

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Uma discussão sobre algumas interpretações do
“Tempo de Tunelamento Quântico”**

Débora Elisa Peretti

Porto Alegre
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Uma discussão sobre algumas interpretações do “Tempo de Tunelamento Quântico”

Débora Elisa Peretti

Trabalho de conclusão de curso realizado sob a orientação da Prof. Dra. Sandra Denise Prado apresentado à Comissão de Graduação em Física da UFRGS, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Porto Alegre
2013

Agradecimentos

Muitas pessoas e instituições me apoiaram durante o período em que estive realizando esta pesquisa científica. A essas pessoas, gostaria de agradecer, especialmente aos citados abaixo:

- À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ensino de qualidade e pela estrutura disponibilizada;
- À minha orientadora, Sandra Prado, pela dedicação e paciência durante este trabalho;
- À minha família, em especial minha mãe Sandra Peretti, pelo apoio incondicional desde a escolha do curso no vestibular até o fim do curso;
- A todos meus amigos, que compreenderam as minhas ausências e me apoiaram sempre que foi necessário.

Muito obrigada a todos.

Resumo

Nesta monografia apresentaremos uma breve discussão sobre a relação da incerteza energia-tempo que é baseada no princípio da incerteza da posição-momentum de Heisenberg. Mostraremos aqui como essa relação pode ser aplicada para estimar o tempo que uma partícula leva para atravessar uma barreira de potencial.

Abstract

In this monograph we present a brief discussion on the time-energy uncertainty relation which is based on Heisenberg's momentum-space uncertainty principle. It is shown here how this relation can be applied to estimate the time it takes a particle to go through a potential barrier.

Conteúdo

1. Introdução	2
1.1 Contextualização	5
2. Relação Energia-Tempo	8
2.1 Relação Energia-Tempo	8
2.2 Cálculo do Tempo de Tunelamento	11
2.3 Medição do Tempo de Tunelamento	12
3. Tempo de Tunelamento	14
3.1 Potencial Degrau	14
3.2 Barreira Quadrada de Potencial	18
3.3 Potenciais Reais	22
4. Considerações Finais	27
Referências Bibliográficas	30

Capítulo 1

Introdução

Segundo as leis física clássica, uma partícula com energia E não pode atravessar uma região do espaço cujo potencial V seja maior que sua energia. Entretanto, segundo a Mecânica Quântica, existe uma probabilidade pequena, mas não-nula, de uma partícula atravessar uma barreira de potencial de altura finita, mesmo quando a altura da barreira é maior que sua energia. Esse fenômeno é chamado de tunelamento e ocorre, no mundo microscópico, que no outro lado da barreira, detectamos com alguma probabilidade, uma partícula localizada, pontual.

O físico russo G. Gamow, em 1928, ao tentar entender o decaimento α , começou os estudos sobre o tunelamento, na década de vinte [14]. Combinando as forças atrativas no interior do núcleo com o potencial coulombiano repulsivo, ele obteve uma barreira de potencial efetiva para a partícula α .

O problema do tunelamento é bastante complexo, pois além da questão da medida em si, em que temos um modelo ondulatório para a propagação da partícula microscópica e uma detecção localizada para a posição da mesma, temos ainda uma certa discrepância nas interpretações de como a partícula atravessa a barreira e em quanto tempo essa travessia se dá.

Na Mecânica Quântica, não podemos definir o tempo como um operador, da mesma forma que fazemos com a posição e a energia, por exemplo. O tempo é apenas um parâmetro, não é um observável e, portanto, não pode, em princípio, ser medido da maneira como entendemos uma medida. Ao se pensar em maneiras de se responder a questão de quanto tempo uma partícula leva para atravessar uma barreira de potencial, é necessário, antes de tudo, colocar a questão de uma maneira mais adequada.

Há experimentos recentes em tunelamento quântico que têm aquecido o debate do que seria o tempo na Mecânica Quântica [11],[12]. Uma proposta bastante razoável em primeiro momento, seria introduzir algum tipo de relógio fracamente acoplado à partícula, para definir o tempo de tunelamento, em termos de mudanças ou alterações na variável do relógio quando a partícula emerge da barreira [6].

A introdução de um relógio, mesmo que fracamente acoplado à partícula introduz outras discussões de, pelo menos, igual relevância, que é o fenômeno da descoerência. Como acoplar fracamente o relógio sem destruir ou afetar o estado da partícula a ser rastreada? Mas a descoerência é todo um outro ramo da Mecânica Quântica que não abordaremos aqui.

Supondo factível o acoplamento do relógio, outras questões de cunho teórico suscitam nossa curiosidade. A análise do tempo de tunelamento é complicada e alguns cálculos iniciais sugerem que tunelamento supraluminal é possível. Alguns experimentos também sugerem que esse fenômeno pode ter sido observado [12]. O problema parece ser, de fato, uma questão de interpretação. A relação de incerteza energia-tempo, à la Heisenberg, não tem o mesmo papel na teoria que a consagrada versão posição-momentum, justamente porque, em Mecânica Quântica, o tempo é um parâmetro e não um observável.

Outra solução para o problema, em termos de cálculos, seria a introdução de um operador

associado ao parâmetro tempo, de tal forma que ele comutasse com o operador Hamiltoniano, que é associado à energia. Assim, seria possível escrever uma relação de incerteza associada à relação de comutação:

$$[\hat{T}, \hat{H}] = -i\hbar \quad (1.1)$$

Nosso objetivo nesse trabalho de conclusão é fazer uma discussão sobre os avanços teóricos e experimentais nessa tentativa de se estimar o tempo que uma partícula leva para atravessar uma barreira de potencial. Para tal fim, organizaremos esta monografia da seguinte forma:

No segundo capítulo, introduziremos a ideia do que poderia ser tempo em Mecânica Quântica, estudaremos algumas interpretações da relação da incerteza energia-tempo, que aparecem na literatura. Há, pelo menos, duas interpretações que são divergentes [13]. Para a parte analítica, introduziremos o conceito de tempo na Mecânica Quântica utilizando como exemplo, a definição em termos de alteração da fase relativa para a onda estacionária incidente e emergente na barreira [1]. Esse cálculo não pressupõe o acoplamento de um relógio à partícula.

No terceiro capítulo, faremos o cálculo do tempo de tunelamento para diferentes potenciais unidimensionais finitos e de altura V , utilizando as definições feitas no capítulo anterior. Apresentaremos o comportamento da densidade de probabilidade da função de onda associada à partícula em cada potencial.

No capítulo quatro, faremos as considerações finais, comparando os resultados encontrados para o tempo de tunelamento no capítulo 3 [1] com os resultados para o caso do acoplamento do relógio, introduzido no capítulo 2 [12].

1.1 Contextualização

O efeito túnel ocorre naturalmente, por exemplo, na molécula de amônia, figura (1.1), onde o átomo de nitrogênio oscila ao longo de um eixo perpendicular ao plano formado pelos três átomos de hidrogênio [9]. A frequência de oscilação é bem definida e medida com bastante precisão pelos químicos. Em 1949, a frequência de tunelamento do nitrogênio na molécula de amônia (NH_3) foi utilizada para a fabricação do primeiro relógio atômico. Nessa molécula, o átomo de nitrogênio pode ocupar mais de um lugar. Ele muda de um para outro por meio de um processo de tunelamento, com frequência igual a 24GHz. É a constância dessa frequência que possibilita seu uso em um relógio atômico [16]. O modelo da molécula de amônia é bastante usado para a computação entre diferentes propostas do que seria uma medida de tunelamento.

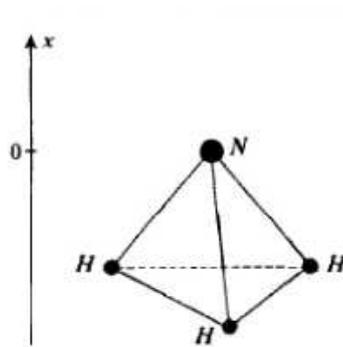


Fig. 1.1: Representação da geometria piramidal da molécula de amônia [9].

Na figura (1.2), podemos ver um modelo aproximado para o potencial da molécula de amônia. O ponto V_1 mostra o fato de que o átomo de nitrogênio e o plano de hidrogênio se repelem.

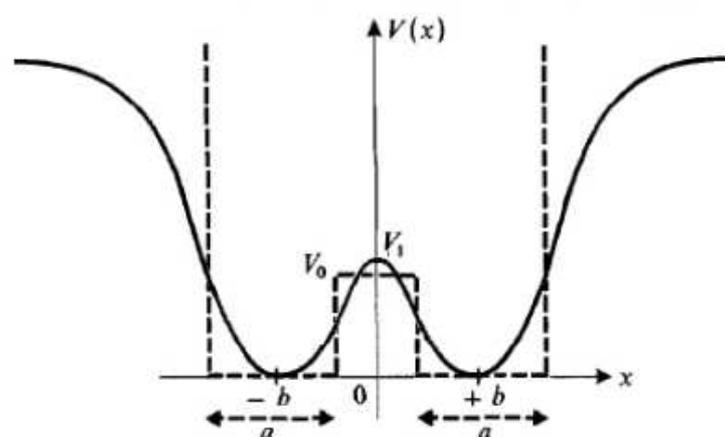


Fig. 1.2: Variações em função de x da energia potencial $V(x)$ da molécula. $V(x)$ possui dois mínimos (posições de equilíbrio clássicas), separados por uma barreira de potencial devida à repulsão quando $|x|$ é pequeno, entre o átomo de nitrogênio e os três hidrogênios. Em pontilhado, uma representação da barreira de potencial utilizada para aproximar $V(x)$ [9].

Desse modelo, podemos tirar algumas conclusões:

1. A relação da incerteza proíbe a molécula de possuir a energia mínima $V_{min}(x) = 0$.
2. Classicamente, a barreira de potencial em $x = 0$ não pode ser vencida por uma partícula cuja energia seja menor que V_1 . Então, o átomo de nitrogênio deve sempre permanecer do mesmo lado do plano de hidrogênios. Na Mecânica Quântica, porém, tal partícula pode cruzar a barreira pelo efeito de tunelamento. Logo, a inversão da partícula é sempre possível.

O efeito túnel também ocorre em supercondutores [15]. Imaginemos a seguinte situação: um elétron se encontra em uma placa metálica separada de outra placa metálica pelo vácuo

ou por um isolante. O elétron só poderá passar de uma placa a outra se a distância Δx que separa as placas é de, no máximo, alguns nanômetros.

Para que o tunelamento ocorra, há duas condições necessárias (obedecendo ao Princípio de Exclusão de Pauli):

1. O estado final seja de mesma energia que o inicial;
2. Não é possível encontrar dois elétrons no mesmo estado quântico.

Isso significa que o elétron não pode passar do primeiro bloco metálico ao segundo se, defronte seu nível de energia no primeiro há um nível vazio no segundo, como podemos ver na figura (1.3).

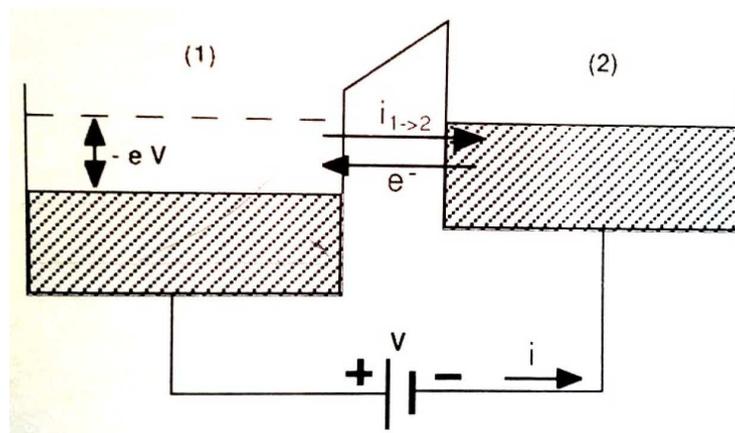


Fig. 1.3: *Dois metais separados por uma barreira de potencial. O potencial elétrico desloca os níveis de energia um com relação ao outro [15].*

Capítulo 2

Relação Energia-Tempo

Neste capítulo, faremos uma breve discussão sobre a relação da incerteza de Heisenberg na formulação de energia-tempo. Em seguida, apresentaremos diferentes maneiras de efetuar o cálculo do tempo de tunelamento de uma partícula. Por fim, mostraremos uma proposta de experimento para medir o tempo que uma partícula demora para tunelar.

2.1 Relação Energia-Tempo

Em 1927, W. Heisenberg formulou o Princípio da Incerteza [2]:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.1)$$

que relaciona as incertezas das medições da posição, Δx , e do momentum, Δp , de uma partícula. A equação (2.1) indica que, na Mecânica Quântica, não podemos medir com exatidão a posição e o momentum da partícula ao mesmo tempo, ou seja, quanto mais precisa for a medida da posição da partícula, menos precisa é a do momentum associado à ela, e vice-versa.

Associado à incerteza de momentum, temos uma incerteza na energia, tal que:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{\partial E}{\partial t} \\ &= \frac{\partial E}{\partial p} \Delta p\end{aligned}$$

A velocidade de grupo de um pacote de onda é definida pela relação de dispersão:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

onde ω é a frequência da onda e k é o número de onda. Sendo $\omega = E/\hbar$ e $k = p/\hbar$, obtemos:

$$v_g = \frac{\partial E}{\partial p}$$

Assim,

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{v} \quad (2.2)$$

De forma que:

$$\Delta x = v_g \Delta t \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1), encontramos:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.4)$$

Podemos interpretar essa segunda relação de incerteza da seguinte forma: em um sistema composto por dois subsistemas interagentes, A e B por exemplo, para que A ganhe energia, é necessário que B perca e vice-versa. Para estados estacionários, temos somente um valor de energia para o estado fundamental, portanto $\Delta E = 0$, o que implica em um tempo infinito de medição, ou seja, seria necessário esperar um tempo infinito para se observar qualquer mudança no estado de energia do sistema. [3].

Mas, enquanto a relação (2.1) é considerada fundamental, a relação (2.4) não é. Isso se deve ao fato de que o operador associado à energia total do sistema é o operador Hamiltoniano:

$$\hat{H} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.5)$$

que não é uma simples derivada em t , mas a soma dos operadores energia cinética e energia potencial, que operam no espaço de funções em x também. Portanto, (2.5) é muito mais complicado que parece à primeira vista. O operador associado ao momentum é (2.6):

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.6)$$

A diferença entre os operadores (2.5) e (2.6) se origina do postulado da Mecânica Quântica que diz que operadores quânticos existem no espaço de funções dependentes de x , e não de t . Portanto, espaço e tempo possuem funções diferentes na Mecânica Quântica: enquanto x é um operador, t é apenas um parâmetro. Existem tentativas de substituir o parâmetro t por uma quantidade T , que seria um operador associado ao tempo, tal que fosse possível escrever uma relação de incerteza associada à relação de comutação:

$$[\hat{T}, \hat{H}] = -i\hbar.$$

Como somente operadores hermitianos têm autovalores reais correspondentes a quantidades físicas, é necessário que \hat{T} e \hat{H} sejam ambos hermitianos e que o espectro de H seja limitado por baixo, ou seja, a energia não pode ser arbitrariamente negativa, pois isso significaria que a energia potencial seria muito negativa, implicando em forças muito intensas que levariam à instabilidade do sistema [4].

Apesar de (2.4) não ser uma relação fundamental, nas situações práticas ainda é válido dizer que a incerteza ΔE e a duração da medida do evento Δt satisfazem (2.4). Portanto,

podemos utilizá-la para o cálculo do tempo de tunelamento de uma partícula, por exemplo.

2.2 Cálculo do Tempo de Tunelamento

Para atravessar uma barreira de potencial, podemos dizer que há uma mudança ΔE na energia da partícula, proporcional à média harmônica da energia da partícula com a altura da barreira, que dura um tempo Δt suficiente para que a partícula atravesse a barreira [1].

O tempo Δt em que a partícula leva para tunelar através de uma barreira de potencial de largura a pode ser calculado de diferentes formas como, por exemplo, pela diferença da fase da função de onda que representa a partícula nos extremos da barreira [1] ou pelo tempo de permanência estacionária, a ser definido na sequência, da partícula dentro da barreira [5].

Consideramos um partícula livre de massa m e energia E movendo-se em uma dimensão. Primeiramente, calculamos a diferença de fase $\delta(E)$ na função de onda entre dois pontos, x_1 e x_2 , ou seja

$$\delta(E) = k(x_2 - x_1) \quad (2.7)$$

onde

$$k = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar}.$$

Depois, diferenciamos (2.7) com relação à energia para definir o tempo de tunelamento como:

$$T = \frac{\partial \delta(E)}{\partial E} \quad (2.8)$$

As posições utilizadas para calcular a diferença de fase dependem do tipo de potencial que será utilizado. Para a barreira de potencial, por exemplo, utilizamos a fase da função de onda de quando a partícula incide da barreira e a fase de quando ela emerge da barreira.

Para calcular de outra maneira, consideramos $\rho(\mathbf{x}, t)$ como a densidade linear de probabilidade de a partícula, que se move em apenas uma direção, ser encontrada na posição \mathbf{x} no instante t e $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ o fluxo de densidade de probabilidade associado a esse ponto do espaço nesse instante de tempo. Para o caso estacionário, ρ independe do tempo. Se R for uma região do espaço entre dois pontos x_1 e x_2 , o tempo de permanência estacionário τ_P dessa região é definido como:

$$\tau_P \equiv \frac{\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx}{j_{in}} \quad (2.9)$$

onde j_{in} é o fluxo de densidade linear de probabilidade incidente na região R [5].

O tempo de permanência estacionário (2.9) indica o intervalo de tempo durante o qual o sistema quântico permaneceu na região R , sem qualquer menção aos instantes de chegada e de saída do sistema dessa região e nem ao intervalo de tempo entre os instantes nos quais a partícula chega e sai dessa região.

2.3 Medição do Tempo de Tunelamento

Experimentalmente, podemos medir o tempo de tunelamento de uma partícula acoplado fracamente um relógio quântico à partícula [6]. Inicialmente, o relógio aponta para o zero. Após um tempo suficientemente longo para que a partícula atravessasse, possivelmente, com grande probabilidade, a região espacial de interesse. Ou seja, definimos o tempo de tunelamento em termos da mudança da variável do relógio do tempo em que a partícula atinge a barreira até o tempo em que ela sai.

Não podemos simplesmente medir o tempo em que a partícula entra na barreira e quando ela sai e fazer a diferença, pois, para isso, é necessário fazer a função de onda da partícula

colapsar em um autoestado de posição, e isso introduz uma incerteza arbitrária no momento, tal que a segunda medida é modificada. Mas, se deixamos de saber o tempo absoluto de passagem da partícula, exigindo apenas o tempo para a partícula passar entre dois pontos fixos no espaço, então apenas uma medição é necessária: uma medida de diferença de tempo. Assim, não há uma grande perturbação imprevisível no sistema.

Chamamos a constante de acoplamento do relógio à partícula de ϵ . Com a definição do relógio feita por [6], temos uma limitação na resolução do relógio. Em particular, ele não é confiável quando $E \rightarrow 0$ ou $E \rightarrow V$. A resolução do Relógio é limitada pela suposição de que $|E|$ e $|E - V|$ são muito menores que ϵ . A relação da incerteza energia-tempo (2.4), quando aplicada às variáveis do relógio, sugere que o ponteiro do relógio vai ter uma incerteza correspondente a um tempo $\tau \approx 1/\epsilon$. Uma estratégia para reduzir essa incerteza na medição é colocar o relógio em um estado metaestável, usando a chegada da partícula na barreira para iniciar a operação do relógio através de uma interação momentânea [7].

Capítulo 3

Tempo de Tunelamento

A aparente falha das leis de conservação de energia na dinâmica quântica, evidenciada pela penetração de um elétron em uma região do espaço cujo potencial é maior que sua energia total, é vista como a explicação de diversos fenômenos, como o tunelamento de uma partícula em um região classicamente proibida.

Neste capítulo, faremos a dedução de tempos de tunelamento para diferentes potenciais unidimensionais finitos e de altura V : o degrau e a barreira de largura a . Utilizaremos as definições feitas no capítulo anterior para isso. Para todos os cálculos utilizaremos os seguintes parâmetros: a massa da partícula $m = 1$, a largura $a = 1$ e a constante $\hbar = 1$ em unidades arbitrárias.

3.1 Potencial Degrau

Uma partícula de massa m e energia E , viajando da esquerda para a direita, encontra um potencial do tipo degrau, de altura V , na posição $x = 0$, como é mostrado na figura (3.1).

Chamamos a região onde $x < 0$ de *Região I* e a região onde $x > 0$ de *Região II*. Assim,

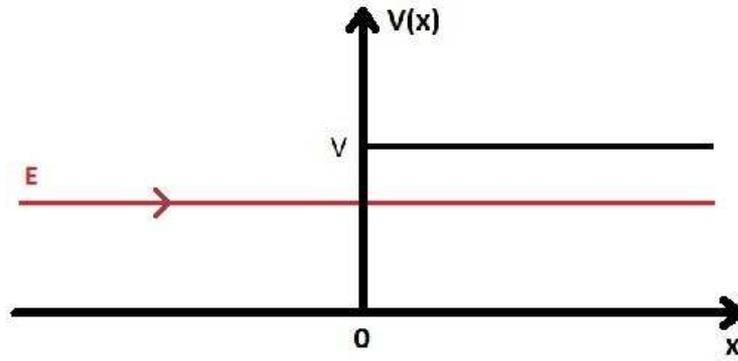


Fig. 3.1: Potencial degrau

a função de onda da partícula incidente na região I pode ser escrita da seguinte forma:

$$\psi_I(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$$

$$\psi_{II}(x) = Be^{-px}$$

onde definimos:

$$k = \frac{\sqrt{(2mE)}}{\hbar} \quad (3.1)$$

$$p = \frac{\sqrt{(2m(V - E))}}{\hbar} \quad (3.2)$$

Queremos calcular o tempo T que uma partícula demora para viajar de um ponto arbitrário $x = -b$ até a barreira e então de volta ao ponto inicial. Como há uma conservação da corrente de probabilidade, utilizamos, para este cálculo, a continuidade da função de onda e de sua primeira derivada em relação à posição no ponto de descontinuidade do potencial:

$$\psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_I}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Com essas condições de contorno, encontramos:

$$A = -\frac{p + ik}{p - ik} = \frac{k^2 - 2ikp - p^2}{k^2 + p^2}. \quad (3.3)$$

Para a partícula que viaja da esquerda para a direita, a função de onda incidente em $x = -b$ é:

$$\psi(-b) = e^{-ikb}.$$

Quando a partícula chega em $x = 0$, a onda refletida é defasada de uma fase α . Logo, ao passar por $-b$, a componente refletida é:

$$\psi_{ref}(-b) = Ae^{ikb}$$

Da fração da onda refletida em relação à onda incidente, podemos obter α , isto é:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{Im[A]}{Re[A]}\right).$$

Da equação (3.3), temos que:

$$Re[A] = \frac{k^2 - p^2}{k^2 + p^2}$$

$$Im[A] = -\frac{2kp}{k^2 + p^2}$$

Portanto:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-2kp}{k^2 - p^2}\right)$$

Com a definição de $\delta(E)$, equação (2.7), temos que:

$$\delta(E) = 2kb + \alpha = 2kb + \arctan\left(\frac{-2kp}{k^2 - p^2}\right)$$

Assim, o tempo de retorno ao ponto $x = -b$ é:

$$T = \frac{d}{dE}[2k(E)b] + \frac{d}{dE}\arctan\left(\frac{-2k(E)p(E)}{k^2(E) - p^2(E)}\right) \quad (3.4)$$

Fazendo-se as derivadas em relação à energia, obtemos:

$$\frac{d}{dE}[2k(E)b] = \frac{2bm}{k} \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dE}\arctan\left(\frac{-2k(E)p(E)}{k^2(E) - p^2(E)}\right) = \frac{2m}{kp} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.4) obtemos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2mb}{k} + \frac{2m}{kp} \\ T &= \frac{2m}{\nu} \left(b + \frac{1}{p} \right) \\ T &= \frac{2}{\nu} (b + d) \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde ν é a velocidade clássica da partícula e $d = 1/p$, que é o valor esperado da profundidade da penetração da partícula no potencial degrau.

Podemos interpretar o primeiro termo da equação (3.7), $2b/\nu$, como o tempo de vôo e retorno da partícula de $x = -b$ até a barreira e com a velocidade clássica ν . O segundo termo da equação, $2d/\nu$, pode ser visto como a duração adicional de permanência temporária da partícula na região classicamente proibida. Ou seja, a partícula se move com velocidade ν por uma distância d igual à profundidade média de penetração e volta. Assim, a distância efetiva entre $x = -b$ e a barreira aumenta de b para $b + d$.

O fato de α ser diferente de π nos mostra que não houve uma reflexão total na barreira, ou seja, a onda é parcialmente transmitida. Entretanto, no potencial degrau não há tunelamento, há apenas uma permanência temporária da partícula dentro da região classicamente proibida. O comportamento da densidade de probabilidade para um estado estacionário, nesse caso, é ilustrado pela figura (3.2), onde podemos ver que há uma probabilidade pequena, não-nula, de encontrarmos a partícula dentro do potencial degrau.

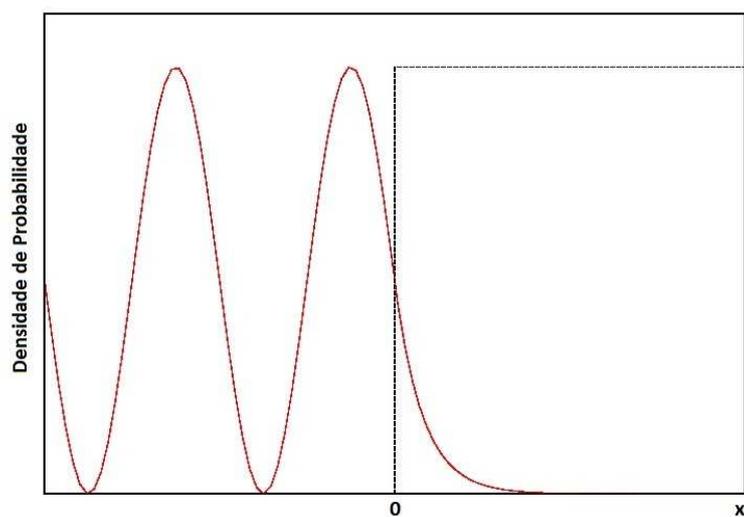


Fig. 3.2: Comportamento da densidade de probabilidade no potencial degrau.

3.2 Barreira Quadrada de Potencial

Consideramos agora a situação em que uma partícula se depara com uma barreira quadrada de potencial localizada entre $x = 0$ e $x = a$ e com altura V , como é mostrado na figura (3.3):

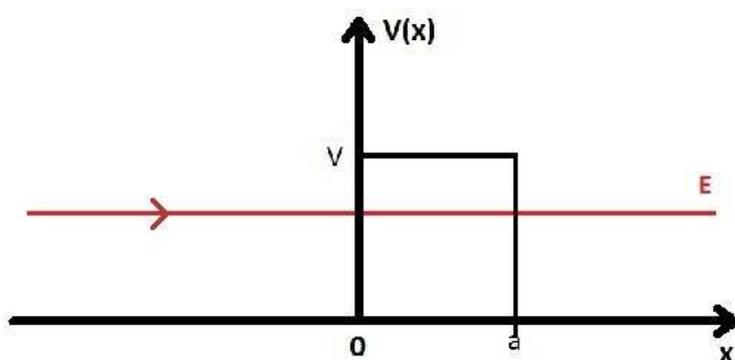


Fig. 3.3: Ilustração de uma barreira quadrada de potencial.

Dividimos o problema em três regiões:

- *Região I*: região onde $x < 0$;
- *Região II*: região onde $0 < x < a$;
- *Região III*: região onde $x > a$.

A função de onda estacionária, nesse caso, pode ser descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= e^{ikx} + Ae^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) &= Be^{px} + Ce^{-px} \\ \psi_{III}(x) &= De^{ikx}\end{aligned}$$

com as definições para k e p dadas pelas equações (3.1) e (3.2), respectivamente.

Queremos calcular o tempo T que a partícula demora para atravessar a região onde o potencial é não-nulo. Para isso, utilizamos as fases das funções de onda incidente em $x = 0$, que é zero, e emergente em $x = a$, que é dada pela fase do termo De^{ikx} . Utilizamos a continuidade da função nos extremos do potencial para o cálculo:

$$\begin{aligned}\psi_I(x=0) &= \psi_{II}(x=0) \\ \psi_{II}(x=a) &= \psi_{III}(x=a) \\ \left. \frac{\partial \psi_I}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \right|_{x=0} \\ \left. \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \right|_{x=a} &= \left. \frac{\partial \psi_{III}}{\partial x} \right|_{x=a}\end{aligned}$$

Com isso, encontramos:

$$De^{ika} = \frac{4k^2p^2 \cosh(pa) + 2ikp(k^2 - p^2)\sinh(pa)}{4k^2p^2 \cosh^2(pa) + (k^2 - p^2)^2 \sinh^2(pa)} \quad (3.8)$$

Separando as partes real e imaginária temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[De^{ika}] &= \frac{4k^2p^2 \cosh(pa)}{4k^2p^2 \cosh^2(pa) + (k^2 - p^2) \sinh^2(pa)} \\ \operatorname{Im}[De^{ika}] &= \frac{2kp(k^2 - p^2) \sinh(pa)}{4k^2p^2 \cosh^2(pa) + (k^2 - p^2)^2 \sinh^2(pa)} \end{aligned}$$

Assim, temos que :

$$\delta = \arctan \left[\frac{(k^2 - p^2)}{2kp} \tanh(pa) \right] \quad (3.9)$$

Pela definição de tempo de tunelamento (2.8), chegamos em:

$$T = 2m \left[\frac{k(p^2 - k^2)a + [(p^2 + k^2)^2/2kp] \sinh(2pa)}{(p^2 + k^2)^2 \cosh^2(pa) - (p^2 - k^2)^2} \right] \quad (3.10)$$

Podemos ver o comportamento da função de onda neste caso na figura (3.4).

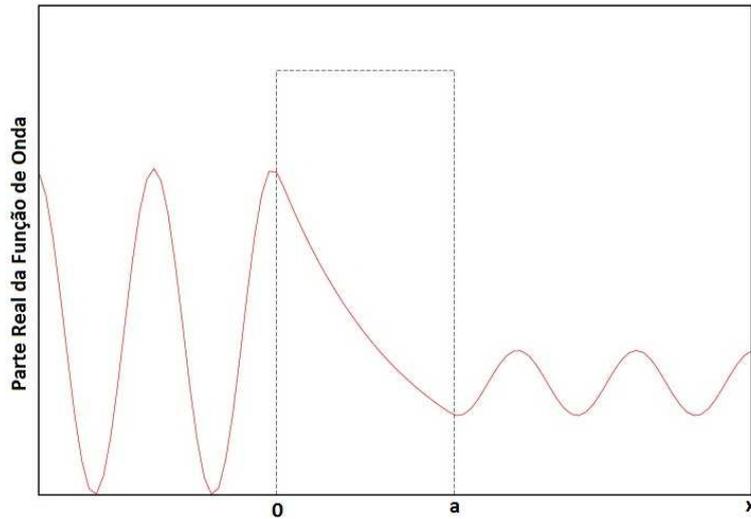


Fig. 3.4: Comportamento da parte real da função de onda no caso da barreira de potencial.

No caso especial em que $E = V/2$, chegamos ao seguinte resultado:

$$T = \frac{\tanh(ka)}{E}$$

E , considerando a pequeno, temos:

$$T = \left(\frac{ma}{2k}\right) \left(3 + \frac{p^2}{k^2}\right)$$

A figura (3.5) mostra a relação entre o tempo de tunelamento e a diferença entre a energia da partícula e a altura da barreira para diferentes valores da largura a . Com isso, podemos ver que há uma relação exponencial, independente de a . É possível ver também que o tempo diverge em ambos os extremos: quando $E \rightarrow 0$ e quando $E \rightarrow V$.

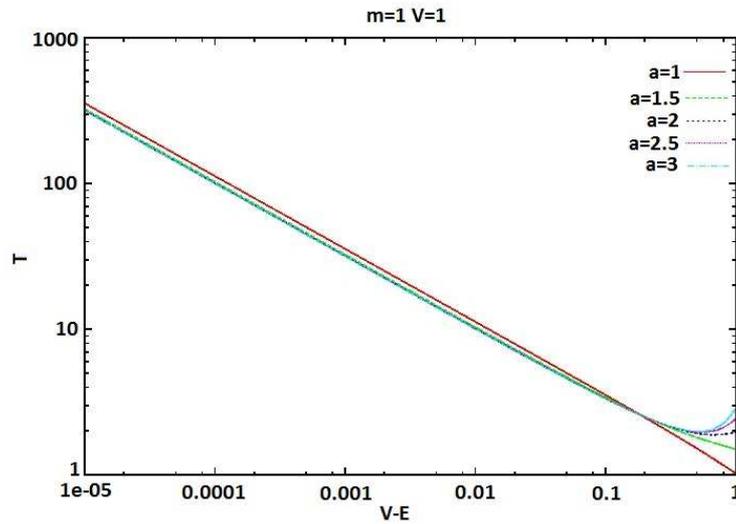


Fig. 3.5: Dependência do tempo de tunelamento com a diferença entre a energia da partícula e a altura da barreira para diferentes valores de a em escala logarítmica.

Definindo velocidade efetiva como $\nu_{ef} \equiv a/T$, para a pequeno:

$$\nu_{ef} \approx \frac{2\nu}{2 + V/E}$$

onde ν é a velocidade clássica da partícula fora da barreira, definida anteriormente.

Com isso podemos notar que $\nu_{ef} < \nu$. Ou seja, as barreiras de potencial estreitas diminuem a velocidade da partícula, enquanto as largas, aumentam. Utilizando uma das inter-

pretações do Princípio da Incerteza de Heisenberg podemos explicar este fato da seguinte maneira: com a altura da barreira fixa, a variação na energia ΔE que a partícula sofre já é definida, portanto, o tempo de tunelamento Δt também é. Assim, quanto maior for a distância a ser percorrida a partícula, maior deve ser sua velocidade para que o tempo permaneça o mesmo. Mas, mesmo que ν_{ef} seja maior que a velocidade da luz, não há uma violação na causalidade, pois, no modelo que trabalhamos, temos apenas uma diferença entre os momentos de transmissão e recepção da partícula e não o tempo absoluto[1].

3.3 Potenciais Reais

Os potenciais trabalhados nas seções anteriores são potenciais aproximados, que facilitam os cálculos por serem boas aproximações de potenciais encontrados na natureza. Os potenciais reais variam suavemente, tendo derivadas contínuas.

Existe uma função analítica (3.11) que representa algumas dessas barreiras reais e cuja equação de Schrödinger associada possui solução analítica [8].

$$V(x) = -A \frac{\xi}{1 - \xi} - B \frac{\xi}{(1 - \xi)^2} \quad (3.11)$$

onde $\xi = -e^{2\pi x/l}$ e A , B e l são constantes. A representação gráfica deste potencial pode ser vista na figura (3.6) para vários valores de A e B . Podemos ver que a função de aproxima de zero para grandes valores negativos de x e de A para grandes valores positivos. A largura dessa região de transição é $2l$.

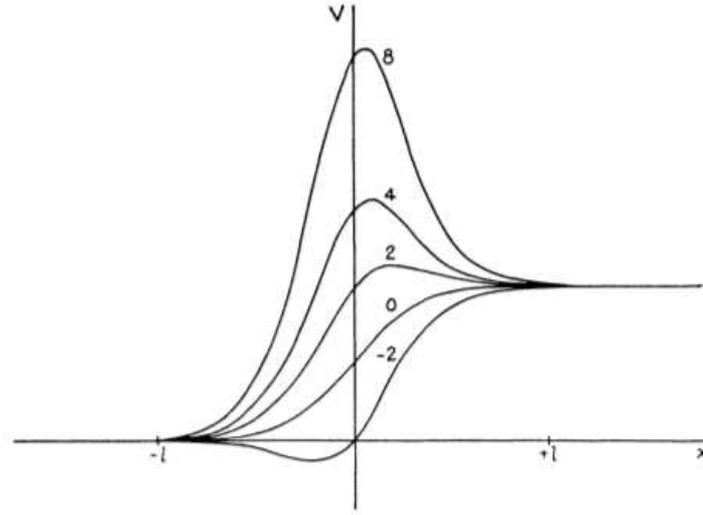


Fig. 3.6: Gráfico da função $V(x)$. Os números nas curvas representam os valores da razão B/A [8].

A equação de onda que representa o movimento de uma partícula movendo-se nesse potencial é:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left[A \frac{\xi}{1-\xi} + B \frac{\xi}{(1-\xi)^2} + E \right] u = 0 \quad (3.12)$$

Diferenciando (3.12) com relação a ξ , ficamos com

$$\xi^2 u'' + \xi u' + \frac{2ml^2}{h^2} \left[A \frac{\xi}{1-\xi} + B \frac{\xi}{(1-\xi)^2} + E \right] u = 0 \quad (3.13)$$

Quando $|B| > |A|$, o potencial tem seu máximo em

$$x_m = \frac{l}{2\pi} \ln \left[-\frac{(B+A)}{(B-A)} \right] \quad (3.14)$$

com valor máximo

$$V_m = V(x_m) = \frac{(A+B)^2}{4B} \quad (3.15)$$

Assumimos que $A > B > 0$. Assim, encontramos soluções para a equação (3.13) da

forma de (3.16). Como (3.13) é do tipo hipergeométrica, a sua solução é uma equação hipergeométrica dada por:

$$u(\xi) = (1 - \xi)^{i\beta} \left(\frac{\xi}{\xi - 1} \right)^{i\alpha} F[a, b, c, y] \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} F[a, b, c, y] &= 1 + \frac{a.b}{1.c}y + \frac{a(a+1).b(b+1)}{1.2.c(c+1)y^2} + \dots \\ a &= \frac{1}{2} + i(\alpha - \beta + \delta) \\ b &= -\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta - \delta) \\ c &= 1 - 2i\beta \\ y &= \frac{1}{1 - \xi} \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{c} \right)^{1/2} \\ \beta &= \frac{l}{\lambda'} = \frac{1}{2} \left(\frac{E - A}{c} \right)^{1/2} \\ (2mc)^{1/2} &= \frac{\hbar}{2l} \\ \delta &= \frac{1}{2} \left(\frac{B - c}{c} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Fazendo-se uma expansão de primeira ordem em y , obtemos:

$$F[a, b, c, y] = a + \frac{a.b}{c}y \quad (3.17)$$

Se $E \geq A$, α e β são reais, mas δ pode ser real ou imaginário puro.

A partir de agora, adotaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} y^+ &= \frac{1}{1 + e^{2\pi}} = \frac{e^{-2\pi}}{1 + e^{-2\pi}} \\ y^- &= \frac{1}{1 + e^{-2\pi}} = \frac{e^{2\pi}}{1 + e^{2\pi}} \\ F^+ &= F[a, b, c, y^+] \\ F^- &= F[a, b, c, y^-] \end{aligned}$$

Assim, as autofunções de $u(\xi)$ podem ser escritas como

$$u^\pm = (1 - \xi^\pm)^{i\beta} \left(\frac{\xi^\pm}{1 - \xi^\pm} \right)^{i\alpha} F[a, b, c, y^\pm] \quad (3.18)$$

Dividindo u^- por u^+ , chegamos em

$$\frac{u^-}{u^+} = e^{2\pi i(\alpha + \beta)} \left[\frac{-4 + 4y^-(\alpha + \beta)^2 + y^- + 8i\beta + 4iy^-\delta - 4y^-\delta^2}{-4 + 4y^+(\alpha + \beta)^2 + y^+ + 8i\beta + 4iy^+\delta - 4y^+\delta^2} \right] \quad (3.19)$$

Como primeiro caso, temos $B < A$. Portanto, δ é um imaginário puro e pode ser escrito como $\delta = i\gamma$ onde γ é real. Com a definição de tempo de tunelamento (2.8), temos que:

$$T = \frac{d}{dE}[-2\pi(\alpha + \beta)] + \frac{1}{1 + \Psi^2} \frac{d\Psi}{dE} \quad (3.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi &= \tan\left(\frac{u^-}{u^+}\right) = \frac{8\beta g(y^+ - y^-)}{16 - 4g + g^2 y^+ y^- + 64\beta^2} \\ g &= 4(\alpha - \beta)^2 + (1 - 2\gamma)^2 \end{aligned}$$

Para o segundo caso, onde $B > A$ e δ é real, temos que:

$$T = \frac{d}{dE}[-2\pi(\alpha + \beta)] + \frac{1}{1 + \Psi^2} \frac{d\Psi}{dE} \quad (3.21)$$

onde

$$\Psi = \tan\left(\frac{u^-}{u^+}\right) = \frac{8\beta g(y^+ - y^-) + 8\delta y^+ y^- - 16\delta}{16 - 4g + g^2 y^+ y^- + 64\beta^2 - 16\delta^2 y^- y^+ - 32\beta\delta(y^+ - y^-)}$$

$$g = 4(\alpha - \beta)^2 + 1 - 4\delta^2$$

Com isso, podemos concluir que em um potencial real não há divergências para os casos onde $E \rightarrow 0$ e $E \rightarrow V$, como há nos potenciais aproximados. Essa diferença é explicada pelo fato de o potencial real variar suavemente, diferentemente dos aproximados. Mas, como podemos ver, potenciais são muito mais difíceis de serem trabalhados, uma vez que as soluções da equação de Schrödinger para tais potenciais são bem mais complicadas matematicamente.

Capítulo 4

Considerações Finais

Apresentamos nesta monografia uma abordagem sobre algumas definições de tempo de tunelamento discutidos na literatura. Procuramos sempre discutir os conceitos envolvidos em cada definição, bem como relacionar a relação de incerteza com o tempo de tunelamento.

Iniciamos nosso estudo no segundo capítulo, onde procuramos entender interpretações para a relação de energia-tempo de Heisenberg (2.4) e como contornar o problema de o tempo não ser um observável, e sim um parâmetro, na Mecânica Quântica. Apresentamos também diferentes maneiras de calcular o tempo de tunelamento de uma partícula através de uma barreira de potencial e uma maneira de como montar um experimento para medir esse tempo. Utilizando os conceitos apresentados e inserindo uma constante de acoplamento ϵ , Steinberg [12] calculou um tempo de tunelamento de uma partícula e avaliou um valor esperado para um operador projeção correspondente ao tempo da partícula dentro da barreira, no limite em que o relógio interage fracamente com a partícula. A expressão resultante é complexa, onde a parte real corresponde ao tempo de tunelamento e a parte imaginária à reação do relógio à partícula. O resultado real encontrado foi a equação (4.1):

$$T_S = 2m \frac{k(p^2 - k^2)a + \frac{k(p^2 + k^2)}{2p} \operatorname{senh}(2pa)}{(p^2 + k^2)^2 \operatorname{cosh}^2(pa) - (p^2 - k^2)^2} \quad (4.1)$$

Iniciamos o terceiro capítulo calculando o tempo de tunelamento da partícula num potencial degrau. Concluimos que não há tunelamento quando o potencial é do tipo degrau, pois a partícula entra e sai do mesmo lado do degrau. O que ocorre, nesse caso, é uma permanência temporária da partícula dentro do potencia, e T é o tempo que ela permanece lá dentro. Seguimos o capítulo fazendo os cálculos para uma barreira de potencial de largura a e altura V , encontrando a equação (3.10).

Comparando as equações (3.10) e (4.1), podemos ver que não há muita diferença entre elas:

$$\frac{T}{T_S} = \frac{1 - \frac{2E}{V} + \frac{1}{2} \frac{V \sinh(2\sqrt{V-E}a)}{Ea\sqrt{V-E}}}{1 - \frac{2E}{V} + \frac{1}{2} \frac{\sinh(2\sqrt{V-E}a)}{a\sqrt{V-E}}} \quad (4.2)$$

O comportamento da equação (4.2) pode ser visto na figura (4.1), onde podemos ver que a medida que E decresce e a cresce, T se torna maior que T_S . No limite em que $T \rightarrow T_S$, tanto T quanto T_S divergem, pois $E \rightarrow V$.

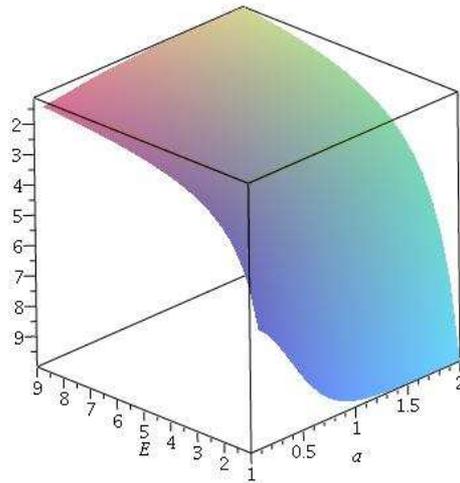


Fig. 4.1: Gráfico representando o comportamento de T/T_S , na vertical, com a variação de E e a , para $T = 10$, em unidades arbitrárias.

Da relação da incerteza (2.4), temos que um ΔE fixo demora um tempo Δt , também fixo, para atravessar a barreira de potencial, independentemente da sua largura. Portanto, quanto mais larga a barreira, maior deve ser a velocidade da partícula para obedecer a relação entre a energia e o tempo. Isso, em alguns casos, pode implicar em velocidades superluminais. Mas, apesar disso, a causalidade não é violada, já que estamos trabalhando com uma diferença entre tempos e não com o tempo absoluto.

Para finalizar, convém ressaltar que embora o fenômeno do tunelamento seja frequentemente usado como exemplo para realçar as peculiaridades da Física Quântica, o tunelamento em si, não é uma exclusividade da escala microscópica. Ondas clássicas são tipicamente refletidas e transmitidas e também tunelam. No entanto, é na Física Quântica que o fato de que, com alguma probabilidade, encontramos um elétron do outro lado da barreira de potencial.

Bibliografia

- [1] P.C.W. Davies, *Am. J. Phys.*, **73**, 23 (2005).
- [2] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, **33**, 879-893 (1925).
- [3] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, Nova Iorque, 1970.
- [4] H. Nikolic, *Found. Phys.*, **37**, 1563-1611 (2007).
- [5] C.A.Bonin, *Tempos de Tunelamento*, tese de mestrado IFT (2007).
- [6] A. Peres, *Am. J. Phys*, **48**, 552 (1980).
- [7] J. Oppenheimer, B. Reznik, W.G. Unruh, *Time as an observable*, arXiv:quant-ph/9807058
- [8] C. Eckart, *Phys. Rev.*, **35**, 1303-1390 (1930).
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mechanique Quantique*, Hermann, Paris, 1977, Volume 1.
- [10] H. Salecker, E.P. Wigner, *Phys. Rev.*, **109**, 571 (1958).
- [11] R. Landauer, Th. Martin, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 217 (1994).
- [12] A.M. Steinberg, *Physics World*, **16**(12), 19 (2003).

- [13] D.H. Kobe, V.C Aguilera-Navarro, *Phys. Rev. A*, **50**, 933 (1994).
- [14] M. Razavy, *Quantum Theory of Tunneling*, World Scientific, New Jersey (2003).
- [15] J.M. Lévi-Leblond, F. Balibar, *Quantique: Rudiments*, Dunod, Paris, 2006.
- [16] C. A. dos Santos, *Se não fosse o relógio atômico...*, <http://cienciahoje.uol.com.br/colunas/do-laboratorio-para-a-fabrica/Se-nao-fosse-o-relogio-atomico>, 12/06/2013.