**, v. 5, n. 3, p. 528–544, Feb. 1972. [19](#), [20](#)
- [110] MUELLER, A. H. Soft gluons in the infinite-momentum wave function and the BFKL pomeron. **Nuclear Physics B**, v. 415, n. 2, p. 373–385, Mar. 1994. [4](#), [37](#), [44](#), [111](#)
- [111] MUELLER, A. H. ; QIU, J. Gluon recombination and shadowing at small values of x. **Nuclear Physics B**, v. 268, n. 2, p. 427 – 452, 1986. [43](#)
- [112] MUNIER, S. ; PESCHANSKI, R. Geometric Scaling as Traveling Waves. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 23, p. 4, Dec. 2003. [5](#), [6](#)
- [113] MUNIER, S. ; PESCHANSKI, R. Traveling wave fronts and the transition to saturation. **Physical Review D**, v. 69, n. 3, p. 9, Feb. 2004a. [5](#), [54](#), [58](#), [111](#), [114](#)
- [114] MUNIER, S. ; PESCHANSKI, R. Universality and tree structure of high-energy QCD. **Physical Review D**, v. 70, n. 7, p. 4, Oct. 2004b. [54](#), [58](#), [111](#), [114](#)
- [115] MUTA, T. **Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories**. Singapore: World Scientific, 2009. 409 p. [2](#), [10](#)

- [116] NIKOLAEV, N. N. ; ZAKHAROV, B. G. Colour transparency and scaling properties of nuclear shadowing in deep inelastic scattering. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, v. 49, n. 4, p. 607–618, Dec. 1991. [4](#), [22](#), [23](#), [104](#)
- [117] NIKOLAEV, N. N. ; ZAKHAROV, B. G. Pomeron structure function and diffraction dissociation of virtual photons in perturbative QCD. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, v. 53, n. 2, p. 331–345, Jun. 1992. [4](#), [22](#)
- [118] OWENS, J.F. Large momentum transfer production of direct photons, jets, and particles. **Reviews of Modern Physics**, v. 59, p. 465, 1987. [88](#)
- [119] PESKIN, M. E. ; SCHROEDER, D. V. **An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)**: Westview Press, 1995. [62](#)
- [120] POLITZER, H. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1346–1349, Jun. 1973. [2](#)
- [121] PRASZALOWICZ, M. Improved Geometrical Scaling at the LHC. **Physical Review Letters**, v. 106, p. 142002, 2011. [xiii](#), [56](#), [57](#)
- [122] PRASZALOWICZ, M. ; STEBEL, T. Quantitative Study of Geometrical Scaling in Deep Inelastic Scattering at HERA. [[arXiv:hep-ph/1211.5305](#)], 2012. [55](#)
- [123] PUMPLIN, J. *ET AL.* New Generation of Parton Distributions with Uncertainties from Global QCD Analysis. **Journal of High Energy Physics**, v. 2002, n. 07, p. 012–012, Jul. 2002. [89](#)
- [124] QUIROGA-ARIAS, P.; MILHANO, J. G. ; WIEDEMANN, U. A. Testing nuclear parton distributions with pA collisions at the TeV scale. **Physical Review**, v. C82, p. 034903, 2010. [92](#)
- [125] REZAEIAN, A. H. CGC predictions for p+A collisions at the LHC and signature of QCD saturation. **Physics Letters B**, v. 718, p. 1058–1069, 2013. [xiv](#), [78](#), [79](#), [90](#), [91](#), [92](#)
- [126] ROBERTS, R. G. **The Structure of the Proton: Deep Inelastic Scattering**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 196 p. [21](#)
- [127] ROCHA, M. B. DA. **Amplitudes de espalhamento da Cromodinâmica quântica em ordem seguinte à dominante** Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Curso de Bacharelado em Física. Porto Alegre, 2011. [xiv](#), [96](#), [99](#), [100](#)
- [128] ROSSI, A. M.; VANNINI, G.; BUSSIÈRE, A.; ALBINI, E.; D’ALESSANDRO, D. ; GIACOMELLI, G. Experimental study of the energy dependence in proton-proton inclusive reactions. **Nuclear Physics B**, v. 84, n. 2, p. 269–305, Jan. 1975. [xiv](#), [84](#)
- [129] RUTHERFORD, E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. **Philosophical Magazine Series 6**, v. 21, n. 125, p. 669–688, 1911. [1](#)
- [130] RYSKIN, M. G.; MARTIN, A. D. ; KHOZE, V. A. High-energy strong interactions: from ”hard” to ”soft”. **The European Physical Journal C**, v. 71, n. 4, p. 1617, Apr. 2011. [xiv](#), [82](#), [83](#)

- [131] RYSKIN, M. G.; MARTIN, A. D. ; KHOZE, V. A. Proton opacity in the light of LHC diffractive data. **The European Physical Journal C**, v. 72, n. 4, p. 1937, Apr. 2012. [82](#)
- [132] SAARLOOS, WIM VAN. Front propagation into unstable states. **Physics Reports**, v. 386, n. 2-6, p. 29 – 222, Aug. 2003. [58](#)
- [133] SANTANA AMARAL, J. T. DE; GAY DUCATI, M. B.; BETEMPS, M. A. ; SOYEZ, G. γ^*p cross section from the dipole model in momentum space. **Physical Review D**, v. 76, n. 9, p. 9, Nov. 2007. [6](#), [23](#), [24](#), [54](#), [61](#), [69](#), [71](#)
- [134] SNEDDON, I. N. **Fourier transforms**. New York: Mcgraw-Hill Book, 1951. [69](#)
- [135] STAŚTO, A.; XIAO, B. ; YUAN, F. Back-to-Back Correlations of Di-hadrons in dAu Collisions at RHIC. **Phys.Lett.**, v. B716, p. 430–434, 2012a. [73](#), [91](#)
- [136] STAŚTO, A.; XIAO, B. ; ZASLAVSKY, D. Drell-Yan Lepton-Pair-Jet Correlation in pA collisions. **Phys.Rev.**, v. D86, p. 014009, 2012b. [73](#), [91](#)
- [137] STAŚTO, A. M.; GOLEC-BIERNAT, K. ; KWIECINSKY, J. Geometric Scaling for the Total γ^*p Cross Section in the Low x Region. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 4, p. 596–599, Jan. 2001. [xiii](#), [55](#), [56](#)
- [138] 'T HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. **Nuclear Physics B**, v. 72, n. 3, p. 461–473, Apr. 1974. [39](#)
- [139] TRIANTAFYLLOPOULOS, D. N. The energy dependence of the saturation momentum from RG improved BFKL evolution. **Nuclear Physics B**, v. 648, n. 1-2, p. 293–316, Jan. 2003. [72](#)
- [140] TRIBEDY, P. ; VENUGOPALAN, R. Saturation models of HERA DIS data and inclusive hadron distributions in p+p collisions at the LHC. **Nuclear Physics A**, v. 850, n. 1, p. 156–136, 2011. [94](#)
- [141] TRIBEDY, P. ; VENUGOPALAN, R. QCD saturation at the LHC: Comparisons of models to p+p and A+A data and predictions for p+Pb collisions. **Physics Letters B**, v. 710, n. 1, p. 125–133, Mar. 2012. [82](#), [86](#)
- [142] TRIBEDY, P. ; VENUGOPALAN, R. Erratum to “QCD saturation at the LHC: Comparisons of models to and data and predictions for collisions” [Phys. Lett. B 710 (1) (2012) 125]. **Physics Letters B**, v. 718, n. 3, p. 1154, Jan. 2013. [86](#)
- [143] WEIGERT, H. Unitarity at small Bjorken x. **Nuclear Physics A**, v. 703, n. 3-4, p. 823–860, Jun. 2002. [5](#), [44](#), [47](#), [51](#)
- [144] ZWEIG, G. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Part I. , n. CERN-TH-401, p. 24 p, Jan 1964a. [1](#)
- [145] ZWEIG, G. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Part II. , n. CERN-TH-412, p. 80 p, Feb 1964b. [1](#)